



Philosophia Scientiæ

Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

15-3 | 2011

L'espace et le temps

L'espace et le temps chez Maclaurin : le cas de la figure de la Terre

Olivier Bruneau



Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/675>

DOI : [10.4000/philosophiascientiae.675](https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.675)

ISSN : 1775-4283

Éditeur

Éditions Kimé

Édition imprimée

Date de publication : 1 octobre 2011

Pagination : 17-34

ISBN : 978-2-84174-569-2

ISSN : 1281-2463

Référence électronique

Olivier Bruneau, « L'espace et le temps chez Maclaurin : le cas de la figure de la Terre », *Philosophia Scientiæ* [En ligne], 15-3 | 2011, mis en ligne le 01 octobre 2014, consulté le 01 mai 2019. URL : <http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/675> ; DOI : [10.4000/philosophiascientiae.675](https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.675)

Tous droits réservés

L'espace et le temps chez Maclaurin : le cas de la figure de la Terre

Olivier Bruneau

LHSP – Archives Henri Poincaré, UMR 7117, CNRS –
Nancy-Université (France)

Résumé : Cet article a pour but de donner quelques pistes sur les notions d'espace et de temps chez Maclaurin (1698-1746) à la fois en physique et aussi dans leur représentation mathématique. En s'appuyant essentiellement sur deux de ses ouvrages, l'*Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries* et le *Treatise of Fluxions*, nous verrons en quoi il est proche de Newton et nous donnerons en guise d'exemple, l'application à la question de la figure de la Terre.

Abstract: This paper is devoted to give some ideas about Maclaurin's view on space and time. These notions are both present in his physics and his mathematics. Mainly based on the *Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries* and the *Treatise of Fluxions*, one can find the proximity with Newton and we give as example, his treatment of the figure of the Earth.

1 Introduction

L'historiographie autour de l'espace et du temps chez Newton et ses successeurs est abondante. Elle met surtout en avant l'espace et le temps absolus sur lesquels le grand savant a fondé sa mécanique. Cette conception est vivace chez les Britanniques du dix-huitième siècle. Colin Maclaurin en tant que commentateur de l'œuvre de Newton propose des définitions analogues. Suite à la crise berkeleyenne de 1734, pour défendre la méthode des fluxions newtonienne, Maclaurin s'appuie sur un modèle cinématique des objets mathématiques dans lequel l'espace et le temps ont un rôle central. Ce modèle est en résonance avec la physique newtonienne.

Dans cet article nous proposons, après avoir donné très rapidement quelques repères sur la figure de la Terre chez Newton, d'analyser la façon dont Maclaurin définit l'espace et le temps, en particulier dans son *Account*

of *Sir Issac Newton's Philosophical Discoveries*. De plus, nous étudierons sa manière d'intégrer ces concepts de sa mathématique dans son ouvrage majeur le *Treatise of Fluxions*. Enfin, en guise d'exemple, nous montrerons que tout cela répond à la question de la figure de la Terre.

2 Newton (1642 – 1727)

La critique machienne de l'espace et du temps absolus chez Newton a foncièrement influencé le regard des historiens et philosophes des sciences jusqu'à une époque récente où de nouveaux travaux [Arthur 1995], [De Gandt 1981], [Bachta 2002] ont vu le jour. Par exemple, François De Gandt montre que Newton considère que le temps et l'espace absolu d'essence divine permet d'unifier un temps théologique, un temps mathématique ou géométrique, qui doit disparaître dans les équations et qui sert d'horloge, et un temps astronomique corrigé par les mathématiques. Nous allons simplement donner quelques traits bien connus du traitement de la figure de la Terre chez Newton. Pour une étude plus précise et plus fournie, nous renvoyons à la littérature abondante sur le sujet (voir par exemple [Todhunter 1873], [Greenberg 1987], [Greenberg 1996]).

Dans les *Principia* [Newton 1687], la question de la figure de la Terre est présente comme faire-valoir de sa théorie gravitationnelle et n'est pas le centre de sa recherche. C'est en partie pour cela que celle-ci n'est présente que sous forme d'ébauche dans laquelle les démonstrations mathématiques ne sont pas véritablement présentes. Le statut de ce problème comme théorie n'interviendra qu'au XVIII^e siècle en France lors du débat avec les cartésiens défendant une autre forme pour la Terre [Todhunter 1873], [Greenberg 1987].

Newton se représente la Terre comme une masse fluide en rotation sur laquelle les forces centrifuge et gravitationnelle s'appliquent. Le problème consiste à évaluer l'attraction à l'intérieur, à la surface et à l'extérieur de la Terre. Pour cela, il prend appui sur quelques résultats mathématiques se trouvant dans le premier livre.

Dans la proposition 90 du livre 1, Newton évalue l'attraction d'une couche circulaire sur un point placé orthogonalement au plan de la couche passant par le centre du cercle.

Ensuite, il indique comment obtenir l'attraction d'un solide de révolution sur une particule placée dans le prolongement de l'axe de révolution (proposition 91). Puis, dans le corollaire 3, il montre que la force de gravitation sur une particule placée dans un espace situé entre deux ellipses concentriques semblables est nulle. Le problème se réduit donc à étudier la gravitation sur la surface.

