L'Homme
Revue française d'anthropologie

171-172 | 2004
Musique et anthropologie

Représentations musicales et représentations mathématiques

Marc Chemillier

OpenEdition Journals

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/lhomme/24913
DOI : 10.4000/lhomme.24913
ISSN : 1953-8103

Éditeur
Éditions de l'EHESS

Édition imprimée
Date de publication : 1 décembre 2004
Pagination : 265-283
ISSN : 0439-4216

Référence électronique
Marc Chemillier, « Représentations musicales et représentations mathématiques », *L'Homme* [En ligne], 171-172 | 2004, mis en ligne le 01 janvier 2006, consulté le 02 mai 2019. URL : http://journals.openedition.org/lhomme/24913 ; DOI : 10.4000/lhomme.24913

Représentations musicales et représentations mathématiques

Marc Chemillier

SI L'ASSOCIATION de la musique et des mathématiques n'a rien de surprenant dans le contexte des traditions musicales savantes, que celles-ci soient occidentales, comme en témoigne le *quadrivium* au Moyen Âge, ou non occidentales comme la tradition chinoise, elle est plus insolite lorsqu'on la transpose aux musiques des sociétés sans écriture. L'étude des structures de certaines musiques de tradition orale révèle pourtant un niveau de complexité comparable à celui de certaines constructions mathématiques.

Parmi les idées que l'on peut avoir relativement à la musique, une partie en effet ressemble à des idées mathématiques. Celles-ci concernent plus particulièrement les formes et les structures musicales, et leur ressemblance avec des idées mathématiques tient au fait que des opérations de type mathématique leur sont applicables. Prenons, par exemple, le cas des rythmes asymétriques aksak, qui sont constitués de durées de deux et trois unités (comme le rythme turc, 2223). Ils se prêtent à une opération mathématique simple qui est l'énumération. On peut en effet *compter* les combinaisons obtenues selon ce principe, et c'est ce que fait Constantin Brailoiu dans un article célèbre paru dans la *Revue de musicologie*[1], où il obtient un tableau de 1884 séquences rythmiques distinctes. L'énumération est un exemple simple d'opération mathématique applicable à certaines structures musicales.

1. Brailoiu 1952. Une classe particulière de rythmes asymétriques, mis en évidence par Simha Arom dans la musique africaine, fait l'objet d'une énumération plus poussée dans Chemillier & Truchet 2003.

Cet article est une version remaniée d'un exposé présenté d'abord au Musée des Arts africains et océaniens en octobre 1997, à l'occasion de l'exposition sur les arts du Vanuatu, puis en décembre 1999 lors du forum Diderot organisé à l'Ircam par la Société mathématique européenne, puis à l'occasion du 2e colloque d'Épistémologie musicale également à l'Ircam en janvier 2001. Une version différente, privilégiant les aspects mathématiques, est parue en anglais dans les actes du forum Diderot édités chez Springer Verlag à Berlin. Certains exemples sont repris ici dans une perspective plus cognitive. Je remercie Bernard Lortat-Jacob et Miriam Rovsing Olsen pour leur relecture féconde des versions successives de ce texte.

Le problème posé par les opérations de type mathématique est leur capacité de métamorphoser les idées auxquelles elles s'appliquent, au point de les rendre méconnaissables. Les mathématiques sont pleines de ces coups de théâtre où deux idées apparemment éloignées s'avèrent finalement voisines parce qu'une série de métamorphoses les a rapprochées. Pour illustrer cette notion avec un exemple élémentaire, considérons une équation comme $2x = 6$. Après simplification algébrique, elle se métamorphose en $x = 3$, et si ces deux formes sont équivalentes du point de vue logique (on divise ou on multiplie par 2 les membres de l'égalité), elles ne le sont pas du point de vue psychologique. La première est un *problème* (chercher x tel que), alors que la seconde est une *solution* à ce problème. La résolution d'une équation consiste à métamorphoser le problème initial jusqu'à obtenir une solution.

Dans cet article, nous allons présenter un cas de structure musicale qui se métamorphose, c'est-à-dire qui peut être analysée selon deux constructions différentes, mais logiquement équivalentes. Notre problème est de déterminer laquelle des deux constructions est la plus pertinente du point de vue des musiciens autochtones. Dans quelle mesure les opérations mathématiques appliquées aux structures musicales ont une existence réelle dans l'esprit des gens qui jouent et conçoivent ces musiques ? En transposant le problème dans un domaine classique de l'anthropologie, celui de la parenté, cela revient à se demander dans quelle mesure les indigènes sont conscients des propriétés de leurs systèmes d'alliances matrimoniales. La notion mathématique de « groupe de permutations » décrivant ces systèmes dans les analyses structurales est évidemment inconsciente en tant que telle chez les indigènes qui pratiquent ces alliances. Mais cela ne veut pas dire qu'ils n'ont aucune conscience des propriétés de leurs systèmes. Claude Lévi-Strauss (1962 : 299) rappelle à ce propos l'exemple de l'indigène d'Ambrym « qui savait démontrer à l'enquêteur le fonctionnement de ses règles de mariage et de son système de parenté en traçant un diagramme sur le sable ». C'est ce type de savoir qui nous intéresse ici : les réalisateurs de formes musicales sont-ils conscients des idées mathématiques qu'elles contiennent ?

Nous commencerons par esquisser un cadre psychologique dans lequel inscrire ces interrogations. Puis nous présenterons un exemple concernant les arts visuels du Vanuatu, dont les propriétés mathématiques ont fait l'objet d'études approfondies. Enfin nous aborderons la musique des harpistes nzakara de République centrafricaine sur laquelle nous avons travaillé, et qui présente un cas intéressant d'ambiguïté sur le plan des représentations mentales associées à des formes musicales[2].

2. La problématique d'ordre cognitif présentée dans cet article a donné naissance en juin 2001 à un projet de recherche financé par l'Action incitative cognitique du ministère de la recherche, portant sur l'étude des mathématiques de la divination *sikidy* à Madagascar, et associant l'Équipe d'intelligence artificielle du GREYC à Caen (CNRS UMR 6072), le Laboratoire de psychologie cognitive de Caen (EA 1774) et le Laboratoire CNRS UMR 8574. Je remercie Jean-Pierre Estival pour les discussions que j'ai eues avec lui dans la préparation de ce projet.

