Mathématiques et sciences humaines
Mathematics and social sciences

163 | Automne 2003
Théorie du choix social : cinquantenaires

La théorie des choix collectifs à portée de tous ! Commentaires sur quatre livres de vulgarisation de Donald Saari

Social Choice Theory for Everyone: comments on four books by Donald Saari

Vincent Merlin

OpenEdition Journals

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/msh/2921
DOI : 10.4000/msh.2921
ISSN : 1950-6821

Éditeur
Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée
Date de publication : 1 septembre 2003
ISSN : 0987-6936

Référence électronique
Vincent Merlin, « La théorie des choix collectifs à portée de tous ! Commentaires sur quatre livres de vulgarisation de Donald Saari », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 163 | Automne 2003, mis en ligne le 10 février 2006, consulté le 22 septembre 2020. URL : http://journals.openedition.org/msh/2921 ; DOI : https://doi.org/10.4000/msh.2921

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

LA THÉORIE DES CHOIX COLLECTIFS À PORTÉE DE TOUS ! Commentaires sur quatre livres de vulgarisation de Donald Saari

Geometry of Voting, Studies in Economic Theory 3, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1994.

Basic Geometry of Voting, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1995.

Chaotic Elections ! A Mathematician Looks at Voting, American Mathematical Society, 2001.

Decisions and Elections, Explaining the Unexpected, Cambridge, Cambridge University Press, 2001.

Depuis près de vingt ans, Donald Saari a profondément renouvelé l'analyse des procédures de vote en théorie des choix collectifs. Au cours des années 1980 et au début des années 1990, une série d'articles sur les propriétés des classements par points lui a permis de poser les bases de ce que l'on appelle aujourd'hui l'approche « à la Saari » ou plus simplement la « géométrie du vote ». Les techniques et analyses qu'il a développées dans ces premiers travaux ont ensuite été appliquées avec succès à d'autres thèmes classiques en théorie des choix collectifs, comme les théorèmes d'impossibilité (Arrow, Sen, Gibbard et Satterthwaite), l'analyse d'autres règles de vote (la règle de Copeland, la méthode de Kemeny), la probabilité des paradoxes de vote, la mesure du pouvoir dans les procédures de vote, etc. Techniquement, ces travaux rompent avec les analyses axiomatiques traditionnelles de la théorie des choix collectifs qui reposent sur les propriétés des relations binaires ; Saari appuie la plupart de ses raisonnements sur l'analyse d'applications linéaires complexes, décrivant le processus de la décision collective.

La relative complexité de son approche par rapport aux travaux standards n'a pas échappé à Donald Saari. Depuis une dizaine d'années, paralèllement à la publication d'articles dans les meilleures revues scientifiques en économie et en mathématiques[1], il a pris le soin d'écrire plusieurs ouvrages dont l'objectif est de faire connaître ses travaux à un plus large public que le cercle des spécialistes en théorie des choix collectifs. En remontant le temps du plus récent au plus ancien, nous allons présenter un bref panorama de ses recherches par le biais du commentaire de ses livres.

Decisions and Elections, Explaining the Unexpected est l'un des rares ouvrages de théorie des choix collectifs (si ce n'est le seul) qui s'adresse à tous les publics, aux spécialistes des sciences politiques ou d'économie comme au simple lecteur curieux d'apprendre ; l'addition, la multiplication et le bon sens sont les seules armes dont il faut se munir pour aborder ce livre. Les notions les plus complexes y sont abordées simplement à l'aide d'exemples, de tableaux ou de graphiques.

[1]Nous ne rappelons pas ici ces références dont le nombre doit aujourd'hui dépasser la cinquantaine. Le lecteur trouvera toutes ces références dans les bibliographies des ouvrages, ou sur le site de Jerry Kelly http ://www.maxwell.syr.edu/maxpages/faculty/jskelly/S.htm.