Dans le livre 3, dans les propositions 18 à 20, il suppose (sans preuve) que l'ellipsoïde est une forme d'équilibre. Il introduit une condition : dans

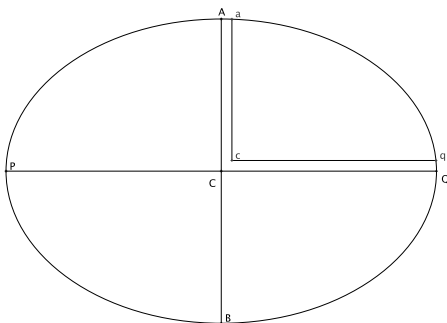


FIGURE 1 – Les colonnes infinitésimales chez Newton.

le cas d'un fluide en rotation (la Terre est considérée comme telle), la forme ellipsoïdique est en équilibre si les canaux infinitésimaux à l'équateur et aux pôles se compensent (Fig. 1).

Newton donne l'expression de la gravitation et donc de la forme de l'ellipsoïde de révolution dans le cas où la particule se trouve sur l'axe de révolution. Mais c'est Cotes qui résout cette question quand la particule est à l'équateur [Cotes 1714]. Le degré d'aplatissement peut alors être calculé comme étant le rapport $E/(E - P)$, où E et P sont respectivement les demi-axes à l'équateur et aux pôles.

Maclaurin prend appui sur les textes newtoniens et affine ces résultats en donnant initialement une définition du temps et de l'espace qui doit fonctionner tant en physique qu'en mathématique.

3 Maclaurin (1698 – 1746)

3.1 *L'exposition des découvertes philosophiques de Newton* : une première définition de l'espace et du temps

Cet ouvrage est une commande de John Conduitt, le neveu par alliance de Newton, juste après la mort de ce dernier. En 1731, Maclaurin fournit la première version à Conduitt qui le fait lire à plusieurs savants londoniens dont Martin Folkes alors secrétaire de la Société royale de Londres. Malheureusement, Conduitt décède peu de temps après et le projet d'édition est arrêté. L'Écossais retravaillera son texte sur son lit de mort en juin

1746. Les parties ajoutées sont surtout celles traitant de théologie naturelle. Il sera édité en 1748 par Patrick Murdoch, un ami de Maclaurin, en vue d'aider financièrement la veuve et les enfants de ce dernier. Cet ouvrage connaît un succès important avec plus de mille deux cents souscripteurs [Wallis 1982] et plusieurs traductions¹.

Malgré tout, sa parution tardive en fait un ouvrage secondaire, qui ne participe plus véritablement à la propagation de la pensée newtonienne qui, à la fin des années quarante, semble bien assise. Néanmoins, David Hume a été un lecteur attentif et sa critique de la pensée newtonienne provient principalement du texte de Maclaurin. Selon R. Twardy, dans un premier temps, Hume n'aurait pas lu en détail les *Principia*, mais avant tout l'*Account* de Maclaurin. De plus, il considère que Hume n'a pas compris la physique et les mathématiques mises en jeu dans les deux textes et qu'il propose une mauvaise interprétation [Twardy 2000].

L'un des objectifs de cet ouvrage est de donner à un large public ayant un minimum de savoir physico-mathématique un exposé des travaux de Newton sur la gravitation universelle. Mais, même s'il prend appui sur les textes de Newton, en particulier les *Principia*, c'est avant tout la vision et l'interprétation de Maclaurin qui est mise en avant. Ainsi, il rend compte de son mémoire sur la loi des chocs des solides parfaitement durs qui reçut le prix de l'Académie Royale des sciences de Paris en 1724 [Maclaurin 1724].

La première partie est une histoire des systèmes philosophiques naturels des origines à Newton dans laquelle il critique fermement les principes cartésiens, ceux de Spinoza et Leibniz et met en valeur ceux de l'Anglais.

Pour exposer ces derniers, il lui est nécessaire de donner une définition de l'espace et du temps :

L'espace est d'une étendue sans bornes, immobile, uniforme, similaire en toutes les parties, & libre de toute résistance. Il est composé à la vérité de parties, qui peuvent être divisées en d'autres parties plus petites, & celles-ci de même jusqu'à l'infini ; mais elles ne peuvent être séparées les unes des autres, & avoir leurs situations & leurs distances changées. [Maclaurin 1749a, 105]

Il se place dans un cadre où il admet des particules corpusculaires qui est bien dans la filiation de l'atomisme newtonien :

« Le Corps est étendu dans l'Espace, mobile, terminé par une figure, solide & impénétrable, résistant par son inertie, divisible en parties de plus petites en plus petites jusqu'à l'infini, en sorte qu'elles peuvent être séparées les unes des

1. La traduction française par Lavirotte, *Exposition des Découvertes Philosophiques du Chevalier Newton*, est publiée moins d'un an après la publication de la version anglaise, une autre en latin à partir de la version française en 1761 à Vienne par le jésuite Grégoire Falck.

autres, & avoir leurs situations & leurs distances changées de toute maniere. » [Maclaurin 1749a, 105]

En considérant que l'on peut séparer les corps en des particules qui peuvent être séparées, Maclaurin a ainsi la possibilité, comme nous le verrons par la suite, de prendre en compte le mouvement d'une particule en un temps donné et ainsi soumettre ces particules à un traitement mathématique. Plus loin, il applique cette idée au temps qui coule uniformément :

La succession de nos propres idées, & les variations successives des objets externes suivant le cours de la Nature, nous font aisément naître les idées de la durée, du tems & de leurs mesures. Nous concevons que le tems vrai & absolu s'écoule uniformément, suivant un cours immuable, en sorte qu'il sert seul à mesurer avec exactitude les changements de toutes les autres choses. (ldots) On peut concevoir le tems divisé en parties, successivement plus petites & plus petites sans fin ; quoique respectivement à chaque Etre particulier, il puisse y avoir le plus petit espace de tems sensible, de même qu'il y a un minimum sensible dans les autres grandeurs. [Maclaurin 1749a, 105–106]