Les représentations d'un point de vue psychologique

Les psychologues utilisent la notion de représentation, qui met en jeu un représentant et un représenté associés à travers certaines conduites. Considérons un objet simple comme un panier, et prenons une photographie de cet objet. La photographie joue le rôle de représentant si, par exemple, on me la confie en me demandant d'aller dans un placard qui contient plusieurs paniers pour chercher celui qui correspond au cliché. Ma conduite sera alors guidée par une représentation associant panier-représenté et photographie-représentant, où le substitut représentant me permet de contrôler mon action pour trouver l'objet représenté. Le représentant a ici une existence autonome en tant qu'objet réel, puisqu'il s'agit d'une photographie, mais le même scénario peut être imaginé avec un représentant mental, par exemple si je devais aller chercher le panier après avoir vu la photographie, mais sans l'emporter avec moi, en me fiant seulement à ma mémoire. Ma conduite serait alors déterminée par un représentant purement mental, une image mentale du panier.

La notion de représentation utilisée en anthropologie diffère sensiblement de celle illustrée par l'exemple précédent, dans la mesure où les représentations étudiées, appelées *représentations culturelles*, sont moins celles d'un individu que celles d'un groupe (Sperber 1996 : 50). Ces représentations se manifestent dans des conduites sociales, comme celles qui caractérisent, par exemple, l'attitude à l'égard des parents. Mais les représentations qui nous intéressent sont des représentations culturelles un peu particulières, qui ne sont pas nécessairement partagées par toute une société. En effet, la compréhension des formes musicales, et la capacité de réfléchir sur ces formes, ne concerne pas tous les individus, mais seulement certains esprits ayant des aptitudes spécifiques. C'est pourquoi il est nécessaire dans notre étude de distinguer, parmi les individus d'une société, ceux qui jouent la musique, ceux qui la créent (c'est-à-dire qui inventent de nouvelles formes), et ceux qui sont capables d'en parler, ces trois catégories d'individus mettant en œuvre des facultés cognitives différentes. Cette distinction est d'ailleurs universelle et vaut pour la société occidentale, où l'interprète, le compositeur et le théoricien de la musique sont rarement une seule et même personne.

Parler de représentations mathématiques dans un contexte de tradition orale soulève quelques difficultés, car ce qu'on appelle « mathématiques » en Occident est intrinsèquement lié à l'usage de l'écriture. En effet, l'écriture est un outil essentiel utilisé par les mathématiciens pour mettre en forme leurs intuitions à travers des *démonstrations écrites* soumises à une syntaxe rigoureuse. Celle-ci joue le rôle de filtre permettant d'éliminer les intuitions fausses. Mais il est non moins vrai que la partie écrite des mathématiques ne représente qu'une partie de l'activité des mathématiciens. Les psychologues font une différence intéressante entre représentations analogiques et non analogiques, qui permet de distinguer deux niveaux de l'activité mathématique, et d'étendre la notion de représentation mathématique hors du contexte de l'écriture.

On appelle *représentations analogiques* celles qui se fondent sur une ressemblance entre les termes représentant et représenté. Si l'on reprend l'exemple du panier, une photographie ou un croquis sera considéré comme une représentation analogique. Mais il faut souligner que la relation représentant-représenté s'étend à des formes beaucoup plus diversifiées que la simple relation d'analogie entre un objet et sa photographie. Par exemple, on peut représenter le panier par une description, c'est-à-dire un ensemble de mots écrits sur une feuille de papier, qui n'a aucune ressemblance matérielle avec l'objet, mais qui affirme à son sujet certaines propriétés. Il s'agira alors d'une *représentation non analogique* (Sperber 1996 : 51). Les textes des mathématiques occidentales en sont un exemple typique. Mais les psychologues soulignent l'existence d'un autre niveau de l'activité mathématique où les représentations analogiques ont une place essentielle. À ce niveau, elles jouent un rôle dans l'intuition des mathématiciens, qui consiste dans de nombreux cas à imaginer des conjectures à partir de manipulations effectuées sur ces représentations. Ainsi, lorsque nous parlons de représentations mathématiques dans un contexte de tradition orale, il s'agit de représentations analogiques, proches de celles qui interviennent dans cette partie intuitive de l'activité mathématique.

Pour les ethnomusicologues, l'une des principales difficultés vient de ce que les représentations mentales associées à la musique sont rarement l'objet d'un discours. Comme l'a souligné Gilbert Rouget (1996 : 13) à propos des musiques de cour de Porto-Novo, les conduites musicales sont le plus souvent régies par des règles qui sont implicites, ce qui conduit à distinguer deux niveaux du savoir musical, le niveau manifeste et le niveau latent :

> « Par niveau manifeste, entendons celui où se situe le savoir explicite – c'est-à-dire s'exprimant par des mots – dont cette musique est l'objet pour ceux ou celles qui la font. Concrètement : la terminologie autochtone concernant les instruments de musique, la musique et la danse, d'une part ; de l'autre, l'expression des idées ou des représentations collectives, autochtones toujours, s'y rapportant dans les différents domaines de la symbolique, de la fonction et de l'histoire. Ajoutons, bien entendu, les paroles des chants et les formules mnémotechniques des rythmes [...]. Par niveau latent entendons celui où se situe les savoirs implicites – autrement dit : ne disposant d'aucun vocabulaire autochtone pour s'exprimer – qui régissent l'organisation de cette musique. »

Ces deux niveaux du savoir renvoient approximativement à ce que les psychologues décrivent comme les deux types possibles de relations entre conduites et représentations. Certaines représentations peuvent fonctionner dans des systèmes de conduites très différents les uns des autres, et apparaissent comme « détachables » de ces conduites (Bresson 1987 : 948). Dans ce cas, elles sont verbalisables, et on en trouve un exemple type dans les concepts scientifiques. D'autres en revanche, ne fonctionnent qu'à l'intérieur d'un système de conduites bien déterminé, et ne peuvent avoir une indépendance totale à l'égard de ce système. Ce sont des programmes comportementaux intégrés dont on peut observer les résultats à travers des conduites, mais qui ne sont pas directement accessibles à la conscience. Celles-là *ne sont pas verbalisables*, et si l'on peut éventuellement en parler, on ne peut pas les transmettre intégralement sous forme verbale. La grammaire d'une langue est un exemple de représentation intégrée de ce type. Elle constitue un savoir partagé par les locuteurs de cette langue, mais sans que ceux-ci puissent expliciter complètement l'ensemble complexe des règles qui régissent son fonctionnement. Un autre exemple de représentations de ce type, qui présente des similitudes avec le thème des dessins sur le sable abordé plus loin, est celui du nouage ou de la dentelle. Le produit de l'activité contrôlée par ces représentations peut faire l'objet d'un discours (on peut décrire un napperon), mais l'activité elle-même n'est pas transmissible par le seul langage : on ne peut l'enseigner au téléphone (Bresson 1987 : 964).

