Éric Guichard (dir.)

Écritures
Sur les traces de Jack Goody

Presses de l'enssib

L'écriture des mathématiciens

Cédric Villani

DOI : 10.4000/books.pressesenssib.1960
Éditeur : Presses de l'enssib
Lieu d'édition : Presses de l'enssib
Année d'édition : 2012
Date de mise en ligne : 20 juillet 2017
Collection : Papiers
ISBN électronique : 9782375460504

Référence électronique
VILLANI, Cédric. *L'écriture des mathématiciens* In : *Écritures : Sur les traces de Jack Goody* [en ligne]. Villeurbanne : Presses de l'enssib, 2012 (généré le 01 février 2021). Disponible sur Internet : <http://books.openedition.org/pressesenssib/1960>. ISBN : 9782375460504. DOI : https://doi.org/10.4000/books.pressesenssib.1960.

L'ÉCRITURE DES MATHÉMATICIENS

Cette note résume et développe certains sujets abordés lors de ma participation à la table ronde « Les écritures des mathématiciens et des physiciens », avec Patrick Flandrin et Jean Dhombres, dans le cadre du colloque *Écritures : sur les traces de Jack Goody*.

En mathématiques, comme en physique théorique, le rôle de l'écriture présente quelques caractères distinctifs. Sans faire d'étude détaillée, et sans mise en perspective historique sérieuse, je me contenterai de décrire l'existant, à la manière d'un témoignage, ou d'une brève étude sociologique « de l'intérieur » basée sur ma propre expérience de mathématicien.

L'ÉCRITURE COMME SUPPORT DE PENSÉE

Les théoriciens de la science entretiennent souvent un rapport intime à l'écriture comme support de pensée, selon deux axes en apparence contradictoires, mais en fait complémentaires. D'une part, l'écriture mathématique, qu'elle soit utilisée de manière interne aux mathématiques ou appliquée à d'autres sciences, est vecteur de sens et d'idées. Les formules mathématiques cristallisent ce mode de fonctionnement, résumant en quelques symboles des concepts d'une portée considérable : il suffit de penser à $E = mc^2$ (Einstein), $S = k \log W$ (Boltzmann), $H \psi = E \psi$ (Schrödinger), $x^n + y^n = z^n$ (Fermat), $R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ (Einstein encore)... N'importe laquelle de ces identités est emblématique d'une théorie profonde, dont l'exposé nécessiterait un ouvrage entier. Dans les colloques de mathématique se vendent d'ailleurs souvent des t-shirts imprimés de telles formules, célébrant par leur seul énoncé un domaine scientifique entier.

Sans aller jusque-là, le support écrit est utilisé systématiquement pour la *transmission* des idées. Un séminaire de mathématiques ou de physique ne peut s'envisager sans formules. Quelques conventions universelles favorisent ce rôle de l'écriture, éveillant dans le lecteur ou l'auditeur des concepts connus (ε désigne presque toujours un nombre strictement positif arbitrairement petit, M est souvent une variété différentielle, x une variable, f une fonction, etc.), faisant gagner un temps considérable à la communication.

Ceci vaut également pour la phase de recherche où les idées se forment maladroitement : pour moi comme pour la plupart des mathématiciens, ce processus de découverte est accompagné par le griffonnage de formules sur un brouillon. Les *calculs*, que l'on peut considérer comme une forme d'écriture, participent d'ailleurs aussi à la réflexion, même théorique. Une anecdote célèbre raconte comment Gauss découvrit *numériquement*, par des calculs écrits réalisés avec une précision d'une dizaine de chiffres après la virgule, la formule de la longueur de la lemniscate : si m est la limite de la suite définie par

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \sqrt{2}, \quad a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1}\, b_{n-1}},$$

$$\text{alors } \frac{1}{m} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

Mettons-nous un instant à la place de Gauss : non content d'extraire les racines carrées avec une précision remarquable, il connaissait suffisamment bien la valeur de $\int dx/\sqrt{1 - x^4}$ pour l'identifier à l'inverse de la limite, à un facteur $\pi/2$ près... un exploit surnaturel bien sûr. Mais même pour de simples mortels, le rôle des calculs préliminaires, plus ou moins concrets, peut être vital dans la résolution d'un problème, si abstrait soit-il. Le deuxième rôle de l'écriture est au contraire un rôle désincarné de vérification *mécanique* de l'enchaînement des idées. On connaît la citation de Hilbert selon laquelle on devrait pouvoir remplacer, dans un cours de géométrie, les mots *point*, *droite*, et *plan* par *table*, *chaise* et *verre de bière*. En effet, la solidité d'une démonstration mathématique découle tout entière de l'enchaînement logique des idées, sans aucune notion de sens préalable, par une vérification automatique de règles logiques que l'on pourrait voir comme des règles de « grammaire ».