Le cœur de l'ouvrage est une analyse critique du théorème d'Arrow[2] et du paradoxe du parétien libéral de Sen[3]. Le théorème d'Arrow affirme qu'il n'existe pas de classement collectif des options à partir des préférences des individus qui puisse satisfaire simultanément à quatre conditions *a priori* bénignes. Les trois premières sont rarement contestées : chacun est libre d'exprimer les préférences de son choix (condition d'absence de restriction, AR), une option unanimement préférée à une autre est classée devant celle-ci au niveau collectif (condition de Pareto, P), et aucun individu n'est capable d'imposer toutes ses préférences strictes entre deux options (condition d'absence de dictateur, AD). La quatrième, la condition d'indépendence (I) stipule que tant que chaque individu conserve le même classement entre deux options, le classement collectif entre celles-ci reste inchangé. Autrement dit, pour classer collectivement deux options A et B, il suffit de connaître les classements de chacun sur cette paire, indépendamment des préférences sur d'autres possibilités.

Le théorème du parétien libéral de Sen illustre avec force le conflit possible entre liberté individuelle et efficacité économique : le libre arbitre des agents peut, dans certains cas, conduire à une situation non optimale au sens de Pareto[4]. Plus précisement, on suppose que dans une société devant choisir entre trois options ou plus, aux moins deux individus ont une sphère personnelle de décision : pour une paire donnée d'options, chacun est libre de choisir pour la collectivité l'une ou l'autre. Par exemple, cette condition de libéralisme minimal (LM) stipule que chaque individu est libre de lire un livre ou non. Supposons que dans un monde imaginaire, il existe un seul livre, « *L'amant de lady Chatterley* », et deux individus, l'un prude et l'autre lascif. L'individu prude préfère d'abord que personne ne lise le livre (état noté (N, N)), puis le lire plutôt que de laisser le lascif le lire (état (L, N)), que le lascif le lisse plutôt que lui même (état (N, L)), et enfin, que tous le lissent (état (L, L)). Sa préférence est donc décrite par l'ordre préférence $\succ_p$ sur les quatre états possible du monde :

$$(N, N) \succ_p (L, N) \succ_p (N, L) \succ_p (L, L)$$

D'un autre coté, la préférence de l'individu lascif est décrite par la relation binaire $\succ_l$:

$$(L, L) \succ_l (L, N) \succ_l (N, L) \succ_l (N, N)$$

La condition LM nous indique ici que le lascif a le droit de choisir entre les états (N, N) et (L, N) et entre (N, L) et (L, L), puisque les changements le concernent seul. De même, le lascif est décisif entre (N, N) et (N, L) et entre (L, N) et (L, L). Sen montre alors que cette condition, combinée avec AR et P, débouche sur une impasse logique : il existe des profils de préférences pour lesquels on ne peut pas

[2]Voir l'article de Bernard Monjardet, *De Condorcet à Arrow via Guilbaud, Nakamura et les "jeux simples"*, dans ce même numéro, pour des références sur le sujet.

[3]Voir Amartya Sen, *The Impossibility of a Paretian Liberal*, Journal of Political Economy, Vol.78, No.1, January/February 1970, p. 152-157.

[4]Par ailleurs, le théorème de Sen peut se réécrire en théorie des jeux sous la forme d'un dilemme du prisonnier, autre exemple frappant de la difficulté des agents rationnels à se coordonner sur des situations qui permettent pourtant à tous d'obtenir un meilleur résultat (les optima de Pareto).

prendre de décision collective, chaque option étant dominée par une autre. Dans notre exemple, l'état (L, N) est dominé par l'état (N, N), puisque le prude préfère ne pas lire le livre plutôt que de le lire. Mais alors, le lascif peut modifier le choix vers (N, L), puisqu'il est décisif entre ces deux paires. On remarque finalement que les deux préférent unanimement (N, L) à (L, N), et que le principe de Pareto devrait nous conduire à adopter cet état ! Ainsi, les trois principes AR, LM et P nous entrainent ici dans un cycle sans fin.