Les représentations non verbalisables sont difficiles à cerner par l'enquête ethnographique, comme le souligne Maurice Bloch (1995 : 49) :

> « Il ne faut pas confondre ce que les gens disent et ce qu'ils savent. Il y a différentes catégories de savoir et chacune d'elles entretient une relation différente avec le langage et l'action. Normalement on ne parle jamais du savoir le plus fondamental, et en parler c'est en transformer la nature : c'est le fait même que l'on ne puisse en parler qui nous permet de l'utiliser avec rapidité et souplesse. Ce savoir est tout simplement implicite, et c'est grand dommage parce que c'est précisément ce type de savoir qui devrait constituer l'objet privilégié des recherches anthropologiques. »

Il donne un exemple tiré de son travail sur la parenté qui met en lumière ce que peut être un concept non verbalisé. Les Zafimaniry de Madagascar ont une terminologie de parenté assez vague. Or il se trouve que leur système d'alliance fonctionne sur un modèle précis à deux moitiés exogames, échangeant des conjoints de manière régulière et systématique. Ainsi, les Zafimaniry utilisent le concept de « groupe d'alliés parmi lesquels nous chercherons normalement nos époux », alors qu'ils n'ont aucun mot pour le désigner. Maurice Bloch montre que ce concept apparaît très tôt chez l'enfant, qui est habitué à téter le sein d'autres femmes que sa mère, mais appartenant à la même moitié de village, et qui pleure si on lui donne le sein d'une femme appartenant à l'autre moitié.

Dans le cas contraire, lorsqu'un concept est verbalisé, il peut rester une part d'ambiguïté si ce concept est lié à des représentations pouvant prendre plusieurs formes différentes. Bernard Lortat-Jacob en donne un exemple emblématique, à propos de la *quintina*, cette voix fusionnelle apparaissant dans le spectre harmonique des quatre voix chantées par un chœur sarde. L'existence d'une représentation mentale associée à cette voix ne fait aucun doute, puisqu'il existe un terme pour la désigner. Mais il reste à savoir à quelle hauteur du spectre harmonique les Sardes se la représentent mentalement. L'analyse acoustique du phénomène conduit à hésiter entre deux zones, celle se situant à la double ou triple octave de la basse (par exemple, *sol* à environ 400 ou 800 Hz si la basse chante un *sol* à environ 100 Hz[3]), ou celle se situant à la quinte trois fois redoublée (*ré* à environ 1200 Hz

3. Le *sol* de la gamme tempérée est à 98 Hz.

dans la même situation). Il se trouve qu'on peut lever l'ambiguïté dans ce cas particulier, car les chanteurs sardes *peuvent siffler* la hauteur qu'ils se représentent.

> « Or, même si [le] *ré* est bien présent dans le spectre harmonique et qu'une oreille attentive peut le percevoir, il semble qu'il ne soit pas prépondérant. Pour la majorité des auditeurs, comme pour les confrères eux-mêmes, qui peuvent la chanter, et, plus commodément la siffler, la *quintina* semble plutôt reproduire la fondamentale de l'accord et se trouver à sa double (ou triple) octave, soit *sol* dans l'aigu » (Lortat-Jacob 1998 : 144).

Ce cas résume bien notre problématique, en éclairant certaines limites de l'analyse objective. On verra dans la troisième partie une situation musicale dans laquelle on est conduit également à deux interprétations logiquement équivalentes, mais sans qu'il soit possible de décider si l'une d'elles correspond aux représentations mentales des musiciens autochtones.

Mathématiques visuelles : les dessins sur le sable

Avant d'aborder un problème musical, nous allons faire un détour par les arts graphiques, qui constituent l'une des activités les plus propices à la mise en évidence d'idées mathématiques, et à ce titre ont fait l'objet de nombreuses études dans le champ de l'ethnomathématique. Les dessins sur le sable sont des tracés linéaires, souvent complexes, ayant des propriétés intéressantes qui relèvent de la théorie des graphes. Cette technique est pratiquée dans plusieurs régions du monde, et consiste simplement à tracer un sillon sur une surface de sable. Elle a donné naissance à de riches traditions artistiques aux îles Vanuatu et en Angola[4].Une chose intéressante dans cette pratique, du point de vue de l'étude des représentations mentales, est le fait que les dessins sur le sable sont associés à un discours en forme de récitation de mythes. Le plus souvent, on exécute un dessin en récitant un mythe qui apparaît comme un commentaire du dessin. L'un de ces commentaires se réfère directement au tracé lui-même, et à la manière de le réaliser. Il est associé à un dessin vanuatu intitulé « Le fruit de l'arbre à pain » (Fig. 1, Cabane 1997 : 53). On commence par dessiner le fruit complet, au moyen d'une ligne continue, sans lever le doigt et sans repasser sur un tronçon déjà tracé. Puis on repasse sur certains segments, en effaçant la partie inférieure du dessin délimitée par ces segments. On dit alors que le rat a « mangé » le fruit de l'arbre à pain. Cette propriété du tracé, énoncée à propos du « fruit de l'arbre à pain », que nous appellerons la *règle de la ligne continue* – ne jamais lever le doigt et ne pas repasser sur un segment déjà tracé – est une représentation mathématique. En effet, ne pas lever le doigt confère au tracé une propriété correspondant à ce que les mathématiciens appellent un *graphe eulérien*. Cette représentation indigène est verbalisée sous une forme imagée, par le fait que la

4. Ces dessins vanuatu sont connus par les travaux de Bernard Deacon (1934). Leurs aspects mathématiques ont été étudiés par Marcia Ascher 1998 : 61-84. Concernant les dessins angolais, voir Gerhard Kubik (1988) pour une présentation de cette tradition, et Paulus Gerdes (1995) pour une étude mathématique.

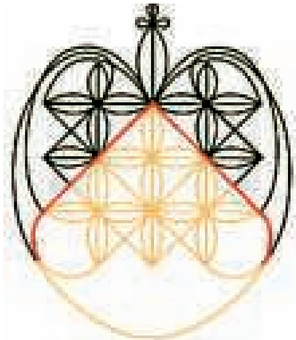


Figure 1. Le fruit de l'arbre à pain mangé par le rat.

transgression de la règle est prise en compte dans le commentaire du dessin lui-même : « repasser sur un segment déjà tracé » est interprété comme l'action de « manger le fruit », c'est-à-dire une action destructrice associée à l'effacement des segments concernés. On est ici dans un cas simple où la représentation mathématique liée au dessin fait l'objet d'une verbalisation explicite.