Le mouvement, pierre d'angle de sa construction physico-mathématique, est la représentation des phénomènes :

L'Espace et le Tems servent à se mesurer réciproquement par le mouvement ; le tems s'écoule & se perd continuellement ; mais l'espace parcouru par le mouvement, en conserve la représentation. [Maclaurin 1749a, 109]

Par conséquent, dans l'*Account* qui est le commentaire de l'œuvre newtonienne, Maclaurin se place complètement dans la lignée de Newton, à savoir un temps immuable qui s'écoule dans un espace corpusculaire dans lequel la représentation du temps s'accomplit à travers le mouvement d'objets. Cet aspect cinématique sur lequel s'appuient les newtoniens britanniques est tout aussi présent dans les mathématiques newtoniennes et Maclaurin s'en sert pour échafauder sa théorie des fluxions.

3.2 La Terre vue par Maclaurin

3.2.1 Avant le *Treatise of Fluxions*

Son intérêt pour la question de la forme de la Terre est présent pendant ses études et une partie de son mémoire pour obtenir le grade de *Master of Arts* à l'université de Glasgow est consacré à cela. En 1713, soit à l'âge de 15 ans, il est très au fait des écrits de Newton et dans son *De Gravitate* [Maclaurin 1713, 4], il reprend les idées des *Principia*.

Plus tard, dans l'*Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries*, qui est un commentaire des *Principia*, une partie de cet ouvrage est consacrée

à la figure de la Terre dans laquelle il signale que « toute la Terre devienne de la forme d'un Sphéroïde aplati, dont le Diamètre sous l'équateur soit la Ligne la plus grande, & l' Axe la moindre, de toutes celles qui pourront passer par le Centre » [Maclaurin 1749a, 368]. Il développe un certain nombre d'arguments déjà énoncés par Newton mais ne va pas plus loin que ce dernier.

Au printemps 1738, les académiciens français annoncent que le sujet du Prix pour l'année 1740 est de donner une explication scientifique au flux et au reflux de la mer. La réponse doit être rendue à l'automne 1739. Le jury est formé de membres connus de Maclaurin : Clairaut, Dortous de Mairan, Réaumur, Pitot et Nicole. Au printemps 1740, le secrétaire perpétuel annonce que les gagnants sont Maclaurin, Euler, D. Bernoulli et un cartésien professeur de mathématiques à Cahors, Antoine Cavalleri².

En 1739, Maclaurin envoie à Folkes, alors vice-président de la *Royal Society*, un manuscrit sur la démonstration que la vraie figure de la Terre est exactement un sphéroïde aplati en supposant la densité uniforme [Mills 1982, 308]. Il y annonce la structure de sa démonstration :

In the first it is shown that a fluid & oblate spheroid is in equilibrium in all parts when the motion of diurnal rotation is of a just velocity ; and this is deduced geometrically from some Lemmata containing properties of the ellipsis of which I have a great number by me that are not taken notice of by the Authors on the subject of the conic sections. The IId shews how to find the attraction of such a Spheroid at the Pole, this proposition is not new but as far as it measures likewise the attractions of certain portions of the Spheroid, and as far as the investigation or demonstration is more simple & short than that which others have given. The IIIId shews how to measure the attraction at the equator in as easy manner as at the poles & by the same quadrature depending immediately on that of the circle without any series, and the attraction of certain portions of the Spheroid there. And hence it is shewn from the Corol. of Prop. placeI. how the attraction is measured in any given latitude. [Mills 1982, 308]

Ce passage résume relativement bien à la fois sa démarche et la manière qu'il a de pointer les parties sur lesquelles il apporte quelque chose de nouveau. Il consacre une partie du mémoire à mettre en place des résultats mathématiques

2. Parmi ces quatre prix, celui de Cavalleri est une défense de la vision tourbillonnaire de Descartes, tandis que les autres sont dans la lignée newtonienne. Le texte de Cavalleri n'atteint pas le niveau des autres, mais il a été primé pour satisfaire les académiciens encore cartésiens et éviter ainsi des débats [Bossut 1810, 360–362]. En revanche, les textes d'Euler, Bernoulli et Maclaurin reçurent un accueil favorable. Pour preuve, ces trois productions sont reproduites dans le troisième volume de la version commentée des *Principia* des frères Jacquier et Le Seur [Newton 1739–1742].

autour principalement des sections coniques, puis à partir de ces résultats et avec quelques principes que l'on donnera plus loin, il s'attaque à l'attraction dans un sphéroïde. Enfin, en prenant appui uniquement sur ces principes et des constructions géométriques, il montre comment on peut mesurer l'attraction en tout point de la surface. Dans cette dernière partie, il promeut aussi une certaine mathématique dans laquelle toute approximation à l'aide de développement en séries doit être bannie. Ce refus de toute approximation sera l'occasion d'échanges épistolaires importants entre Maclaurin et Stirling qui, lui, avait trouvé ces résultats à l'aide de séries [Tweddle 1988]. À travers ce débat, diverses visions des mathématiques s'affrontent que l'on peut résumer ainsi : géométrie *versus* analyse.

