



Mathématiques et sciences humaines

Mathematics and social sciences

195 | Automne 2011

Varia

Construction efficace du treillis des motifs fermés fréquents et extraction simultanée des bases génériques de règles

Efficient construction of the lattice of frequent closed patterns and simultaneous extraction of generic bases of rules

Tarek Hamrouni, Sadok Ben Yahia et Engelbert Mephu Nguifo



Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/msh/12081>

DOI : 10.4000/msh.12081

ISSN : 1950-6821

Éditeur

Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée

Date de publication : 15 décembre 2011

Pagination : 5-54

ISSN : 0987-6936

Référence électronique

Tarek Hamrouni, Sadok Ben Yahia et Engelbert Mephu Nguifo, « Construction efficace du treillis des motifs fermés fréquents et extraction simultanée des bases génériques de règles », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 195 | Automne 2011, mis en ligne le 09 janvier 2012, consulté le 21 avril 2019. URL : <http://journals.openedition.org/msh/12081> ; DOI : 10.4000/msh.12081

CONSTRUCTION EFFICACE DU TREILLIS DES MOTIFS FERMÉS FRÉQUENTS ET EXTRACTION SIMULTANÉE DES BASES GÉNÉRIQUES DE RÈGLES

Tarek HAMROUNI¹, Sadok BEN YAHIA¹, Engelbert MEPHU NGUIFO^{2,3}

RÉSUMÉ – *Durant ces dernières années, les quantités de données collectées, dans divers domaines d'application de l'informatique, deviennent de plus en plus importantes. Ces quantités suscitent le besoin d'analyse et d'interprétation afin d'en extraire des connaissances utiles. Dans ce travail, nous nous intéressons à la technique d'extraction des règles d'association à partir de larges contextes. Cette dernière est parmi les techniques les plus fréquemment utilisées en fouille de données. Toutefois, le nombre de règles extraites est généralement important avec en outre la présence de règles redondantes. Dans cet article, nous proposons un nouvel algorithme, appelé PRINCE, dont la principale originalité est de construire une structure partiellement ordonnée (nommée treillis d'Iceberg) dans l'objectif d'extraire des ensembles réduits de règles, appelés bases génériques. Ces bases forment un sous-ensemble, sans perte d'information, des règles d'association. Pour réduire le coût de cette construction, le treillis d'Iceberg est calculé grâce aux générateurs minimaux, associés aux motifs fermés fréquents. Ces derniers sont simultanément dérivés avec les bases génériques grâce à un simple parcours ascendant de la structure construite. Les expérimentations que nous avons réalisées sur des contextes de référence et « pire des cas » ont montré l'efficacité de l'algorithme proposé, comparativement à des algorithmes tels que CLOSE, A-CLOSE et TITANIC.*

MOTS CLÉS – Analyse de concepts formels, Générateur minimal, Motif fermé, Règle, Treillis

SUMMARY – Efficient construction of the lattice of frequent closed patterns and simultaneous extraction of generic bases of rules

In the last few years, the amount of collected data, in various computer science applications, has grown considerably. These large volumes of data need to be analyzed in order to extract useful hidden knowledge. This work focuses on association rule extraction. This technique is one of the most popular in data mining. Nevertheless, the number of extracted association rules is often very high, and many of them are redundant. In this paper, we propose a new algorithm, called PRINCE. Its main feature is the construction of a partially ordered structure for extracting subsets of association rules, called generic bases. Without loss of information these subsets form representation of the whole association rule set. To reduce the cost of such a construction, the partially ordered structure is built thanks to the minimal generators associated to frequent closed patterns. The closed ones are simultaneously derived with generic bases thanks to a simple bottom-up traversal of the obtained structure. The experimentations we carried out in benchmark and “worst case” contexts showed the efficiency of the proposed algorithm, compared to algorithms like CLOSE, A-CLOSE and TITANIC.

KEYWORDS – Association rule, Closed pattern, Formal concept analysis, Lattice, Minimal generator

¹ Unité de Recherche en Programmation Algorithmique et Heuristique (URPAH), Département des Sciences de l'Informatique, Faculté des Sciences de Tunis, Université Tunis El Manar, Campus Universitaire, Tunis, tarek.hamrouni@fst.rnu.tn, sadok.benyahia@fst.rnu.tn

² Clermont Université, Université Blaise Pascal, Laboratoire d'Informatique, de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LIMOS), BP 10448, F-63000 Clermont-Ferrand, engelbert.mephu_nguifo@univ-bpclermont.fr

³ Laboratoire d'Informatique, de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LIMOS), CNRS, UMR 6158, 63173 Aubière.

1. INTRODUCTION ET MOTIVATIONS

La technique d'extraction des règles d'association [Agrawal & al., 1993, 1994] est une des techniques exploratoires les plus utilisées pour extraire les connaissances à partir des données collectées dans différentes applications. Elle s'applique lorsque les données se présentent sous forme d'un contexte d'extraction \mathcal{K} représentant un sous-ensemble \mathcal{M} d'un produit cartésien $\mathcal{O} \times \mathcal{I}$, \mathcal{O} et \mathcal{I} étant des ensembles finis. Étant donnés X et Y deux sous-ensembles disjoints de l'ensemble \mathcal{I} , si le contexte \mathcal{K} satisfait la formule :

$$\forall o \in \mathcal{O}, (\forall x \in X, (o, x) \in \mathcal{M}) \Rightarrow (\forall y \in Y, (o, y) \in \mathcal{M})$$

nous disons que le couple (X, Y) est une règle d'association (extraite) du contexte \mathcal{K} . Nous écrivons dans la suite $X \Rightarrow_{\mathcal{K}} Y$ ou plus simplement $X \Rightarrow Y$. Les applications de cette notion sont ainsi multiples. Par exemple, si \mathcal{O} est un ensemble de patients atteints de la même maladie, \mathcal{I} l'ensemble des symptômes de ladite maladie et le contexte \mathcal{K} l'ensemble des couples (p, s) pour lesquels le patient p présente le symptôme s , alors une règle d'association $X \Rightarrow Y$ signifie que, pour la population concernée, l'occurrence des symptômes regroupés dans X s'accompagne toujours de celle des symptômes dans Y . La notion de règle d'association s'étend naturellement à des règles pondérées par un indice de confiance. Les règles d'association exactes ou pondérées se révèlent donc utiles dans une variété de domaines.

Toutefois, le nombre de règles extraites peut être si grand qu'il affaiblit l'intérêt pratique de la technique. Or, beaucoup sont redondantes. De nombreux travaux, s'inspirant de l'analyse des concepts formels [Ganter, Wille, 1999], ont alors montré comment se limiter, sans perte d'information, à des sous-ensembles de règles appelés *base générique*.

Une base générique est sous-ensemble de l'ensemble total des règles d'association tel que toute règle non retenue dans la base peut être déduite à partir de celles retenues par une méthode appropriée. La plupart des bases génériques, qui ont été proposées dans la littérature [Ashrafi & al., 2007 ; Bastide, 2000 ; Ceglar, Roddick, 2006 ; Kryszkiewicz, 2002], véhiculent des règles d'association qui représentent des implications entre des ensembles d'attributs (ou motifs) particuliers à savoir les *générateurs minimaux* [Bastide & al., 2000a] (appelé aussi motifs libres dans [Boulicaut & al., 2003] et motifs clés dans [Stumme & al., 2002]) et les *motifs fermés* [Pasquier & al., 1999b]. En effet, il a été montré que ce type de règles d'association offre le maximum d'informations [Ashrafi & al., 2007 ; Bastide, 2000 ; Kryszkiewicz, 2002 ; Pasquier, 2000]. Néanmoins, pour extraire ces bases de règles, trois composantes primordiales doivent être calculées, à savoir :

- (i) l'ensemble des motifs fermés fréquents, c'est-à-dire ceux présentant une fréquence d'apparition jugée satisfaisante par l'utilisateur,
- (ii) la liste des générateurs minimaux fréquents associés à chaque motif fermé fréquent,
- (iii) la relation d'ordre partiel ordonnant les motifs fermés fréquents.

Une étude critique des algorithmes d'extraction des motifs fermés fréquents de la littérature a été menée dans [Ben Yahia & al., 2006]. Le constat essentiel peut être résumé comme suit :

1. Ces algorithmes se sont concentrés sur l'énumération des motifs fermés fréquents. En effet, leur principal but est de réduire le temps d'extraction de ces motifs moyen-

nant l'utilisation de structures de données évoluées. Leurs performances sont intéressantes sur des contextes qualifiés de denses [Bayardo, 1998]. Cependant, ils présentent de modestes performances sur des contextes épars. En effet, calculer les fermetures des motifs dans pareils contextes réduit leurs performances puisque l'espace de recherche des motifs fermés fréquents tend à se superposer avec celui des motifs fréquents.

2. Les algorithmes d'extraction des motifs fermés fréquents ne tiennent pas compte de l'extraction des bases génériques de règles. En effet, d'une part, seule une partie permet d'extraire les générateurs minimaux et nécessite un surcoût pour les associer à leurs fermés sans redondance⁴. D'autre part, aucun de ces algorithmes ne détermine la relation d'ordre. Ceci est argumenté par le fait qu'ils se sont seulement focalisés sur le calcul efficace des motifs fermés fréquents.

Pour pallier ces limites, nous proposons dans ce papier un nouvel algorithme, appelé PRINCE, dédié à l'extraction des bases génériques de règles d'association. PRINCE effectue une exploration par niveau de l'espace de recherche, c'est-à-dire en partant de l'ensemble vide vers les motifs de taille 1, ensuite ceux de taille 2, et ainsi de suite. Sa principale caractéristique est qu'il détermine la relation d'ordre partiel entre les motifs fermés fréquents afin d'extraire les bases génériques de règles d'association. Son originalité est que le treillis d'Iceberg est obtenu grâce à des comparaisons entre les générateurs minimaux fréquents seulement, et non plus entre les motifs fermés. Ainsi, les bases génériques de règles sont dérivées par un simple balayage de la structure ordonnée obtenue sans avoir à calculer les fermetures. De plus, grâce à une gestion efficace des classes d'équivalence, PRINCE optimise la construction de la relation d'ordre et évite aussi la redondance dans la dérivation des motifs fermés et des règles d'association. Par ailleurs, en adoptant une optimisation issue des caractéristiques des générateurs minimaux, la relation d'ordre peut être facilement déduite. Les résultats des expérimentations, menées sur des contextes de référence et « pire des cas », sont très encourageants. En effet, les performances de PRINCE, comparées aux algorithmes de référence d'exploration par niveau, *e.g.* CLOSE, A-CLOSE et TITANIC, sont largement supérieures.

Nous n'avons pas comparé les performances de PRINCE à celles d'algorithmes plus récents, *e.g.* DCI-CLOSE [Lucchese & *al.*, 2006] et LCM [Uno & *al.*, 2004], considérés dans l'étude menée dans [Ben Yahia & *al.*, 2006]. Ceci est argumenté par le fait que les algorithmes CLOSE, A-CLOSE et TITANIC déterminent, en outre des fermés, l'information clé fournie par l'ensemble des générateurs minimaux, ce qui n'est pas le cas pour le reste des algorithmes.

La suite de l'article est organisée comme suit. La Section suivante rappelle brièvement les fondements mathématiques de l'analyse de concepts formels ainsi que son lien avec la dérivation des règles d'association génériques. La Section 3. discute les travaux liés à notre problématique. La quatrième Section est dédiée à une présentation détaillée de l'algorithme PRINCE. La Section 5. détaille différentes propriétés de l'algorithme proposé. Les résultats des expérimentations montrant l'utilité de l'approche proposée sont présentés dans la sixième Section.

⁴ Un motif fermé peut être extrait plusieurs fois puisqu'il peut avoir plusieurs générateurs minimaux associés.

2. FONDEMENTS MATHÉMATIQUES

Dans ce qui suit, nous présentons brièvement quelques résultats clés provenant de l'analyse de concepts formels et leur lien avec le contexte de dérivation des règles d'association génériques.

2.1. NOTIONS DE BASE

Dans la suite du papier, nous utilisons le cadre théorique de l'analyse de concepts formels présenté dans [Ganter, Wille, 1999]. Dans cette partie, nous rappelons d'une manière succincte les notions de base de ce cadre théorique.

Contexte d'extraction : un contexte d'extraction est un triplet $\mathcal{K} = (\mathcal{O}, \mathcal{I}, \mathcal{M})$ décrivant un ensemble fini \mathcal{O} d'objets (ou transactions), un ensemble fini \mathcal{I} d'items (ou attributs) et une relation (d'incidence) binaire \mathcal{M} (c'est-à-dire $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{O} \times \mathcal{I}$). L'appartenance du couple (o, i) à \mathcal{M} désigne le fait que l'objet $o \in \mathcal{O}$ contient l'item $i \in \mathcal{I}$.

Correspondance de Galois : soit le contexte d'extraction $\mathcal{K} = (\mathcal{O}, \mathcal{I}, \mathcal{M})$. Soit l'application Φ de l'ensemble des parties de \mathcal{O} (c'est-à-dire l'ensemble de tous les sous-ensembles de \mathcal{O}), noté par $\mathcal{P}(\mathcal{O})$, dans l'ensemble des parties de \mathcal{I} , noté par $\mathcal{P}(\mathcal{I})$. L'application Φ associe à un ensemble d'objets $O \subseteq \mathcal{O}$, l'ensemble des items $i \in \mathcal{I}$ communs à tous les objets $o \in O$.

$$\Phi : \mathcal{P}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$$

$$\Phi(O) = \{i \in \mathcal{I} \mid \forall o \in O, (o, i) \in \mathcal{M}\}$$

Soit l'application Ψ de l'ensemble des parties de \mathcal{I} dans l'ensemble des parties de \mathcal{O} . Elle associe à un ensemble d'items $I \subseteq \mathcal{I}$, l'ensemble d'objets $o \in \mathcal{O}$ communs à tous les items $i \in I$:

$$\Psi : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{O})$$

$$\Psi(I) = \{o \in \mathcal{O} \mid \forall i \in I, (o, i) \in \mathcal{M}\}$$

Le couple d'applications (Φ, Ψ) définit une correspondance de Galois entre l'ensemble des parties de \mathcal{O} et l'ensemble des parties de \mathcal{I} . Les applications $\gamma = \Phi \circ \Psi$ et $\omega = \Psi \circ \Phi$ sont appelées les opérateurs de fermeture de la correspondance de Galois [Ganter, Wille, 1999]. L'opérateur de fermeture γ , tout comme ω , est caractérisé par le fait qu'il est :

- Isotone : $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow \gamma(I_1) \subseteq \gamma(I_2)$;
- Extensive : $I \subseteq \gamma(I)$;
- Idempotent : $\gamma(\gamma(I)) = \gamma(I)$.

Nous allons maintenant introduire la notion de motif fréquent et celle de motif fermé.

Motif fréquent : un motif $I \subseteq \mathcal{I}$ est dit *fréquent* si son support relatif, $Supp(I) = \frac{|\Psi(I)|}{|\mathcal{O}|}$, dépasse un seuil minimum fixé par l'utilisateur noté *minsupp*. Notons que $|\Psi(I)|$ est appelé *support absolu* de I .

Il est à noter que le support des motifs est anti-monotone par rapport à l'inclusion ensembliste, c'est-à-dire que si $I_1 \subseteq I_2$, alors $Supp(I_1) \geq Supp(I_2)$. Dans la suite et pour simplifier l'explication, $Supp(I)$ désignera le support *absolu* du motif I .

Motif fermé [Pasquier & al., 1999(b)] : un motif $I \subseteq \mathcal{I}$ est dit *fermé* si $I = \gamma(I)$. Le motif I est un ensemble maximal d'items communs à un ensemble d'objets.

Concept formel : un concept formel est une paire $c = (O, I) \in \mathcal{O} \times \mathcal{I}$, où O et I sont reliés par les opérateurs de la correspondance de Galois, c'est-à-dire $\Phi(O) = I$ et $\Psi(I) = O$. Les ensembles O et I sont appelés respectivement *extension* et *intension* de c .

Un motif fermé est l'intension d'un concept formel alors que son support est la cardinalité de l'extension du concept.

Classe d'équivalence [Bastide & al., 2000b] : l'opérateur de fermeture γ induit une relation d'équivalence sur l'ensemble des parties de \mathcal{I} , c'est-à-dire l'ensemble de parties est subdivisé en des sous-ensembles disjoints, appelés aussi *classes d'équivalence*. Dans chaque classe, tous les éléments possèdent la même fermeture : soit $I \subseteq \mathcal{I}$, la classe d'équivalence de I , dénotée $[I]$, est : $[I] = \{I_1 \subseteq \mathcal{I} \mid \gamma(I) = \gamma(I_1)\}$. Les éléments de $[I]$ ont ainsi la même valeur de support.

Deux classes d'équivalence sont dites *comparables* si leurs motifs fermés associés peuvent être ordonnés par inclusion ensembliste, sinon elles sont dites *incomparables*.

La définition d'une classe d'équivalence nous amène à celle d'un générateur minimal.

Générateur minimal [Bastide & al., 2000b ; Stumme & al., 2002] : soit f un motif fermé et $[f]$ sa classe d'équivalence. L'ensemble GM_f des générateurs *minimaux* de f est défini comme suit : $GM_f = \{g \in [f] \mid \nexists g_1 \subset g \text{ tel que } g_1 \in [f]\}$.

Les générateurs minimaux d'une classe sont les éléments incomparables les plus petits (par rapport à la relation d'inclusion ensembliste), tandis que le motif fermé est l'élément le plus grand de cette classe. Ainsi, tout motif est nécessairement compris entre un générateur minimal et un motif fermé. D'après la définition d'une classe d'équivalence, un générateur minimal a un support strictement inférieur à celui de ses sous-ensembles. D'une manière duale, un motif fermé admet un support strictement supérieur que celui de ses sur-ensembles.

Nous allons maintenant nous focaliser sur des propriétés structurelles importantes associées à l'ensemble des motifs fermés et à l'ensemble des générateurs minimaux.

Treillis de concepts formels (de Galois) : étant donné un contexte d'extraction \mathcal{K} , l'ensemble de concepts formels $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$, extrait à partir de \mathcal{K} , est un treillis complet $\mathcal{L}_{\mathcal{C}_{\mathcal{K}}} = (\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \leq)$, appelé *treillis de concepts (ou treillis de Galois)*, quand l'ensemble $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ est considéré avec la relation d'inclusion ensembliste entre les motifs [Barbut, Monjardet, 1970 ; Ganter, Wille, 1999] : soient $c_1 = (O_1, I_1)$ et $c_2 = (O_2, I_2)$ deux concepts formels, $c_1 \leq c_2$ si $I_1 \subseteq I_2$.

Dans le treillis de Galois, chaque élément $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ est connecté aussi bien à l'ensemble de ses *successeurs immédiats*, appelé *couverture supérieure* ($Couv^s$), qu'à l'ensemble de ses *prédécesseurs immédiats*, appelé *couverture inférieure* ($Couv_i$).

Treillis d'Iceberg quand nous considérons seulement l'ensemble $\mathcal{IFF}_{\mathcal{K}}$ des motifs fermés fréquents extrait à partir de \mathcal{K} et ordonnés par la relation d'inclusion ensembliste, la structure obtenue $(\hat{\mathcal{L}}, \subseteq)$ préserve seulement l'opérateur *Sup* [Ganter, Wille, 1999]. Cette structure forme un sup demi-treillis [Mephu Nguifo, 1994] que, par abus volontaire [Stumme & al., 2002] appelle tout de même treillis, le *treillis d'Iceberg*.

EXEMPLE 1. Considérons le contexte d'extraction \mathcal{K} donné par la Figure 1 (gauche). Quelques exemples de classes d'équivalence extraites de ce contexte sont donnés par la Figure 1 (centre). Le treillis d'Iceberg, pour $minsupp = 2$, est donné par la Figure 1 (droite). Chaque nœud dans le treillis d'Iceberg est formé par le motif fermé fréquent et le support correspondant, et est étiqueté par la liste de ses générateurs minimaux associés.

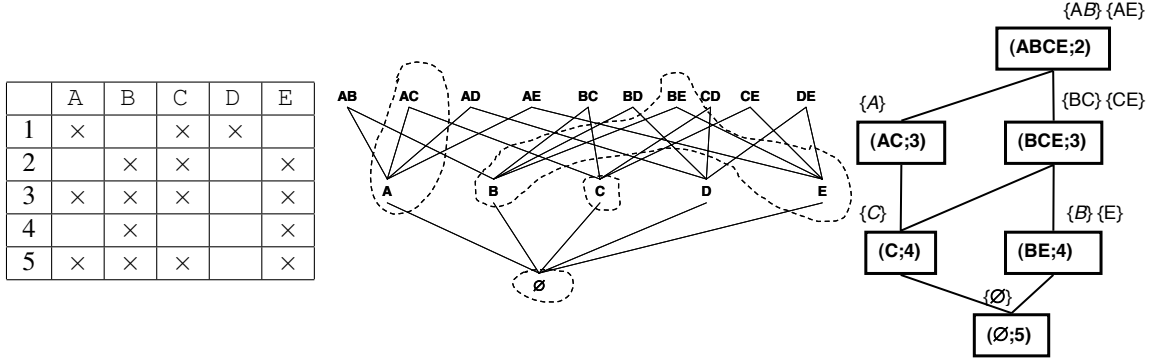


FIGURE 1. GAUCHE : Contexte d'extraction \mathcal{K} . CENTRE : Échantillon des classes de la relation d'équivalence induite. DROITE : Le treillis d'Iceberg associé pour $minsupp = 2$. Chaque nœud dans ce treillis représente une classe d'équivalence. Il contient un motif fermé fréquent ainsi que son support et est étiqueté par les générateurs minimaux associés.

Dans ce qui suit, nous introduisons la notion d'idéal d'ordre [Ganter, Wille, 1999] définie sur l'ensemble des parties d'un ensemble \mathcal{E} , c'est-à-dire $\mathcal{P}(\mathcal{E})$.

DÉFINITION 1. *Un sous-ensemble \mathcal{S} de $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ est un idéal d'ordre s'il vérifie les propriétés suivantes :*

- Si $x \in \mathcal{S}$, alors $\forall x_1 \subseteq x : x_1 \in \mathcal{S}$.
- Si $x \notin \mathcal{S}$, alors $\forall x \subseteq x_1 : x_1 \notin \mathcal{S}$.

Le lemme suivant énonce, dans le cas général, une propriété intéressante de l'ensemble des générateurs minimaux (ou clés) associés à un opérateur de fermeture.