La règle de la ligne continue s'applique, en théorie, à tous les dessins sur le sable du Vanuatu (il existe des exceptions, certains dessins ne pouvant, mathématiquement, être tracés avec une seule ligne continue). Cette hypothèse repose sur un argument que nous appellerons l'*argument probabiliste*, dont on trouve les éléments dans l'étude ethnomathématique que Marcia Ascher a consacrée aux dessins sur le sable (Ascher 1998 : 65). Elle montre que sur environ 90 dessins étudiés, le nombre de ceux qui peuvent être tracés en respectant la règle de la ligne continue est approximativement de 75, soit un taux de 83 %. Ce taux est bien supérieur à ce qu'il serait si l'apparition de ces dessins n'était pas favorisée par certains facteurs. Ainsi, lorsqu'une propriété n'apparaît pas de façon accidentelle ou casuelle, on est conduit à supposer que des conditions psychologiques particulières favorisent son apparition. C'est en quoi consiste l'argument probabiliste qui postule l'existence de facteurs psychologiques dans les cas où une propriété est distribuée de façon déséquilibrée, c'est-à-dire que la concentration d'objets la vérifiant est anormalement élevée.

Il n'est pas facile de tracer un dessin en respectant la règle de la ligne continue, et c'est un problème suffisamment intéressant pour que des mathématiciens aussi illustres qu'Euler s'y soient consacrés[5]. Les indigènes du Vanuatu sont pleine-

5. Le théorème d'Euler permet d'obtenir un tracé respectant la règle de la ligne continue (on commence et finit par les points ayant un nombre impair de branches, et le tracé n'est possible que si le graphe comporte exactement deux points de cette sorte). Cette solution permet de résoudre le célèbre jeu de potache consistant à tracer une figure ayant la forme d'une enveloppe, en respectant la règle de la ligne continue (solution : commencer et finir par les sommets ayant trois branches).

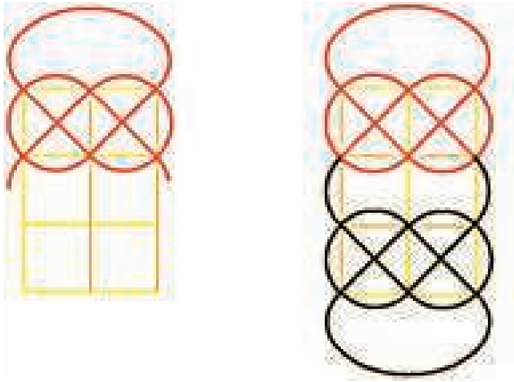


Figure 2. Épreuve pour accéder au territoire des ancêtres.

ment conscients de ces difficultés, et du fait que la recherche d'un tracé respectant la règle constitue un problème. C'est ce que montre un mythe qui raconte l'épreuve pour accéder au territoire des ancêtres (Fig. 2, Cabane 1997 : 18). Le dessin de gauche est celui que fait la gardienne du monde des esprits quand un nouveau défunt se présente. En plus des formes arrondies de la partie supérieure, ce dessin comporte une armature rectangulaire avec un quadrillage qui ne fait pas partie du dessin, mais sert simplement de guide. Pour pouvoir retrouver ses ancêtres, le défunt doit être capable de compléter le dessin comme indiqué à droite de la figure. Le mythe prend directement en compte la difficulté à tracer le dessin, puisque c'est en cela précisément que consiste l'épreuve qui permet d'accéder au territoire des ancêtres.

Les difficultés liées au tracé des dessins ne sont pas les mêmes que celles qui interviennent dans la conception de ces dessins. De la même façon, dans le cas de la dentelle, réaliser un motif connu requiert des capacités cognitives différentes de celles utilisées pour concevoir de nouveaux motifs. Le geste qui exécute un motif n'est pas celui qui en crée un nouveau. Dans le cas des dessins sur le sable, il faut distinguer la règle de la ligne continue, qui est une contrainte imposée aux dessinateurs traçant un dessin (nouveau ou déjà connu), et les méthodes de tracé que les créateurs de dessins utilisent pour imaginer de nouvelles formes respectant cette contrainte. Le mathématicien Paulus Gerdes a étudié les dessins sur le sable d'Angola, et proposé un certain nombre de méthodes de création de dessins pouvant potentiellement être utilisées par les artistes. Les dessins angolais ont une propriété caractéristique appelée *monolinéarité*, qui diffère légèrement de celle des dessins vanuatu[6].

6. En plus de la règle de non réutilisation d'un segment déjà tracé, la monolinéarité impose une restriction supplémentaire qui empêche les lignes de se toucher sans croisement (Gerdes 1995 : 20).

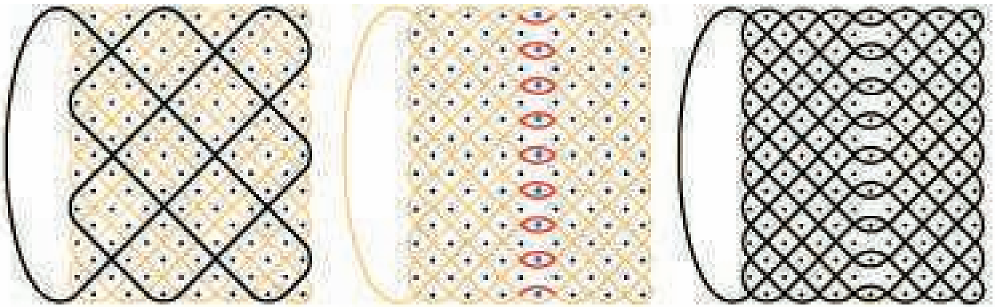


Figure 3. Dessin non-monolinéaire (à gauche) transformé en dessin monolinéaire (à droite).

Le dessin de droite de la figure 3 provient d'Angola. Celui de gauche de la même figure n'est pas attesté dans la tradition angolaise, car il n'est pas monolinéaire : si on essaie de le tracer sans lever le doigt, on s'aperçoit qu'on revient au point de départ sans avoir pu recouvrir la totalité de la figure. D'autres figures de même forme que celle de gauche peuvent être monolinéaires, selon le nombre de lignes et de colonnes que l'on choisit.