L'apport de Maclaurin sur ce sujet se situe dans le mémoire qui a obtenu en 1740 le prix de l'Académie des sciences de Paris sur le flux et reflux de la mer [Maclaurin 1741] et dans le chapitre 14 du *Traité* [Maclaurin 1749b, vol. 2, 96–152]. Nous ne parlerons pas du prix de 1740, car l'essentiel est repris et amélioré dans le *Traité*.

3.2.2 Les conditions d'écriture du *Traité des Fluxions*

Suite à la critique virulente de [Berkeley 1734] à propos du calcul différentiel et fluxionnel en 1734, de nombreux savants britanniques réagissent pour défendre le bien-fondé du calcul newtonien. Malgré sa volonté de répondre rapidement aux attaques de l'évêque irlandais, Maclaurin se ravise et change d'objectif :

Upon more consideration I did not think it best to write an Ansuer to Dean Berkeley but to write a treatise of fluxions which might ansuer the purpose and be useful to my scholars. (Lettre de Maclaurin à Stirling du 16 novembre 1734) [Mills 1982, 250].

Outre le fait d'être un ouvrage défendant la méthode newtonienne, le *Treatise of Fluxions* se veut un ensemble ambitieux de résultats nouveaux et anciens s'appuyant sur une axiomatisation et une rigueur éloignant toute chicanerie et polémique³. L'objectif de cet ouvrage est clair : au départ une réponse fondée sur une axiomatique, avec quelques résultats démontrés, qui s'est muée en un exposé plus systématique et plus large de tout ce qu'il est possible de traiter avec le calcul newtonien.

Il le sépare en deux livres. Le premier est d'inspiration géométrique, c'est-à-dire qu'il traduit tous les problèmes en langage de la géométrie, il propose des définitions mettant en œuvre des figures géométriques. Il se pose en défenseur de la présentation axiomatico-déductive et procède à des démonstrations

3. Pour avoir une étude plus précise voir, par exemple [Sageng 1989], [Guicciardini 1989], [Guicciardini 1984], [Grabiner 1997], plus récemment [Sageng 2005] ou [Bruneau 2005]

presque exclusivement à l'aide de la double réduction par l'absurde. Le second livre est un traitement « algébrique » de pratiquement les mêmes problèmes. Il prend ici appui sur une traduction algébrique de la notion de fluxion. Nous y reviendrons plus bas.

3.2.3 *Le Treatise of Fluxions (1742)*

Avant d'aborder la question de la figure de la Terre, il est nécessaire d'indiquer comment Maclaurin introduit les notions d'espace et de temps qui sont à la base de tout son cadre mathématique dans lequel il peut introduire les fluxions et la résolution des problèmes physiques.

Le premier point important est que, pour être en cohérence avec sa vision corpusculaire voire atomiste de l'espace et des corps, il refuse de considérer la fluxion comme un infiniment petit. Pour cela, il propose deux définitions (qui sont équivalentes). La première qui se trouve dans le premier livre dont le titre est « *Of the Fluxions of Geometrical magnitudes* » est une définition faisant intervenir la vitesse. L'idée sous-jacente est la notion d'engendrement, de génération, de mouvement. En effet, il considère que les objets mathématiques (la ligne, une courbe, une surface...) sont décrits par engendrement d'un autre objet qui a une vitesse (un point pour la ligne ou la courbe, un segment pour une surface...). Cette vitesse sera la fluxion de l'objet considéré. Avant de définir la vitesse d'un objet matériel ou non, il lui est nécessaire de mettre en œuvre l'espace et le temps. Il reprend essentiellement ce qu'il a présenté dans l'*Account* :

Il n'y a pas de quantité que nous concevions plus clairement que les parties limitées de l'espace et du tems. Elles sont, à la vérité, composées de parties, parfaitement uniformes et semblables. Celles de l'espace existent toutes ensembles, celles du tems coulent continuellement. Mais par le mouvement elles se mesurent les unes aux autres réciproquement. Les parties de l'espace sont permanentes ; mais étant décrites successivement par le mouvement, on peut concevoir l'espace comme s'écoulant de la même manière que le tems. Le tems périt continuellement ; mais on peut en conserver une image et se le représenter tout à la fois, par le moyen de l'espace décrit par le mouvement. Le tems est conçu couler toujours d'un cours uniforme, ce qui sert à mesurer les changements de toute chose. [Maclaurin 1749b, vol. I., 3]

La définition du mouvement est très proche de celle de Newton et elle est équivalente à celle utilisée par Berkeley dans l'*Analyste*. Pour être conforme à son objectif, il refuse de considérer le temps ou l'espace comme un indivisible : « Je ne prendrai aucune partie du tems ou de l'espace comme indivisible, ou comme infiniment petite » [Maclaurin 1749b, vol. I., introduction, iii].

La vitesse d'un corps découle nécessairement des définitions ci-dessus. Comme le temps et l'espace sont des données de la géométrie, la vitesse, considérée comme une mise en relation de l'espace et du temps et comme le rapport de l'espace parcouru pendant un temps donné, fait partie intégrante du champ de la géométrie. C'est donc un objet principal de la géométrie. Cela sera, pour Maclaurin, à la base de toute conception géométrique de la fluxion.