LEMME 1. *L'ensemble des générateurs minimaux d'un opérateur de fermeture θ est un idéal de l'ordre d'inclusion ensembliste.*

DÉMONSTRATION 1. Soit θ un opérateur de fermeture sur un ensemble \mathcal{E} . Soit Y un sous-ensemble générateur minimal de \mathcal{E} , c'est-à-dire pour tout $Y' \subset Y$, alors $\theta(Y') \subset \theta(Y)$. L'objectif est de montrer que tout sous-ensemble propre de Y est un sous-ensemble propre de Y . Cette propriété est trivialement vraie si Y est vide ou bien si Y est un singleton. On suppose donc que Y contient au moins une paire. Soit X un sous-ensemble propre de Y . On montre par l'absurde que X est un sous-ensemble générateur minimal. On suppose le contraire. Il existe alors un sous-ensemble propre Z de X tel que $\theta(X) = \theta(Z)$. On pose $\Delta = X \setminus Z$. Par hypothèse, Δ n'est pas vide et $X = Z \cup \Delta$. Puisque $X \subseteq \theta(X)$, on a $\Delta \subseteq \theta(X)$, donc $\Delta \subseteq \theta(Z)$ (1).

On s'appuie dans la suite de la preuve sur la propriété suivante des opérateurs de fermeture : une application extensive θ de $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ est un opérateur de fermeture ssi :

(2) pour tous sous-ensembles X, Y de \mathcal{E} , $\theta(X \cup Y) = \theta(\theta(X) \cup Y)$.

Il résulte par une double application, de la propriété (2), appelée *propriété des chemins indépendants*, que si θ est un opérateur de fermeture, alors :

(3) $\theta(X \cup Y) = \theta(\theta(X) \cup \theta(Y))$.

On a :

$$\begin{aligned}
\theta(Y) &= \theta((Y \setminus X) \cup X) \\
&= \theta(\theta(Y \setminus X) \cup \theta(X)) \quad (\text{propriété (3)}) \\
&= \theta(\theta(Y \setminus X) \cup \theta(Z \cup \Delta)) \\
&= \theta(\theta(Y \setminus X) \cup \theta(\theta(Z) \cup \Delta)) \quad (\text{propriété (2)}) \\
&= \theta(\theta(Y \setminus X) \cup \theta(\theta(Z))) \quad (\text{propriété (1) ci-dessus, } \Delta \subseteq \theta(Z)) \\
&= \theta(\theta(Y \setminus X) \cup \theta(Z)) \quad (\text{idempotence de } \theta) \\
&= \theta(\theta(Y \setminus X) \cup Z) \quad (\text{propriété (3)}) \\
&= \theta(Y \setminus \Delta) \quad (\text{car } Z \text{ est inclus dans } Y)
\end{aligned}$$

qui contredit que Y est un sous-ensemble générateur minimal de θ . \diamond

Il découle du Lemme 1 la proposition suivante :

PROPOSITION 1. *L'ensemble des générateurs minimaux fréquents d'un contexte, associés à l'opérateur de fermeture de Galois γ , est un idéal d'ordre pour l'inclusion ensembliste, autrement dit, tout sous-ensemble d'un générateur minimal fréquent est un générateur minimal fréquent.*

La Proposition 1 permet de rejeter tout motif, dont un des sous-ensembles n'est pas un générateur minimal fréquent. Un motif est dit *candidat* si tous ses sous-ensembles sont des générateurs minimaux fréquents.

Dans la conception de l'algorithme PRINCE, nous visons à construire le treillis d'Iceberg sans avoir à accéder au contexte d'extraction. Ceci nécessite d'extraire dans une étape préalable une *représentation concise exacte des motifs fréquents* basée sur les générateurs minimaux. Cette représentation aura pour but de déterminer si un motif quelconque est fréquent ou non et de déterminer son support s'il est fréquent. Étant donné que l'ensemble des générateurs minimaux fréquents, dénoté \mathcal{GMF}_K , ne constitue pas par lui-même une représentation exacte des motifs fréquents, il doit être augmenté par une bordure. Dans cet article, nous l'augmentons par la *bordure négative non fréquente*. Nous appelons bordure négative non fréquente, notée \mathcal{GBd}^- , l'ensemble des plus petits (au sens de l'inclusion) motifs qui ne sont pas fréquents et dont tous les sous-ensembles sont des générateurs minimaux fréquents. Le lemme suivant indique que les éléments de \mathcal{GBd}^- sont des générateurs minimaux.

LEMME 2. *Les éléments de la bordure négative non fréquente \mathcal{GBd}^- sont des générateurs minimaux.*

DÉMONSTRATION 2. Soit $X \in \mathcal{GBd}^-$. Par définition, X est non fréquent alors que tous ses sous-ensembles sont fréquents. Ainsi, le support de X est strictement inférieur à celui de ses sous-ensembles stricts. D'où, X est un générateur minimal. \diamond

L'utilisation de la bordure \mathcal{GBd}^- s'explique donc par le fait que son union avec l'ensemble des générateurs minimaux fréquents \mathcal{GMF}_K forme une représentation concise

exacte de l'ensemble des motifs fréquents [Calders & al., 2005]. Ainsi, en utilisant l'ensemble résultat de cette union, nous pouvons déterminer le support de tout motif sans effectuer un accès au contexte d'extraction. Le support d'un motif quelconque sera dérivé s'il est fréquent, sinon il sera détecté comme étant non fréquent. Ceci est explicité à travers la proposition suivante :

PROPOSITION 2. *Soit X un motif. Si $\exists Z \in \mathcal{GBd}^-$ et $Z \subseteq X$ alors X est non fréquent. Sinon, X est fréquent et $Supp(X) = \min\{Supp(g) | g \in \mathcal{GMF}_{\mathcal{K}} \text{ et } g \subseteq X\}$.*

Les notions de *bloqueur minimal* et de *face* nous seront aussi utiles dans la suite :

– *Bloqueur minimal* : Soit $G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ une famille d'ensembles tel que $\forall i = 1 \dots n, G_i \neq \emptyset$. Un *bloqueur* B de la famille G est un ensemble dont l'intersection avec tout ensemble $G_i \in G$ est non vide. Le bloqueur B est dit *minimal* s'il n'existe aucun bloqueur B_1 de G inclus dans B [Pfaltz, Taylor, 2002].

Il est à noter que l'union des G_i est un bloqueur.

EXEMPLE 2. Considérons le contexte d'extraction \mathcal{K} donné par la Figure 1 (Gauche). Soit la famille d'ensemble $G = \{\{B, C\}, \{C, E\}\}$, composée par les générateurs minimaux du motif fermé BCE (cf. Figure 1 (Droite)). Ainsi, $G_1 = \{B, C\}$ et $G_2 = \{C, E\}$. L'union de G_1 et de G_2 , égale à $\{B, C, E\}$, est un bloqueur de G . Il en est de même pour $\{B, C\}$. Par ailleurs, les ensembles $\{C\}$ et $\{B, E\}$ sont des bloqueurs *minimaux* de la famille G .

– *Face* : Soient $f, f_1 \in \mathcal{IFF}_{\mathcal{K}}$. Si f couvre f_1 dans le treillis d'Iceberg ($\hat{\mathcal{L}}, \subseteq$) (c'est-à-dire $f \in Couv^s(f_1)$), alors la *face* de f par rapport à f_1 , notée *face* ($f|f_1$), est égale à : $face(f|f_1) = f \setminus f_1$ [Pfaltz, Taylor, 2002].

EXEMPLE 3. Considérons la Figure 1. Soient les deux motifs fermés $f = ABCE$ et $f_1 = BCE$. Le fermé f couvre le fermé f_1 dans le treillis d'Iceberg (cf. Figure 1 (Droite)). La face de f par rapport à f_1 est égale à $f \setminus f_1 = A$.

Dans ce qui suit, nous présentons le cadre général pour la dérivation des règles d'association, puis nous établissons son lien avec la théorie des concepts formels.

2.2. DÉRIVATION DES RÈGLES D'ASSOCIATION

Une règle d'association R est une relation entre motifs de la forme $R : X \Rightarrow (Y \setminus X)$, dans laquelle X et Y sont des motifs fréquents, tels que $X \subset Y$. Les motifs X et $(Y \setminus X)$ sont appelés, respectivement, *prémisse* et *conclusion* de la règle. La mesure de support de R , dénotée $Supp(R)$, est égale à $Supp(Y)$. Une règle d'association R est dite *valide* [Agrawal & al., 1993] si sa mesure de confiance $Conf(R) = \frac{Supp(Y)}{Supp(X)}$ est supérieure ou égale à un seuil minimal *minconf* de confiance. Une règle d'association R est dite *exacte* si $Conf(R) = 1$ sinon elle est dite *approximative* [Pasquier, 2000].

Le problème de l'extraction des règles d'association est résolu par un algorithme fondamental, à savoir APRIORI [Agrawal, Srikant, 1994]. Cependant, cette approche d'extraction des règles, fondée sur les motifs fréquents, présente deux problèmes majeurs :

1. le coût de l'extraction des motifs fréquents notamment pour des contextes denses ;
2. en général, le nombre de règles d'association générées peut être excessivement grand, dont une grande partie est redondante [Ashrafi & al., 2007].

Ainsi, une nouvelle approche fondée sur l'extraction des motifs fermés fréquents [Pasquier, 1999], a vu le jour et a pour ambition de :

1. réduire le coût de l'extraction des motifs fréquents en se basant sur le fait que l'ensemble des motifs fermés fréquents est un ensemble *générateur* de l'ensemble des motifs fréquents [Pasquier, 1999] ;
2. permettre, sans perte d'information, la sélection d'un sous-ensemble de toutes les règles d'association, appelé *base générique*, à partir duquel le reste des règles pourra être dérivé. Ceci donne la possibilité de présenter le minimum possible de règles à l'utilisateur afin de lui permettre de mieux les visualiser et les exploiter.

Depuis, plusieurs bases génériques ont été introduites, dont celles de Bastide & al. [2000a] et qui sont définies dans ce qui suit.

1. La *base générique de règles d'association exactes* est définie comme suit :

DÉFINITION 2. Soit $\mathcal{IFF}_{\mathcal{K}}$ l'ensemble des motifs fermés fréquents extrait d'un contexte d'extraction \mathcal{K} . Pour chaque motif fermé fréquent $f \in \mathcal{IFF}_{\mathcal{K}}$, nous désignons par GMF_f l'ensemble de ses générateurs minimaux. La base générique de règles d'association exactes \mathcal{BG} est donnée par : $\mathcal{BG} = \{R : g \Rightarrow (f \setminus g) \mid f \in \mathcal{IFF}_{\mathcal{K}} \text{ et } g \in GMF_f \text{ et } g \neq f\}$ ⁵.

REMARQUE 1. Tous les éléments de GMF_f sont fréquents. Par ailleurs, une règle exacte est toujours valide puisque sa confiance, égale à 1, est toujours supérieure ou égale à $minconf$.

2. La base générique de règles d'association approximatives appelée *base informative de règles d'association approximatives* est définie comme suit :

DÉFINITION 3. Soit $\mathcal{GMF}_{\mathcal{K}}$ l'ensemble des générateurs minimaux fréquents extrait d'un contexte d'extraction \mathcal{K} . La base informative de règles d'association approximatives \mathcal{IB} est donnée par : $\mathcal{IB} = \{R : g \stackrel{c}{\Rightarrow} (f \setminus g) \mid f \in \mathcal{IFF}_{\mathcal{K}} \text{ et } g \in \mathcal{GMF}_{\mathcal{K}} \text{ et } \gamma(g) \subset f \text{ et } c = Conf(R) \geq minconf\}$.

Afin de réduire encore plus le nombre de règles approximatives, Bastide *et al.* proposent une réduction transitive de la base informative [Bastide, 2000 ; Bastide & al., 2000a] qui est elle-même une base pour toutes les règles approximatives. La réduction transitive est définie comme suit :

DÉFINITION 4. La réduction transitive \mathcal{RI} est donnée par : $\mathcal{RI} = \{R : g \stackrel{c}{\Rightarrow} (f \setminus g) \mid f \in \mathcal{IFF}_{\mathcal{K}} \text{ et } g \in \mathcal{GMF}_{\mathcal{K}} \text{ et } \gamma(g) \in Couv_i(f) \text{ et } c = Conf(R) \geq minconf\}$.

Dans la suite, nous allons considérer les règles d'association génériques formées par l'union de la base générique de règles exactes \mathcal{BG} et la réduction transitive de la base informative \mathcal{RI} . Ces règles seront désignées par *règles d'association informatives*.

EXEMPLE 4. Considérons le treillis d'Iceberg donné par la Figure 1 (Droite). À partir de la classe d'équivalence dont le motif fermé fréquent est ABCE, deux règles exactes sont obtenues : $AB \Rightarrow CE$ et $AE \Rightarrow BC$. D'autre part, la règle approximative $C \stackrel{0,75}{\Rightarrow} A$ est générée à partir des deux classes d'équivalence dont les sommets respectifs sont les motifs fermés C et AC.

⁵ La condition $g \neq f$ permet de ne pas retenir les règles de la forme $g \Rightarrow \emptyset$.

Il faut noter que les bases considérées présentent plusieurs avantages à savoir le fait qu'elles sont formées d'implications à prémisse minimale et à conclusion maximale, ce qui donne les règles les plus informatives pour l'utilisateur [Bastide & al., 2000a; Kryszkiewicz, 2002; Pasquier, 2000]. En plus, elles satisfont les conditions suivantes [Kryszkiewicz, 2002] :

1. *Dérivabilité* : Le système axiomatique proposé dans [Ben Yahia, Mephu Nguifo, 2004] afin de dériver toutes les règles valides (redondantes) à partir de ces bases est *correct* (c'est-à-dire, le système ne permet de dériver que les règles d'association valides) et *complet* (c'est-à-dire, l'ensemble de *toutes* les règles valides est dérivé).
2. *Informativité* : Ces bases génériques des règles d'association permettent de déterminer avec exactitude le support et la confiance des règles dérivées.

Par ailleurs, la réduction transitive regroupe les règles approximatives minimales ayant des valeurs de confiance élevées et sauf rares exceptions, les règles les plus intéressantes sont celles de support et confiance élevés [Bastide, 2000]. En outre, un nombre important de travaux de la littérature témoigne de son utilité dans des cas pratiques.

3. EXTRACTION DES MOTIFS FERMÉS FRÉQUENTS

Il est bien connu que l'étape la plus complexe et la plus consommatrice en temps d'exécution est celle du calcul des motifs fréquents. Cette étape peut aussi extraire un nombre important de motifs fréquents, desquels un nombre prohibitif de règles d'association sera dérivé, ce qui rend leur usage très difficile. Les algorithmes basés sur l'extraction des motifs fermés fréquents sont alors une nouvelle alternative avec la promesse claire de réduire considérablement la taille de l'ensemble des règles d'association. Ainsi, seules les règles d'association informatives devaient être maintenues étant donné qu'elles permettent une réduction de l'ensemble de toutes les règles valides, tout en convoyant le maximum d'information. Une étude critique de la littérature dédiée nous a permis de dégager que :

1. Beaucoup d'algorithmes orientés fouille de données [Lucchese & al., 2006; Pasquier & al., 1999b; Pei & al., 2000; Stumme & al., 2002; Uno & al., 2004; Zaki, Hsiao, 2002] permettent l'extraction des motifs fermés fréquents. Cependant, seuls certains [Pasquier & al., 1999a, 1999b; Stumme & al., 2002] se basent sur la notion de générateur minimal⁶. Toutefois, ces algorithmes ne construisent pas la relation d'ordre partiel. Ils nécessitent alors l'exécution en aval d'un autre algorithme tel que celui proposé par [Valtchev & al., 2000].

Les algorithmes (*e.g.* [Bastide, 2000; Pasquier, 2000; Pasquier & al., 1999b]) permettant d'extraire les règles formant le couple $(\mathcal{BG}, \mathcal{RT})$ supposent l'existence des motifs fermés fréquents ainsi que leurs générateurs minimaux respectifs. Ceci nécessite un *autre* algorithme tel que CLOSE [Pasquier, & al., 1999b], A-CLOSE [Pasquier & al., 1999a], GC-GROWTH [Li & al., 2005] ou une modification de PASCAL [Szathmary & al., 2007], etc. Un tel algorithme doit alors associer pour chaque motif fermé fréquent ses générateurs minimaux étant donné qu'il peut être calculé plusieurs fois. La génération de la base générique des règles exactes \mathcal{BG} se fait d'une manière directe. Cependant pour les règles approximatives formant \mathcal{RT} ,

⁶ En réalité, ces algorithmes utilisent les générateurs minimaux comme étape intermédiaire pour extraire les motifs fermés.

des tests d'inclusion coûteux, mettant en jeu les motifs fermés fréquents, sont aussi réalisés pour déterminer les successeurs *immédiats* de chaque motif fermé fréquent.

2. Les algorithmes orientés concepts formels permettent de générer l'ensemble des concepts formels ainsi que la relation d'ordre [Kuznetsov, Obiedkov, 2002]. Toutefois, ils ne génèrent pas l'ensemble des générateurs minimaux associés. Ils nécessitent alors l'application d'un autre algorithme, tel que JEN [Le Floc'h & al., 2003] permettant de déterminer les générateurs minimaux étant donné que la relation d'ordre est déjà construite. Par ailleurs, leur performance reste limitée dans le cas des contextes réels [Stumme & al., 2002] (cf. aussi [Kuznetsov, Obiedkov, 2002] où les algorithmes n'ont pu être testés que sur de petits contextes aléatoirement produits). De plus, leur consommation en espace mémoire est élevée vu que les intensions des concepts sont maintenues. Notons que l'algorithme proposé dans [Zaki, Hsiao, 2005] permet d'extraire l'ensemble des motifs fermés fréquents munis de la relation d'ordre partiel. Ainsi, l'algorithme JEN est aussi applicable dans ce cas pour dériver les générateurs minimaux.

Les principaux algorithmes permettant l'extraction des motifs fermés fréquents et leurs générateurs minimaux associés sont CLOSE [Pasquier & al., 1999b], A-CLOSE [Pasquier & al., 1999a] et TITANIC [Stumme & al., 2002]. Ces algorithmes, reposant sur la technique *Générer-et-tester*, explorent l'espace de recherche par niveau, c'est-à-dire en partant de l'ensemble vide vers les motifs de taille 1, ensuite ceux de taille 2, et ainsi de suite. En plus de l'élagage basé sur la mesure statistique *minsupp*, ces algorithmes mettent en oeuvre un élagage efficace, basé sur la propriété d'idéal d'ordre de l'ensemble des générateurs minimaux fréquents.

Dans la suite, nous allons passer en revue les principaux algorithmes permettant l'extraction des motifs fermés fréquents ainsi que leurs générateurs minimaux associés. Une étude des algorithmes dédiés seulement à l'énumération des motifs fermés fréquents se trouve dans [Ben Yahia & al., 2006].

3.1. ALGORITHME CLOSE

L'algorithme CLOSE est proposé par Pasquier & al. [1999b]. À chaque itération, CLOSE génère un ensemble de candidats en joignant les générateurs minimaux retenus durant l'itération précédente. CLOSE calcule alors leurs supports et leurs fermetures dans une même étape par le biais d'un accès au contexte d'extraction. La fermeture d'un candidat générateur minimal g est calculée en exécutant des intersections de l'ensemble des objets auxquelles appartient g . Afin de réduire l'espace de recherche, c'est-à-dire le nombre de candidats à tester, CLOSE utilise des stratégies d'élagage. Ces dernières sont basées sur une mesure statistique à savoir *minsupp* et sur l'idéal d'ordre des générateurs minimaux ainsi que sur le fait qu'un candidat générateur minimal g de taille k ne doit pas être couvert par la fermeture d'un de ses sous-ensembles de taille $(k - 1)$.

3.2. ALGORITHME A-CLOSE

L'algorithme A-CLOSE est aussi proposé par Pasquier & al. [1999(a)]. Il opère en deux étapes successives. D'abord, il détermine tous les générateurs minimaux fréquents des différentes classes d'équivalence à l'aide des accès itératifs au contexte d'extraction. Ensuite, il calcule leurs fermetures de la même façon que dans CLOSE. A-CLOSE utilise

trois stratégies d'élagages à savoir *minsupp*, l'idéal d'ordre des générateurs minimaux et le fait qu'un candidat générateur minimal g de taille k ne doit pas avoir le même support qu'un de ses sous-ensembles de taille $(k - 1)$. Afin de vérifier cette dernière condition, A-CLOSE effectue un balayage des générateurs minimaux retenus de taille $(k - 1)$. Pour alléger le calcul des fermetures, l'algorithme A-CLOSE mémorise le numéro de la première itération durant laquelle un des candidats s'avère fréquent mais non générateur minimal (c'est-à-dire ayant un support égal à celui d'un de ses sous-ensembles). Le numéro de cette itération correspond à la taille k de ce candidat. Il n'est alors pas nécessaire de calculer la fermeture des générateurs minimaux fréquents de tailles inférieures à $(k - 1)$, puisqu'ils sont tous égaux à leurs fermetures.

3.3. ALGORITHME TITANIC

L'algorithme TITANIC est proposé par Stumme & al. [2002]. TITANIC détermine dans chaque itération les générateurs minimaux fréquents associés, moyennant un accès au contexte d'extraction. Il utilise pour cela les mêmes stratégies d'élagage que A-CLOSE. Cependant, TITANIC évite le balayage coûteux effectué par A-CLOSE pour vérifier la dernière stratégie d'élagage. Pour cela, TITANIC utilise pour chaque candidat g de taille k une variable où il stocke son support estimé, c'est-à-dire le minimum du support de ses sous-ensembles de taille $(k - 1)$, et qui doit être différent de son support réel, sinon g n'est pas minimal. Ceci est basé sur le lemme suivant :

LEMME 3. Soient $X, Y \subseteq \mathcal{I}$. Si $X \subseteq Y$ et $Supp(X) = Supp(Y)$, alors $\gamma(X) = \gamma(Y)$.

TITANIC évite aussi l'accès au contexte d'extraction pour calculer les fermetures des générateurs minimaux fréquents. Ceci est réalisé moyennant un mécanisme de comptage par inférence (utilisé aussi dans l'algorithme PASCAL [Bastide & al., 2000(b)], dédié à l'extraction des motifs fréquents). Le mécanisme employé est fondé sur le fait qu'on peut déterminer le support de tout motif *fréquent* en utilisant la Proposition 2. TITANIC cherche alors à étendre tout générateur minimal fréquent par les items adéquats appartenant à sa fermeture.

Les algorithmes décrits dans cette section présentent un inconvénient majeur à savoir le calcul redondant des fermetures. En effet, un motif fermé fréquent peut admettre plusieurs générateurs minimaux et sera donc calculé plusieurs fois, spécialement dans le cas de contextes denses. Par ailleurs, dans le cas des contextes épars, le calcul des fermetures est généralement inutile car les générateurs s'avèrent aussi fermés. Il est aussi important de noter que contrairement aux affirmations des auteurs dans [Stumme & al., 2002], TITANIC ne construit pas le treillis d'Iceberg. En effet, il ne génère aucun lien de précedence entre motifs fermés fréquents et se limite simplement à leur extraction ainsi que celle des générateurs minimaux fréquents, tout comme CLOSE et A-CLOSE. Toutefois, ces algorithmes sont aptes à dériver les règles d'association informatives moyennant l'utilisation de la procédure de génération de ces règles, décrite dans [Pasquier, 2000] et qui prend comme entrée l'ensemble des motifs fermés fréquents associés à leurs générateurs minimaux.