La principale contribution de *Decisions and Elections* est une critique détaillée de l'axiome d'indépendence d'Arrow et du libéralisme minimal de Sen. Pour Saari, ces deux axiomes, bien que séduisants, sont à rejeter ; le coût de leur simplicité est en effet une perte d'information trop importante sur les préférences initiales des votants. À titre d'exemple, supposons que l'on ne connaisse que les résultats des votes majoritaires sur trois paires d'options $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ et $\{C, A\}$ pour cinq votants ; dans chaque cas, la première option de la paire bat l'autre par trois voix contre deux. Si l'on retient comme règle de décision le vote à la majorité entre les paires d'options (qui respecte l'axiome d'indépendence), le classement collectif doit être l'ordre ABC. Mais peut-on en être si sûr, nous demande Saari ? Essayons de reconstruire les préférences possibles qui conduisent à ce résultat. Si les préférences des cinq votants sont celles décrites dans le Tableau 1, l'ordre ABC sera sans conteste choisi par la plupart des règles de vote démocratiques : les trois premiers votants ont en effet pour classement individuel l'ordre ABC, et les deux derniers, l'ordre CBA. Le Tableau 2 propose une autre reconstruction possible des préférences individuelles : les deux premiers votants ont pour classement BAC, le suivant ABC, et les deux derniers CAB. Bien que défendable, la victoire de A peut ici être remise en cause : certaines règles de vote choisiront maintenant B ou C comme vainqueur, car ils apparaissent deux fois chacun à la première place. Le dernier cas (Tableau 3) présente une situation encore plus problématique : *a priori*, rien n'oblige les votants à être rationnels. Les deux premiers préférent ainsi A à B, B à C et C à A, tandis que les deux derniers ont comme préférence le cycle inverse ! Pourquoi alors ne pas considérer le cycle AB, BC, CA comme un classement collectif possible ?

Tableau 1. Une reconstruction des préférences

Votant	$\{A, B\}$	$\{B, C\}$	$\{A, C\}$	*classement*
1	AB	BC	AC	ABC
2	AB	BC	AC	ABC
3	AB	BC	AC	ABC
4	BA	CB	CA	CBA
5	BA	CB	CA	CBA
Résultat	AB	BC	AC	ABC

Cet exemple a pour but de mettre en évidence la perte d'information occasionnée par l'usage de la condition d'indépendance. Saari propose une analyse similaire pour

Tableau 2. Une autre reconstruction possible

Votant	$\{A,B\}$	$\{B,C\}$	$\{A,C\}$	*classement*
1	BA	BC	AC	BAC
2	BA	BC	AC	BAC
3	AB	BC	AC	ABC
4	AB	CB	CA	CAB
5	AB	CB	CA	CAB
Résultat	AB	BC	AC	ABC

Tableau 3. Une reconstruction avec des individus irrationnels

Votant	$\{A,B\}$	$\{B,C\}$	$\{A,C\}$	*classement*
1	AB	BC	CA	*cyclique*
2	AB	BC	CA	*cyclique*
3	AB	BC	AC	ABC
4	BA	CB	AC	*cyclique*
5	BA	CB	AC	*cyclique*
Résultat	AB	BC	AC	ABC

la condition LM : des résultats collectifs similaires sur les paires peuvent masquer des situations très disparates. Son message, martelé tout au long de l'ouvrage, est que traiter les problèmes séparément (ici, par paire) fait perdre des informations dans le processus d'agrégation de données. Dans un chapitre entier de l'ouvrage, il prend soin de présenter plus brièvement des exemples similaires « d'information perdue » : en statistique (paradoxe de Simpson), en théorie du vote (paradoxe d'Ostrogorski et d'Anscombe), dans les méthodes de répartition des sièges, en économie (paradoxes de l'agrégation des fonctions de demande et d'offre), en sciences de l'ingénieur, en analyse multicritère, etc.

La solution à tous ces problèmes est, pour Saari, d'éviter toutes les procédures de décision fondées sur des conditions d'indépendance trop fortes. D'une manière ou d'une autre, il faut garder une trace de la rationalité des individus dans le processus d'agrégation. En théorie du vote, cela est possible avec les classements par points, et la règle de Borda en particulier : pour classer m options chaque votant donne $m-1$ points à son option préférée, $m-2$ à deuxième choix, etc. L'option qui obtient le plus grand total de points est ensuite sélectionnée. Une variante de la règle de Borda est même suggérée pour contourner le paradoxe du parétien libéral.