Mais étant donné qu'il refuse d'utiliser toute notion infinitésimale, Maclaurin ne considère pas cette vitesse comme instantanée. Cela peut poser un problème quand on veut la connaître en un point ou à un moment précis. Pour cela, il utilise une astuce : il présente la vitesse en un point comme si le mouvement était uniforme. En effet, pour connaître la vitesse à un moment précis, il considère le mouvement qui, continué uniformément pendant un temps donné, parcourt un espace donné. Et donc la vitesse sera le rapport de cet espace avec l'intervalle de temps, comme dans le cas du calcul d'une vitesse constante :

La vitesse d'un mouvement uniforme est mesurée par l'espace qui est parcouru dans un tems donné. Si l'action de la puissance varie, son action à chaque terme du tems n'est pas mesurée par l'effet qu'elle produit actuellement après chaque terme, mais par l'effet qu'elle auroit produit, si son action avoit été continuée uniformément après ce terme ; de même la vitesse d'un mouvement variable, à chaque terme donné du tems, n'est pas mesurée par l'espace qui est parcouru actuellement après ce terme dans un tems donné, mais par l'espace qui auroit été parcouru, si le mouvement avoit été continué uniformément après ce terme. [Maclaurin 1749b, vol. I., 4-5]

Plus loin, il affirme encore :

Lorsque nous supposons qu'un corps a telle ou telle vitesse à chaque terme du tems, pendant lequel il se meut, nous ne prétendons pas dire qu'il ait quelque mouvement dans ce terme, limite ou moment du tems, ou dans un point indivisible de l'espace : mais comme nous mesurons toujours une vitesse par l'espace qui auroit été décrit, si ce mouvement avoit été continué uniformément depuis ce terme pendant un tems fini déterminé, on ne pourra pas dire que nous prétendions concevoir un mouvement ou vitesse, sans aucun égard à l'espace et aux tems. [Maclaurin 1749b, vol. I., 5]

Maclaurin propose ici une définition de la vitesse en un point complètement dégagée du cadre des premières et dernières raisons ou des infinitésimaux et échappe ainsi aux critiques concernant la définition de cette vitesse. En chaque point étudié, il n'y a que des vitesses de mouvements uniformes et donc des rapports de quantités finies.

Par exemple, une ligne droite est engendrée par un point qui parcourt cette droite avec un certain mouvement. Si Maclaurin veut comparer la vitesse en deux points distincts, il considère dans un premier temps les deux points comme deux états issus d'un mouvement. Celui-ci arrive à un temps donné au premier point dont la vitesse sera calculée en utilisant la définition ci-dessus, c'est-à-dire comme si le mouvement prenait une vitesse constante. Mais le mouvement garde toujours ses caractéristiques propres, ce qui permet de calculer la vitesse au deuxième point.

Cette définition de la vitesse ne sera opérante qu'avec l'introduction des axiomes. À la définition de la vitesse, Maclaurin ajoute deux principes fondamentaux : « Le premier est que lorsque les quantités qui sont produites sont toujours égales l'une à l'autre, les mouvements qui les produisent sont toujours égaux. Le second est, au contraire, que les mouvements étant égaux, les quantités qui en proviennent dans le même tems sont toujours égales. » [Maclaurin 1749b, vol. I., 5]

C'est à partir de tout cela que Maclaurin définit à la fois la fluente et la fluxion. La fluente évolue dans le temps (elle diminue ou elle augmente) par le mouvement, à l'instar de la définition de la droite et autres figures géométriques rencontrées plus haut. Une figure géométrique peut donc fluer. Sa définition de la fluxion est très proche de celle de la vitesse. En effet, il déclare :

La vitesse, avec laquelle une quantité flue, à chaque terme du tems pendant lequel elle est supposée se former, se nomme fluxion, qui est par conséquent, toujours mesurée par l'incrément ou le décrement que ce mouvement auroit produit pendant un tems donné, s'il avoit été continué uniformément depuis ce terme sans aucune accélération ou retardement. [Maclaurin 1749b, vol. I., 7]

Il ajoute encore que si le mouvement est uniforme, les espaces parcourus en des temps égaux sont toujours égaux, par contre si dans des temps toujours égaux, les espaces croissent, alors le mouvement est accéléré, sinon si les espaces décroissent, alors ce mouvement est retardé. De cela, il peut énoncer ces axiomes. Après avoir défini le temps, l'espace, et ainsi énoncé sa définition de la vitesse, il expose ces quatre axiomes sur lesquels toute sa théorie va s'échafauder :

Axiome I : L'espace décrit par un mouvement accéléré est plus grand que celui qui auroit été décrit dans le même tems, si le mouvement n'avoit pas été accéléré, mais continué uniformément depuis le commencement du tems.

Axiome II : L'espace parcouru par un mouvement accéléré pendant le tems de l'accélération est plus petit que l'espace qui auroit été parcouru dans un tems égal par un mouvement acquis par cette accélération, et continué uniformément.

Axiome III : L'espace parcouru par un mouvement retardé est moindre que celui qui auroit été parcouru dans le même tems si ce

mouvement n'avoit pas été retardé, mais continué uniformément depuis le commencement du tems.

Axiome IV : L'espace décrit par un mouvement retardé pendant le tems du retardement est plus grand que celui qui auroit été décrit dans le même tems par le mouvement qui reste après ce retardement et continue uniformément. [Maclaurin 1749b, vol. I., 8-9]

La lecture de ces affirmations se fait sans difficulté et permet de comparer lors de démonstrations à la fois l'espace, le temps ou même la vitesse (en particulier dans les quinze théorèmes généraux). Nous pouvons déjà dire qu'en raison de ces axiomes qui comparent différentes quantités, les preuves des premières propositions s'articuleront autour d'une démonstration par l'absurde⁴.