4. DESCRIPTION DE L'ALGORITHME PRINCE

Dans cette section, nous allons introduire un nouvel algorithme, appelé PRINCE, dont l'objectif principal est de pallier les principales lacunes de ces algorithmes dédiés à l'extraction des motifs fermés fréquents, c'est-à-dire le coût du calcul des fermetures ainsi que le fait de ne pas construire la relation d'ordre partiel. La principale originalité de PRINCE réside dans le fait qu'il construit une structure isomorphe au treillis des motifs fermés. Dans cette structure, le treillis d'Iceberg est construit non plus grâce aux motifs fermés fréquents mais moyennant des comparaisons entre générateurs minimaux fréquents. Rappelons que le treillis d'Iceberg est une structure qui ordonne partiellement les classes d'équivalence. Une première variante de ce treillis a été définie dans la sous-section 2.1. (page 9) où chaque classe d'équivalence est représentée par son motif fermé fréquent, c'est-à-dire par le plus grand élément correspondant. Nous proposons ici une nouvelle variante du treillis d'Iceberg, appelée *treillis des générateurs minimaux*, où chaque classe d'équivalence est représentée par ses éléments minimaux. Cette variante est définie comme suit :

DÉFINITION 5. *Le treillis des générateurs minimaux est une variante du treillis d'Iceberg, où chaque classe d'équivalence est représentée par les générateurs minimaux qu'elle contient.*

L'algorithme PRINCE met alors en place un mécanisme de gestion des classes d'équivalence permettant de générer la liste intégrale des motifs fermés fréquents sans duplication et sans recours aux tests de couvertures. Il permet aussi de réduire d'une manière notable le coût du calcul des fermetures, en les dérivant simplement grâce aux notions de bloqueur minimal et de face [Pfaltz, Taylor, 2002]. De plus et grâce à cette structure partiellement ordonnée, PRINCE permet d'extraire les bases génériques de règles sans avoir à l'associer avec un autre algorithme. La construction des liens de précédence est optimisée grâce à une gestion efficace des classes d'équivalence ainsi que la détection d'information pouvant rendre partielle cette construction.

PRINCE prend en entrée un contexte d'extraction \mathcal{K} , le seuil minimum de support *minsupp* et le seuil minimum de confiance *minconf*. Il donne en sortie la liste des motifs fermés fréquents et leurs générateurs minimaux respectifs ainsi que les bases génériques de règles. PRINCE opère en trois étapes successives :

1. Détermination des générateurs minimaux ;
2. Construction du *treillis des générateurs minimaux* ;
3. Extraction des bases génériques de règles.

Ces étapes sont décrites dans ce qui suit. Leur déroulement à partir de l'exemple de la Figure 1 est détaillé dans l'exemple 5, page 35.

4.1. DÉTERMINATION DES GÉNÉRATEURS MINIMAUX

En explorant l'espace de recherche par niveau, l'algorithme PRINCE détermine lors de sa première étape l'ensemble des générateurs minimaux fréquents $\mathcal{GMF}_{\mathcal{K}}$ ainsi que la bordure négative non fréquente \mathcal{GBd}^- .

4.1.1. Stratégies d'élagage adoptées

Afin d'optimiser l'extraction, PRINCE adopte les stratégies d'élagage suivantes : la contrainte de fréquence *minsupp*, l'idéal d'ordre associé à l'ensemble des générateurs minimaux fréquents (cf. Proposition 1), ainsi que le support estimé (cf. Lemme 3).

4.1.2. Pseudo-code de la première étape de l'algorithme PRINCE

Les notations qui seront utilisées dans l'algorithme PRINCE sont résumées dans le Tableau 1. Le pseudo-code relatif à cette étape est donné par la procédure GEN-GMS (cf. Algorithme 1). Cette procédure prend en entrée un contexte d'extraction \mathcal{K} et le support minimal *minsupp*. Elle donne en sortie l'ensemble des générateurs minimaux fréquents $\mathcal{GMF}_{\mathcal{K}}$ de façon à pouvoir les parcourir par ordre décroissant de leurs supports respectifs lors de la deuxième étape de l'algorithme PRINCE. L'ensemble $\mathcal{GMF}_{\mathcal{K}}$ est alors considéré comme étant divisé en plusieurs sous-ensembles. Chaque sous-ensemble est caractérisé par la même valeur du support. Ainsi, chaque fois qu'un générateur minimal fréquent est déterminé, il est ajouté à l'ensemble représentant son support. La procédure GEN-GMS garde aussi la trace des générateurs minimaux non fréquents, formant la bordure \mathcal{GBd}^- , afin de les utiliser lors de la deuxième étape.

<p>k : un compteur qui indique l'itération courante. Durant la $k^{ième}$ itération, tous les générateurs minimaux de taille k sont déterminés.</p> <p>$Pre\mathcal{CGM}_k$: ensemble des motifs résultats de l'application de APRIORI-GEN.</p> <p>\mathcal{CGM}_k : ensemble des candidats générateurs minimaux de taille k.</p> <p>\mathcal{GMF}_k : ensemble des générateurs minimaux fréquents de taille k.</p> <p>$\mathcal{GMF}_{\mathcal{K}}$: ensemble des générateurs minimaux fréquents triés par ordre décroissant du support.</p> <p>\mathcal{GBd}^- : bordure négative non fréquente des générateurs minimaux fréquents.</p> <p>– Chaque élément c de $Pre\mathcal{CGM}_k$, \mathcal{CGM}_k ou de \mathcal{GMF}_k est caractérisé par les champs suivants :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. <i>support-réel</i> : support réel de c, initialisé à $\mathbf{0}$. 2. <i>sous-ens-directs</i> : liste des sous-ensembles de c de taille $(k - 1)$, initialisé à l'ensemble vide. <p>– Chaque élément c de \mathcal{CGM}_k est aussi caractérisé par un support estimé (le champ <i>support-estimé</i>) et qui sera utilisé pour éliminer les candidats non générateurs minimaux.</p> <p>– Chaque élément c de \mathcal{GMF}_k est aussi caractérisé par les champs suivants :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. <i>succs-immédiats</i> : liste des successeurs immédiats de $[g]$, initialisé à l'ensemble vide. 2. <i>iff</i> : motif fermé fréquent correspondant, initialisé à l'ensemble vide.

TAB. 1. Notations utilisées dans l'algorithme PRINCE

Dans cette procédure, l'ensemble des candidats générateurs minimaux \mathcal{CGM}_1 est initialisé par l'ensemble des items du contexte d'extraction (ligne 2). Le support des items est alors calculé via un accès au contexte d'extraction (ligne 3). Le support de l'ensemble vide est égal au nombre d'objets du contexte d'extraction, c'est-à-dire $|\mathcal{O}|$ (ligne 4). L'ensemble vide, étant le générateur minimal fréquent de taille $\mathbf{0}$, est inséré dans \mathcal{GMF}_0

(ligne 5). Pour tout item c , nous distinguons les deux cas suivants (lignes 6-14) :

1. si $Supp(c) = Supp(\emptyset)$, alors c n'est pas un générateur minimal (ligne 8) ;
2. sinon c est un générateur minimal. Il est ajouté à \mathcal{GMF}_1 si $Supp(c) \geq minsupp$ (ligne 12), sinon il est ajouté à \mathcal{GBd}^- (ligne 14)⁷.

Ensuite, le calcul est effectué par niveau. Pour cela, nous utilisons la procédure GEN-GMS-SUIVANTS (lignes 15-16), dont le pseudo-code est donné par l'algorithme 2. La procédure GEN-GMS-SUIVANTS prend en entrée l'ensemble des générateurs minimaux fréquents de taille k et retourne l'ensemble des générateurs minimaux fréquents de taille $(k + 1)$.

Algorithme 1 : GEN-GMS

Données : - un contexte d'extraction $\mathcal{K} = (\mathcal{O}, \mathcal{I}, \mathcal{M})$, et le seuil $minsupp$.

Résultats :

1. L'ensemble $\mathcal{GMF}_{\mathcal{K}}$ des générateurs minimaux fréquents.
2. L'ensemble \mathcal{GBd}^- contenant la bordure négative non fréquente des générateurs minimaux fréquents.
3. La fermeture de l'ensemble vide.

1 Début

```

2   $\mathcal{CGM}_1 = \mathcal{I}$ ; //  $\mathcal{I}$  est l'ensemble des items
3  CALCUL-SUPPORT ( $\mathcal{CGM}_1$ );
4   $\emptyset.support\text{-réel} = |\mathcal{O}|$ ;
5   $\mathcal{GMF}_0 = \{\emptyset\}$ ;
6  pour chaque ( $c \in \mathcal{CGM}_1$ ) faire
7      si ( $c.support\text{-réel} = |\mathcal{O}|$ ) alors
8          |  $\emptyset.iff = \emptyset.iff \cup \{c\}$ ;
9      sinon
10         si ( $c.support\text{-réel} \geq minsupp$ ) alors
11             |  $c.sous\text{-ens-directs} = \{\emptyset\}$ ;
12             |  $\mathcal{GMF}_1 = \mathcal{GMF}_1 \cup \{c\}$ ;
13         sinon
14             |  $\mathcal{GBd}^- = \mathcal{GBd}^- \cup \{c\}$ ;
15 pour ( $k = 1$ ;  $\mathcal{GMF}_k \neq \emptyset$ ;  $k++$ ) faire
16     |  $\mathcal{GMF}_{(k+1)} = \text{GEN-GMS-SUIVANTS}(\mathcal{GMF}_k)$ ;
17  $\mathcal{GMF}_{\mathcal{K}} = \cup \{\mathcal{GMF}_i \mid i = 0 \dots k\}$ ;
18 Fin
```

La première étape de l'algorithme PRINCE prend alors fin lorsque l'ensemble des candidats est vide. Cette étape retourne ainsi l'ensemble des générateurs minimaux fréquents $\mathcal{GMF}_{\mathcal{K}}$ trié par ordre décroissant du support, et pour un support donné, par ordre lexicographique (ligne 17), ainsi que la bordure négative non fréquente \mathcal{GBd}^- et la fermeture de l'ensemble vide. Il est important de noter que la considération de la fermeture de l'ensemble vide dans le cas de l'algorithme, que nous proposons, est réalisée afin d'obtenir un treillis complet des motifs fermés (c'est-à-dire incluant aussi la fermeture de l'ensemble vide). Toutefois, les arcs de succession immédiate, auxquelles la procédure de construction GEN-ORDRE dédiée sera décrite dans la sous-section suivante, peuvent être déterminés sans avoir à insérer au préalable l'ensemble vide dans le treillis.

⁷ Il est à noter que l'item c peut ne pas être ajouté à \mathcal{GBd}^- car il ne sera plus utilisé dans la suite. Son ajout a pour seul intérêt que d'avoir une bordure complète.

Algorithme 2 : GEN-GMS-SUIVANTS

```

Données : -  $\mathcal{GMF}_k$ .
Résultats : -  $\mathcal{GMF}_{(k+1)}$ .
1 Début
2  /* Phase 1 : APRIORI-GEN */
3   $Pre\mathcal{CGM}_{(k+1)} = APRIORI-GEN(\mathcal{GMF}_k)$ 
4  /* Phase 2 : Vérification de l'idéal d'ordre des générateurs minimaux fréquents */
5  pour chaque ( $c \in Pre\mathcal{CGM}_{(k+1)}$ ) faire
6      candidat = vrai;
7       $c.support-estimé = |\mathcal{O}|$ ; /* support maximal possible */
8      pour chaque ( $c_1$  tel que  $|c_1| = k$  et  $c_1 \subset c$ ) faire
9          si ( $c_1 \notin \mathcal{GMF}_k$ ) alors
10             candidat = faux;
11             sortie; // arrêt de l'énumération de la ligne 8
12              $c.support-estimé = \min(c.support-estimé,$ 
13                  $c_1.support-réel)$ ;
14              $c.sous-ens-directs = c.sous-ens-directs \cup \{c_1\}$ ;
15         si (candidat = vrai) alors  $\mathcal{CGM}_{(k+1)} = \mathcal{CGM}_{(k+1)} \cup \{c\}$ ;
16     /* Phase 3 : Calcul des supports des candidats et élagage des non fréquents */
17     CALCUL-SUPPORT ( $\mathcal{CGM}_{(k+1)}$ );
18     pour chaque ( $c \in \mathcal{CGM}_{(k+1)}$ ) faire
19         si ( $c.support-réel \neq c.support-estimé$  et  $c.support-réel \geq$ 
20              $minsupp$ ) alors
21              $\mathcal{GMF}_{(k+1)} = \mathcal{GMF}_{(k+1)} \cup \{c\}$ ;
22         sinon
23             si ( $c.support-réel < minsupp$ ) alors
24                  $\mathcal{GBd}^- = \mathcal{GBd}^- \cup \{c\}$ ;
25     retourner  $\mathcal{GMF}_{(k+1)}$ 
26 Fin

```

La première phase de la procédure GEN-GMS-SUIVANTS consiste à déterminer l'ensemble $Pre\mathcal{CGM}_{(k+1)}$ qui est un sur-ensemble de l'ensemble $\mathcal{CGM}_{(k+1)}$ des candidats de taille $(k + 1)$ (lignes 2-3). Chaque élément de l'ensemble $Pre\mathcal{CGM}_{(k+1)}$ est dérivé à partir de deux générateurs minimaux fréquents de taille k ayant $(k - 1)$ items en commun. Lors de la deuxième phase et pour chaque élément c de $Pre\mathcal{CGM}_{(k+1)}$, nous testons s'il vérifie l'idéal d'ordre des générateurs minimaux fréquents (lignes 4-14). En même temps, nous calculons le support estimé de c et qui est égal au minimum des supports de ses sous-ensembles de taille k (ligne 12). Des liens vers ces derniers sont stockés dans le champ *sous-ens-directs* et qui seront utilisés dans la seconde étape de l'algorithme PRINCE (ligne 13). Si c ne vérifie pas l'idéal d'ordre, alors c est éliminé (lignes 9-11), sinon il est ajouté à $\mathcal{CGM}_{(k+1)}$ (ligne 14). Une fois le test de l'idéal d'ordre effectué, nous entamons la troisième phase (lignes 15-22). Ainsi, un accès au contexte d'extraction permettra de calculer les supports réels des candidats retenus dans $\mathcal{CGM}_{(k+1)}$ (ligne 16). Une fois cet accès effectué, le support réel de chaque candidat c de $\mathcal{CGM}_{(k+1)}$, est comparé à son support estimé (lignes 17-22). Si ces derniers sont égaux, alors c n'est pas

considéré comme un générateur minimal. Sinon, c est un générateur minimal et la comparaison de son support réel avec *minsupp* permettra de le classer parmi les générateurs minimaux fréquents ou parmi ceux non fréquents (lignes 18-21). Après l'exécution de ces trois phases, la procédure GEN-GMS-SUIVANTS retourne l'ensemble des générateurs minimaux fréquents de taille $(k + 1)$ (ligne 23).

4.1.3. Structure de données utilisée

Du point de vue structure de données, nous avons utilisé un unique arbre lexicographique [Bodon, Rónyai, 2003 ; Knuth, 1968] pour stocker les générateurs minimaux afin d'accélérer l'extraction des informations qui seront utilisées lors des prochaines étapes. L'ensemble des générateurs minimaux étant un idéal pour l'ordre d'inclusion, le chemin de la racine à un nœud quelconque de l'arbre représente un générateur minimal. Ceci a pour avantage de réduire la nécessité en espace mémoire comparée à l'utilisation d'un arbre lexicographique pour *chaque* ensemble de générateurs minimaux de taille k donnée, comme c'est le cas pour les algorithmes CLOSE, A-CLOSE et TITANIC. Cette structure de données a été privilégiée dans plusieurs travaux, tels que [Bastide, 2000 ; Goethals, 2004]. Il est aussi à noter qu'afin de rendre efficace le calcul des supports des motifs candidats, le contexte d'extraction a été lui aussi stocké dans une structure dédiée permettant d'optimiser l'espace mémoire nécessaire au stockage des objets du contexte partageant les mêmes items.

Dans la suite, nous allons noter par *support*, au lieu de *support-réel*, le champ contenant le support réel de chaque générateur minimal étant donné que nous n'avons plus à distinguer le support réel et le support estimé d'un motif.

4.2. CONSTRUCTION DU TREILLIS DES GÉNÉRATEURS MINIMAUX

L'objectif de cette étape est d'organiser les générateurs minimaux fréquents sous forme d'un *treillis des générateurs minimaux*. Pour construire le treillis, l'ensemble trié \mathcal{GMF}_k est alors parcouru en introduisant un par un ses éléments dans le *treillis des générateurs minimaux* partiellement construit. La couverture supérieure de chaque classe d'équivalence sera alors déterminée au fur et à mesure. Dans la suite de cette sous-section et étant donné que nous allons construire le treillis d'Iceberg en comparant seulement des générateurs minimaux fréquents, chaque classe d'équivalence sera caractérisée par un générateur minimal *représentant*. Ce représentant remplace donc le motif fermé associé dans la variante classique du treillis d'Iceberg (cf. la sous-section 2.1., page 9).

Dans la suite, nous dénotons par \approx la relation d'équivalence entre générateurs minimaux dans le sens que $g \approx g_1$ ssi g et g_1 sont deux générateurs minimaux qui appartiennent à la même classe d'équivalence (ou d'une manière équivalente, admettent la même fermeture de Galois). Les générateurs g et g_1 sont dits *équivalents*.

Soit un générateur minimal fréquent A . Nous noterons dans la suite $\rho(A)$ le plus petit élément, au sens de l'ordre lexicographique \prec , de la classe d'équivalence de A . $\rho(A)$ est égal au générateur minimal fréquent qui sera retenu comme représentant de la classe de A par l'algorithme proposé dans cette étape dédié à la construction du *treillis des générateurs minimaux*. À cet égard, dans la suite, par le terme *successeur immédiat*, nous entendons un *générateur minimal fréquent représentant* sauf indication contraire. Le *treillis*

des générateurs minimaux est ainsi une relation d'ordre sur l'ensemble $\{\rho(g)|g \text{ est un générateur minimal fréquent}\}$.

4.2.1. Détermination des liens de précedence

D'une manière générale, afin de déterminer les liens de précedence entre les classes d'équivalence de deux motifs X et Y , nous comparons le support de ces motifs avec celui de leur union. À cet effet, la représentation concise des motifs fréquents basée sur les générateurs minimaux fréquents et la bordure négative non fréquente, extraite lors de l'étape précédente, sera utilisée pour déterminer le support de l'union moyennant la Proposition 2 (cf. page 12). Ceci permet de construire le treillis d'Iceberg *sans effectuer un accès supplémentaire au contexte d'extraction*.

La Proposition 3 regroupe les différents cas possibles résultants de la comparaison des supports de X et de Y et pour lesquels les classes d'équivalence associées sont dites *comparables*. Sa preuve utilise le Lemme 3.

PROPOSITION 3. Soient X et Y deux motifs distincts tels que $Supp(X) \leq Supp(Y)$, $[X]$ et $[Y]$ leurs classes d'équivalence respectives.

1. $[X] = [Y]$ ssi $Supp(X) = Supp(Y) = Supp(X \cup Y)$.
2. $[X]$ (resp. $[Y]$) est un successeur (resp. prédécesseur) de $[Y]$ (resp. $[X]$) ssi $Supp(X) < Supp(Y)$ et $Supp(X) = Supp(X \cup Y)$.

DÉMONSTRATION 3.

1.

(a) $X \subseteq (X \cup Y) \wedge Supp(X) = Supp(X \cup Y) \Rightarrow \gamma(X) = \gamma(X \cup Y)$ (d'après le Lemme 3).

(b) $Y \subseteq (X \cup Y) \wedge Supp(Y) = Supp(X \cup Y) \Rightarrow \gamma(Y) = \gamma(X \cup Y)$ (d'après le Lemme 3). D'après (a) et (b), $\gamma(X) = \gamma(Y)$ et donc X et Y appartiennent à la même classe d'équivalence c'est-à-dire $[X]$ et $[Y]$ sont identiques.

2.

(a) $X \subseteq (X \cup Y) \wedge Supp(X) = Supp(X \cup Y) \Rightarrow \gamma(X) = \gamma(X \cup Y)$ (d'après le Lemme 3).

(b) $Y \subseteq (X \cup Y) \wedge Supp(Y) \neq Supp(X \cup Y) \Rightarrow \gamma(Y) \subset \gamma(X \cup Y)$ or, d'après (a), $\gamma(X) = \gamma(X \cup Y)$ et donc $\gamma(Y) \subset \gamma(X)$ d'où $[X]$ (resp. $[Y]$) est un successeur (resp. prédécesseur) de $[Y]$ (resp. $[X]$). \diamond

Dans tous les autres cas, $[X]$ et $[Y]$ sont dits *incomparables*. Le lemme suivant présente ces cas.

LEMME 4. $[X]$ et $[Y]$ sont incomparables ssi $Supp(X) > Supp(X \cup Y)$ et $Supp(Y) > Supp(X \cup Y)$.

DÉMONSTRATION 4.

(CS) si ($Supp(X) > Supp(X \cup Y)$ et $Supp(Y) > Supp(X \cup Y)$) alors $[X]$ et $[Y]$ ne peuvent vérifier aucune des deux clauses précédentes (cf. Proposition 3); ils sont donc incomparables.