Publié en février 2001 dans la foulée des élections présidentielle américaine de novembre 2000, *Chaotic Elections ! A Mathematician Looks at Voting*, est aussi un ouvrage facile d'accès, centré sur des problèmes de sciences politiques. Court (159 pages !), il vise à sensibiliser un large public aux résultats surprenants que l'on rencontre en théorie des choix collectifs. Au travers de six chapitres, Saari présente les différentes surprises qui peuvent émailler un vote, toujours en prenant soin d'illustrer son propos par des exemples concrets. Si *Decision and Elections* était fondé sur les travaux les plus récents de Donald Saari autour des théorèmes d'Arrow et de Sen, on retrouve dans *Chaotic Elections* les trois questions qui structurent la plupart de ses contributions depuis la fin des années 1980. Que se passe-t-il quand on change de procédure ? Que se passe-t-il lorsque les préférences des individus changent ? Que se passe-t-il lorsque l'ensemble des candidats est modifié ?

L'élection de George W. Bush fut un grand moment de vulgarisation en sciences politiques, l'électeur moyen découvrant alors que les subtilités des règles de vote pouvaient conduire à des résultats inattendus. Le chapitre 1 s'appuie ainsi sur les particularités du système électoral américain pour introduire plusieurs concepts. Le président étant élu indirectement par des grands électeurs désignés par les votants de chaque état, il n'y a pas une élection présidentielle américaine, mais en fait cinquante et une (une par état plus le disctrict fédéral). Ainsi en 1824, 1876, 1888 et 2000, le gagnant fut celui qui avait remporté le plus de victoires dans les états, et non le candidat ayant remporté le plus de suffrages ! Saari profite de ces exemples pour introduire ensuite la notion de pouvoir et d'indice de pouvoir[5] ; et de signaler dans la foulée que le pouvoir d'un état n'est pas proportionnel à sa population, mais dépend du nombre de fois où il peut faire pencher la décision dans un sens ou dans l'autre. Pour conclure, après avoir présenté les autres modes de scrutin que l'on pourrait utiliser aux Etats-Unis (les classements par points, le vote par approbation, des procédures majoritaires), Saari nous rappelle que chacune d'entre elle, dans certaines circonstances, peut donner des résultats tout aussi contestables que l'élection de George W. Bush : le théorème d'Arrow nous apprend qu'aucune règle de vote n'échappe à la critique.

Le chapitre 2 présente un thème favori de Saari, les différences des classements (et des vainqueurs !) selon que l'on utilise un classement par points ou un autre. Ce chapitre reprend, sous forme simplifiée, des arguments et des illustrations déjà évoqués dans *Geometry of Voting*. Dans une élection entre trois candidats, supposons que chaque votant donne $1 - s$ point à son candidat préféré, $s \in [0, 1/2]$, s points au deuxième, et aucun au candidat qu'il aprécie le moins. Saari montre alors que l'on peut obtenir jusqu'à sept classements différents dans une élections entre trois candidats à mesure que le vecteur des scores attribués change ! Ou que le vote par approbation, qui permet de voter pour autant de candidats que l'on souhaite, donne n'importe quel vainqueur selon que chacun approuve plus ou moins de candidats ! L'intérêt de ce chapitre vient aussi de l'application de ces méthodes d'analyse à des situations réelles, comme de l'élection de Bill Clinton contre Ross Perot et George Bush en 1992 et l'élection d'Abraham Lincoln contre trois autres candidats en 1860. Si l'on arrive à montrer que Clinton aurait été élu avec n'importe quel classement par points en 1992, deux autres candidats (Bell et Douglas) aurait pu être élus en

[5]Nous renvoyons à l'article de Nicolas Andjiga, Frédéric Chantreuil et Dominique Lepelley, *La mesure du pouvoir de vote*, dans ce même numéro, pour une présentation détaillée de ces concepts.

Tableau 4. La désignation de la ville olympique en 1993

	Pékin	Berlin	Istanbul	Manchester	Sydney	Abstention
Premier tour	32	9	7	11	30	0
Deuxième tour	37	9	—	13	30	0
Troisième tour	40	—	—	11	37	1
Quatrième tour	43	—	—	—	45	1

1860 avec des règles différentes. Nous avons là un bel exemple d'interaction de la théorie des choix collectifs avec les sciences politiques.