À la suite de l'énoncé des axiomes, Maclaurin démontre quinze théorèmes qui mettent en œuvre à la fois la définition de la vitesse et les axiomes. La notion de fluxion n'intervient que dans la démonstration du quatorzième théorème. Ces théorèmes portent sur la comparaison et la mise en proportion des différentes notions citées plus haut. Ils sont fondamentaux dans la poursuite du livre I. Ils se retrouvent dans toutes les démonstrations les plus importantes, de plus ils servent d'entraînement et d'exercice avant d'aborder les résultats concernant les fluxions.

Les théorèmes XII et XIII sont l'exemple même de la valorisation de cette méthode ; c'est dans ces deux théorèmes que la méthode newtonienne se trouve résumée. Par le théorème XII, il peut dire que la vitesse « instantanée » en un point est à la vitesse en ce point (considérée comme uniforme) comme une limite entre l'espace parcouru par la vitesse acquise juste avant ce point et l'espace parcouru par la vitesse acquise juste après.

Dans le théorème XIII, il montre la réciproque du théorème précédent. Ainsi, pour certaines démonstrations, il utilisera soit le douzième, soit le treizième théorème. Le douzième correspond à la méthode des fluxions, le treizième à la méthode des fluentes. Mais Maclaurin déclare à la suite de ces deux théorèmes : « et comme on a fait plusieurs objections contre cette Méthode, nous démontrerons ses principales propositions immédiatement par les Axiomes » [Maclaurin 1749b, vol. I., 47]

Enfin, Maclaurin considère le principe d'inertie comme important car il le donne comme étant à la base de la méthode des fluxions :

Tout le monde convient, que si un corps est abandonné à lui-même depuis une partie du tems de son mouvement, il continuera tou-

4. Ce type d'exposition n'est pas nouveau et il ressemble à celui de Galilée dans le *Discours concernant deux sciences nouvelles* [Galilée 1995]. En effet, dans la troisième journée, Galilée énonce lui aussi quatre axiomes de même teneur, à la différence près que chez lui le mouvement est simplement considéré comme uniforme, tandis que Maclaurin élargit cela à l'ensemble des mouvements.

jours de se mouvoir d'un mouvement uniforme, décrivant toujours un certain espace dans un tems donné, & cela suffit pour regarder dans le langage ordinaire la vitesse comme une puissance qui est dans le corps du mouvement. [Maclaurin 1749b, vol I., 4]

Pour être conforme aux exigences qu'il se donne dans la fondation de la méthode des fluxions, Maclaurin s'est servi de quelques principes réduits au minimum, les quatre axiomes, et de quelques définitions à partir desquelles les axiomes et les théorèmes fondateurs peuvent être produits. Mais, comme nous pouvons le constater, dans les axiomes, la notion de mouvement est omniprésente.

Dans le deuxième livre, il existe aussi, mais de façon moins nette, une axiomatisation avec une traduction algébrique de la notion de mouvement du premier livre. Le mouvement est alors représenté par des incréments ou des décréments. La définition des fluxions est alors la suivante :

Nous appellerons donc *Fluxions* des quantités, *toutes mesures de leurs rapports respectifs d'accroissement, ou de décroissement pendant qu'elles varient (ou fluent) ensemble.* [Maclaurin 1749b, vol. II., 158]

En utilisant un encadrement des valeurs respectives des quantités et par une double réduction à l'absurde, Maclaurin montre par exemple, que la fluxion de A^2 est $2aA$ si on suppose que la fluxion de A est a . Cette façon d'opérer permet d'éviter l'utilisation de quantités évanouissantes comme Newton dans le *De quadratura* et des quantités infinitésimales.

Regardons maintenant comment Maclaurin met en jeu ces notions dans le cadre de la figure de la Terre.

3.2.4 Le chapitre XIV : la figure de la Terre

L'esprit et les résultats présents dans le prix de 1740 sont développés dans le dernier chapitre du premier livre (celui qui est géométrique) du *Treatise of Fluxions*. Il peut alors être lu comme une conclusion, l'apogée du discours de Maclaurin sur la méthode fluxionnelle vue à travers la géométrie.

L'un des résultats les plus intéressants se trouve dans le §634 du *Traité des Fluxions* dans lequel il montre que :

La pesanteur d'une particule d'une sphère, ou d'un sphéroïde étant décomposée en deux forces, l'une perpendiculaire à l'axe du solide, l'autre au plan de son équateur, toutes les particules également distantes de l'axe tendent vers lui avec des forces égales, & toutes les particules à égales distances du plan de l'équateur, gravitent également vers ce plan, soit que les particules soient à la surface du solide, ou en-dedans. Et les forces, avec les quelles

les particules, à différentes distances de l'axe, tendent vers lui, sont comme ces distances; on doit dire la même chose des forces avec lesquelles elles tendent vers le plan de l'équateur. [Maclaurin 1749b, vol. II, 106–107]

Ce passage permet d'étendre les propositions de Newton et Cotes en tout point de la surface.