(CN) soient $[X]$ et $[Y]$ incomparables. Ils vérifient donc la conjonction (A) ci-dessous des négations des deux premières clauses :

(A) $((Supp(X) \neq Supp(Y)) \text{ ou } (Supp(X) \neq Supp(X \cup Y)) \text{ ou } (Supp(Y) \neq Supp(X \cup Y)))$

et

$((Supp(X) \geq Supp(Y)) \text{ ou } (Supp(X) \neq Supp(X \cup Y)))$

et

$((Supp(Y) \geq Supp(X)) \text{ ou } (Supp(Y) \neq Supp(X \cup Y))).$

En remarquant que si $Supp(T) \neq Supp(T \cup S)$, alors $Supp(T) > Supp(T \cup S)$, et en notant $x = Supp(X)$, $y = Supp(Y)$ et $u = Supp(X \cup Y)$, la formule (A) se réécrit :

(B) $((x \neq y) \text{ ou } (x > u) \text{ ou } (y > u))$

et

$((x \geq y) \text{ ou } (x > u))$

et

$((y \geq x) \text{ ou } (y > u)).$

On cherche à montrer qu'elle implique $(x > u)$ et $(y > u)$. En développant (B), on obtient la disjonction de 12 formules :

(1) $(x \neq y) \text{ et } (x \geq y) \text{ et } (y \geq x)$

(2) $(x \neq y) \text{ et } (x \geq y) \text{ et } (y > u)$

(3) $(x \neq y) \text{ et } (x > u) \text{ et } (y \geq x)$

(4) $(x \neq y) \text{ et } (x > u) \text{ et } (y > u)$

(5) $(x > u) \text{ et } (x \geq y) \text{ et } (y \geq x)$

(6) $(x > u) \text{ et } (x \geq y) \text{ et } (y > u)$

(7) $(x > u) \text{ et } (x > u) \text{ et } (y \geq x)$

(8) $(x > u) \text{ et } (x > u) \text{ et } (y > u)$

(9) $(y > u) \text{ et } (x \geq y) \text{ et } (y \geq x)$

(10) $(y > u) \text{ et } (x \geq y) \text{ et } (y > u)$

(11) $(y > u) \text{ et } (x > u) \text{ et } (y \geq x)$

(12) $(y > u) \text{ et } (x > u) \text{ et } (y > u)$

Il est simple de montrer que chacune des formules 1 à 12 implique la formule $((x > u) \text{ et } (y > u))$. \diamond

Étant donné le tri imposé dans l'ensemble \mathcal{GMF}_κ par rapport au support de ses éléments, la classe d'équivalence de chaque générateur minimal fréquent en cours de traitement ne peut qu'être successeur des classes d'équivalence déjà présentes dans le treillis partiellement construit (cf. Proposition 3). Les traitements associés à chaque générateur minimal fréquent sont détaillés dans la sous-section suivante.

4.2.2. Traitements associés à chaque générateur minimal fréquent

Chaque générateur minimal fréquent g de taille k ($k \geq 1$) est inséré dans le *treillis des générateurs minimaux* en le comparant avec les successeurs immédiats de ses sous-ensembles de taille $(k - 1)$. Ceci est basé sur la propriété d'*isotonie* de l'opérateur de fermeture [Ganter, Wille, 1999]. En effet, si g_1 est inclus dans g tel que $|g_1| = (k - 1)$ alors la fermeture de g_1 , $\gamma(g_1)$, est incluse dans la fermeture de g , $\gamma(g)$. Ainsi, la classe d'équivalence $[g]$ de g est un successeur – *pas forcément immédiat* – de la classe d'équivalence de g_1 , $[g_1]$.

En comparant g à la liste des successeurs immédiats de g_1 , disons L , deux cas sont à distinguer. Si L est vide, alors g sera simplement ajouté à L , sinon, g sera comparé aux éléments appartenant à L . Dans ce dernier cas, la Proposition 3 est utilisée, en remplaçant X par g et Y par les éléments de L . Soit g_2 un des éléments de L . Nous distinguons alors deux cas lors du calcul du support de $\mathcal{U} = (g \cup g_2)$:

1. Le support de \mathcal{U} est directement dérivé si cet motif fait partie de la représentation extraite lors de la première étape. Le motif \mathcal{U} est alors un générateur minimal. Dans ce cas, $[g]$ et $[g_2]$ sont incomparables étant donné que $Supp(\mathcal{U})$ est nécessairement strictement inférieur à celui de g et celui de g_2 car sinon il ne serait pas un générateur minimal.
2. Dans le cas où \mathcal{U} ne fait pas partie de la représentation, la Proposition 2 (cf. page 12) est appliquée. La recherche du support s'arrête alors du moment qu'un générateur minimal inclus dans \mathcal{U} et ayant un support strictement inférieur à celui de g et à celui de g_2 est trouvé. Dans ce cas, $[g]$ et $[g_2]$ sont incomparables. Si un tel générateur minimal n'a pas été trouvé, nous nous trouvons alors dans un des deux cas explicités par la Proposition 3 et il suffit alors de comparer les supports de g , g_2 et \mathcal{U} pour savoir la relation réelle entre $[g]$ et $[g_2]$.

Dans la suite, nous dénotons par $\tau(g)$ l'ensemble des sous-ensembles immédiats de g , c'est-à-dire ceux de taille $|g| - 1$.

4.2.3. Gestion efficace des classes d'équivalence

Lors de ces comparaisons et afin d'éviter une des lacunes des algorithmes adoptant la stratégie *Générer-et-tester*, à savoir le calcul redondant des fermetures, PRINCE utilise des traitements qui se complètent. Ces derniers permettent de maintenir la notion de classe d'équivalence tout au long du traitement. À cet effet, chaque classe d'équivalence sera caractérisée par un *représentant*, qui est le *premier* générateur minimal fréquent inséré dans le *treillis des générateurs minimaux*. Tout générateur minimal fréquent g est initialement considéré comme représentant de $[g]$ et le restera tant qu'il n'est pas comparé à un générateur minimal fréquent précédemment ajouté dans le *treillis des générateurs minimaux* et appartenant à $[g]$.

Chaque générateur minimal g , de taille k , est comparé avec les listes des successeurs L_1, L_2, \dots , et L_k associées respectivement à ses sous-ensembles immédiats g_1, g_2, \dots , et g_k . Lors de la comparaison d'un générateur minimal fréquent, disons g , avec les éléments d'une liste L de successeurs immédiats d'un autre générateur minimal fréquent, des traitements dédiés à la gestion efficace des classes d'équivalence seront réalisés dans le cas

où g serait comparé au représentant de sa classe d'équivalence, disons \mathcal{R} . Ils sont décrits comme suit :

1. Toutes les occurrences de g seront remplacées par \mathcal{R} dans les listes des successeurs immédiats où g a été ajouté.
2. Les comparaisons de g avec le reste des éléments de L s'arrêtent car elles ont été effectuées avec \mathcal{R} . Ceci permet de n'avoir que des représentants dans les listes des successeurs immédiats et n'affecte en rien le résultat de la deuxième étape, étant donné que g et \mathcal{R} appartiennent à la même classe d'équivalence.
3. Soit g_i le sous-ensemble immédiat de g ayant permis sa comparaison avec \mathcal{R} . Le générateur g doit être aussi comparé aux listes des successeurs du reste de ses sous-ensembles immédiats g_j ($i < j \leq k$). Ces comparaisons seront alors effectuées moyennant \mathcal{R} et non g . Le but de poursuivre les comparaisons avec \mathcal{R} est de ne maintenir dans la liste des successeurs immédiats d'une classe d'équivalence donnée que les générateurs minimaux fréquents représentants de leurs classes respectives. Par ailleurs, si \mathcal{R} a été déjà comparé à la liste des successeurs d'un des sous-ensembles immédiats de g , la comparaison de \mathcal{R} avec cette liste ne sera pas effectuée. Ceci permet d'éviter de comparer un générateur minimal à une liste des successeurs immédiats plus d'une fois étant donné que les comparaisons qui en découlent ne vont pas donner lieu à de nouveaux arcs de succession immédiate.

Ainsi, pour chaque classe d'équivalence, seul son représentant figure dans les listes des successeurs immédiats. Ceci permet d'optimiser la gestion des classes d'équivalence en minimisant les comparaisons inutiles entre générateurs minimaux fréquents. Par ailleurs, un traitement dédié permet de trouver, pour chaque générateur minimal fréquent g , le représentant \mathcal{R} de sa classe d'équivalence. Ceci permettra de compléter la liste des successeurs immédiats de $[g]$, égale à $[\mathcal{R}]$, et qui est stockée au niveau du représentant \mathcal{R} . Ceci permet de n'avoir à gérer qu'une seule liste de successeurs immédiats pour chaque classe d'équivalence.

Ainsi, lors des comparaisons d'un générateur minimal fréquent g avec les listes des successeurs de ses sous-ensembles immédiats, c'est-à-dire les éléments de $\tau(g)$, deux traitements complémentaires sont réalisés : un premier traitement leur est appliqué tant que g n'est pas comparé au représentant de sa classe d'équivalence. Ensuite, un deuxième traitement leur est appliqué une fois la comparaison effectuée. La définition suivante présente un sous-ensemble des représentants des classes d'équivalence et qui résulte de la comparaison d'un générateur minimal g avec la liste des successeurs de $g_1 \in \tau(g)$.

DÉFINITION 6. *Soit g un générateur minimal de support $n \geq 0$ et g_1 un sous-ensemble immédiat de g ($g_1 \in \tau(g)$). $\phi(n, g, g_1)$ est l'ensemble des représentants des classes h tels que :*

soit :

- (1a) h est de support n et
- (1b) h est un successeur de $\rho(g_1)$ et
- (1c) h est équivalent à g c'est-à-dire appartiennent à la même classe d'équivalence et
- (1d) $h \prec g$;

soit :

- (2a) h est de support $> n$ et
- (2b) $((h = \rho(g_1))$ ou $(h$ est un successeur de $\rho(g_1))$) et
- (2c) g est successeur de h et
- (2d) pour tout représentant h' de support $> n$ tel que h' est successeur de h , g n'est pas successeur de h' .

Il est important de noter que l'ensemble $\phi(n, g, g_1)$ s'il contient un élément de support n , il n'en contient qu'un à savoir le représentant de la classe de g . Si g est le représentant de sa classe, alors $\phi(n, g, g_1)$ ne contient aucun élément de support n , d'après (1c), puisque il est faux que $g \prec g$. Tout élément h de $\phi(n, g, g_1)$, autre que le représentant de la classe de g s'il existe dans cet ensemble, correspond à un prédécesseurs immédiat de g résultant de la comparaison de g avec la liste des successeurs de g_1 (ou inversement, g est un successeur immédiat de h). Soit $\xi_{g_1} = \phi(n, g, g_1) \setminus \rho(g)$. Il est à noter que ξ_{g_1} n'est jamais vide puisque h peut être confondu avec $\rho(g_1)$ (condition (2b)) et que g , sur-ensemble de g_1 , est successeur de $\rho(g_1)$.

Les deux lemmes suivants montrent la relation entre g et les éléments de ξ_{g_1} pour tout $g_1 \in \tau(g)$.

LEMME 5. (de validité). Soit $\xi = (\cup_{(g_1 \in \tau(g))} \phi(n, g, g_1)) \setminus \rho(g)$. Tous les couples du produit $\xi \times \{g\}$ sont des arcs de succession immédiate, autrement dit, pour tout élément h de ξ , g est successeur immédiat de h .

LEMME 6. (de complétude). L'ensemble des arcs de succession immédiate qui « aboutissent » sur g est égal au produit $\xi \times \{g\}$.

Rappelons maintenant que chaque classe d'équivalence est représentée dans le treillis des générateurs minimaux à travers son représentant. Ce dernier représente donc l'ensemble des générateurs minimaux fréquents de sa classe dans le treillis et seul lui, parmi les générateurs de sa classe, figure dans les listes de succession immédiate. À cet égard, afin que la construction du treillis soit valide, deux conditions doivent être vérifiées. La première consiste dans le fait que chaque classe d'équivalence doit être connectée à sa couverture inférieure une fois ses générateurs minimaux associés traités. La deuxième condition impose que tous les générateurs minimaux fréquents appartenant à la même classe d'équivalence doivent y être inclus une fois leur traitement effectué. Le lemme suivant traite de la première condition et celui qui le suit de la seconde.

Ainsi, le Lemme 7 montre que tout lien de précédence entre deux classes d'équivalence tel que l'une est successeur immédiat de l'autre sera construit une fois les générateurs minimaux associés introduits dans le treillis des générateurs minimaux.

LEMME 7. Soient \mathcal{R} et \mathcal{R}' les représentants de leur classe d'équivalence. Si \mathcal{R} est successeur immédiat de \mathcal{R}' , alors il existe un générateur minimal $g \approx \mathcal{R}$, et h dans $\tau(g)$ tels que $((h \approx \mathcal{R}')$ ou $(\mathcal{R}'$ est un successeur de $\rho(h))$.

DÉMONSTRATION 5. Soit $w = \mathcal{R}' \cup \{i\}$ avec $i \in (\mathcal{R} \setminus \gamma(\mathcal{R}'))$. L'item i existe nécessairement car sinon \mathcal{R} serait inclus dans la fermeture de \mathcal{R}' ce qui est en contradiction avec le fait que \mathcal{R} est un des générateurs minimaux d'une classe d'équivalence successeur immédiat à celle de \mathcal{R}' .

Étant donné que \mathcal{R} est un successeur immédiat de \mathcal{R}' , $\gamma(\mathcal{R}') \subset \gamma(w) = \gamma(\mathcal{R}' \cup \{i\}) = \gamma(\gamma(\mathcal{R}') \cup \{i\}) \subseteq \gamma(\mathcal{R})$. Il en découle que $\gamma(w) = \gamma(\mathcal{R})$.

Soit $g \subseteq w$ un générateur minimal inclus dans w et ayant la même fermeture que w : $\gamma(g) = \gamma(w) = \gamma(\mathcal{R})$. g contient forcément l'item i car sinon ce serait en contradiction avec le fait que \mathcal{R}' soit un générateur minimal d'un fermé strictement inclus dans $\gamma(\mathcal{R})$.

Soit h le sous-ensemble immédiat de g égal à $(g \setminus \{i\})$. h est un générateur minimal puisque g l'est aussi. Par ailleurs, $h \subseteq \mathcal{R}'$.

Deux cas sont alors à distinguer :

- si $h = \mathcal{R}'$, alors \mathcal{R}' est égal à un des sous-ensembles immédiats de g , à savoir h . Il est ainsi évident que $h \approx \mathcal{R}'$.
- si $h \subset \mathcal{R}'$, alors \mathcal{R}' est un des successeurs de h . Par conséquent, \mathcal{R}' est aussi un successeur de $\rho(h)$ puisque $h \approx \rho(h)$.

Par conséquent, le lien de précédence entre la classe d'équivalence de \mathcal{R}' et celle de g (elle-même égale à la classe d'équivalence de \mathcal{R} puisque $g \approx \mathcal{R}$) est construit, en comparant g aux successeurs de son sous-ensemble immédiat h . \diamond

Le lemme suivant prouve que si un générateur minimal fréquent g n'est pas le représentant de sa classe d'équivalence c'est-à-dire $g \neq \rho(g)$, ou d'une manière équivalente $\rho(g) \prec g$, alors g sera comparé au représentant de sa classe d'équivalence lors de ses comparaisons avec les successeurs de ses sous-ensembles immédiats. Il est à noter que si g est l'unique générateur minimal de sa classe d'équivalence ou est son représentant, le problème ne se pose pas car il sera le premier générateur minimal de la classe à être traité. Ce lemme permet de montrer donc qu'une fois l'ensemble des générateurs minimaux de même support insérés dans le treillis, chaque classe d'équivalence associée contient tous ses générateurs minimaux.

LEMME 8. *Si g est un générateur minimal fréquent tel que $\rho(g) \prec g$, alors il existe un générateur minimal X équivalent à g ($X \approx g$) et $X \prec g$ pour lequel il existe $Y \in \tau(X)$ tel que :*

- ($\rho(g)$ est un successeur de $\rho(Y)$)
- et
- ($\rho(Y)$ est un successeur de $\rho(h)$) si h désigne le plus petit des éléments de $\tau(g)$ au sens de l'ordre \prec .

DÉMONSTRATION 6. La condition $\rho(g) \prec g$ du lemme impose à la classe de g d'avoir au moins deux éléments. Soit g un générateur minimal fréquent dont la classe d'équivalence à au moins deux éléments. Elle ne peut donc pas être la classe singleton contenant le seul générateur minimal fréquent vide. On pose $z = \rho(g)$ le représentant de g . On a $z \prec g$. Puisque g et z sont minimaux et différents, on a : (1) ($z \not\subseteq g$) et ($g \not\subseteq z$). Soient $\mu(z)$ et $\mu(g)$ les mots associés à z et à g selon l'ordre \prec ⁸ : $\mu(z) = z_1 z_2 \dots z_p, p > 0$, et $\mu(g) = g_1 g_2 \dots g_q, q > 0$. D'après la propriété (1) ci-dessus, il existe un unique indice $i, 1 \leq i \leq \min(p, q)$, tel que $z_i \prec g_i$ et pour tout $k, 1 \leq k < i, z_k = g_k$. On pose $u = z_i \prec g_i$. On a $u \notin g$, sinon on aurait $u \prec g_i \prec u$. On considère le plus petit élément h de $\tau(g)$ au sens de l'ordre \prec . Il est obtenu en enlevant à g son plus grand élément au

⁸ Si F est un ensemble fini muni d'un ordre total \prec , le mot $\mu(G)$ associé à tout sous-ensemble G de F est l'unique bijection de l'intervalle $[1, |G|]$ dans G qui respecte l'ordre \prec . Les mots associés permettent d'ordonner lexicographiquement les parties de F .

sens de l'ordre \prec . On a donc $\mu(h) = g_1 g_2 \dots g_{q-1}$. L'ensemble h , qui peut être vide, est un générateur minimal fréquent puisqu'il est inclus dans le générateur minimal fréquent g et son support est strictement supérieur à n .

$$\begin{aligned} \text{On a } \gamma(h \cup z) &= \gamma(h \cup \gamma(z)) \text{ (propriété des chemins indépendants)} \\ &= \gamma(h \cup \gamma(g)) \text{ (} z \text{ et } g \text{ sont équivalents)} \\ &= \gamma(\gamma(g))(h \subset g \subseteq \gamma(g)) \\ &= \gamma(g) \text{ (idempotence de } \gamma) = \gamma(z). \end{aligned}$$

Puisque $u \in z$, $h \cup z = h \cup \{u\} \cup (z \setminus \{u\})$. L'ensemble $h \cup \{u\} \cup (z \setminus \{u\})$ est équivalent à z mais n'est pas un générateur minimal fréquent puisqu'il contient le générateur minimal fréquent z . Il existe donc un sous-ensemble z' de $z \setminus \{u\}$ tel que l'ensemble $X = h \cup \{u\} \cup z'$ (qui est contenu dans $h \cup z$) est un générateur minimal fréquent de support n , donc équivalent à z . Il est à noter que l'ensemble z' est vide lorsque $X = h \cup \{u\}$ est de support n . Soit $X_1 X_2 \dots X_r$, $r > 0$, le mot associé au générateur minimal fréquent X . Par construction, on a, pour tout k , $1 \leq k < i$, $X_k = g_k = z_k$ et $X_i = u$. Il en résulte que $X \prec g$. L'ensemble $Y = h \cup z'$ est un élément de $\tau(X)$. Y est donc un générateur minimal fréquent de support $> n$. Il contient le générateur minimal fréquent h , donc $\rho(Y)$ est un successeur de $\rho(h)$. Par ailleurs, le générateur minimal fréquent X contenant le générateur minimal fréquent Y , $z = \rho(g) = \rho(X)$ est un successeur de $\rho(Y)$. \diamond

4.2.4. Pseudo-code de la deuxième étape de l'algorithme PRINCE

Le pseudo-code de la deuxième étape de l'algorithme PRINCE est donné par la procédure GEN-ORDRE (cf. Algorithme 3, page 29). Dans ce pseudo-code, *gmf* est l'abréviation de générateur minimal fréquent. À la fin de l'exécution de la procédure GEN-ORDRE, le *treillis des générateurs minimaux* est construit et est égal à la relation d'ordre sur l'ensemble des représentants des classes d'équivalence, c'est-à-dire $\{\rho(g) | g \in \mathcal{GMF}_K\}$. Le champ *succs-immédiats* associé à un générateur minimal fréquent g sera alors vide si ce dernier n'est pas le représentant de sa classe d'équivalence ou si g appartient à une classe d'équivalence n'ayant pas de successeurs. Sinon, cette liste ne contiendra que des représentants. La procédure GEN-ORDRE insère un générateur minimal fréquent g dans le *treillis des générateurs minimaux* en le comparant aux listes des successeurs immédiats de ses sous-ensembles de taille $(k - 1)$. Cette procédure implante alors la coupure en deux parties complémentaires du traitement de l'énumération de $\tau(g)$, c'est-à-dire avant que g ne soit comparé au représentant de sa classe et après.

Les notations utilisées dans le pseudo-code de cette procédure sont comme suit sachant que le symbole $\$$ permet de distinguer les objets de programmation des objets mathématiques auxquels ils sont liés.