Le concept même de démonstration fut à l'origine de vifs débats, au cours desquels Hilbert trouva un adversaire fameux en la personne de Poincaré. Une preuve mathématique est-elle un argumentaire destiné à convaincre un autre mathématicien ? Ou bien au contraire un texte logiquement écrit et dont on doit oublier le sens ? Il me semble que les deux points de vue doivent coexister ; en tout cas, on est forcé de reconnaître que le second est fructueux, puisqu'il a donné naissance à la théorie de la vérification automatique, actuellement en plein essor. Cela peut ressembler à un aveu de défaite de la part du mathématicien renonçant à dominer le sens de son œuvre ; mais ici comme ailleurs, il convient d'être humble, de reconnaître ses propres limites, et d'accorder une part à la technique : dans des situations extrêmes, on se repose avec soulagement sur la vérification mécanique et désincarnée.

L'exemple du « théorème des quatre couleurs » est un cas extrême dont la discussion nous entraînerait trop loin : cet énoncé célèbre a été démontré avec l'aide d'un programme informatique, qui a examiné de manière automatique un nombre considérable de situations, sans que l'on puisse dire qu'un être humain a *compris* l'ensemble de la preuve.

Plutôt que d'aborder ce cas célèbre et controversé, où le problème dépasse l'écriture pour toucher à l'informatique, je vais me limiter à évoquer ma propre expérience. Avec un collaborateur, j'ai travaillé récemment sur un théorème dont la démonstration couvrait plus d'une centaine de pages : pour la vérifier, il était hors de question de nous en remettre à la vision globale et au sens ; au contraire, nous avons relu mécaniquement les théorèmes mot à mot, en vérifiant, chaque fois que nous appliquions un résultat intermédiaire, que toutes les hypothèses requises étaient satisfaites. Il aurait été vain de prétendre dominer l'ensemble de la démonstration : même si nous l'avions créée petit à petit, sa complexité était trop grande pour tenir tout entière dans nos cerveaux humains, nous ne pouvions en appréhender que le plan d'ensemble, et seul le secours de l'écriture nous permettait de vérifier la cohérence des détails. On pourrait dire que c'est également le sort d'un écrivain qui couche son roman sur le papier et ne le connaît pas par cœur ; mais pour le mathématicien, c'est une situation plus critique, car une formule fausse au cœur de son article peut compromettre la validité de l'édifice tout entier.

De ce point de vue, toutes les façons d'écrire ne sont pas équivalentes. Un style trop proche de l'abstraction mécanique empêche le lecteur de comprendre les intentions de l'auteur. À l'opposé, un style trop porteur de sens rend difficile la vérification. Parfois également, une bonne notation entraîne un progrès considérable en simplifiant la vérification et en allégeant l'écriture. Beaucoup de spécialistes des équations aux dérivées partielles seraient perdus sans les notations abrégées pour la différentiation, héritées de Leibniz : par exemple, u_{ijk} est une abréviation pour $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}$ – nul besoin d'insister sur le gain de temps et d'espace.

Dans un ordre d'idées voisin, les notations d'Einstein en géométrie différentielle (pas de signe de sommation, remplacé par la contraction des indices se trouvant à des positions différentes, l'un en haut, l'autre en bas) sont d'une efficacité redoutable et permettent souvent de détecter très vite des erreurs. Voici une formule extraite d'un de mes articles récents :

$$\Delta_H u = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j} - \Gamma_{ij}^m \frac{\partial u}{\partial x^m}\right) + \Gamma_{ir}^s \Gamma_{j\ell}^m\, p_m p_s \frac{\partial^2 u}{\partial p_r\,\partial p_\ell}$$
$$+ 2g^{ij}\Gamma_{ir}^s p_s \frac{\partial^2 u}{\partial x^j\,\partial p_r} + g^{ij}\big(\Gamma_{ir}^\ell \Gamma_{j\ell}^m - \Gamma_{ij}^s \Gamma_{sr}^m\big) p_m \frac{\partial u}{\partial p_r}$$
$$+ g^{ij}\partial_j \Gamma_{ir}^m p_m \frac{\partial u}{\partial p_r}.$$

Sans chercher à expliciter le sens de cette formule (elle exprime le Laplacien horizontal d'une fonction définie sur le fibré cotangent d'une variété riemannienne ; je n'en dirai pas plus...), notons la cohérence interne des indices et exposants : chaque fois qu'un indice, disons *i*, apparaît *en bas* dans un terme du membre de droite, il apparaît aussi *en haut* dans un autre terme qui le multiplie. Ainsi, ouvrant la première parenthèse dans le membre de droite, on voit que le premier produit est

$$g^{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j}$$

où le *i* de ∂x^i (compté comme « en bas » car il apparaît en haut, mais au dénominateur) répond au *i* de g^{ij} (compté comme « en haut »).