Pour cela, il a besoin de deux résultats. Le premier est le suivant : prenons $ADBE$ et adb deux ellipses concentriques et semblables. Soit P un point de $ADBE$ tel que Pd soit parallèle à AB . Soit H un point de $ADBE$ tel que PH soit parallèle à DE . Il prend un point quelconque v de de . Il place les points k et l sur la petite ellipse de telle façon que kl soit parallèle à AB . Il trace PN et PM parallèle respectivement à dk et dl . Il démontre la formule : $PQ + PR = 2dv$ [Maclaurin 1749b, vol. II., 104] (Fig. 2)

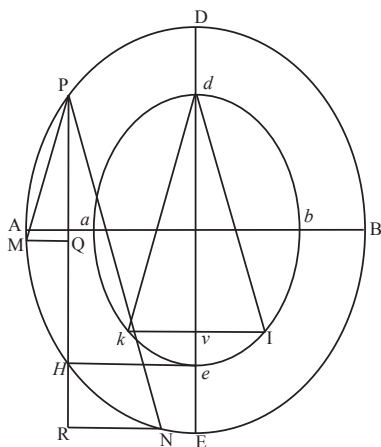


FIGURE 2

Même en utilisant un discours géométrique, il a recours à des solides très petits. Certains commentateurs considèrent ces solides comme infinitésimaux à l'instar des canaux newtoniens. Il nous semble que cette construction s'appuie sur sa vision des corpuscules définis par Maclaurin dans l'*Account* et dans sa version mathématisée dans le *Treatise of Fluxions*. D'où le deuxième résultat se trouve dans l'article 628, dans lequel il montre que « la dernière raison des gravitations en P vers les solides coniques ou pyramidaux $PAEa$ et $PMNm$ est celle de PA à PM , & que si AQ & Mq sont perpendiculaires à PH en Q & q , ces forces réduites à la direction PH sont finalement en raison de PQ à Pq . (Fig. 3) » [Maclaurin 1749b, vol. II, 105]

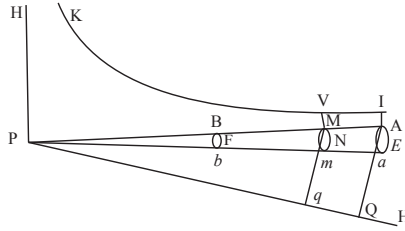


FIGURE 3

Ces deux résultats sont utiles à Maclaurin pour relier la composante verticale de l'attraction en P à l'attraction aux pôles de l'ellipsoïde intérieur qui peut être calculé à partir de la proposition 91 des *Principia* de Newton [Newton 1687, 219].

L'autre résultat est sa « démonstration » qu'un ellipsoïde de révolution est une forme d'équilibre. Pour montrer cela, il se donne trois conditions :

1° Que les forces qui résultent de l'attraction du sphéroïde, & de ces forces étrangères composées ensemble, agit toujours dans une droite perpendiculaire à la surface du sphéroïde. 2° Que les colonnes du fluide se soutiennent et se balancent mutuellement au centre du sphéroïde, & 3° que chaque particule, dans le sphéroïde, est poussée également dans toutes les directions. [Maclaurin 1749b, vol. II, 110]

De plus, il introduit la notion de surfaces de niveau :

les surfaces semblables et concentriques à ADBE seront des surfaces de niveau à toutes les profondeurs, & que les forces par lesquelles les particules égales, dans ces surfaces vers le sphéroïde, seront mesurées par les perpendiculaires aux surfaces terminées, soit par le plan de l'équateur, ou par l'axe du sphéroïde. [Maclaurin 1749b, vol. II, 111–112]

Enfin, le dernier résultat important de Maclaurin sur la question de la figure de la Terre est l'évaluation du degré d'aplatissement. En utilisant une démonstration analytique qui se trouve dans la partie algébrique, il montre que « l'excès du demi-diamètre de l'équateur, pardessus le demi-axe, est au demi-diamètre moyen, à fort peu près comme $5V$ à $4D - \frac{11V}{7}$ » [Maclaurin 1749b, vol. II, 124]

4 Conclusion

Le refus épistémologique d'utiliser l'infiniment petit, tant en physique qu'en mathématique, pousse Maclaurin, à la suite de Newton, à donner une définition corpusculaire de l'espace et du temps relativement acceptée par les savants de son temps. En revanche, pour éviter de prendre en compte une nécessaire vitesse instantanée qui s'appuie sur de l'infiniment petit, il se sert d'une définition et d'une axiomatique ne mettant en œuvre que des objets ou des éléments par nature finis. Cette volonté de mettre en cohérence ses principes en physique avec le traitement mathématique l'incite à penser un mouvement mathématique. Cela s'opère de façon relativement efficace, et la résolution du problème de la figure de la Terre s'inscrit dans cette problématique.

En réalité, cela va même plus loin. L'échange épistolaire entre Maclaurin et James Stirling à propos de cette question est symptomatique d'une vision affirmée des mathématiques. Maclaurin considère que pour résoudre rigoureusement et complètement cette question qui est de type géométrique, il faut nécessairement rester dans un cadre géométrique. En revanche, Stirling pense qu'il est possible, sans pour autant perdre en rigueur, d'utiliser les premiers termes (le nombre dépend de la précision recherchée) d'un développement en séries⁵.

La réception des travaux autour de la figure de la Terre de Maclaurin est importante en Grande-Bretagne et ces résultats ont eu des lecteurs attentifs sur le Continent. D'Alembert, Laplace ou Lagrange en font partie. Le premier concède à Maclaurin la primauté de certains résultats :

Quoique le Principe de l'équilibre des Canaux rectilignes soit, comme l'on voit, une conséquence très naturelle de la pression des Fluides en tout sens; cependant je dois reconnaître ici, que feu M. Maclaurin est le premier qui ait fait usage de ce Principe, & qui l'ait appliqué à la recherche importante de la Figure de la Terre. [d'Alembert 1752, 14]

Il considère de plus qu'il est à la source de ses travaux sur la question :

Aussi M. Maclaurin, le premier qui ait parlé de ces couches auxquelles la pesanteur est perpendiculaire, & qu'il appelle surface de niveau, n'a point déduit la loi de l'équilibre, de l'égalité de ces surfaces. (...) Nous avons cru devoir entièrement suivre sa méthode à cet égard. [d'Alembert 1752, 202]

Néanmoins, il doute de la pertinence d'autres assertions du Britannique et cela sera l'occasion d'un échange épistolaire avec Laplace.