Algorithme 3 : GEN-ORDRE**Données :** - L'ensemble $\mathcal{GMF}_{\mathcal{K}}$ des générateurs minimaux fréquents.**Résultats :** - Le treillis des générateurs minimaux.**Début**

```

1    $\mathcal{X} = \emptyset ; \$f = \emptyset ; \$treillis = \emptyset ;$ 
A.d pour chacune des valeurs de n du support, dans l'ordre décroissant faire
L.1   P.1  $\equiv (\mathcal{X} = \mathcal{X}^{(>n)})$ 
L.2   P.2  $\equiv (\$f = f^{(>n)})$ 
B.d   pour chacun des gmf g de support n, dans l'ordre lexicographique  $\prec$  faire
L.3   P.3  $\equiv (\mathcal{X} = \mathcal{X}^{(>n)} \cup \{\rho(h) \mid (Supp(h) = n) \text{ et } (h \prec g)\})$ 
L.4   P.4  $\equiv (\$f(z) = \{h \mid (h \approx z) \text{ et } (h \prec g)\})$  pour tout  $z \in \mathcal{X}$  et de support n
      2    $\$pred\_g = \emptyset ;$ 
C.d   parcours  $\Gamma$  des éléments de  $\tau(g)$  faire
      3    $g_1 = \Gamma() ; // g_1 \text{ est l'élément courant de } \tau(g) \text{ (parcours } \Gamma)$ 
D.d   parcours  $\pi_1$  des éléments de  $\phi(n, g, g_1)$  faire
      4    $\mathcal{F} = \pi_1() ; // \mathcal{F} \text{ est l'élément courant de } \phi(n, g, g_1) \text{ (parcours } \pi_1)$ 
      5   si  $(Supp(\mathcal{F}) > n)$  alors  $\$pred\_g = \$pred\_g \cup \{\mathcal{F}\} ;$ 
      6   si  $(Supp(\mathcal{F}) = n)$  alors sortie ; // sortie du parcours  $\pi_1$ 
D.f   fin de parcours
      7   si (le parcours  $\pi_1$  n'est pas arrivé à son terme) alors ;
      {suspension du parcours  $\Gamma$  et sortie de la boucle C} ;
C.f   fin de parcours
E.d   si (parcours  $\pi_1$  n'est pas arrivé à son terme)
      8   alors  $\$f(\mathcal{F}) = \$f(\mathcal{F}) \cup \{g\} ; \mathcal{R}g = \mathcal{F} ;$ 
      9   sinon  $\mathcal{X} = \mathcal{X} \cup \{g\} ; \$f(g) = \{g\} ; \mathcal{R}g = g ;$ 
E.f   fin de si/alors/sinon
L.3'  P.3'  $\equiv (\mathcal{X} = \mathcal{X}^{(>n)} \cup \{\rho(h) \mid (Supp(h) = n) \text{ et } (h \preceq g)\})$ 
L.4'  P.4'  $\equiv (\$f(z) = \{h \mid (h \approx z) \text{ et } (h \preceq g)\})$  pour tout  $z \in \mathcal{X}$  et de support n
      10  $\$treillis = \$treillis \cup \$pred\_g \times \{\mathcal{R}g\} ;$ 
F.d   suite du parcours  $\Gamma$  des éléments de  $\tau(g)$  faire
      11  $g_1 = \Gamma() ; // g_1 \text{ est l'élément courant du parcours } \Gamma$ 
G.d   parcours  $\pi_2$  des éléments de  $\phi(n, \mathcal{R}g, g_1)$  faire
      12  $\mathcal{F} = \pi_2() ; // \mathcal{F} \text{ est l'élément courant du parcours } \pi_2$ 
      13 si  $(Supp(\mathcal{F}) > n)$  alors  $\$treillis = \$treillis \cup \{(\mathcal{F}, \mathcal{R}g)\} ;$ 
      14 si  $(Supp(\mathcal{F}) = n)$  alors sortie ; //  $\mathcal{F}$  est égal à  $\mathcal{R}g$ 
G.f   fin de parcours
L.3'' P.3''  $\equiv \mathbf{P.3'}$ 
L.4'' P.4''  $\equiv \mathbf{P.4'}$ 
F.f   fin de parcours
B.f   fin de pour
L.1'  P.1'  $\equiv (\mathcal{X} = \mathcal{X}^{(>n)} \cup \{\rho(h) \mid (Supp(h) = n)\}) = \mathcal{X}^{(=n)}$ 
L.2'  P.2'  $\equiv (\$f(z) = \{h \mid (h \approx z)\}) = f(z)$ , pour tout  $z \in \mathcal{X}$  et de support n
A.f   fin de pour
Fin

```

- La primitive PARCOURS permet de parcourir *tout ou une partie* des éléments d'un ensemble.
- \mathcal{X} : est l'ensemble des représentants des classes.
- f : est une application permettant d'associer à chaque générateur minimal son représentant, c'est-à-dire l'élément de \mathcal{X} qui lui est équivalent par \approx .
- (\mathcal{X}, f) : est égal à la forme fonctionnelle de la partition des générateurs minimaux fréquents par la relation d'équivalence \approx .
- $(\mathcal{X}^{(>n)}, f^{(>n)})$: est égal à la forme fonctionnelle de la partition des générateurs minimaux fréquents de support $> n$ par \approx .
- $(\mathcal{X}^{(\geq n)}, f^{(\geq n)})$: stocke la forme fonctionnelle de la partition des générateurs minimaux fréquents de support $\geq n$ par \approx .
- *treillis* : est égal au treillis des générateurs minimaux fréquents, c'est-à-dire, le treillis sur l'ensemble \mathcal{X} des représentants.
- *pred_g* : permet de stocker les prédécesseurs immédiats de g .
- g_1 : permet de stocker l'élément courant de $\tau(g)$.
- \mathcal{R}_g : permet de stocker le représentant de la classe de g .
- \mathcal{F} : permet de stocker l'élément courant de $\phi(n, g, g_1)$, puis de $\phi(n, \mathcal{R}_g, g_1)$.

Dans ce qui suit, nous décrivons en détail le déroulement de GEN-ORDRE :

1. Dans la colonne de gauche, A.d signifie début du bloc A et A.f signifie fin du bloc A. Il en est de même pour les autres lettres.
2. La procédure GEN-ORDRE traite l'ensemble des générateurs minimaux fréquents par support décroissant (cf. bloc A) et pour un ensemble de générateurs minimaux de même support, elle les traite par ordre lexicographique \prec (cf. bloc B). Pour chaque générateur minimal g , les traitements qui lui sont associés sont divisés en deux parties complémentaires. La première s'intéresse aux liens de succession immédiate obtenus avant la comparaison de g avec le représentant de sa classe \mathcal{R}_g (cf. bloc C). La seconde parcourt le reste des éléments de $\tau(g)$ en utilisant \mathcal{R}_g pour faire les comparaisons avec les listes de successeurs.
3. La procédure GEN-ORDRE a pour effet de calculer les variables $\$X$, $\$f$ et $\$treillis$. Elles sont initialisées à vide (ligne 1). Chaque itération de la boucle A aura pour effet de prendre en compte les générateurs minimaux fréquents de support égal à n et de calculer les nouvelles valeurs des variables $\$X$, $\$f$ et $\$treillis$. Les supports sont énumérés dans l'ordre décroissant.
4. L'intérieur de l'énumération B, est en trois parties :
 - ligne 2 + bloc C : début du parcours des éléments de $\tau(g)$ et actions associées. Le parcours s'arrête soit parce qu'il est arrivé à son terme, soit parce qu'il a rencontré le représentant de la classe de g (ligne 6) ;
 - bloc E + ligne 10 : actions conclusives de la partie précédente ;
 - bloc F : suite et fin du parcours des éléments de $\tau(g)$ et actions associées.
5. L'énumération des éléments g_1 de $\tau(g)$ est en deux parties distinguées : bloc C et bloc F. Dans le bloc C, l'algorithme ne connaît pas le représentant de g et travaille avec l'ensemble $\phi(n, g, g)$ tandis que, dans le bloc F, il connaît le représentant \mathcal{R}_g de g et travaille avec l'ensemble $\phi(n, \mathcal{R}_g, g_1)$.

6. À l'intérieur du bloc C, le bloc D parcourt les éléments \mathcal{F} de $\phi(n, g, g_1)$ (bloc D). Si \mathcal{F} est de support $> n$, il s'agit d'un prédécesseur immédiat de g . Il est provisoirement stocké comme tel dans la variable $\$pred_g$ (ligne 5). Si \mathcal{F} est de support $= n$, il s'agit du représentant de g . Dès lors le parcours D s'arrête avant son terme (ligne 6) et le parcours C sera alors suspendu (ligne 7) et reprendra plus tard (bloc F).
7. bloc conclusif : le parcours C s'arrête avant son terme lorsque l'ensemble $\phi(n, g, g_1)$ contient le représentant de g . La variable \mathcal{F} est alors égale à ce représentant. L'ensemble $\$f(\mathcal{F})$ des éléments équivalents à \mathcal{F} est donc augmenté de g (ligne 8). Dans le cas où le parcours C s'arrête à son terme, g n'a pas de représentant : il devient le représentant de sa classe et est donc ajouté comme tel à l'ensemble \mathcal{X} des représentants (ligne 9). Enfin, les affectations $\mathcal{R}_g = \mathcal{F}$ à la fin de la ligne 8 et $\mathcal{R}_g = g$ à la fin de la ligne 9, font qu'en sortie du bloc E, avant la ligne 10, la variable R_g est égale au représentant de g . La ligne 10 met alors à jour la variable $\$treillis$.
8. le bloc F (partie 3) réalise ce qui reste à réaliser du parcours des éléments de $\tau(g)$. À l'intérieur du bloc F, le bloc G parcourt les éléments de $\phi(n, \mathcal{R}_g, g_1)$. Si le support de l'élément courant \mathcal{F} est $> n$, il s'agit d'un prédécesseur immédiat de g . La variable $\$treillis$ est alors mise à jour (ligne 13). Si son support est égal à n , alors $\mathcal{F} = \mathcal{R}_g$. La ligne 14 arrête le parcours G puisque la comparaison de \mathcal{R}_g avec la liste des successeurs a été déjà effectuée et ne va donc pas donner lieu à de nouveaux liens de succession immédiate.

Il est important de noter le lien entre les objets mathématiques $\phi(n, g, g_1)$ et $\phi(n, \mathcal{R}_g, g_1)$ et les objets de programmation $\phi(n, g, g_1)$ et $\phi(n, \mathcal{R}_g, g_1)$, qui leurs sont respectivement associés. En effet, les ensembles $\phi(n, g, g_1)$ et $\phi(n, \mathcal{R}_g, g_1)$ dépendent du treillis tout entier. Or, de ce treillis, la procédure GEN-ORDRE n'a que la partie stockée par la variable $\$treillis$. L'idée qui sous-tend cette procédure est que la partie du treillis stockée par la variable $\$treillis$ suffit au calcul des ensembles ϕ . À cet égard, nous introduisons les ensembles $\phi(n, g, g_1)$. Leur définition est calquée sur celle des ensembles $\phi(n, g, g_1)$. La différence est qu'elle utilise l'ordre stocké dans $\$treillis$. Dans la définition ci-dessous, « successeur » signifie « successeur au sens de la Proposition 3 », tandis que « \$successeur » signifie « successeur selon l'ordre stocké dans la variable $\$treillis$ ». La définition de $\phi(n, g, g_1)$ est ainsi comme suit :

DÉFINITION 7. Soient g un générateur minimal de support n et g_1 un sous-ensemble de g de cardinal $|g| - 1$ ($g_1 \in \tau(g)$). Soit $\phi(n, g, g_1)$ l'ensemble des h de \mathcal{X} tels que :

soit :

- (1a) h est de support n et
- (1b) h est un \$successeur de $\rho(g_1)$ et
- (1c) h est équivalent à g (selon la Proposition 3) et
- (1d) $h \prec g$;

soit :

- (2a) h est de support $> n$ et

- (2b) $((h = \rho(g_1)) \text{ ou } (h \text{ est un } \$\text{successeur de } \rho(g_1)))$ et
 (2c) $g \text{ est successeur de } h$ (selon la Proposition 3) et
 (2d) pour tout représentant h' de support $> n$ tel que h' est $\$$ successeur de h , g n'est pas successeur de h' (selon la Proposition 3).

Il en résulte qu'à la ligne D.d de la procédure GEN-ORDRE, $\phi(n, g, g_1) = \$\phi(n, g, g_1)$. Par ailleurs, à la ligne G.d de la procédure GEN-ORDRE, $\phi(n, \mathcal{R}_g, g_1) = \$\phi(n, \mathcal{R}_g, g_1)$. On peut donc remplacer dans le pseudo-code, l'occurrence de $\phi(n, g, g_1)$ par $\$\phi(n, g, g_1)$ et celle $\phi(n, \mathcal{R}_g, g_1)$ par $\$\phi(n, \mathcal{R}_g, g_1)$.

REMARQUE 2.

– Si nous avons opté pour *n'importe quel autre ordre* dans le tri de \mathcal{GMF}_κ (par exemple, tri par ordre *croissant* par rapport aux supports) et si la classe d'équivalence de g est incomparable avec celles des éléments de L , les comparaisons de g avec les listes des successeurs immédiats des éléments de L seraient dans ce cas obligatoires. En effet, deux classes d'équivalence incomparables (celle de g et celle d'un représentant appartenant à L) peuvent avoir des successeurs en commun, existants déjà dans le *treillis des générateurs minimaux*. Ainsi, tout autre choix de tri augmenterait considérablement le nombre, et par conséquent le coût, des comparaisons pour construire le *treillis des générateurs minimaux*.

– Lors de la première étape, PRINCE adopte l'optimisation introduite par A-CLOSE pour détecter le niveau à partir duquel les générateurs minimaux fréquents ne sont plus forcément des fermés. Ceci permettra, lors de la seconde étape, d'optimiser encore plus la construction de la relation d'ordre : une partie (ou quasiment la totalité) du treillis pouvant être déjà construite dès la première étape. En effet, lorsque le motif fermé fréquent se confond avec son générateur c'est-à-dire la classe d'équivalence associée ne contient qu'un seul motif, ses prédécesseurs immédiats seront ses sous-ensembles immédiats. Les liens vers ces derniers étant stockés dans le champ *sous-ens-directs*, nous avons ainsi les prémisses nécessaires pour extraire les règles approximatives valides. Par ailleurs, aucune règle exacte ne peut être extraite dans ce cas.

Nous allons maintenant décrire les invariants de la procédure GEN-ORDRE. Rappelons qu'un invariant d'un algorithme est un couple (P, L) composé d'une propriété P liant certaines variables de l'algorithme et d'un endroit, un lieu, L dans ledit algorithme tel que la propriété P est vraie chaque fois que l'algorithme passe à l'endroit L . Dans ce sens, l'invariant au début de la boucle B.d est donné par le lemme suivant.

LEMME 9. Soit $\text{MAX}(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ l'ensemble des prédécesseurs immédiats de \mathcal{R}_2 qui sont soit des successeurs de \mathcal{R}_1 , soit égaux à \mathcal{R}_1 , avec \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 deux représentants de leur classe d'équivalence ($\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathcal{X}$). Soit $\text{Supp}^{(=n)}$ l'ensemble des générateurs minimaux de support $= n$ et $\text{treillis}^{(>n)}$ la restriction du treillis treillis à l'ensemble $\mathcal{X}^{(>n)}$ des représentants de support $> n$.

L'égalité suivante : $\$treillis = \text{treillis}^{(>n)} \cup (\cup_{(g_1 \in \text{Supp}^{(=n)} \text{ et } g_1 \prec g)} (\cup_{(h \in \tau(g_1))} \text{MAX}(\rho(h), \mathcal{R}) \times \mathcal{R}))$ avec $\mathcal{R} = \rho(g_1)$ est un invariant au début de la boucle B de la procédure GEN-ORDRE.

Les invariants qui régissent la relation d'équivalence entre générateurs minimaux fréquents, à savoir l'évolution des variables $\$X$ et $\$f$ sont indiqués dans le pseudo-code sous

forme de couples $(L.i, P.i)$, dans lesquels $L.i$ identifie un lieu dans l'algorithme et $P.i$ une propriété. Dans ce cadre, les invariants $(L.3, P.3)$ et $(L.4, P.4)$ signifient que tous les générateurs minimaux traités avant le générateur minimal courant g ont été correctement placés dans leur classe. Le lemme suivant prouve la validité de ces invariants.

LEMME 10. *Tous les couples $(L.i, P.i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ sont des invariants de la procédure GEN-ORDRE.*

DÉMONSTRATION 7. (partielle) La preuve du lemme se construit à partir de deux récurrences imbriquées à l'image de l'imbrication des boucles A et B. La récurrence extérieure établit que les couples $(L.i, P.i)$, $i = 1, 2$ sont des invariants ; la récurrence intérieure établit que, pour une valeur donnée du support n , les couples $(L.i, P.i)$, $i = 3, 4$ sont des invariants. La seule difficulté de la démonstration consiste à montrer que si les propriétés $P.i$ sont vraies en $L.i$, $i = 3, 4$, alors les propriétés $P.i'$ sont vraies en $L.i'$. Notons aussi que la différence entre $P.i$ et $P.i'$, $i = 3, 4$ est la substitution du signe \preceq au signe \prec . Nous développons ici uniquement cette preuve. Elle utilise le Lemme 8. Soit g le générateur minimal fréquent courant de la boucle B. On suppose que les propriétés $P.i$ sont vraies en $L.i$, $i = 3, 4$. Deux cas se présentent selon que g est ou n'est pas le représentant de sa classe.

CAS 1 : g est le représentant de sa classe, $g = \rho(g)$. Dans ce cas, quel que soit g_1 dans $\tau(g)$, l'ensemble $\phi(n, g, g_1)$ ne contient pas g . L'instruction 6 n'est donc jamais exécutée et le parcours D (variable π_1) se termine à son terme. Il en résulte que l'instruction 7 n'est jamais exécutée et que le parcours C (variable Γ) se termine lui aussi à son terme. Dans le bloc conclusif E, l'instruction 9 est alors exécutée. Elle augmente la variable \mathcal{X} du générateur minimal fréquent g et initialise la variable $f(g)$ avec le singleton $\{g\}$. Ces modifications conduisent, à partir de $(L.i, P.i)$, $i = 3, 4$ à $(L.i', P.i')$, $i = 3, 4$.

CAS 2 : g n'est pas le représentant de sa classe. On a $\rho(g) \prec g$, donc $\rho(g)$ est stocké dans la variable \mathcal{X} , d'après l'hypothèse $P.3$. Il résulte du Lemme 8 que g sera comparé à $\rho(g)$. Le parcours D sera donc arrêté avant son terme par l'instruction 6 et le parcours C sera suspendu par l'instruction 7. Dès lors, l'instruction 8 du bloc conclusif E sera exécutée. Elle intègre g dans sa classe. Il en résulte que la propriété $P.4'$ est vérifiée en $L.4'$. Par ailleurs, la propriété $P.3'$ est (trivialement) vérifiée en $L.3'$. En effet, la variable \mathcal{X} n'étant pas modifiée, la propriété $P.3$ est vérifiée, après le bloc conclusif E, en $L.3'$. Or, $(P.3 \text{ et } (\rho(g) \prec g)) \Rightarrow P.3'$. \diamond

4.3. EXTRACTION DES BASES GÉNÉRIQUES DE RÈGLES

Dans cette dernière étape, PRINCE extrait les règles génériques informatives valides formées par l'union de la base générique de règles exactes et de la réduction transitive de la base informative de règles approximatives.

4.3.1. Dérivation des motifs fermés fréquents et des règles informatives

Pour chaque classe d'équivalence du treillis d'Iceberg, PRINCE dérive simplement le motif fermé fréquent correspondant *via* l'application de la proposition donnée ci-dessous, dont la preuve utilise le théorème suivant :

THÉORÈME 1. Soient $f \in \mathcal{IFF}_K$ et GM_f l'ensemble de ses générateurs minimaux. Si $f_1 \in \mathcal{IFF}_K$ tel que f couvre f_1 dans le treillis d'Iceberg $(\hat{\mathcal{L}}, \subseteq)$ alors $face(f|f_1)$ est un bloqueur minimal de GM_f [Pfaltz, Taylor, 2002].

PROPOSITION 4. Soient f et $f_1 \in \mathcal{IFF}_K$ tels que f couvre f_1 dans le treillis d'Iceberg $(\hat{\mathcal{L}}, \subseteq)$. Soit GM_f l'ensemble des générateurs minimaux de f . Alors, le motif fermé fréquent f est égal à :

$$f = \cup\{g|g \in GM_f\} \cup f_1$$

DÉMONSTRATION 8. Étant donné que l'union des éléments de GM_f est un bloqueur de GM_f , la face $(f|f_1)$, qui est un bloqueur minimal pour GM_f d'après Théorème 1, est incluse dans l'union des éléments de GM_f . Ainsi, il suffit de calculer l'union de f_1 avec les éléments de GM_f pour dériver f . \diamond

Il est à noter que la Proposition 4 a pour avantage d'assurer l'extraction *sans redondance* de l'ensemble des motifs fermés fréquents. En effet, chaque motif fermé n'est déterminé qu'une seule fois.

Pour chaque classe d'équivalence, une fois son motif fermé fréquent déterminé et étant donné les liens de précédence établis lors de l'étape précédente, la dérivation des règles informatives qui lui sont associées se fait d'une manière immédiate (cf. Définition 2 et Définition 4).

4.3.2. Pseudo-code de la troisième étape de l'algorithme PRINCE

Le pseudo-code de cette étape est donné par la procédure GEN-BGRS (cf. Algorithme 4)⁹. Dans la procédure GEN-BGRS, L_1 désigne la liste des classes d'équivalence à partir desquelles sont extraites les règles d'association informatives. Par L_2 , nous désignons la liste des classes d'équivalence qui couvrent celles formant L_1 .

L'ensemble des règles informatives exactes \mathcal{BG} est initialement vide (ligne 2). Il en est de même pour l'ensemble des règles informatives approximatives \mathcal{RI} (ligne 3). Le parcours du *treillis des générateurs minimaux* s'effectue d'une manière ascendante en partant de la classe d'équivalence dont le générateur est l'ensemble vide (notée $[\emptyset]$). Ainsi, L_1 est initialisée par ce générateur minimal (ligne 4). Rappelons que la fermeture de l'ensemble vide a été déjà calculée dès la première étape en collectant les items qui se répètent dans tous les objets (cf. lignes 7-8 de l'algorithme 1, page 19). La liste L_2 est initialement vide (ligne 5). Les traitements de cette étape s'arrêtent lorsqu'il n'y a plus de classes d'équivalence à partir desquelles seront extraites des règles génériques (ligne 6). Si la fermeture de l'ensemble vide n'est pas nulle, la règle *exacte informative* mettant en jeu l'ensemble vide et sa fermeture sera extraite (lignes 8-9). Ayant l'ordre partiel construit, GEN-BGRS extrait les règles *approximatives informatives valides* mettant en jeu l'ensemble vide et les motifs fermés fréquents de la couverture supérieure de $[\emptyset]$ (lignes 10-15). Ces fermetures sont dérivées en appliquant la Proposition 4 aux générateurs minimaux fréquents de chaque classe d'équivalence et la fermeture de l'ensemble vide (ligne 10). Cette couverture supérieure est stockée afin que le même traitement soit réalisé pour les classes d'équivalence la composant (ligne 11). Une fois les traitements relatifs à la classe d'équivalence de l'ensemble vide terminés, L_1 prendra pour valeur le

⁹ BGR est l'acronyme de Base Générique de Règles.

Algorithme 4 : GEN-BGRS**Données :** - le *treillis des générateurs minimaux*, et le seuil *minconf*.**Résultats :**

1. Le motif fermé fréquent de chaque classe d'équivalence.
2. La base générique de règles exactes \mathcal{BG} .
3. La réduction transitive des règles approximatives \mathcal{RI} .

1 Début2 $\mathcal{BG} = \emptyset;$ 3 $\mathcal{RI} = \emptyset;$ 4 $L_1 = \{\emptyset\};$ 5 $L_2 = \emptyset;$ 6 **tant que** ($L_1 \neq \emptyset$) **faire**7 **pour chaque** ($g \in L_1$) **faire**8 **si** ($g.i\ f\ f \neq g$) **alors**9 $\mathcal{BG} = \mathcal{BG} \cup \{(t \Rightarrow (g.i\ f\ f \setminus t), g.support) \mid t \in \mathcal{GMF}_K \text{ et } t \in [g]\};$ 10 **pour chaque** $g_1 \in g.succs-immédiats$ **faire**11 **si** ($g_1.i\ f\ f = \emptyset$) **alors**12 $g_1.i\ f\ f = \cup \{t \in \mathcal{GMF}_K \mid t \in [g_1]\} \cup g.i\ f\ f;$
13 $L_2 = L_2 \cup \{g_1\};$ 14 **si** ($\frac{g_1.support}{g.support} \geq minconf$) **alors**15 $\mathcal{RI} = \mathcal{RI} \cup \{(t \Rightarrow (g_1.i\ f\ f \setminus t), g_1.support, \frac{g_1.support}{g.support}) \mid t \in \mathcal{GMF}_K \text{ et } t \in [g]\};$ 16 $L_1 = L_2;$ 17 $L_2 = \emptyset;$ **18 Fin**

contenu de L_2 (ligne 16) afin d'appliquer le même processus aux classes d'équivalence qui sont successeurs immédiats de $[\emptyset]$. L_2 est initialisée de nouveau au vide (ligne 17) et contiendra les successeurs immédiats des classes d'équivalence contenues dans L_1 . Étant donné qu'une classe d'équivalence peut avoir plusieurs prédécesseurs immédiats, un test est réalisé pour vérifier qu'elle n'a pas été déjà insérée dans L_2 . Ce test consiste à vérifier si le motif fermé fréquent correspondant a été déjà calculé (ligne 11). De la même manière, GEN-BGRS traite les niveaux supérieurs du *treillis des générateurs minimaux* jusqu'à atteindre ses sommets (c'est-à-dire les classes d'équivalence n'ayant pas de successeurs). L_1 serait alors vide et la condition de la ligne 6 ne sera plus vérifiée. Ainsi, la troisième étape de l'algorithme PRINCE prend fin et toutes les règles génériques sont extraites.