Pour pallier la non-monolinéarité de certaines figures, les artistes angolais semblent avoir mis au point une construction géométrique qui permet de les transformer en dessins monolinéaires. Cette construction est schématisée par le dessin intermédiaire placé au milieu de la figure 3. Elle consiste à choisir une colonne dans le dessin de gauche, puis à remplacer tous les croisements de cette colonne par des arcs de cercle. Le résultat est le dessin reproduit à droite dans la même figure, et il a la propriété d'être monolinéaire. Paulus Gerdes présente cette transformation comme un véritable « algorithme » applicable quels que soient les nombres de lignes et de colonnes de la figure (Gerdes 1995 : 205), mais on ne sait pas exactement dans quelle mesure cette pratique constitue un savoir explicite et organisé. Il ne fait pourtant aucun doute que dans ces traditions, la recherche de tracés vérifiant certaines propriétés topologiques est une activité consciente de l'esprit.

Les dessins sur le sable du Vanuatu sont un exemple d'activité dans une société de tradition orale mettant en jeu des représentations mathématiques qui font l'objet d'une verbalisation. Mais il est clair que cette verbalisation n'est que partielle, et que la majeure partie des connaissances accumulées par les artistes lui échappe, notamment en ce qui concerne les méthodes développées pour réaliser de tels tracés.

Mathématiques sonores : les formules de harpe

La musique dans les sociétés de tradition orale peut également contribuer à la mise en évidence de représentations mathématiques. La situation est plus complexe que dans le cas des arts visuels, en raison de l'absence de trace laissée par les productions musicales. Pour mettre en évidence des représentations mathématiques sous-jacentes, on est contraint de noter une trace visuelle de l'activité musicale (partition solfégique, sonagramme, etc.), comme on le fait habituellement en ethnomusicologie (Rouget 1996 : 14). Cela dit, quels que soient leurs aspects visuels ou sonores, ces deux formes d'activités ont en commun d'être des *activités motrices*. On a vu que les représentations mathématiques des dessins sur le sable étaient directement liées à un geste, celui consistant à tracer un sillon sur le sable. Elles dépendaient finalement moins de la trace de ce geste (le dessin) que du geste lui-même (ne pas lever le doigt et ne pas repasser sur un segment déjà tracé). L'exemple musical traité ici présente certaines analogies. Comme précédemment, les propriétés mathématiques étudiées dépendent plus d'un geste, celui du harpiste pinçant les cordes de son instrument, que de la trace sonore de ce geste, les propriétés formelles présentées ici étant difficilement audibles, comme on peut s'en rendre compte en écoutant les disques cités en références.

Dans certaines formules traditionnelles de harpe jouées par les musiciens Nzakara, on remarque une propriété formelle inattendue. La figure 4 est la transcription d'une de ces formules, non dans la notation solfégique habituelle, mais dans une représentation graphique indiquant les gestes du harpiste. Les cinq lignes correspondent aux cinq cordes de la harpe, et les points indiquent les couples de cordes pincées simultanément par le musicien, à une cadence régulière (les tirets au bas de la figure marquent la pulsation à division ternaire). La succession des couples produit deux lignes mélodiques dans l'aigu et dans le grave. Regardons les profils de ces deux lignes, en comparant celle du haut à partir du début, et celle du bas décalée de six couples en avant : il apparaît qu'elles sont identiques à quelques exceptions près. Malgré quelques anomalies, la formule de harpe possède une structure analogue à ce que l'on appelle dans la musique occidentale savante un *canon* (notons toutefois que le canon au sens où nous l'entendons ici ne porte pas sur la reproduction exacte par une voix de la mélodie produite par une autre, ni même de sa transposition à un intervalle donné, mais plutôt de sa transposition à l'intérieur de l'échelle)[7].

La structure de canon nzakara n'est pas propre à cette formule, mais apparaît dans un groupe de six formules des catégories musicales appelées *ngbakia* et *limanza*. Malheureusement, aucun terme vernaculaire ne permet de caractériser spécifiquement ces formules en canon. Et à vrai dire, on ne sait pas si les musiciens nzakara sont conscients ou non de leur caractère particulier. Reste dans ce cas l'argument probabiliste : il existe une trentaine de formules connues de *ngba*

7. L'étude du répertoire nzakara, en particulier l'analyse formelle des canons, est présentée dans Chemillier (1995). Les aspects mathématiques sont discutés dans Chemillier (2002 et 2003).

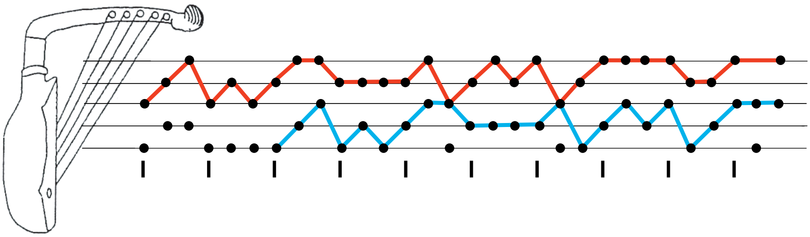


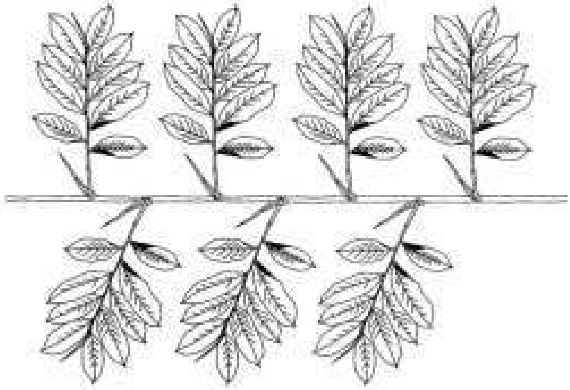
Figure 4. Une formule de harpe *limanza* en canon[8].

kia et de *limanza*, parmi lesquelles six sont de type canon, ce qui conduit à une proportion de 20 % de formules en canon. Certes, ces formules sont minoritaires dans le corpus, mais leur proportion est cependant largement supérieure à celle qu'on obtiendrait si aucun facteur ne favorisait l'apparition de telles formules. D'où l'hypothèse d'une représentation mentale expliquant l'existence de ces formules en canon.