Le thème du chapitre 3 est la cohérence des classements collectifs quand des candidats entrent dans la compétition électorale ou bien la quittent. Le choix de la ville hôte des Jeux olympiques de 2000 est l'illustration parfaite des paradoxes qui peuvent survenir. Le processus de désignation est simple : à chaque tour, la ville qui a obtenu le moins de voix quitte la compétition. Durant les trois premiers tours, Pékin fut toujours classée première devant Sydney. Pourtant, lors du duel final, Sydney obtint un courte majorité de 45 voix contre 43 (voir Tableau 4).

Cet exemple illustre l'un des résultats les plus importants de Saari : quels que soient les classements par points que l'on utilise (ici, chacun donne à chaque tour un point à sa ville préférée et aucun aux autres), il n'existe pas ou peu de liens *a priori* entre le classement sur un ensemble de candidats et les classements sur des sous ensembles. Le retrait ou l'arrivée d'un candidat peut totalement inverser l'ordre initial. En exposant simplement plusieurs de ses résultats et en présentant d'autres exemples simples, Saari nous montre alors que la stabilité des résultats face aux changements de l'ensemble de choix (et donc, implicitement, le respect de la condition d'indépendance du théorème d'Arrow) est une chimère.

Un livre sur les paradoxes de vote ne saurait éviter un chapitre sur la manipulation des préfèrences : il est arrivée à chacun d'entre nous, lors d'une élection, de ne pas voter pour son candidat préféré, mais de « voter utile », c'est-à-dire de favoriser un candidat dont on pense qu'il a plus de chances de gagner. Nous savons depuis les années 1970, grâce aux travaux de Gibbard et de Satterthwaite que toute procédure de vote démocratique est manipulable : ainsi, on ne peut jamais être sûr qu'un votant a bien révélé sa préférence sincère, ou bien qu'il a révélé une préférence mensongère, dans le but de favoriser l'élection d'un candidat mieux placé stratégiquement. Toujours à l'aide d'exemples, le chapitre 5 présente un florilège des stratégies que l'on peut utiliser pour manipuler son vote pour telle ou telle règle de décision.

Le lecteur, cerné par tous ces résultats négatifs, pourrait finalement devenir sceptique : à quoi bon préférer une règle de vote plutôt qu'une autre, puisque toutes sont manipulables, instables et qu'elles peuvent donner des résultats différents ? Une première solution (non abordée dans ce livre) serait de classer les règles selon la fréquence avec lesquelles elles souffrent de tels ou tels maux. Mais Saari propose dans le chapitre 5 une autre approche, plus originale, fondée sur ses travaux les plus récents. N'existerait-il pas une manière d'analyser les profils de préférences qui révélerait directement les souhaits des votants ? Dans le cas des élections à trois candidats, Saari fait alors les hypothèses suivantes :

- Ajouter (ou retirer) un groupe de six votants dans lequel chacun des six types de préférences strictes possibles (comme ceux décrits Tableau 5) est représenté une fois ne modifie pas les résultats collectifs.
- On ne modifie pas le résultat collectif en ajoutant (ou retirant) deux votants ayant des préférences opposées (comme ABC et CBA).
- Ajouter (ou retirer) trois votants avec des préférences formant un carré latin (comme ABC, CAB et BCA) ne doit pas perturber l'ordre collectif.

En d'autres termes, si l'on admet que ces opérations sont neutres, on peut transformer les profils (les décomposer) en ce que Saari appelle des *profils élémentaires*. Il montre alors que pour ces profils, tous les classements par points et toutes les règles fondées sur les comparaisons par paires conduisent aux mêmes résultats collectifs, le classement de Borda. Autrement dit, les autres règles de vote diffèrent du classement de Borda parce qu'elles sont perturbées par l'ajout ou le retrait des groupes de préférences que nous avons décrits.