REMARQUE 3. Il est important de noter que dans [Zaki, 2004], l'auteur montre que les bases génériques offrent un facteur de réduction du nombre total de règles pouvant atteindre $O(\frac{2^n}{n})$, où n étant la taille de le motif fréquent le plus long (par rapport au nombre d'items).

EXEMPLE 5. Afin d'illustrer le déroulement de l'algorithme PRINCE, considérons le contexte d'extraction \mathcal{K} donné par la figure 1 (Gauche) pour $minsupp = 2$ et $minconf = 0,50$. La première étape permet de déterminer l'ensemble des générateurs minimaux $\mathcal{GMF}_{\mathcal{K}}$ trié, ainsi que la bordure \mathcal{GBd}^- . $\mathcal{GMF}_{\mathcal{K}} = \{(\emptyset, 5), (B, 4), (C, 4), (E, 4), (A, 3), (BC, 3), (CE, 3), (AB, 2), (AE, 2)\}$ et $\mathcal{GBd}^- = \{(D, 1)\}$. Dans la deuxième étape, PRINCE parcourt $\mathcal{GMF}_{\mathcal{K}}$ en comparant chaque générateur minimal fréquent g de taille k ($k \geq 1$) aux listes des successeurs immédiats de ses sous-ensembles de taille $(k - 1)$. L'ensemble vide, n'ayant aucun sous-ensemble, est inséré directement dans le *treillis des générateurs minimaux* (cf. Figure 2.a). Ensuite, B est ajouté à $\emptyset.succs-immédiats$ (cf. Figure 2.b), la liste des successeurs immédiats du \emptyset , initialement vide. Ensuite, C sera comparé à B. Le motif BC étant un générateur minimal, [B] et [C] sont alors incomparables et C est ajouté à $\emptyset.succs-immédiats$ (cf. Figure 2.c). Le générateur minimal fréquent E est alors comparé à cette liste. En comparant E à B, nous avons $E.support = B.support = Supp(BE)$. Ainsi, $E \in [B]$, dont B est le représentant (cf. Figure 2.d). Afin de ne maintenir que des représentants dans les listes des successeurs immédiats, les occurrences de E s'il y en a seront ainsi à remplacer par B dans des listes des successeurs immédiats (dans ce cas, il n'y a aucune occurrence) et les comparaisons seront à poursuivre avec B au lieu de E (dans ce cas, il n'y a plus de comparaisons à faire *via* E). Les traitements s'arrêtent alors pour E. À ce moment du traitement, $\emptyset.succs-immédiats = \{B, C\}$. Le générateur minimal fréquent A est alors comparé à B. Comme $AB \in \mathcal{GMF}_{\mathcal{K}}$, [B] et [A] sont incomparables. Par contre, en comparant A et C, $A.support < C.support$ et $A.support = Supp(AC)$ et donc [A] est un successeur de [C]. Le générateur minimal fréquent A est tout simplement ajouté à $C.succs-immédiats$ étant donné qu'elle est encore vide (cf. Figure 2.e). Le motif BC est comparé aux listes des successeurs immédiats de B et de C. La liste des successeurs immédiats de B est vide, BC est alors ajouté. La liste des successeurs immédiats de C contient A. Le générateur minimal fréquent BC est alors comparé à A et comme $BC.support = A.support$ mais $BC.support \neq Supp(ABC)$, [BC] et [A] sont incomparables et BC est donc ajouté à $C.succs-immédiats$ (cf. Figure 2.f). Le motif CE est comparé aux listes des successeurs immédiats de C et de E. Celle de C contient A et BC. Les classes d'équivalence [CE] et [A] sont incomparables, puisque $CE.support = A.support$ mais $CE.support \neq Supp(ACE)$. En comparant CE à BC, $CE.support = BC.support = Supp(BCE)$ alors le motif CE va être affecté à la classe d'équivalence de BC et les traitements dédiés à la gestion efficace des classes d'équivalence sont invoqués (cf. Figure 2.g). En particulier, les comparaisons de CE aux successeurs immédiats de [E] seront faites avec BC qui est le représentant de la classe associée. Comme [E] a pour représentant B, BC est donc comparé aux éléments de $B.succs-immédiats$. Cependant, comme $B.succs-immédiats$ ne contient que BC alors les comparaisons se terminent. Le même traitement est appliqué pour AB et AE. Ainsi, la procédure de construction de l'ordre partiel prend fin. Le *treillis des générateurs minimaux* obtenu est donné par la Figure 2.h. Pour la dérivation des règles génériques, le *treillis des générateurs minimaux* est parcouru d'une manière ascendante à partir de $[\emptyset]$. Comme $\gamma(\emptyset) = \emptyset$, il n'y a donc pas de règle exacte informative relative à $[\emptyset]$. Nous avons $\emptyset.succs-immédiats = \{B, C\}$. Le motif fermé fréquent correspondant à [B] est alors dérivé et est égal à BE (cf. Figure 2.i). La règle informative approximative valide $\emptyset \Rightarrow BE$ de support 4 et de confiance 0,80 sera alors extraite. Il en est de même pour la règle $\emptyset \Rightarrow C$, ayant les mêmes valeurs de support et de confiance que la précédente. De la même manière et à partir de [B] et [C], le parcours du treillis se fait d'une façon ascendante jusqu'à extraire toutes les règles d'association

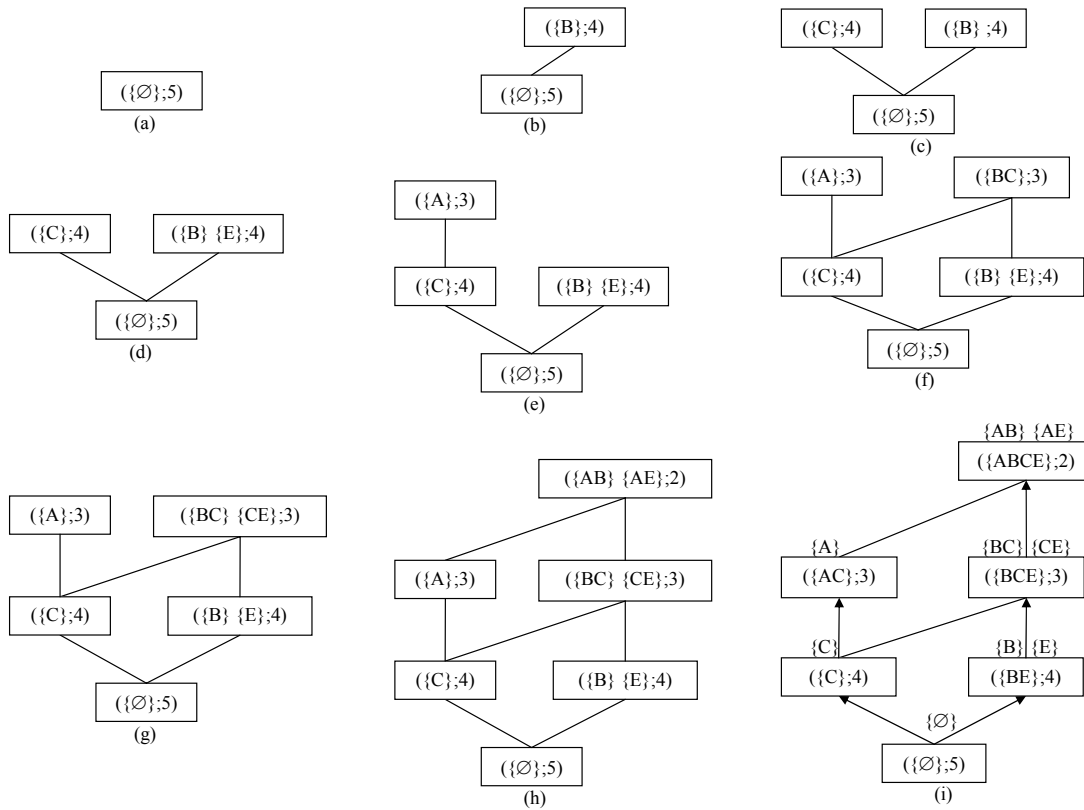


FIGURE 2. Étapes de la construction du *treillis des générateurs minimaux* et du *treillis d'Iceberg* associés au contexte d'extraction \mathcal{K} pour $\text{minsupp} = 2$.

Règles informatives exactes	Règles informatives approximatives	
$R_1 : E \Rightarrow B$ (4)	$R_8 : \emptyset \xrightarrow{0,80} BE$ (4)	$R_{13} : E \xrightarrow{0,75} BC$ (3)
$R_2 : B \Rightarrow E$ (4)	$R_9 : \emptyset \xrightarrow{0,80} C$ (4)	$R_{14} : A \xrightarrow{0,66} BCE$ (2)
$R_3 : A \Rightarrow C$ (3)	$R_{10} : C \xrightarrow{0,75} A$ (3)	$R_{15} : BC \xrightarrow{0,66} AE$ (2)
$R_4 : BC \Rightarrow E$ (3)	$R_{11} : C \xrightarrow{0,75} BE$ (3)	$R_{16} : CE \xrightarrow{0,66} AB$ (2)
$R_5 : CE \Rightarrow B$ (3)	$R_{12} : B \xrightarrow{0,75} CE$ (3)	
$R_6 : AB \Rightarrow CE$ (2)		
$R_7 : AE \Rightarrow BC$ (2)		

FIGURE 3. GAUCHE : La base générique de règles exactes $\mathcal{B}\mathcal{G}$. DROITE : La réduction transitive des règles approximatives $\mathcal{R}\mathcal{I}$. Le support de chaque règle est mis entre parenthèses.

informatives valides.

À la fin de l'exécution de l'algorithme, nous obtenons le treillis d'Iceberg associé au contexte d'extraction \mathcal{K} (cf. Figure 2.i)¹⁰ ainsi que la liste des règles informatives valides, donnée par la Figure 3.

¹⁰ Dans la Figure 2.i, les flèches indiquent les liens de précedence utilisés pour dériver les motifs fermés fréquents.

5. PROPRIÉTÉS DE L'ALGORITHME PRINCE

Dans ce qui suit, nous allons prouver différentes propriétés associées à l'algorithme PRINCE.

5.1. PREUVES DE VALIDITÉ, DE TERMINAISON ET DE COMPLÉTUDE

Dans cette sous-section, nous allons montrer la validité de l'algorithme PRINCE, puis sa terminaison et sa complétude.

PROPOSITION 5. *L'algorithme PRINCE est valide. En effet, il permet de déterminer tous les motifs fermés fréquents, leurs générateurs minimaux associés ainsi que toutes les règles génériques informatives valides.*

DÉMONSTRATION 9. Nous allons montrer la validité de PRINCE en montrant la validité de chacune des étapes le constituant.

1. **PREMIÈRE ÉTAPE :** *Détermination des générateurs minimaux* PRINCE détermine tous les générateurs minimaux fréquents ainsi que la bordure négative non fréquente. En effet, PRINCE parcourt l'espace de recherche par niveau (et donc par taille croissante des candidats générateurs minimaux). Tout au long de ce parcours, PRINCE élimine tout candidat g ne pouvant pas être un générateur minimal. L'élagage d'un tel candidat est basé sur la Proposition 1 et le Lemme 3.

2. **DEUXIÈME ÉTAPE :** *Construction du treillis des générateurs minimaux*

Chaque générateur minimal g est inséré dans le *treillis des générateurs minimaux* via sa comparaison avec les listes des successeurs immédiats *des classes d'équivalence auxquelles appartiennent ses sous-ensembles de taille $(k - 1)$* . Au moment de l'introduction de g , les classes d'équivalence de ses sous-ensembles de taille $(k - 1)$ ont été déjà insérées dans le *treillis des générateurs minimaux*. En effet, le support des générateurs minimaux fréquents composant chacune de ces classes d'équivalence est strictement supérieur à celui de g . Par ailleurs, lors des comparaisons de g avec les éléments des listes des successeurs de l'ensemble $\tau(g)$, les différents cas possibles sont gérés moyennant la Proposition 3 (cf. page 22).

Ainsi, chaque liste des successeurs immédiats est comparée à tous les générateurs minimaux fréquents susceptibles d'y appartenir. Les traitements s'arrêtent lorsqu'il n'y a plus de générateurs minimaux fréquents à introduire dans le *treillis des générateurs minimaux*.

3. **TROISIÈME ÉTAPE :** *Extraction des bases génériques informatives de règles*

Dans cette étape, le parcours du *treillis des générateurs minimaux* se fait en partant de $[\emptyset]$. Toute classe d'équivalence \mathcal{CE} , autre que $[\emptyset]$, admet au moins un prédécesseur immédiat. La classe \mathcal{CE} sera donc incluse dans au moins une couverture supérieure d'une autre classe d'équivalence. Ceci permettra de l'inclure dans la liste des classes d'équivalence à traiter lors de la prochaine itération (c'est-à-dire dans la liste L_2 de l'Algorithme 4, page 35). Les traitements s'arrêtent lorsque les couvertures supérieures des classes d'équivalence traitées en dernier sont vides. Ainsi, toutes les classes d'équivalence du treillis d'Iceberg seront traitées. En appliquant la Proposition 4 (cf. page 34), tous les motifs fermés fréquents sont dérivés au fur et à mesure de ce parcours ascendant. Les règles génériques informatives valides sont alors extraites d'une manière directe. \diamond

PROPOSITION 6. *L’algorithme PRINCE termine dans tous les cas et son résultat est complet.*

DÉMONSTRATION 10. Montrons que l’algorithme PRINCE termine quel que soit le contexte d’extraction \mathcal{K} donné en entrée et quelles que soient les valeurs de *minsupp* et *minconf*. Étant donné que le nombre de couples du contexte d’extraction est fini, le nombre de générateurs minimaux fréquents extraits du contexte \mathcal{K} lors de la première étape est fini. Afin de construire le treillis d’Iceberg, les comparaisons entre générateurs minimaux sont de nombre fini étant donné que le nombre d’éléments de chaque liste de successeurs immédiats est fini. Il en est de même pour le nombre de générateurs minimaux fréquents déjà insérés dans le treillis partiellement construit lors du traitement d’un générateur donné. De même le treillis d’Iceberg parcouru lors de la troisième étape a une taille finie, égale au nombre de ses classes d’équivalence.

Le résultat de l’algorithme PRINCE est complet étant donné que la construction du treillis d’Iceberg assure l’exhaustivité des éléments (les générateurs minimaux fréquents) de chaque classe d’équivalence. De même, elle assure l’exhaustivité des éléments de la liste des successeurs immédiats de chaque classe d’équivalence. Les traitements effectués lors de la troisième étape prennent ainsi en compte toutes les classes d’équivalence. \diamond

5.2. COMPLEXITÉ DE L’ALGORITHME PRINCE

Dans cette sous-section, nous allons étudier la complexité théorique au *pire des cas* de l’algorithme PRINCE.

PROPOSITION 7. *Dans le pire des cas, la complexité de l’algorithme PRINCE est $O((n^3 + m) \times 2^n)$, où n (resp. m) est le nombre d’items (resp. objets) du contexte d’extraction.*

DÉMONSTRATION 11. Soit un contexte d’extraction $\mathcal{K} = (\mathcal{O}, \mathcal{I}, \mathcal{M})$, le pire des cas est obtenu quand le nombre de générateurs minimaux fréquents est égal au nombre de motifs fréquents et est égal au nombre de motifs fermés fréquents (c’est-à-dire $2^{|\mathcal{I}|}$). En d’autres termes, chaque générateur minimal fréquent est aussi un fermé et le *treillis des générateurs minimaux* se confond avec le treillis des motifs fréquents.

Soient $m = |\mathcal{O}|$ et $n = |\mathcal{I}|$. La taille maximale d’un objet est égale au nombre maximum d’items distincts, c’est-à-dire n . Nous allons considérer que tous les objets ont pour longueur n . Pour chaque objet et dans le pire des cas, nous déterminons ses 2^n sous-ensembles afin de calculer les supports des motifs. Nous allons calculer la complexité théorique au pire des cas de l’algorithme PRINCE en calculant la complexité au pire des cas de chacune des trois étapes le constituant.

– PREMIÈRE ÉTAPE : Détermination des générateurs minimaux

1. L’initialisation de l’ensemble des items candidats se fait en $O(1)$ (ligne 2 dans Algorithme 1, page 19).
2. Le coût du calcul des supports des items est de l’ordre de $O(m \times n)$ (ligne 3).
3. Les affectations des lignes 4-5 se font en $O(1)$.
4. Le coût de l’élégage par rapport aux supports des items est de l’ordre de $O(n)$ (lignes 6-14).

5. Le coût de la détermination des générateurs minimaux fréquents de tailles supérieures ou égales à 2 (lignes 15-16) est égal à la somme des coûts suivants :
 - (a) APRIORI-GEN : il y a $(2^n - n - 1)$ candidats à générer. Ainsi, le coût de cette phase est de l'ordre de $O(2^n - n)$ (lignes 2-3 dans Algorithme 2, page 20) ;
 - (b) Le coût de la vérification de l'idéal d'ordre, et en même temps, le calcul du support estimé et le stockage des liens vers les sous-ensembles adéquats est de l'ordre de $O(n^2 \times (2^n - n))$ (lignes 4-14) ;
 - (c) Le coût du calcul des supports des candidats de tailles supérieures ou égales à 2 est de l'ordre de $O(m \times (2^n - n))$ (ligne 16) ;
 - (d) Le coût de l'élagage par rapport aux supports des candidats est de l'ordre de $O(2^n - n)$ (lignes 17-22).

La complexité \mathcal{C}_1 de cette étape est alors : $\mathcal{C}_1 = O(m \times n + n + (2^n - n) + n^2 \times (2^n - n) + m \times (2^n - n) + 2^n - n) = O(m \times 2^n + 2^n + (n^2 + 1) \times (2^n - n))$. Étant donné que 2^n est largement supérieur à n , alors $\mathcal{C}_1 = O(m \times 2^n + 2^n + (n^2 + 1) \times 2^n) = O(m \times 2^n + (n^2 + 2) \times 2^n) = O(m \times 2^n + n^2 \times 2^n) = O((n^2 + m) \times 2^n)$. D'où, $\mathcal{C}_1 = O((n^2 + m) \times 2^n)$.

– DEUXIÈME ÉTAPE : *Construction du treillis des générateurs minimaux*

1. La boucle *pour* du bloc A (dans Algorithme 3 page 29) se répète 2^n fois étant donné que dans le pire des cas, nous avons 2^n générateurs minimaux fréquents.
2. Pour chaque générateur minimal fréquent g de support n et de taille k , la boucle *parcours* du bloc C se répète k fois étant donné que g admet k sous-ensembles de taille $(k - 1)$ (k , le nombre de sous-ensembles, sera largement majoré par n). Pour chaque sous-ensemble de g de taille $(k - 1)$, disons g_1 , les traitements suivants sont réalisés :
 - (a) Le coût du repérage du représentant de la classe de g_1 est en $O(1)$ étant donné que dans le pire des cas, g_1 est le seul générateur minimal fréquent de sa classe d'équivalence et est donc son représentant (g_1 est égal à $\rho(g_1)$).
 - (b) Le motif g_1 , étant de taille égale à $(k - 1)$, possède au maximum $n - (k - 1) - 1$ successeurs immédiats, au moment de l'intégration de g dans le *treillis des générateurs minimaux* ($n - k$), le nombre maximal de successeurs immédiats, sera largement majoré par n . Afin de déterminer l'ensemble $\phi(n, g, g_1)$, g est ainsi comparé à chaque élément g_2 de la liste des successeurs immédiats de g_1 , c'est-à-dire, $g_1.succs-immédiats$. Le coût de la comparaison de g avec g_2 est la somme des deux coûts suivants :
 - i. Le premier coût est relatif à l'union de g et g_2 et qui est, au pire des cas, de l'ordre de $O(n)$. Soit q , le motif résultat de cette union.
 - ii. Le second coût est relatif à la recherche du support adéquat de q et qui est, au pire des cas, de l'ordre de $O(n)$. Notons que le motif q est un générateur minimal fréquent. En effet, q est inclus dans le motif contenant tous les items, c'est-à-dire le motif \mathcal{I} . Or, ce dernier – dans le pire des cas – est un générateur minimal fréquent et d'après la

propriété de l'idéal d'ordre des générateurs minimaux fréquents (cf. Proposition 1, page 11), q est un générateur minimal fréquent.

Étant donné que l'union de g avec tout élément de $g_1.succs-immédiats$ donne toujours un générateur minimal, aucune des deux conditions spécifiées par la Proposition 3 (cf. page 22) n'est vérifiée. Ainsi, $[g]$ est incomparable avec toutes les classes d'équivalence des représentants successeurs immédiats de g_1 . Par conséquent, $\phi(n, g, g_1)$ contient seulement g_1 (étant représentant de sa classe). Le motif g est donc ajouté en tant que successeur immédiat de g_1 en $O(1)$.

Ainsi, la complexité \mathcal{C}_2 de cette étape est de l'ordre de : $\mathcal{C}_2 = O(2^n \times n \times (1 + (n \times (n + n)) + 1)) = O(2^n \times n \times (n \times (n + n)))$.

D'où, $\mathcal{C}_2 = O(n^3 \times 2^n)$.

– TROISIÈME ÉTAPE : *Extraction des bases génériques informatives de règles*

1. Le coût des initialisations des lignes 2-5 (dans Algorithme 4, page 35) se fait en $O(1)$.
2. La condition de la boucle *tant que* est vérifiée tant qu'il y a des classes d'équivalence à traiter (ligne 6). Dans le pire des cas, chaque générateur minimal fréquent fermé forme une classe d'équivalence. Ainsi, 2^n classes d'équivalence sont traitées. Pour chaque classe d'équivalence \mathcal{CE} (ligne 7), le coût total de cette étape est égal à la somme des deux coûts suivants :
 - (a) Le premier coût consiste à dériver la fermeture correspondante à \mathcal{CE} . Cette dernière est le résultat de l'union du générateur minimal fréquent de \mathcal{CE} avec la fermeture d'un de ses prédécesseurs immédiats (lignes 11-13). Ceci est réalisé, au pire des cas, en $O(n)$.
 - (b) Le deuxième coût est relatif à l'extraction des règles d'association informatives.
 - i. Étant donné que, le générateur minimal fréquent de \mathcal{CE} est égal à sa fermeture, la condition de la ligne 8, testée en $O(1)$, n'est pas vérifiée. Ainsi, aucune règle exacte informative n'est extraite (ligne 9).
 - ii. Soit k la taille de le motif fermé fréquent de \mathcal{CE} . La classe \mathcal{CE} possède alors k prédécesseurs immédiats. Ainsi, pour une valeur de *minconf* égale à 0, k règles approximatives informatives valides sont extraites (lignes 14-15). Le coût de l'extraction de chacune des règles approximatives est égal au coût du calcul de la différence entre la prémisse et la conclusion et qui est, au pire des cas, de l'ordre de $O(n)$.