5. Cette correspondance se trouve dans [Mills 1982] et est rapidement étudiée par [Bruneau 2011].

Pour reprendre les propos de Judith Grabiner sur l'influence du *Treatise of Fluxions* sur les savants de son époque [Grabiner 1997], celle-ci ne porte pas sur les fondements du calcul fluxionnel, ni sur sa conception de l'espace et du temps qui est associée, mais surtout sur les résultats mathématiques nouveaux. Par conséquent, ce ne sont pas les concepts mathématiques qui sont retenus par les mathématiciens mais la propre créativité de Maclaurin.

Bibliographie

ARTHUR, RICHARD

1995 Newton's fluxions and equably flowing time, *Studies In History And Philosophy of Science*, 26(2), 323–351.

BACHTA, ABDELKADER

2002 *L'Espace et le Temps chez Newton et chez Kant : essai d'explication de l'idéalisme kantien à partir de Newton*, Paris : L'Harmattan.

BERKELEY, GEORGE

1734 *The Analyst; or a Discourse addressed to an Infidel Mathematician*, Londres : J. Tonson.

BOSSUT, CHARLES

1810 *Histoire générale des mathématiques, depuis leurs origines jusqu'à l'année 1808*, t. 2, Paris : F. Louis.

BRUNEAU, OLIVIER

2005 *Pour une biographie intellectuelle de Colin Maclaurin (1698 – 1746) : ou l'obstination mathématicienne d'un newtonien*, Thèse de doctorat, Université de Nantes.

2011 *Colin Maclaurin, l'obstination mathématicienne d'un newtonien*, Nancy : Presses Universitaires de Nancy.

COTES, ROGER

1714 Logometria, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 29, 5–45.

D'ALEMBERT, JEAN

1752 *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, Paris : David l'aîné.

DE GANDT, FRANÇOIS

1981 *Duratio, fluxio, aequatio*. Trois aspects du temps newtonien, *Archives de Philosophie*, 44(3), 353–370.

GALILÉE

1995 *Discours concernant deux sciences nouvelles*, Paris : PUF Epiméthée.

GRABINER, JUDITH

1997 Was Newton's Calculus a Dead End? The Continental Influence of Maclaurin's *Treatise of Fluxions*, *The American Mathematical Monthly*, 104(5), 393–410.

GREENBERG, JOHN

1987 Isaac Newton et la théorie de la figure de la Terre, *Revue d'Histoire des Sciences*, 40(3), 357–366.

1996 Isaac Newton and the problem of the earth's shape, *Archive for History of Exact Sciences*, 49(4), 371–391.

GUICCIARDINI, NICCOLÒ

1984 Una riposta a Berkeley : Colin Maclaurin e i fondamenti del calcolo flussionale, *Epistemologia*, 7, 201–224.

1989 *The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700–1800*, Cambridge : Cambridge University Press.

MACLAURIN, COLIN

1713 *Dissertatio Philosophica Inauguralis, De Gravitate, aliisque viribus Naturalibus, . . .*, Édimbourg : s.e.

1724 *Pièce qui a remporté le prix de l'Académie royale des sciences proposé pour l'année mil sept cens vingt-quatre, . . .*, Jombert.

1741 De Causa Physica fluxus et refluxus maris, dans *Pièces qui ont remporté le prix de l'Académie royale des sciences en MDCCXL sur le Flux & le Reflux de la Mer. . .*, Paris : Martin, Coignard, Guerin, 193–234.

1749a *Exposition des découvertes philosophiques de M. le Chevalier Newton*, Paris : Dussant et Pissot, trad. Lavirotte.

1749b *Traité des Fluxions*, Paris : Jombert, trad. P. Pézénas.

MILLS, STELLA

1982 *The collected Letters of Colin Maclaurin (1698–1746)*, Nantwich : Shiva.

NEWTON, ISAAC

1687 *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, Londres : Jussu Societatis Regiæ.

SAGENG, ERIK

1989 *Colin Maclaurin and the Foundations of the Method of Fluxions*,
Thèse de doctorat, Princeton University.

2005 Colin Maclaurin, *A Treatise of Fluxions* (1742), dans *Landmark
Writings in Western Mathematics, 1640-1940*, édité par GRATTAN-
GUINNESS, IVOR, Elsevier B. V., 143–158.

TODHUNTER, ISAAC

1873 *A History of Mathematical Theories of Attraction and the Figure
of the Earth from the time of Newton to that of Laplace*, Londres :
MacMillan & Co.

TWARDY, CHARLES

2000 Hume, Newton & Maclaurin.
<http://www.scribd.com/doc/64239026/Maclaurin-Newton-Hume>,
dernière consultation octobre 2011.

TWEDDLE, IAN

1988 *James Stirling : this about series and such things*, Édimbourg :
Scottish Academic Press.

WALLIS, PETER

1982 The MacLaurin ‘Circle’ : The Evidence of Subscription Lists,
Bibliothek : Scottish Journal of Bibliography and allied Topics, 11, 38–
54.