Je vais rassembler ici un faisceau d'indices qui confortent l'hypothèse d'une représentation mentale propice à l'apparition de la structure de canon, c'est-à-dire une structure musicale en lignes parallèles décalées. Éric de Dampierre avait attiré mon attention sur une plante appelée « plante-des-jumeaux », utilisée par les Nzakara dans le rituel des jumeaux qui consiste, entre autres choses, à transplanter un pied de cette plante devant la case où a eu lieu une naissance gémellaire. Si l'on en croit Éric de Dampierre, les représentations mentales expliquant ce rituel sont d'ordre strictement géométrique. Ce qui a attiré l'attention des Nzakara dans cette plante, c'est sa configuration spatiale, la manière dont sont disposées ses deux rangées de feuilles. En effet, ces rangées ne sont pas symétriques et dans un même plan. D'une part elles sont dans deux plans différents formant un angle droit (dans la figure 5, la rangée supérieure est dans un plan vertical, et la rangée du bas dans un plan horizontal vu en perspective). D'autre part, elles sont décalées l'une par rapport à l'autre le long de la tige, les feuilles des deux rangées n'étant pas rattachées à la tige aux mêmes points, mais en des points qui alternent régulièrement.

Au-delà de l'analogie superficielle entre deux rangées de feuilles décalées (dans le cas de la plante), et deux lignes mélodiques en canon (dans le cas des formules de harpe), il est intéressant de revenir à ce qu'Éric de Dampierre décrit, au moyen de l'expression « penser au singulier », comme un trait fondamental du mode de penser nzakara. Si la naissance de jumeaux nécessite un rituel particulier, c'est parce que l'apparition de deux êtres presque identiques est un signe de désordre

8. Les cinq lignes ne sont pas celles d'une portée, et les points ne sont pas des notes, mais la transcription d'un geste (pincer une corde). Il n'y a pas de notion de hauteur absolue dans cette transcription. On peut entendre le résultat sonore correspondant dans le disque encarté (CD # **33**). Les hauteurs sont approximativement, de l'aigu au grave, *la* b *fa mi* b *ré* b *si*.



5. La plante-des-jumeaux (d'après un dessin de Jean-Marc Chavy).

du monde. La géométrie de la plante-des-jumeaux est supposée atténuer ce désordre. Elle comporte en effet deux rangées de feuilles, elles aussi presque identiques, mais dont l'identité est masquée par leur décalage le long de la tige, qui donne à chacune d'elles une position qui lui est propre. De la même façon, dans le cas des jumeaux, on prendra soin de souligner le décalage temporel séparant la sortie des enfants de l'utérus, qui permet de distinguer un aîné et un cadet.

Éric de Dampierre (1984 : 20) a rattaché ces cas à une même difficulté à penser le concept d'identité. Il en énumère de nombreuses manifestations, à travers par exemple l'enseignement des mathématiques au lycée de Bangassou, capitale du pays nzakara :

> « Aucun terme pour exprimer l'égalité de deux valeurs, de deux longueurs par exemple, ou des côtés d'un triangle isocèle, où seront toujours recherchés dans une première démarche le "grand côté" et le "petit côté" [...]. Soit deux longueurs égales, *AB* et *A'B'*. La seule façon acceptée de dire que ces deux longueurs sont égales est de recourir à la notion d'accord. Autrement dit de réduire la longueur de *A'B'*, de l'accoler visuellement à la longueur *AB* et de faire croître *A'B'* jusqu'à ce qu'elle atteigne la mesure de *AB*. »

Notons que cette explication passe par un geste, celui de faire croître une longueur jusqu'à ce qu'elle atteigne une autre. Les représentations mathématiques dans les sociétés orales sont sans doute étroitement liées au pouvoir explicatif du geste, et à son utilisation comme véhicule de la pensée[9].

9. Ajoutons, pour compléter cette remarque, que les études en neuro-imagerie cognitive révèlent, lors des activités numériques comme le comptage, l'activation dans le gyrus précentral du cerveau, de la bande prémotrice proche des coordonnées de la représentation des doigts. Ce lien pourrait être une trace développementale du comptage et de la manipulation des quantités sur les doigts lors de l'acquisition par l'enfant des capacités numériques. Les études interculturelles semblent indiquer que le comptage sur les doigts apparaît dans toutes les cultures (Houdé, Mazoyer & Tzourio-Mazoyer 2002 : 369, 546).

Le rejet du concept d'identité expliquerait l'apparition de certaines formes artistiques qui jouent sur le décalage de deux longueurs, ou de deux durées. Sur le plan sonore, les formules de harpe en canons en seraient un exemple. Sur le plan visuel, Éric de Dampierre (1995 : 18) met en exergue l'exemple d'une coiffure de tête sculptée de harpe, dans laquelle le décalage s'exprime par le pivotement de deux cercles l'un par rapport à l'autre (Fig. 6) :

> « Si ces longueurs sont aboutées sur elles-mêmes en un cercle perpétuel, les Nzakara tenteront alors de rendre le décalage permanent. Nous obtenons sur le plan plastique la figure de la girone où, par le jeu d'une superposition décalée, des sections de circonférence ("girons") sont cantonnées alternativement. Ce comportement transparaît à mon sens dans la sculpture d'une étonnante tête de harpe dont la coiffure gironnée est pourvue, alors même que le visage conserve sa « frontalité », d'un axe supplémentaire, lequel partage les tresses de deux girons opposés sur quatre et se trouve de ce fait décalé de 45° par rapport à la partition primaire [...]. S'agissant non plus de longueurs et de volumes, mais de durées [...], Marc Chemillier nous montre que cette façon spécifique de remuer ses méninges débouche sur un début de systématique musicale ; que cette systématique, par le jeu du plus et du moins au détour de la pulsation, crée des formules de canons ("polyphoniques") note pour note. »

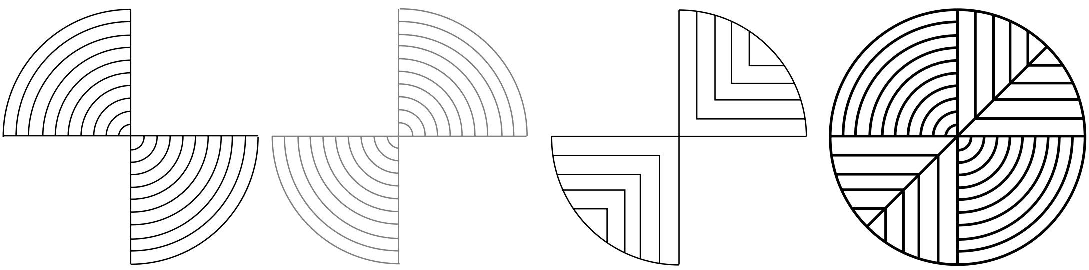


Figure 6. Étapes constituant la coiffure gironnée d'une tête sculptée de harpe (le résultat est à droite).[10]

Essayons d'expliciter la manière dont Éric de Dampierre met en relation la « figure de la girone » avec le décalage temporel des deux lignes mélodiques d'un canon.