Le coût total, pour chaque classe d'équivalence, est alors de l'ordre de $O(n + 1 + n \times n)$ (la taille k d'un motif fermé fréquent étant largement majorée par n).

La complexité \mathcal{C}_3 de cette étape est alors de l'ordre de : $\mathcal{C}_3 = O(1 + (n + 1 + n^2) \times 2^n)$.
D'où, $\mathcal{C}_3 = O(n^2 \times 2^n)$.

Au pire des cas, la complexité totale de l'algorithme PRINCE est de l'ordre de : $\mathcal{C}_{pire} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 = O((n^2 + m) \times 2^n) + O(n^3 \times 2^n) + O(n^2 \times 2^n) = O((n^3 + 2 \times n^2 + m)2^n) = O((n^3 + m) \times 2^n)$. D'où, $\mathcal{C}_{pire} = O((n^3 + m) \times 2^n)$. \diamond

Ainsi, la complexité de PRINCE est de même ordre de grandeur que celle des algorithmes dédiés à l'extraction des motifs fermés fréquents [Godin & *al.*, 1995 ; Pasquier, 2000 ; Stumme & *al.*, 2002], bien qu'il détermine les trois composantes nécessaires à l'extraction des bases génériques de règles d'association.

6. ÉVALUATION EXPÉRIMENTALE

Dans cette section, nous présentons les performances de PRINCE comparées à celles des algorithmes CLOSE, A-CLOSE et TITANIC. PRINCE est implanté en langage C ¹¹ tandis que les trois autres algorithmes le sont en C++. Toutes les expérimentations ont été réalisées sur un PC muni d'un processeur Pentium IV ayant une fréquence d'horloge de 2,40 GHz et 512 Mo de mémoire RAM (avec 2 Go de swap) tournant sous la plate-forme S.U.S.E Linux 9.0. Les programmes ont été compilés avec le compilateur gcc 3.3.1.

Dans le cadre de nos expérimentations, nous avons comptabilisé le temps d'exécution total des algorithmes sur des contextes de référence denses et épars¹² ainsi que sur des contextes « pire des cas » [Hamrouni & *al.*, à paraître]. La définition d'un contexte « pire des cas » est comme suit :

DÉFINITION 8. *Un contexte « pire des cas » est un contexte où la taille de l'ensemble des items \mathcal{I} est égale à n et celle de l'ensemble des objets \mathcal{O} est égale à $(n + 1)$. Dans cette base, chaque item est vérifié par n objets différents. Chaque objet, parmi les n premiers, est vérifié par $(n - 1)$ items différents. Le dernier objet est vérifié par tous les items. Les objets sont tous différents deux à deux. Les items sont tous différents deux à deux.*

Les caractéristiques des contextes testés sont résumées par le Tableau 2. Typiquement, les quatre premiers contextes sont considérés comme denses, c'est-à-dire qu'ils produisent plusieurs motifs fréquents longs même pour des valeurs de supports élevées [Bayardo, 1998]. Le reste des contextes testés sont considérés comme épars. T10I4D100K et T40I10D100K sont deux contextes synthétiques générées par un programme développé dans le cadre du projet dbQUEST¹³. Les autres contextes de référence sont réels.

Pour l'algorithme PRINCE et dans toutes les figures qui vont suivre, nous utilisons un *minconf* égal à 0 %, c'est-à-dire que nous avons considéré, pour une valeur de *minsupp* fixée, le pire des cas par rapport au nombre de règles générées. En outre, tout au long de cette section, les figures présentées ont une échelle logarithmique. Dans les tableaux comparatifs des temps d'exécution, nous avons arrondi les valeurs à l'entier le plus proche pour les avoir toutes en seconde étant donné les écarts dans les temps d'exécution des algorithmes. Par ailleurs, « / » signifie que l'exécution ne s'est pas terminée correctement et que le ratio correspondant ne peut être calculé.

Avant de nous intéresser aux performances de PRINCE, nous donnons à titre indicatif un exemple montrant l'utilité du couple de bases (\mathcal{BG} , \mathcal{RI}) dans la réduction sans perte d'information du nombre de règles offertes à l'utilisateur. Par exemple, pour le contexte

¹¹ Une version de l'algorithme PRINCE est disponible à l'adresse suivante : http://www.cck.rnu.tn/sbenyahia/software_release.htm.

¹² L'ensemble de ces contextes est disponible à [Goethals, 2004].

¹³ Le générateur des bases synthétiques est disponible à l'adresse suivante : <http://www.almaden.ibm.com/software/quest/resources/datasets/data/>.

T	Taille moyenne des objets		i_1	i_2	i_3	i_4
I	Taille moyenne des motifs maximaux potentiellement fréquents	o_1	×	×	×	×
D	Nombre d'objets générés	o_2	×		×	×
		o_3	×	×		×
		o_4	×	×	×	
		o_5	×	×	×	×

CONTEXTES DE RÉFÉRENCE	TYPE DU CONTEXTE	NOMBRE D'ITEMS	NOMBRE D'OBJETS	TAILLE MOYENNE D'UN OBJET
PUMSB	Dense	7 117	49 046	74
CONNECT	Dense	129	67 557	43
CHES	Dense	75	3 196	37
MUSHROOM	Dense	119	8 124	23
T10I4D100K	Épars	1 000	100 000	10
T40I10D100K	Épars	1 000	100 000	40
RETAIL	Épars	16 470	88 162	10
ACCIDENTS	Épars	469	340 183	33
Contexte « pire des cas »	Épars	n	$n + 1$	$\frac{n^2}{n + 1}$

TAB. 2. (HAUT À GAUCHE) Paramètres des contextes synthétiques. (HAUT À DROITE) Exemple d'un contexte « pire des cas » pour $n = 4$. (BAS) Caractéristiques des contextes de test.

MUSHROOM et pour un $minsupp = 10 \%$, la taille de $(\mathcal{BG}, \mathcal{RI})$ est égale à **33 762** alors que celle de l'ensemble de toutes les règles valides¹⁴ est égale à **380 791 946**, ce qui constitue un taux de réduction égal à **1 127,88** fois. Ceci montre clairement que l'extraction des bases génériques est plus avantageuse que l'extraction de toutes les règles et confirme les résultats obtenus dans d'autres travaux tels que [Ashrafi & al., 2007 ; Ceglar, Roddick, 2006 ; Kryszkiewicz, 2002 ; Zaki, 2004].

6.1. PERFORMANCES DE PRINCE *versus* CLOSE, A-CLOSE ET TITANIC

6.1.1. Expérimentations sur les contextes denses

Les temps d'exécution de l'algorithme PRINCE comparés respectivement aux algorithmes CLOSE, A-CLOSE et TITANIC sur les contextes denses sont présentés par la Figure 4 et le Tableau 3.

- **PUMSB** : pour cette base, les performances de PRINCE sont meilleures que celles de CLOSE, A-CLOSE et TITANIC pour toutes les valeurs de $minsupp$. Les performances de CLOSE et A-CLOSE se dégradent considérablement étant donné qu'ils effectuent des intersections sur un grand nombre d'objets de taille élevée. Le mécanisme de comptage par inférence adopté par TITANIC s'avère plus efficace que le calcul des intersections adopté par CLOSE et A-CLOSE. Ceci peut être expliqué par le nombre réduit d'items fréquents à prendre en considération lors du calcul de la fermeture d'un générateur minimal fréquent. Les performances de PRINCE peuvent être expliquées par le fait que les traitements à effectuer pour un générateur minimal fréquent sont beaucoup moins coûteux que ceux

¹⁴ Fourni par l'implémentation de Bart Goethals disponible à : <http://www.adrem.ua.ac.be/~goethals/software/>.

effectués pour les trois autres algorithmes. Les traitements de gestion des classes d'équivalence permettent aussi à PRINCE d'éviter le calcul redondant des fermetures. En effet, pour une valeur de *minsupp* égale à 75 %, le nombre de générateurs minimaux fréquents (égal à 248 406) est presque égal à 2,46 fois le nombre de motifs fermés fréquents (égal à 101 083).

- **CONNECT** : pour cette base, et bien qu'il n'y ait aucun calcul redondant des fermetures pour les trois algorithmes CLOSE, A-CLOSE et TITANIC (le nombre de générateurs minimaux fréquents étant égal à celui des motifs fermés fréquents), les performances de notre algorithme restent les meilleures. En effet, tout comme PUMSB, CONNECT est caractérisé par un grand nombre d'objets de taille élevée. Ces caractéristiques compliquent la tâche des algorithmes CLOSE et A-CLOSE. PRINCE est alors avantagé par un coût réduit des comparaisons effectuées pour un générateur minimal fréquent comparé aux tentatives d'extension exécutées pour un générateur minimal fréquent dans le cas de TITANIC. Il est à noter que pour *minsupp* = 50 %, l'exécution de TITANIC n'a pu se terminer pour manque d'espace mémoire.

- **CHES** : pour cette base, les performances de PRINCE sont largement meilleures que celles de CLOSE, A-CLOSE et TITANIC pour toutes les valeurs de *minsupp*. Le mécanisme de comptage par inférence adopté par TITANIC s'avère plus efficace que le calcul des intersections adopté respectivement par les algorithmes CLOSE et A-CLOSE. Cependant, cette efficacité tend à diminuer avec la baisse de la valeur de *minsupp*. En effet, pour calculer les motifs fermés fréquents, TITANIC nécessite des recherches de supports dont le nombre augmente considérablement avec l'augmentation du nombre d'items fréquents, au fur et à mesure que la valeur de *minsupp* diminue.

- **MUSHROOM** : dans le cas du contexte MUSHROOM, PRINCE est encore une fois meilleur que CLOSE, A-CLOSE et TITANIC. PRINCE bénéficie du rôle important joué par les traitements de gestion des classes d'équivalence. En effet, pour une valeur de *minsupp* égale à 0,10 %, le nombre de générateurs minimaux fréquents (égal à 360 166) est presque égal à 2,20 fois le nombre de motifs fermés fréquents (égal à 164 117). Ainsi, bien que CLOSE et A-CLOSE bénéficiaient d'un nombre réduit d'objets ainsi qu'une taille moyenne des objets relativement petite sur lesquelles ils exécutent des intersections, ces deux algorithmes sont handicapés par un calcul redondant des fermetures. De son côté, TITANIC est handicapé au fur et à mesure que la valeur de *minsupp* diminue par le nombre de recherches des items nécessaires au calcul des fermetures. En effet, pour *minsupp* = 0,10 %, 116 items sont fréquents parmi 119 possibles alors que la taille maximale d'un générateur minimal fréquent est égale à 10 items seulement.

L'algorithme PRINCE s'avère performant sur les contextes denses et pour toutes les valeurs de *minsupp*. La différence entre les performances de PRINCE et celles de CLOSE et A-CLOSE atteint son maximum pour le contexte PUMSB. En effet, PRINCE est environ 160 (resp. 403) fois plus rapide que CLOSE (resp. A-CLOSE) pour un support de 85 %. De même, PRINCE est environ 538 fois plus rapide que TITANIC pour le contexte MUSHROOM et pour un support égal à 0,01 %. Pour ces contextes denses, PRINCE est en moyenne 42 (resp. 89 et 41) fois plus rapide que CLOSE (resp. A-CLOSE et TITANIC).

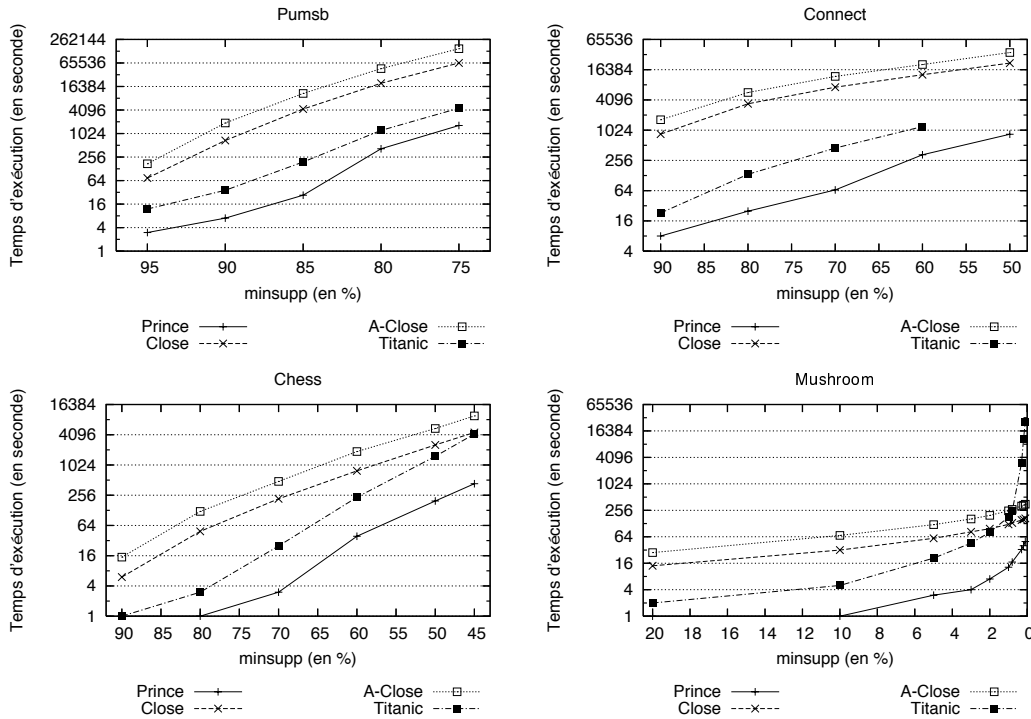


FIGURE 4. Les performances de PRINCE *versus* CLOSE, A-CLOSE et TITANIC pour les contextes denses.

Contexte	<i>minsupp</i> (%)	PRINCE (sec.)	CLOSE (sec.)	A-CLOSE (sec.)	TITANIC (sec.)	$\frac{CLOSE}{PRINCE}$	$\frac{A-CLOSE}{PRINCE}$	$\frac{TITANIC}{PRINCE}$
PUMSB	95,00	3	74	172	12	24,67	57,33	4,00
	90,00	7	679	1 914	36	97,00	273,43	5,14
	85,00	27	4 332	10 875	192	160,44	402,78	7,11
	80,00	416	19 848	47 167	1 233	47,71	113,38	2,96
	75,00	1 641	65 690	152 050	4 563	40,03	92,66	2,78
CONNECT	90,00	8	853	1 652	23	106,62	206,50	2,87
	80,00	25	3 428	5 771	135	137,12	230,84	5,40
	70,00	66	7 358	12 028	452	111,48	182,24	6,85
	60,00	332	13 024	20 747	1 205	39,23	62,49	3,63
	50,00	847	22 164	35 903	/	26,17	42,39	/
CHESS	90,00	1	6	15	1	6,00	15,00	1,00
	80,00	1	49	122	3	49,00	122,00	3,00
	70,00	3	217	481	25	72,33	160,33	8,33
	60,00	39	784	1 896	233	20,10	48,61	5,97
	50,00	197	2 560	5 451	1 520	12,99	27,67	7,71
MUSHROOM	45,00	435	4 550	9 719	4 237	10,46	22,34	9,74
	20,00	1	14	28	2	14,00	28,00	2,00
	10,00	1	32	69	5	32,00	69,00	5,00
	5,00	3	59	121	21	19,67	40,33	7,00
	3,00	4	83	163	46	20,75	40,75	11,50
	2,00	7	98	197	81	14,00	28,14	11,57
	1,00	13	123	250	180	9,46	19,23	13,85
	0,80	17	132	270	246	7,76	15,88	14,47
	0,30	33	154	322	3 127	4,67	9,76	94,76
	0,20	40	159	336	10 518	3,97	8,40	262,95
0,10	50	168	352	26 877	3,36	7,04	537,54	

TAB. 3. Tableau comparatif des temps d'exécution de PRINCE *versus* A-CLOSE, CLOSE et TITANIC pour les contextes denses.

6.1.2. Expérimentations sur les contextes épars

Les temps d'exécution de l'algorithme PRINCE comparés respectivement aux algorithmes CLOSE, A-CLOSE et TITANIC sur les contextes épars sont présentés par la Figure 5 et le Tableau 4.

- **T10I4D100K** : pour cette base, PRINCE fait mieux que A-CLOSE et TITANIC pour toutes les valeurs de *minsupp*. En comparant les performances de PRINCE à celles de CLOSE, PRINCE fait mieux que cet algorithme pour des valeurs de *minsupp* supérieures ou égales à 0,03 %. Alors que c'est l'inverse pour des supports inférieurs à 0,03 %. Ceci peut être expliqué par le fait que PRINCE est pénalisé par le coût de la construction du treillis d'Iceberg pour de très basses valeurs de *minsupp*. Cependant, CLOSE est avantagé par une taille moyenne des objets relativement faible (10 items). A-CLOSE se voit moins rapide en raison du balayage supplémentaire de l'ensemble des générateurs minimaux fréquents de taille $(k - 1)$ effectué pour chaque candidat g de taille k afin de savoir si g est minimal ou non. Au fur et à mesure que la valeur de *minsupp* diminue, les performances de TITANIC se dégradent considérablement. En effet, pour *minsupp* = 0,02 %, 859 items sont fréquents parmi 1 000 possibles alors que la taille maximale d'un générateur minimal fréquent est égale à 10 items seulement.

- **T40I10D100K** : les performances de PRINCE dans ce contexte sont largement meilleures que celles de CLOSE, A-CLOSE et TITANIC quelle que soit la valeur de *minsupp*. CLOSE et A-CLOSE sont handicapés par une taille moyenne élevée des objets (40 items) sachant que CLOSE prend le dessus sur A-CLOSE. De même, les performances de TITANIC se dégradent d'une manière considérable pour les mêmes raisons évoquées auparavant. Le coût des comparaisons, dans le cas de PRINCE, est nettement plus réduit que le coût du calcul des intersections (resp. des tentatives d'extension) pour calculer les fermetures dans le cas de CLOSE et A-CLOSE (resp. TITANIC). Ceci explique l'écart dans les performances entre PRINCE et les trois autres algorithmes. Il est aussi à noter l'augmentation surprenante du nombre de classes d'équivalence en passant de 1,50 % à 0,50 % comme valeurs de *minsupp*. En effet, nous passons de 6 540 à 1 275 940 classes d'équivalence, c'est-à-dire plus de 195 fois. Les performances de PRINCE demeurent intéressantes même pour un tel nombre de classes d'équivalence.

- **RETAIL** : pour cette base, notre algorithme réalise des temps d'exécution beaucoup moins importants que ceux réalisés respectivement par CLOSE, A-CLOSE et TITANIC. Les performances réalisées peuvent être expliquées par l'influence énorme du nombre élevé d'items dans RETAIL. En effet, CLOSE est handicapé par un nombre énorme de candidats pour lesquels il est obligé de calculer la fermeture alors qu'un grand nombre d'entre eux s'avèrera non fréquent. Le nombre de candidats affecte aussi les performances de A-CLOSE à cause des balayages supplémentaires ainsi que le coût du calcul des fermetures. De son côté, TITANIC est considérablement alourdi par un grand nombre d'items fréquents à considérer lors du calcul de la fermeture d'un générateur minimal fréquent (pour *minsupp* = 0,04 %, 4 463 items sont fréquents alors que la taille maximale d'un générateur minimal fréquent est égale à 6 items seulement) seulement. L'exécution de TITANIC, pour des supports inférieurs à 0,04 %, s'arrête pour manque d'espace mémoire.

- **ACCIDENTS** : dans cette base, les performances de PRINCE sont meilleures que celles de CLOSE, A-CLOSE et TITANIC pour toutes les valeurs de *minsupp*. Notons que pour des valeurs de *minsupp* supérieures ou égales à 40 %, chaque générateur minimal fréquent est un fermé. PRINCE ne nécessite alors pas l'exécution de sa procédure GEN-ORDRE étant

donné que le treillis d'Iceberg est déjà construit à la fin de sa première étape. Les performances de CLOSE et A-CLOSE sont énormément désavantagées par un nombre ainsi qu'une taille moyenne des objets relativement élevés, ce qui induit des coûts énormes pour le calcul des fermetures. Le mécanisme de comptage par inférence adopté par TITANIC s'avère plus efficace que le calcul des intersections. Ceci peut être expliqué par le nombre réduit d'items fréquents à prendre en considération lors du calcul des fermetures. En effet, seuls 32 items parmi 468 sont fréquents pour $minsupp$ égal à 30 % et la taille maximale d'un générateur minimal fréquent est égale à 12 items.

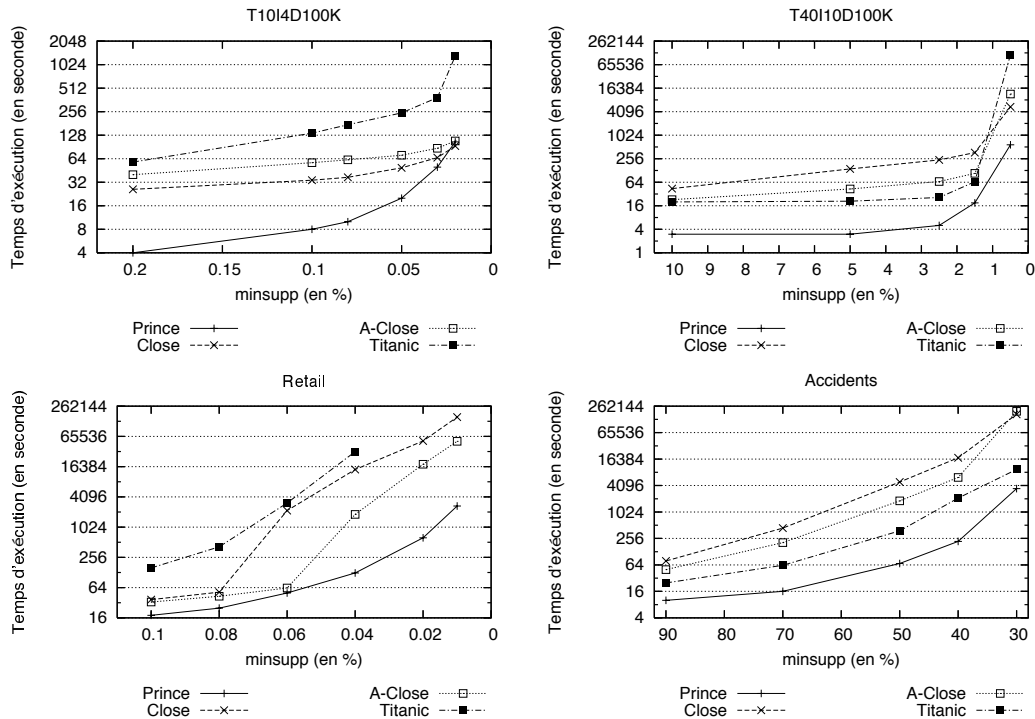


FIGURE 5. Les performances de PRINCE *versus* CLOSE, A-CLOSE et TITANIC pour les contextes éparés.