Après ce chapitre plus optimiste, le chapitre 6, comme Saari le reconnaît lui-même est un pot-pourri de problèmes divers. Il vise à sensibiliser le lecteur à des questions similaires que l'on rencontre pour les méthodes de répartition des sièges, les indices de pouvoirs, les tests statistiques. Dans une certaine mesure, c'est une fenêtre sur d'autres champs de recherche ; ces thèmes sont d'ailleurs traités avec plus de soin dans *Decision and Elections.*

Geometry of Voting[6] et son compagnon *Basic Geomety of Voting*[7] sont les premiers livres de la série. Un peu plus techniques que les deux autres ouvrages, ils n'hésitent pas à aborder les preuves de nombreux résultats. Ils présentent cependant la théorie des choix collectifs dans un cadre relativement simple où les individus d'une societé ne doivent choisir qu'entre seulement trois candidats. De fait, de nombreuses difficultés de l'approche par les applications linéaires disparaissent alors. Le bagage mathématique nécessaire pour lire ce livre se limite à quelques notions élémentaires sur la convexité, les produits scalaires et les applications linéaires (des outils plus complexes ne sont utilisés que dans de courts paragraphes qui peuvent être omis). De plus, Saari insiste plus souvent sur les intuitions que sur les preuves elles-mêmes, impression renforcée par l'usage abondant de représentations graphiques (120 figures jalonnent l'ouvrage). Pour trois candidats, les résultats d'un vote peuvent ainsi être représentés par des figures aussi simples qu'un triangle ou un cube ; les théorèmes et axiomes les plus complexes se découvrent alors des illustrations graphiques élégantes. Le titre de *Geometry of Voting* se justifie amplement par le fait qu'un étudiant de terminale scientifique trouvera dans ce livre une application des concepts de géométrie qu'il a pu rencontrer dans ses études.

---

[6]Une revue plus détaillée de cet ouvrage, chapitre par chapitre, est parue dans *Social Choice and Welfare* 12, p. 103-110, 1995.

[7]Plutôt que de publier une seconde édition de *Geometry of Voting*, Donald Saari en a proposé avec *Basic Geometry of Voting* une version légèrement écourtée (par exemple, la partie sur l'axiomatique des classements par points disparaît) au plan remanié. Inutile de dire que cet ouvrage conserve tous les mérites du précédent.

Tableau 5. Les six types de préférences strictes entre trois candidats c_1, c_2 et c_3

Type 1	$c_1 \succ c_2 \succ c_3$
Type 2	$c_1 \succ c_3 \succ c_2$
Type 3	$c_3 \succ c_1 \succ c_2$
Type 4	$c_3 \succ c_2 \succ c_1$
Type 5	$c_2 \succ c_3 \succ c_1$
Type 6	$c_2 \succ c_1 \succ c_3$

Pour donner un aperçu des raisonnements développés dans les deux ouvrages, je présenterai brièvement quelques résultats. Supposons que des électeurs doivent se prononcer pour élire un vainqueur parmi trois candidats[8] potentiels c_1, c_2 et c_3. Ajoutons que chaque individu est capable de classer tous les candidats sans *ex æquo* selon un ordre total, de celui qu'il apprécie le plus, jusqu'a celui qu'il apprécie le moins. Six types de préférences sont alors possibles (voir Tableau 5).

Dans presque tous ses travaux, Saari prend le parti de n'étudier que des règles de vote démocratiques, dont le résultat ne dépend que de la répartition des individus entre les différents types de préférences possibles[9]. En conséquence, il peut définir les règles de vote à partir de l'ensemble des points rationnels du simplexe unitaire, $Si(6)$:

$$Si(6) = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_6) \in \mathbb{Q}^6 \mid \sum_{t=1}^{6} x_t = 1 \text{ et pour } 1 \leq t \leq 6,\ x_t \geq 0 \right\}.$$

La valeur x_t indique alors la fraction de votants dont la préférence est de type t, et le vecteur x la répartition des votants entre les différents types.

Ceci posé, la comparaison par paire entre les options c_1 et c_2 peut être abordée grâce à l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rrcl} f_{c_1,c_2} : & Si(6) & \rightarrow & [-1,1] \\ & x & \rightarrow & f_{\{c_1,c_2\}}(x) = x_{12} = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 \end{array}$$

La fonction f_{c_1,c_2} donne la différence en pourcentage entre le nombre d'individus qui préférent c_1 à c_2 et ceux qui préférent c_2 à c_1.

Pour trois candidats on décrit la famille de tous les classements par points par les vecteurs-score $w_s = (1-s, s, 0)$, avec $s \in [0, 1/2]$. Rapelons qu'un classement par points propose d'attribuer $1 - s$ point à chaque candidat pour une première place

[8]Pour preuve que le lecteur cible n'est pas le même selon les ouvrages, on remarquera quelques différences de notations. Les candidats sont notés simplement A, B, C et une ordre linéaire est décrit par ABC dans *Decision and Elections*. Dans *Geometry of Voting*, le language se fait plus mathématique et plus précis : les candidats sont c_1, c_2 et c_3 et une préférence est représentée à l'aide de la relation binaire $\succ$.