Une dérogation à la règle impliquerait une erreur ; par exemple, si j'avais écrit

$$\Delta_H u = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j} - \Gamma_{ij}^m \frac{\partial u}{\partial x^m}\right) + \Gamma_{ir}^s \Gamma_{j\ell}^m\, p_m p_s \frac{\partial^2 u}{\partial p_r\,\partial p_\ell}$$
$$+ 2g^{ij}\Gamma_{ir}^s p_s \frac{\partial^2 u}{\partial x^j\,\partial p_r} + g^{ij}\big(\Gamma_{ir}^\ell \Gamma_{j\ell}^m - \Gamma_{ij}^s \Gamma_{sr}^m\big) p_m \frac{\partial u}{\partial p_r}$$
$$+ g^{ij}\partial_j \Gamma_{mr}^i p_m \frac{\partial u}{\partial p_r},$$

j'aurais tout de suite (ou presque...) vu à la relecture qu'il y a un problème à la fin de la formule, et compris qu'il fallait reprendre mes calculs ; ceci parce que dans le dernier terme, le *i* de g^{ij} et celui de Γ_{mr}^i sont tous deux « en haut ». Erreur de cohérence des notations, certainement héritée d'une erreur antérieure dans les calculs.

Pour résumer, il y a (au moins) deux aspects dans l'écriture mathématique : vecteur de sens et vérification mécanique. En pratique, ces deux aspects, que l'on peut assimiler à deux formes de pensée, sont mêlés à des degrés divers et doivent être dosés en fonction des circonstances ; ainsi, pour un exposé oral, on accordera une priorité au premier rôle, tandis que, pour un texte écrit, on accordera plus d'importance au second, en fonction des goûts, des exigences et de la complexité des preuves.

LATEX

TEX (prononcer TeKK, à la façon d'un χ) est un programme informatique, dont l'impact sur la communauté mathématique a été si fort et durable, qu'aucune étude sérieuse sur cette communauté ne peut l'ignorer. Ceci justifie que j'y consacre une section et, en fait, on pourrait sans doute écrire des livres entiers sur le sujet… Durant les dernières décennies, les « progrès » des traitements de textes étaient principalement tournés vers le développement de programmes de haut niveau, prenant de nombreuses initiatives, et la montée en puissance du *Wysiwyg* (*What you see is what you get*). Cela est vrai pour le grand public comme pour la plupart des scientifiques. Cependant, pour les mathématiciens et les physiciens théoriciens, le progrès est passé au contraire par un programme de bas niveau : TEX, un logiciel et langage de programmation qui met la mise en pages et l'écriture à la disposition de l'utilisateur, jusque dans ses moindres détails.

Né du cerveau fertile de Donald Knuth, professeur à Stanford University et l'un des informaticiens les plus célèbres de notre temps, TEX s'est imposé dans la communauté des chercheurs en mathématique et physique théorique, à tel point que la plupart des revues scientifiques dans ces domaines n'acceptent d'articles que rédigés au moyen de TEX ou de ses extensions (LATEX le plus souvent). Notons, au passage, que c'est bien de mathématiques et de physique théorique dont il s'agit : dans les autres disciplines, le succès de TEX est marginal. Ce n'est bien sûr pas un hasard : parmi les scientifiques, ce sont les mathématiciens (au sens large) qui sont le plus obsédés par la graphie ![1] L'aspect esthétique des formules, le goût pour la symétrie et la synthèse, l'attention portée aux détails, tout cela participe à faire du mathématicien un expert graphiste à sa manière. Au reste, si Knuth s'est lancé dans TEX, c'est autant pour rendre service à la communauté, que pour s'assurer que ses propres ouvrages seraient imprimés comme il l'entendait.