L'algorithme PRINCE s'avère aussi performant sur les contextes éparés et pour toutes les valeurs de $minsupp$. La différence entre les performances de PRINCE et celles de CLOSE et TITANIC atteint son maximum pour le contexte RETAIL. En effet, PRINCE est environ 115 (resp. 261) fois plus rapide que CLOSE (resp. TITANIC) pour un support de 0,04 %. De même, PRINCE est environ 57 fois plus rapide que A-CLOSE pour le contexte ACCIDENTS et pour une valeur de $minsupp$ égale à 30 %. Pour ces contextes éparés, PRINCE est en moyenne 31 (resp. 13 et 32) fois plus rapide que CLOSE (resp. A-CLOSE et TITANIC).

6.1.3. Expérimentations sur les contextes « pire des cas »

Pour toutes ces expérimentations, la valeur de $minsupp$ est fixée à 1. Nous avons testé 26 contextes « pire des cas » représentant la variation de la valeur de n de 1 à 26. Étant donné que ces contextes représentent le pire des cas, tout motif candidat est un générateur minimal fréquent et est égal à sa fermeture.

Contexte	<i>minsupp (%)</i>	PRINCE (sec.)	CLOSE (sec.)	A-CLOSE (sec.)	TITANIC (sec.)	CLOSE PRINCE	A-CLOSE PRINCE	TITANIC PRINCE
T10I4D100K	0,50	3	17	9	7	5,67	3,00	2,33
	0,20	4	26	40	58	6,50	10,00	14,50
	0,10	8	34	57	136	4,25	7,12	17,00
	0,08	10	37	62	174	3,70	6,20	17,40
	0,05	20	49	71	247	2,45	3,55	12,35
	0,03	50	66	87	387	1,32	1,74	7,74
	0,02	105	93	108	1 316	0,88	1,03	12,53
T40I10D100K	10,00	3	44	23	20	14,67	7,67	6,67
	5,00	3	140	43	21	46,67	14,33	7,00
	2,50	5	238	67	26	47,60	13,40	5,20
	1,50	19	366	108	66	19,26	5,68	3,47
	0,50	582	5 420	11 564	117 636	9,31	19,87	202,12
RETAIL	0,10	18	37	33	158	2,05	1,83	8,78
	0,08	25	52	43	415	2,08	1,72	16,60
	0,06	50	2 185	63	3 089	43,70	1,26	61,78
	0,04	125	14 358	1 833	32 663	114,86	14,66	261,30
	0,02	626	53 208	18 269	/	85,00	29,18	/
	0,01	2 699	159 217	52 162	/	58,99	19,33	/
ACCIDENTS	90,00	10	79	50	25	7,90	5,00	2,50
	70,00	16	440	206	63	27,50	12,87	3,94
	50,00	69	4 918	1 839	381	71,27	26,65	5,52
	40,00	219	17 528	6 253	2 120	80,04	28,55	9,68
	30,00	3 482	170 540	199 980	9 530	48,98	57,43	2,74

TAB. 4. Tableau comparatif des temps d'exécution de PRINCE *versus* A-CLOSE, CLOSE et TITANIC pour les contextes éparés.

Les temps d'exécution des quatre algorithmes ne commencent à être distinguables qu'à partir d'une valeur de n égale à 15. Pour les contextes « pire des cas », les performances de PRINCE restent meilleures que celles de CLOSE, A-CLOSE et TITANIC. Chaque générateur minimal fréquent est aussi un fermé. Ainsi, PRINCE n'exécute pas sa deuxième étape, le treillis d'Iceberg étant construit dès la fin de sa première étape. De son côté, A-CLOSE ne calcule pas les fermetures. D'où, ses performances sont meilleures que celles de CLOSE et celles de TITANIC. Il est important de noter que les calculs de fermetures effectués par CLOSE et TITANIC s'avèrent sans utilité car tout générateur minimal est égal à sa fermeture. L'exécution de ces deux algorithmes n'a pu se terminer pour une valeur de n égale à 24, en raison du manque d'espace mémoire. Pour la même raison, l'exécution de A-CLOSE n'a pu se terminer pour une valeur de n égale à 25. L'exécution de notre algorithme prend aussi fin, pour $n = 26$.

La Figure 6 et le Tableau 5 donnent le comportement des algorithmes suivant la variation de la valeur de n . Dans le Tableau 5, les trois dernières colonnes indiquent le facteur multiplicatif des temps d'exécution de CLOSE, A-CLOSE et TITANIC par rapport à l'algorithme PRINCE. L'algorithme PRINCE reste meilleur que les algorithmes CLOSE, A-CLOSE et TITANIC sur les contextes « pire des cas ». La différence entre les performances de PRINCE et celles de CLOSE (resp. A-CLOSE et TITANIC) est maximale pour $n = 21$ (resp. 19 et 23). En effet, pour ces valeurs de n , PRINCE est environ 29 (resp. 4 et 10) fois plus rapide que CLOSE (resp. A-CLOSE et TITANIC). Pour ces contextes « pire des cas », PRINCE est en moyenne 16 (resp. 3 et 4) fois plus rapide que CLOSE (resp. A-CLOSE et TITANIC).

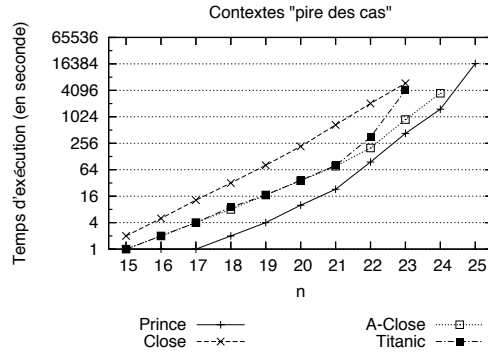


FIGURE 6. Test de mise à l'échelle de PRINCE *versus* CLOSE, A-CLOSE et TITANIC pour les contextes « pire des cas »

n	PRINCE (sec.)	CLOSE (sec.)	A-CLOSE (sec.)	TITANIC (sec.)	$\frac{\text{CLOSE}}{\text{PRINCE}}$	$\frac{\text{A-CLOSE}}{\text{PRINCE}}$	$\frac{\text{TITANIC}}{\text{PRINCE}}$
15	1	2	1	1	2,00	1,00	1,00
16	1	5	2	2	5,00	2,00	2,00
17	1	13	4	4	13,00	4,00	4,00
18	2	32	8	9	16,00	4,00	4,50
19	4	81	17	17	20,25	4,25	4,25
20	10	217	36	37	21,70	3,60	3,70
21	23	670	77	80	29,13	3,35	3,48
22	96	2 058	200	353	21,44	2,08	3,68
23	429	5 932	890	4 129	13,83	2,10	9,62
24	1 525	/	3 519	/	/	2,31	/
25	16 791	/	/	/	/	/	/
26	/	/	/	/	/	/	/

TAB. 5. Tableau comparatif des temps d'exécution de PRINCE *versus* A-CLOSE, CLOSE et TITANIC pour les contextes « pire des cas ».

6.2. COMPARAISONS DES ÉTAPES DE PRINCE

Le but de cette sous-section est de comparer le coût des trois étapes constituant PRINCE. À titre indicatif, le Tableau 6 montre le coût des différentes étapes sur deux contextes denses et deux contextes épars. Suite à nos expérimentations, nous pouvons noter les points suivants :

- le coût de la deuxième étape est généralement plus réduit que le coût de la première étape. Toutefois, ceci dépend étroitement des caractéristiques du contexte. En effet, le coût du calcul du support des motifs (c'est-à-dire l'opération la plus coûteuse de la première étape) dépend du nombre d'objets que contient le contexte et de leur taille moyenne.
- la troisième étape est la moins coûteuse et ceci pour les différents contextes testés ainsi que pour les différentes valeurs de *minsupp*. En effet, du moment que la structure contenant les générateurs minimaux fréquents a été construite, la dérivation des motifs fermés fréquents et des règles d'association génériques devient immédiate. Notons aussi que la variation de la valeur de *minconf* n'a pas d'influence significative sur le temps d'exécution de PRINCE.

Les résultats obtenus confirment ainsi l'utilité de l'approche proposée.

Contexte	<i>minsupp</i> (%)	Temps d'exécution total (sec.)	1 ^{ière} étape	2 ^{ième} étape	3 ^{ième} étape
CONNECT	90,00	8	8	0	0
	80,00	25	24	1	0
	70,00	66	63	3	0
	60,00	332	322	9	1
	50,00	847	822	22	3
MUSHROOM	20,00	1	1	0	0
	10,00	1	1	0	0
	5,00	3	2	1	0
	3,00	4	2	2	0
	2,00	7	3	3	1
	1,00	13	5	7	1
	0,80	17	6	10	1
	0,30	33	9	22	2
	0,20	40	10	26	4
	0,10	50	11	35	4
T10I4D100K	0,50	3	3	0	0
	0,20	4	4	0	0
	0,10	8	7	1	0
	0,08	10	9	1	0
	0,05	20	16	4	0
	0,03	50	35	15	0
	0,02	105	58	47	0
T40I10D100K	10,00	3	3	0	0
	5,00	3	3	0	0
	2,50	5	5	0	0
	1,50	19	18	0	1
	0,50	582	480	86	16

TAB. 6. Tableau comparatif des étapes de PRINCE pour les contextes denses CONNECT et MUSHROOM et les contextes épars T10I4D100K et T40I10D100K.

7. CONCLUSION

Dans ce papier, nous avons proposé un nouvel algorithme, PRINCE, permettant de réduire le nombre de règles d'association en n'extrayant que des bases génériques composées seulement de règles informatives. PRINCE est le seul algorithme à offrir les composantes nécessaires à une telle extraction sans avoir à l'associer avec un autre algorithme. À cet effet, PRINCE extrait en premier lieu l'ensemble des générateurs minimaux fréquents et en déduit le treillis d'Iceberg. Les règles d'association informatives sont alors dérivés par un simple parcours ascendant de la structure partiellement ordonnée. Grâce à une gestion efficace des classes d'équivalence, PRINCE présente aussi comme avantages l'extraction non-redondante des motifs fermés fréquents ainsi qu'une réduction du coût de la construction du treillis d'Iceberg. Les expérimentations, que nous avons réalisées, ont montré qu'il est efficace sur les différents contextes testés couvrant les différents types de contextes. Ainsi, PRINCE offre un consensus entre la qualité de l'information extraite et l'efficacité d'extraction.

Les perspectives de travaux futurs concernent les pistes suivantes :

- Du point de vue de la qualité des connaissances extraites par PRINCE, l'adaptation de ce dernier pour l'exploration de l'espace disjonctif de recherche, où les items sont liés par l'opérateur de disjonction au lieu de l'opérateur de conjonction [Hamrouni & al., 2009], est une piste intéressante afin d'extraire différentes formes de règles généralisées [Hamrouni & al., 2010]. Ces dernières sont connues pour être plus riches en information étant donné qu'elles véhiculent différents liens entre les items et ne se limitent donc pas à leur conjonction. Les métriques de support et de confiance des différentes formes sont

facilement calculables puisque les supports conjonctifs et négatifs peuvent être déduits à partir des supports disjonctifs grâce aux identités d’inclusion-exclusion [Galambos, Simonelli, 2000] et à la loi de De Morgan, respectivement. Par ailleurs, l’utilisation de contraintes utilisateur [Bonchi, Lucchese, 2006] ainsi que d’autres mesures de qualité [Hébert, Crémilleux, 2007] dans le processus d’extraction des règles d’association informatives est une tâche importante. En effet, ceci permettra de réduire tant que faire se peut le nombre de règles tout en gardant celles qui sont les plus intéressantes pour l’utilisateur.

- Du point de vue de algorithmique, il serait d’une part intéressant d’étudier la possibilité d’intégrer dans PRINCE le travail proposé dans [Calders, Goethals, 2007]. Ce travail s’applique à tout ensemble vérifiant la propriété d’idéal d’ordre, ce qui est le cas de l’ensemble des générateurs minimaux utilisé dans notre cas. Il permet de réduire le nombre de candidats auxquels un accès au contexte d’extraction est nécessaire pour calculer le support. Étant donné que cette étape est la plus coûteuse de la première étape, une telle intégration permettra de réduire un tel coût. D’autre part, la mise en place d’un choix adaptatif de la bordure à ajouter à l’ensemble des générateurs minimaux fréquents est envisagée. En effet, pour certains contextes, il est plus avantageux du point de vue cardinalité de maintenir une autre bordure que celle actuellement maintenue, à savoir \mathcal{GBd}^- [Liu & al., 2008]. Ceci dépend étroitement des caractéristiques des contextes [Hamrouni & al., à paraître] et qui seront donc à étudier pour bien sélectionner la bordure à maintenir.

Remerciements. Nous tenons à remercier les relecteurs anonymes pour leurs remarques et leurs suggestions très utiles et qui ont permis d’améliorer considérablement la qualité du travail. Nous tenons aussi à remercier Yves Bastide pour avoir mis à notre disposition les codes source des algorithmes CLOSE, A-CLOSE et TITANIC. Ce travail est partiellement soutenu par le projet PHC-UTIQUE 11G1417, EXQUI.

BIBLIOGRAPHIE

- AGRAWAL R., IMIELINSKI T., SWAMI A. (1993), “Mining association rules between sets of items in large databases”, *Proceedings of the ACM-SIGMOD International Conference on Management of Data*, Washington (DC), p. 207–216.
- AGRAWAL R., SRIKANT R. (1994), “Fast algorithms for mining association rules”, *Proceedings of the 20th International Conference on Very Large Databases (VLDB 1994)*, Santiago (Chile), p. 478-499.
- ASHRAFI M.Z., TANIAR D., SMITH K. (2007), “Redundant association rules reduction techniques”, *International Journal Business Intelligence and Data Mining* 2(1), p. 29-63 .
- BARBUT M., MONJARDET B. (1970), *Ordre et classification. Algèbre et combinatoire*, Paris, Hachette, tome II.
- BASTIDE Y. (2000), *Data mining : algorithmes par niveau, techniques d’implantation et applications*, Thèse de doctorat, École doctorale sciences pour l’ingénieur de Clermont-Ferrand, Université Blaise Pascal.
- BASTIDE Y., PASQUIER N., TAOUIL R., STUMME G., LAKHAL L. (2000a), “Mining minimal non-redundant association rules using frequent closed itemsets”, *Proceedings of the 1st International Conference on Computational Logic (DOOD 2000)*, Springer-Verlag, LNAI, volume 1861, London (UK), p. 972-986.
- BASTIDE Y., TAOUIL R., PASQUIER N., STUMME G., LAKHAL L. (2000b), “Mining frequent patterns with counting inference”, *ACM-SIGKDD Explorations* 2(2), p. 66-75.

- BAYARDO R.J. (1998), "Efficiently mining long patterns from databases", *Proceedings of the International Conference on Management of Data (SIGMOD 1998)*, Seattle (WA), p. 85-93.
- BEN YAHIA S., MEPHU NGUIFO E. (2004), "Revisiting generic bases of association rules", *Proceedings of 6th International Conference on Data Warehousing and Knowledge Discovery (DaWaK 2004)*, Springer-Verlag, LNCS, volume 3181, Zaragoza (Spain), p. 58-67.
- BEN YAHIA S., HAMROUNI T., MEPHU NGUIFO E. (2006), "Frequent closed itemset based algorithms : A thorough structural and analytical survey", *ACM-SIGKDD Explorations*, 8(1), p. 93-104.
- BODON F., RÓYAI L. (2003), "Trie : An alternative data structure for data mining algorithms", *Mathematical and Computer Modelling*, 38(7-9), p. 739-751.
- BONCHI F., LUCCHESI C. (2006), "On condensed representations of constrained frequent patterns", *Knowledge and Information Systems* 9(2), p. 180-201.
- BOULICAUT J.-F., BYKOWSKI A., RIGOTTI C. (2003), "Free-sets : A condensed representation of boolean data for the approximation of frequency queries", *Data Mining and Knowledge Discovery* 7(1), p. 5-22.
- CALDERS A., RIGOTTI C., BOULICAUT J.-F. (2005), "A survey on condensed representations for frequent sets", *Constraint Based Mining and Inductive Databases*, Springer-Verlag, LNAI, volume 3848, p. 64-80
- CALDERS A., GOETHALS B. (2007), "Non-derivable itemset mining", *Data Mining and Knowledge Discovery*, Springer, 14(1), p. 171-206
- CEGLAR A., RODDICK J.F. (2006), "Association mining", *ACM Computing Surveys* 38(2).
- LE FLOC'H A., FISETTE C., MISSAOUI R., VALTCHEV P., GODIN R. (2003), « JEN : un algorithme efficace de construction de générateurs pour l'identification des règles d'association », *Numéro spécial de la revue des Nouvelles Technologies de l'Information* 1(1), p. 135-146.
- GALAMBOS J., SIMONELLI I. (2000), *Bonferroni-type inequalities with applications*, Springer.
- GANTER B., WILLE R. (1999), *Formal Concept Analysis*, Springer .
- GODIN R., MISSAOUI R., ALAOUI H. (1995), "Incremental concept formation algorithms based on Galois (concept) lattices", *Journal of Computational Intelligence* 11(2), p. 246-267.
- GOETHALS B. (2004), "Frequent itemset mining implementations repository", <http://fimi.cs.helsinki.fi/>.
- HAMROUNI T., BEN YAHIA S., MEPHU NGUIFO E. (2009), "Sweeping the disjunctive search space towards mining new exact concise representations of frequent itemsets", *Data & Knowledge Engineering* 68(10), p. 1091-1111.
- HAMROUNI T., BEN YAHIA S., MEPHU NGUIFO E. (2010), "Generalization of association rules through disjunction", *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 59(2), p. 201-222.
- HAMROUNI T., BEN YAHIA S., MEPHU NGUIFO E., "Looking for a structural characterization of the sparseness measure of (frequent closed) itemset contexts", [submitted to *Information Sciences*].

- HÉBERT C., CRÉMILLEUX B. (2007), “A unified view of objective interestingness measures”, *Proceedings of the 5th International Conference Machine Learning and Data Mining in Pattern Recognition (MLDM 2007)*, Springer-Verlag, LNCS, volume 4571, Leipzig (Germany), p. 533–547.
- KNUTH D.E. (1968), *The art of computer programming*, volume 3, Addison-Wesley.
- KRYSZKIEWICZ M. (2002), *Concise representation of frequent patterns and association rules*, Habilitation dissertation, Institute of Computer Science, University of Technology, Warsaw (Poland).
- KUZNETSOV S.O., OBIEDKOV S.A. (2002), “Comparing performance of algorithms for generating concept lattices”, *Proceedings of the ICCS’01 International Workshop on Concept Lattices-Based KDD*, Stanford (UK), p. 35-47.
- LI H., LI J., WONG L., FENG M., TAN Y. (2005), “Relative risk and odds ratio : a data mining perspective”, *Proceedings of the 24th ACM-SIGMOD International Symposium on Principles Of Database Systems (PODS 2005)*, Baltimore (MD), p. 368-377.
- LIU G., LI J., WONG L. (2008), “A new concise representation of frequent itemsets using generators and a positive border”, *Knowledge and Information Systems* 17(1), p. 35-56.
- LUCCHESI C., ORLANDO S., PEREGO R. (2006), “Fast and memory efficient mining of frequent closed itemsets”, *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering* 18(1), p. 21-36 .
- MEPHU NGUIFO E. (1994), « Une nouvelle approche basée sur le treillis de Galois pour l’apprentissage de concepts », *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines* 134, p. 19-38.
- PASQUIER N. (2000), “*Datamining : algorithmes d’extraction et de réduction des règles d’association dans les bases de données*”, Thèse de doctorat, École doctorale sciences pour l’ingénieur de Clermont Ferrand, Université Clermont Ferrand II.
- PASQUIER N., BASTIDE Y., TAOUIL R., LAKHAL L. (1999a), “Discovering frequent closed itemsets for association rules”, *Proceedings of 7th International Conference on Database Theory (ICDT 1999)*, LNCS, volume 1540, Springer-Verlag, Jerusalem (Israel), p. 398-416.
- PASQUIER N., BASTIDE Y., TAOUIL R., LAKHAL L. (1999b), “Efficient mining of association rules using closed itemset lattices”, *Journal of Information Systems* 24(1), p. 25-46.
- PEI J., HAN J., MAO R. (2000), “CLOSET : An efficient algorithm for mining frequent closed itemsets”, *Proceedings of the ACM-SIGMOD International Workshop on Research Issues in Data Mining and Knowledge Discovery (DMKD 2000)*, Dallas (TX), p. 21-30.
- PFLATZ J.L., TAYLOR C.M. (2002), “Scientific knowledge discovery through iterative transformation of concept lattices”, *Proceedings of Workshop on Discrete Applied Mathematics in conjunction with the 2nd SIAM International Conference on Data Mining*, Arlington (VA), p. 65-74.
- STUMME G., TAOUIL R., BASTIDE Y., PASQUIER N., LAKHAL L. (2002), “Computing Iceberg concept lattices with TITANIC”, *Data & Knowledge Engineering* 2(42), p. 189-222.
- SZATHMARY L., NAPOLI A., KUZNETSOV S. (2007), “ZART : A multifunctional itemset mining algorithm”, *Proceedings of the 5th International Conference on Concept Lattices and their Applications (CLA 2007)*, Montpellier, p. 26-37.

UNO T., ASAI T. UCHIDA Y., ARIMURA H. (2004), “An efficient algorithm for enumerating closed patterns in transaction databases”, *Proceedings of the 7th International Conference on Discovery Science*, Padova (Italy), p. 16-31.

VALTCHEV P., MISSAOUI R., LEBRUN P. (2000), “A fast algorithm for building the Hasse diagram of a Galois lattice”, *Proceedings of the Colloque LaCIM 2000*, Montréal (Canada), p. 293-306.

ZAKI M.J. (2004), “Mining non-redundant association rules”, *Data Mining and Knowledge Discovery* 9(3), p. 223-248.

ZAKI M.J., HSIAO C.J. (2002), “CHARM : An efficient algorithm for closed itemset mining”, *Proceedings of the 2nd SIAM International Conference on Data Mining*, Arlington (VI), p. 457-573.

ZAKI M.J., HSIAO C.J. (2005), “Efficient algorithms for mining closed itemsets and their lattice structure”, *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering* 17(4), p. 462-478.