[9]Ceci est possible si les règles vérifient les conditions d'anonymat et d'homogénéïté. Ces propriétés sont décrites précisément dans l'article de Vincent Merlin, *The Axiomatic Characterizations of Majority Voting and Scoring Rules* de ce même numéro de *Mathématiques et Sciences humaines.*

dans une préférence, s point pour une deuxième place et enfin aucun point s'il est classé dernier. La règle de Borda est par exemple définie par la valeur $s = 1/3$ (il suffit de multiplier tous les scores par trois pour retrouver les valeurs originales). Saari définit alors l'application $f(x, w_s)$ qui, à chaque profil de préférences, associe les scores des candidats c_1, c_2 et c_3 :

$$
\begin{array}{rrcl}
f(-, w_s): & Si(6) & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 & x & \rightarrow & f(x, w_s) = q = (q_1, q_2, q_3) \\
 & & & \\
\text{avec} & q_1 & = & (1-s)x_1 + (1-s)x_2 + sx_3 + 0x_4 + 0x_5 + sx_6 \\
 & q_2 & = & sx_1 + 0x_2 + 0x_3 + sx_4 + (1-s)x_5 + (1-s)x_6 \\
 & q_3 & = & 0x_1 + sx_2 + (1-s)x_3 + (1-s)x_4 + sx_5 + 0x_6.
\end{array}
$$

La valeur q_i donne ainsi le score attribué au candidat c_i. La somme des points distribués étant égale à l'unité, le point q appartient au triangle T qui est représenté sur la Figure 1. Les droites $q_i = q_j$ le coupe en treize zones : six correspondant aux classements stricts, plus les six segments de médiane correspondant aux classements avec deux candidats *ex aequo* et enfin, au centre, à l'intersection des trois droites, le cas de l'égalité des scores.

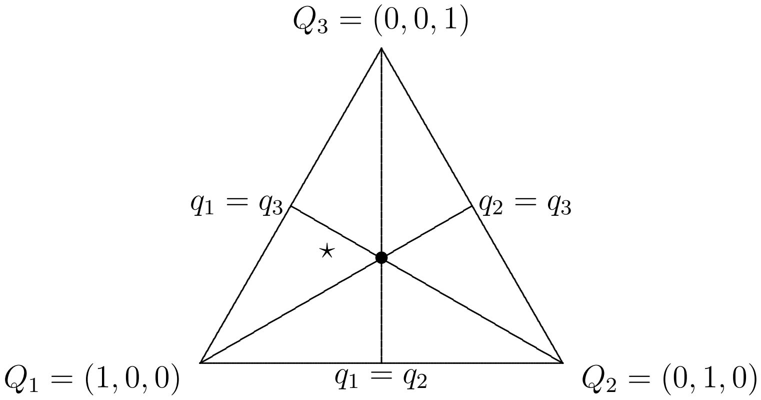

Figure 1 : le triangle positionnel

À titre d'exemple, pour $s = 0$ (chaque votant donne une voix à son option préférée, c'est la règle de la pluralité), l'image de $x = (0,25,\ 0,25,\ 0,\ 0,2,\ 0,2,\ 0,1)$ est le point de coordonnées $q = (0,5,\ 0,2,\ 0,3)$ (représenté par une étoile Figure 1), correspondant au classement collectif $c_1 \succ c_3 \succ c_2$.

Ces deux applications linéaires peuvent alors être utilisées pour étudier précisément les propriétés des classements par points et des comparaisons par paires. Par exemple, quels sont les classements avec la règle de la pluralité compatibles avec un classement donné sur la paire $\{c_1, c_2\}$? Pour répondre à cette question, il faut étudier simultanément les fonctions f_{c_1,c_2} et $f(-, w_0)$; à tout profil x de $Si(6)$, elles associent un point (q_1, q_2, q_3, x_{12}) dans $T \times [-1, 1]$. L'ensemble des résultats possibles est présenté en grisé sur la Figure 2.a.