1. Pourquoi TEX n'a-t-il pas eu de succès chez les littéraires ? C'est peut-être simplement une réaction d'effroi devant une « technologie » et un effort d'apprentissage, ou peut-être parce que la pression exercée par le traitement harmonieux des formules mathématiques est bien supérieure à celle que l'on rencontre dans un texte littéraire, d'ordinaire beaucoup moins riche en symboles de toutes sortes.

Comme « tout le monde » possède TEX et ses dérivés (ce sont des logiciels gratuits, notons d'ailleurs qu'ils sont infiniment plus fiables que les alternatives payantes), les mathématiciens n'échangent plus que le fichier texte de « programmation » – fichier brut, texte, sans caractères cachés, sans formatage. Ce fichier texte contient alors toute l'information nécessaire à la reconstruction du manuscrit. Je vais illustrer mon propos avec des exemples tirés d'un livre que j'ai écrit récemment : *Optimal Transport. Old and New* (paru chez Springer-Verlag en 2008). Voici donc le début de mon livre ou, si l'on veut, de son fichier LATEX :

```
\documentclass{cedric-svmono}
\usepackage{graphicx, supertabular, makeidx, amsmath, amssymb}
\usepackage{color, multicol, array, amssym.def, amssym}
\include{macro}
```

Quelques explications : dans ce préambule, j'indique que j'utiliserai les conventions du fichier de style `cedric-svmono`, qui est une version légèrement modifiée par mes soins du fichier de style mis à disposition par l'éditeur, en l'occurrence Springer-Verlag ; puis, je donne la liste des *packages* que j'utiliserai – par exemple des banques de caractères mathématiques comme `amssym`, des bibliothèques de gestion des couleurs, etc. Ensuite, je fais référence au fichier `macro` qui contient tous mes raccourcis, dont voici un extrait :

```
\def\barint{\mathop{-\mkern-19.5mu\int}} %integrale barree
\def\derpar#1#2{\frac{\partial#1}{\partial#2}}
\def\spdot{^{\cdot}}
\def\R{\mathbb R}
\def\Q{\mathbb Q}
\def\N{\mathbb N}
\def\ovr{\overrightarrow}
\def\Dom{\mathop{{\rm Dom}\,}}
\def\CAT{{\rm CAT}}
\def\paral{{\!/\!/}}
\def\sumjN{\sum_{j=1}^N}
\def\longleftrightarrow{\leftarrow\!\rightarrow}
\def\liminff#1{\underset{#1}{\underline{\lim}}}
```

Ainsi quand j'écrirai dans une formule mathématique `\R`, `\Q` ou `\N`, j'obtiendrai $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{N}$, quand je taperai `\longleftrightarrow`, j'obtiendrai $\longleftrightarrow$, etc.

Le fichier de style est la clé de voûte, il met en place tous les paramètres : les marges, la fonte, les espaces, la numérotation, la table des matières, etc. D'habitude, on se contente de suivre l'un des fichiers de style fournis par les éditeurs, c'est seulement si l'on est perfectionniste que l'on va fouiller dans les tripes de ces fichiers notoirement abscons. Voici le début de mon fichier de style :

```
\NeedsTeXFormat{LaTeX2e}[1995/12/01]
\ProvidesClass{cedric-svmono}[2005/09/23 v4.11
Springer Verlag global LaTeX document class for monographs,
very slightly modified by Cedric Villani]
\DeclareOption{natbib}{\ExecuteOptions{oribibl}%
\AtEndOfClass{% Loading package 'NATBIB'
\RequirePackage{natbib}
\setlength{\bibhang}{\parindent}
\let\bibfont=\small
\def\@biblabel#1{#1.}
\newcommand{\etal}{\textit{et al}.}}}
\let\if@spthms\iftrue
\DeclareOption{nospthms}{\let\if@spthms\iffalse}
\let\envankh\@empty % no anchor for "theorems"
\let\if@envcntreset\iffalse % environment counter is not reset
\let\if@envcntresetsect=\iffalse % reset each section?
\DeclareOption{envcountresetchap}{\let\if@envcntreset\iftrue}
\DeclareOption{envcountresetsect}{\let\if@envcntreset\iftrue
\let\if@envcntresetsect=\iftrue}
\let\if@envcntsame\iffalse
% NOT all environments work like "Theorem",
% each using its own counter
```

et ainsi de suite pendant plus de 30 pages. À titre d'exemple, je vais décrire une modification que j'ai introduite dans ce fichier de style.