Le couple de girons initial représenté à gauche (Fig. 6) subit un premier « décalage » (ou pivotement) sous l'effet d'une rotation d'un quart de tour, qui donne le couple de girons représenté en deuxième position. Sous cette forme, il est trop semblable au premier, et subit une deuxième transformation, qui consiste à inverser la disposition interne des tresses, donnant le schéma placé en troisième position. La combinaison du couple initial et du résultat de cette deuxième transformation

10. Cette coiffure « gironnée » de tête sculpée de harpe est l'illustration de couverture du livre *Une esthétique perdue*.

donne finalement la coiffure voulue représentée à droite de la figure 6, avec apparition de l'« axe supplémentaire » dont parle Éric de Dampierre. Malheureusement, il ne fournit pas d'indications sur la manière dont les propriétés de la coiffure gironnée sont décrites par les Nzakara. Sur le plan de la verbalisation, on n'en sait donc pas plus concernant la géométrie de cette figure, que dans le domaine des propriétés formelles du canon.

Le problème cognitif posé par les formules de harpes en canon est qu'il est possible de les analyser d'une autre façon, complètement différente de la représentation en canon, et que l'on ne sait pas laquelle des deux analyses est pertinente du point de vue des musiciens indigènes (à supposer que l'une d'elles le soit). On se trouve ici face à un phénomène propre aux représentations mathématiques, qui sont caractérisées, comme on l'a dit en commençant, par le fait qu'elles sont sujettes à des métamorphoses. Les difficultés créées par cette plasticité des représentations renvoient à ce que Dan Sperber (1996 : 68) appelle les *propriétés épiphénoménales* :

> « Des objets complexes, comme par exemple des représentations culturelles, possèdent des propriétés en tous genres. La plupart de ces propriétés sont épiphénoménales : elles sont des effets secondaires des propriétés fondamentales dont elles ne font pas partie. En particulier, les propriétés épiphénoménales ne jouent aucun rôle causal dans l'émergence et dans le développement du phénomène. Elles ne peuvent donc pas en fournir une explication causale. »

Lorsqu'on est confronté à une représentation mathématique qui se métamorphose selon des formes très différentes, comment choisir la forme qui a une existence mentale réelle ? Comment distinguer la forme fondamentale et la forme épiphénoménale, au sens de Dan Sperber, c'est-à-dire une forme qui ne joue aucun rôle causal dans l'aspect psychologique du phénomène ?

Il se trouve que la structure formelle des canons nzakara se prête à ce genre de métamorphose. Il est en effet possible de décrire la construction de ces formules d'une manière radicalement différente de la description en canon adoptée précédemment, faisant apparaître le canon comme une propriété secondaire, une simple conséquence logique de la construction.

Observons attentivement la formule de *limanza* étudiée précédemment. On remarque qu'elle n'utilise que cinq couples de cordes pincées simultanément, reproduits figure 7 (numérotés de 0 à 4). Cette figure montre que la simple succession des couples crée, *par elle-même*, un phénomène de canon. Le mouvement des cordes aiguës (monter à la corde supérieure, ou rester en place) est reproduit sur les cordes graves avec un couple de retard, créant une forme composée de deux « escaliers » légèrement décalés. Cette construction est généralisable. C'est-à-dire que si au lieu de translater les couples un par un comme on le fait figure 7 en montant les marches de l'escalier, on les translate par bloc comme cela est indiqué figure 8, on peut retrouver la formule de *limanza* initiale. Ainsi, le bloc 0 2 3 0 1 0 est translaté en 1 3 4 1 2 1, puis en 2 4 0 2 3 2, etc. ce qui reconstitue la formule, et montre du même coup que la structure canonique n'est qu'une

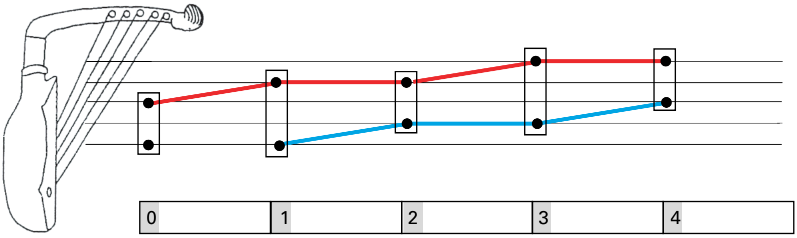


Figure 7. Cinq couples de cordes pincées simultanément.

simple conséquence de cette construction. Ce procédé assez étonnant n'est pas propre à la formule étudiée, mais valable pour toutes celles du répertoire qui possèdent la structure de canon. On est donc confronté au problème suivant : les deux représentations étant également adaptées à la description de la réalité musicale (forme en canon d'une part, construction par translation d'autre part), comment choisir celle qui est la plus proche des représentations mentales des musi-

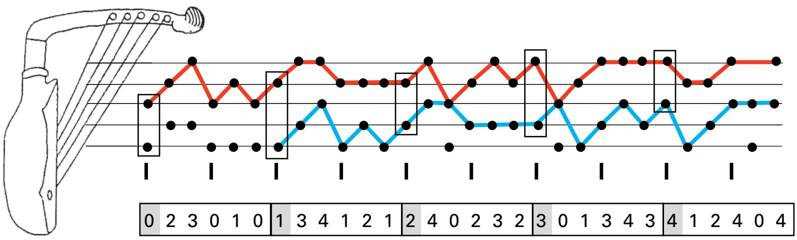


Figure 8. La formule *limanza* obtenue par translation de 0 2 3 0 1 0.

ciens nzakara ? Les éléments énumérés précédemment feraient pencher pour la première interprétation, mais des travaux récents privilégient la deuxième, qui correspondrait mieux à la réalité cognitive. Klaus-Peter Brenner a en effet repris l'analyse des formules de harpe nzakara, en rejetant l'interprétation de ces formules comme canon. Il développe une interprétation alternative appelée « géométrie sonore », qui se rapproche de la construction par translation présentée ci-dessus. Les formules de harpe sont analysées à partir de cellules qui sont juxtaposées les unes à la suite des autres, et qui correspondent *grosso modo* aux blocs translatés que nous avons décrits[11]. Il est trop tôt pour discuter les résultats de ce travail qui n'est pas encore publié, mais il semble s'appuyer sur une argumentation d'ordre cognitif qui apporte de nouveaux éléments au débat, en introduisant des comparaisons interculturelles entre plusieurs sociétés africaines.