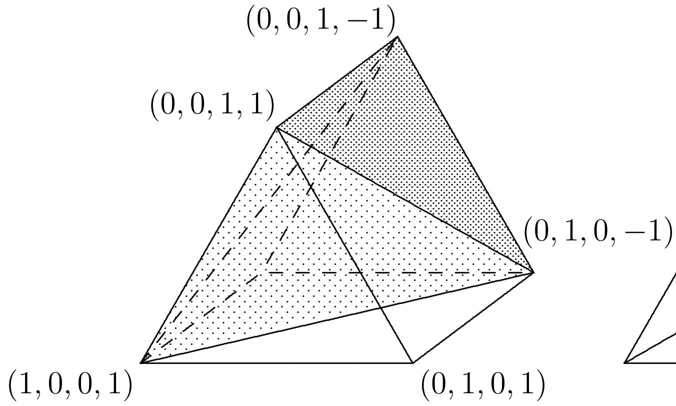

Figure 2.a : Image de $Si(6)$ par f_{c_1,c_2} et $f(-, w_0)$

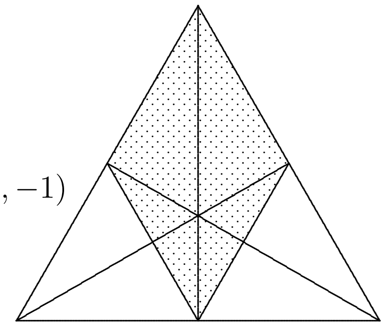

Figure 2.b : Coupe en $x_{12} = 0$

Une coupe en $x_{12} = 0$ (voir Figure 2.b) nous indique que tous les classements possibles de la pluralité sont compatibles avec un match nul entre c_1 et c_2, puisque la zone grisée et toutes les régions correspondant aux treize classements possibles ont une intersection non vide. De même, une coupe pour $x_{12} = \pm\epsilon$, avec ϵ petit, donnerait une figure sensiblement identique à la Figure 2.b du fait de la continuité des applications linéaires. On illustre ainsi le fait qu'il n'y a aucun lien entre le classement par paire sur $\{c_1, c_2\}$ à la majorité et le classement entre c_1, c_2 et c_3 au moyen de la pluralité.

Ce type de raisonnements et de constructions graphiques est utilisé dans *Geometry of Voting* pour étudier de nombreuses questions : deux règles de vote donnent-elles des résultats différents ? Peut-on alors décrire simplement les profils pour lesquels il y a désaccord ? Y-a-t-il une relation entre les classements sur trois options et deux options ? Quels sont les changements dans les préférences qui affectent les résultats collectifs ? etc. De plus, cette approche permet à Donald Saari de revisiter des thèmes classiques, comme les théorèmes d'Arrow et de Gibbard et Satterthwaite, la caractérisation des classements par points, ou encore la répartion des sièges de grands électeurs entre états des États-Unis.

En résumé, l'approche est originale, le style est clair, et les deux livres proposent en plus des nombreux graphiques, des exemples et des exercices : ils constituent à mon avis une excellente introduction à la théorie des choix collectifs pour un public universitaire de second et troisième cycles. Les chercheurs confirmés y trouveront quant à eux une excellente introduction aux types de raisonnements developpés dans les articles de Donald Saari.

J'espère, avec le passage en revue de ces quatre livres, avoir convaincu le lecteur de leur intérêt. Il m'arrive souvent de constater, en assistant à des conférences ou en lisant des articles scientifiques, que les travaux de Donald Saari n'ont peut-être pas bénéficié de toute l'audience qu'ils méritent. Trop peu d'auteurs ont encore accepté de lire Saari en détail et de modifier leur approche lorsqu'ils abordent l'analyse des procédures de vote. Certes il y a un coût d'entrée à payer du fait du changement des techniques. Mais la démarche générale de Donald Saari – s'intéresser aux problèmes dans leur globalité plutôt que par le biais des axiomes, tenter de décrire tous les comportements possibles d'un système – est toujours extrêmement féconde et j'invite sans réserve les chercheurs intéressés par ces questions à se plonger dans ses articles et ouvrages.

Vincent Merlin