Chaque théorème dans mon livre est accompagné d'un « nom raccourci » qui résume son sens, et j'ai décidé de regrouper automatiquement tous ces noms dans une sorte d'index en fin de livre. Par exemple, voici un théorème extrait de mon livre (sans doute le plus simple, ce qui ne sera pas forcément clair pour les non-experts) :

> **Theorem 4.1** (Existence of an optimal coupling). *Let* $(\mathcal{X}, \mu)$ *and* $(\mathcal{Y}, \nu)$ *be two Polish probability spaces ; let* $a : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *and* $b : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *be two upper semicontinuous functions such that* $a \in L^1(\mu)$, $b \in L^1(\nu)$. *Let* $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *be a lower semicontinuous cost function, such that* $c(x, y) \geq a(x) + b(y)$ *for all* x, y. *Then there is a coupling of* (μ, ν) *which minimizes the total cost* $\mathbb{E}c(X, Y)$ *among all possible couplings* (X, Y).

Voici le texte correspondant, tel que je l'ai tapé et tel que je l'ai envoyé à l'éditeur quand le manuscrit fut prêt :

```
\begin{Thm}[Existence of an optimal coupling]
\index{optimal coupling!existence}
\label{thmexistopt}
Let $(\X,\mu)$ and $(\Y,\nu)$ be two Polish probability spaces;
let $a:\X\to\R\cup\{-\infty\}$ and $b:\Y\to\R\cup\{-\infty\}$
be two upper semicontinuous functions such that $a\in L^1(\mu)$,
$b\in L^1(\nu)$.
Let $c:\X\times\Y\to \R\cup\{+\infty\}$ be a lower
semicontinuous cost function, such that $c(x,y)\geq a(x) + b(y)$
for all $x,y$.
Then there is a coupling of $(\mu, \nu)$ which minimizes
the total cost $\E c(X,Y)$ among all possible couplings $(X,Y)$.
\end{Thm}
```

… et grâce à la modification apportée au fichier de style, figure dans la *List of short statements* le groupe de mots *Existence of an optimal coupling* avec la page où ce théorème est énoncé. Pour obtenir ce résultat, j'ai ajouté les quatre lignes suivantes au fichier de style :

```
\def\listofstatements{%
    \chapter*{\liststatname
    \@mkboth{\liststatname}{\liststatname}}%
    \addcontentsline{toc}{chapter}{\liststatname}%
    \@starttoc{stt}%
    }
```

Cette modification n'est pas si anodine ; les tables (des matières, des figures), les index (des notions, voire des notations ou des auteurs) sont d'une grande importance pour structurer le livre et rendre la pensée de l'auteur accessible « en direct » au lecteur, consultable. Quant au plan, il est inestimable, aussi bien pour faire passer les idées que pour structurer la pensée de l'auteur et délimiter le contenu du livre. Dans ma propre expérience, lors de l'écriture d'un livre, c'est le plan, mille fois modifié et remodifié, qui est la source des pires tourments. Une force de TEX et LATEX est justement de prendre en compte à la fois les aspects globaux (plan, table des matières) et les détails fins. Examinons sa mise en œuvre dans l'écriture de formules, à travers un autre exemple tiré du même livre :

pour produire

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = \bigl(\nabla^2_{x,y}c(x,y_t)\bigr)\cdot(\eta,\zeta); \\[3mm] \ddot{h}(t) = \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_0^1 \mathfrak{S}_c\Bigl((\nabla_y c)^{-1}\bigl((1-s)q+s\overline{q},y_t\bigr),y_t\Bigr)\cdot(\eta,\zeta)\,(1-s)\,ds, \end{cases} \tag{12.26}$$

j'écrirai :

```
\begeq\label{h'h''}
\begin{cases}
\dot{h}(t) =
\bigl(\nabla^2_{x,y}c(x,y_t)\bigr)\cdot (\eta,\zeta); \\[3mm]
\dps \ddot{h}(t) =
\frac23 \int_0^1 {\mathfrak S}_c \Bigl( (\nabla_yc)^{-1}
\bigl( (1-s)q + s\ov{q}, y_t\bigr), y_t\Bigr)\cdot
(\eta,\zeta)\,(1-s)\,ds,
\end{cases} \endeq
```

Noter, dans la formule précédente, le dosage de l'espace vertical par `\\[3mm]`, la gamme de tailles de parenthèses (`\bigl(` petite parenthèse ouvrante, `\Bigl(` grande parenthèse ouvrante…), les petits espaces notés par `\,` . Par défaut, il y a cinq commandes différentes d'espacement, et si cela ne suffit pas, on peut imposer la quantité d'espace souhaitée en fixant sa valeur en millimètres ou en points… aucun détail ne doit être négligé pour que la formule puisse être parfaite !