11. Par exemple, l'une des formules *ngbakia* en canon du répertoire est schématisée à partir de la cellule 0 1 0 4 translatée en 1 2 1 0, puis 2 3 2 1 etc. On peut entendre cet exemple sur le disque *Musiques des anciennes cours Bandia* (plage 5). L'ouvrage de Klaus-Peter Brenner n'étant pas encore paru, les arguments que nous résumons ici sont tirés d'échanges par courrier électronique que nous avons eus avec l'auteur.

MOTS CLÉS/*KEYWORDS* : ethnomathématiques/*ethnomathematics* – anthropologie cognitive /*cognitive anthropology* – représentations mentales/*mental representations* – dessins sur le sable du Vanuatu/*sand drawings from Vanuatu* – formules de harpe nzakara en canon/*canon harp formulae from nzakara people*.

BIBLIOGRAPHIE

Ascher, Marcia

1998 *Mathématiques d'ailleurs*. Paris, Seuil.

Bloch, Maurice

1995 « Le cognitif et l'ethnographique », *Gradhiva* 17 : 45-54.

Brailoiu, Constantin

1952 « Le rythme aksak », *Revue de musicologie* 33 : 71-108.

Brenner, Klaus-Peter

2004 *Die kombinatorisch strukturierten Harfen - und Xylophonpattern der Nzakara (Zentralafrikanische Republik) als klingende Geometrie - eine Alternative zu Marc Chemilliers Kanonhypothese*. Bonn, Holos-Verlag, à paraître.

Bresson, François

1987 « Les fonctions de représentation et de communication », in Jean Piaget, P. Mounoud, J.P. Bronckart (eds), *Psychologie*, Paris, Gallimard : 933-982 (« Encyclopédie de la Pléiade »).

Cabane, Jean-Pierre

1997 *Ululan, les sables de la mémoire*. Nouméa, Grains de sable.

Chemillier, Marc

1995 « La musique de la harpe », in Éric de Dampierre (ed.), *Une esthétique perdue*, Paris, Presses de l'École Normale Supérieure, 99-208.

2002 « Ethnomusicology, Ethnomathematics. The Logic Underlying Orally Transmitted Artistic Practices », in G. Assayag, H. G. Feichtinger, J. F. Rodrigues (eds), *Mathematics and Music, Fourth Diderot Forum*, European Mathematical Society, Berlin, Springer-Verlag, 161-183.

2003 « Synchronization of Musical Words », *Theorical Computer Science* 310 : 35-60.

Chemillier, Marc & Charlotte Truchet

2003 « Computation of words satisfying the "rhythmic oddity property" (after Simha Arom's works) », *Information Processing Letters* 86 (5) : 255-261.

Dampierre, Éric de

1984 *Penser au singulier*. Nanterre, Société d'ethnologie.

1995 (ed.) *Une esthétique perdue.* Paris, Presses de l'Ecole Normale Supérieure.

Deacon, Bernard

1934 « Geometrical drawings from Malekula and other islands of the New Hebrides », *Journal of the Royal Anthro. Institute* 64 : 129-175.

Gerdes, Paulus

1995 *Une tradition géométrique en Afrique. Les dessins sur le sable*. Paris, L'Harmattan.

Houdé, Olivier, Bernard Mazoyer & Nathalie Tzourio-Mazoyer

2002 *Cerveau et psychologie. Introduction à l'imagerie cérébrale anatomique et fonctionnelle*. Paris, PUF.

Kubik, Gerhard

1987 *Tusona - Luchazi Ideographs. A graphic tradition practised by a people of West-Central Africa*. Vienne, Föhrenau.

Lévi-Strauss, Claude

1962 *La Pensée sauvage*. Paris, Plon.

Lortat-Jacob, Bernard

1998 *Chants de passion. Au cœur d'une confrérie de Sardaigne*. Paris, Cerf.

Rouget, Gilbert

1996 *Un roi africain et sa musique de cour*. Paris, CNRS Editions.

Sperber, Dan

1996 *La Contagion des idées*. Paris, Éditions Odile Jacob.

Vanuatu. Océanie. Arts des îles de cendre et de corail, catalogue de l'exposition. Paris, Musée des Arts d'Afrique et d'Océanie, 1997.

DISCOGRAPHIE (CD)

1996 *République centrafricaine. Musique des anciennes cours Bandia*. Enregistrement et textes de Marc Chemillier & Éric de Dampierre, Paris, CNRS/Musée de l'Homme, CNR 2741009.

1999 *La Parole du fleuve. Harpes d'Afrique centrale*. Paris, Cité de la Musique, CM 001.

RÉSUMÉ/*ABSTRACT*

Marc Chemillier, *Représentations musicales et représentations mathématiques*. — Cet article présente un cas de structure musicale intéressante, qui admet plusieurs constructions mathématiques logiquement équivalentes. Le problème est de déterminer dans quelle mesure ces constructions formelles ont une existence réelle dans l'esprit des gens qui pratiquent ces musiques. L'article esquisse un cadre psychologique dans lequel inscrire ces interrogations, puis développe un exemple classique étudié dans le champ de l'ethnomathématique qui concerne les artts visuels du Vanuatu et fournit quelques repères méthodologiques. Enfin, est abordée la musique des harpistes nzakara de République centrafricaine, qui présente un cas intéressant d'ambiguïté sur le plan des représentations mentales associées à des formes musicales.

Marc Chemillier, *Musical Représentations and Mathematical Representations*. — In this article, we present a case study of an elaborated musical structure, which can be analysed into two different mathematical ways which are logically equivalent. Our main problem is to select the logical explanation which is the most relevant from the musicians point of view. This article introduces a psychological framework adapted to this situation, and then, presents an overview of a classical ethnomathematical example dealing with sand drawings from Vanueatu, in order to give some methodological backgrounds. Finally, we turn to the harp repertoire of the nzakara people from Central African Republic, and we show how it contains an interesting case of musical structure which is ambiguous according to the mental represntations associated with it.