Ces outils n'ont produit rien moins qu'une révolution dans le mode de fonctionnement des mathématiciens. Non seulement c'est le retour des « belles » formules, mais aussi la réappropriation par les auteurs de la présentation. Mon livre, tel que l'éditeur l'a publié, est semblable au millimètre près à la version électronique que j'ai compilée moi-même à partir de mes fichiers source et de logiciels gratuits ; quitte à y passer le temps nécessaire, je peux en contrôler tous les aspects. L'éditeur peut alors se concentrer sur ce qu'il sait faire le mieux : la réalisation matérielle (reliure, choix du papier), la promotion, la distribution, etc. Ce qui ne le dispense pas de donner des recommandations à ses auteurs ou de les guider en leur fournissant un fichier de style.

En ce qui concerne la facilité de communication, le gain est également phénoménal : un standard universel, reconnu par tous ; jamais d'erreur dans la transmission des fichiers TEX. « TEX a changé ma vie », me disait un participant au colloque, littéraire de formation, reconverti dans l'édition de vieux ouvrages mathématiques.

Avec l'habitude, les mathématiciens parviennent même à déchiffrer « en direct » les absconses formules écrites en TEX, par exemple, quand elles surviennent dans le corps d’un courrier électronique. C’est presque comme si une nouvelle écriture mathématique avait été créée pour répondre aux besoins de la communication moderne.

Voici à titre d’exemple un extrait de courrier électronique que j’adressais récemment à mon collaborateur, alors que nous travaillions d’arrache-pied sur un problème de physique des plasmas appelé « amortissement Landau » :

```
Date: Sun, 1 Feb 2009 15:41:47 +0100
From: Cedric VILLANI <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Cc: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: global-10

J'oubliais encore !! Qu'il y a beaucoup de marge sur les
estimations de scattering parce que par exemple elles sont
extremement regulieres en x, en tout cas d'ordre \lambda\tau au
temps \tau. Donc on doit pouvoir se permettre de les reporter
sur \mu.

L'ideal serait une inegalite du genre : si f est une fonction de
x alors

\|f\circ X\|_{Z^{(\lambda,\lambda'),\mu}_{(\tau,\tau')}}
\leq \|f\|_{F^\nu}

avec \nu = \lambda\tau + \lambda'\tau' + \mu +

\|X-Id\|_{Z^{\alpha,\beta}_\sigma}

et \alpha\sigma+\beta tres proche de \lambda\tau + \lambda'\tau'
+ \mu.

Et si ca ne marche pas, quelque chose de proche en norme
bishift pour X-Id. Mais en tout cas, finalement on doit pouvoir
s'autoriser de reporter sur le \mu, donc il y a lieu d'etre
optimiste.

En fait tout dependra de la section 7 ou il faut etre tres
precis…

Amities
Cedric
```

Voici un autre exemple :

```
Date: Mon, 16 Feb 2009 17:52:33 +0100
From: Cedric VILLANI <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Cc: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: global-18 final

Alors, je suis d'accord qu'il semble y avoir un souci a prendre
\lambda' plus grand que \lambda, pour la convergence de
```

```
l'integrale quand t\to\infty. Est-ce que tu arrives a gerer ce
truc ? Je me dis que c'est peut-etre une erreur de faire
\|\int (...) ds \| \leq \int \| ... \| ds
```

Inutile bien sûr de transformer ce texte en utilisant TEX pour visualiser les formules : en lisant ce message, mon collaborateur a tout de suite compris ce que je voulais dire. Et une fois notre travail terminé et diffusé, les collègues qui nous ont fait part de leurs commentaires ont aussi naturellement utilisé ce moyen, comme le montre le courrier que voici :

```
Date: Mon, 15 Jun 2009 11:55:41 +0200 (CEST)
Subject: amortissement Landau
From: texier@math.jussieu.fr
To: cmouhot@ceremade.dauphine.fr, Cedric.VILLANI@umpa.ens-
lyon.fr

Cher Clement, cher Cedric,
j'ai parcouru avec beaucoup d'interet votre preprint recent sur
l'amortissement Landau.

Dans le schema qui est decrit dans le paragraphe 8.3 (version
beta du 17 Avril), il me semble que le premier terme du membre
de droite de (8.10) (egal a \d_t f^n - Q(f^n), avec vos
notations du paragraphe 8.1) fait intervenir le champ F[h^n],
exactement comme dans (8.2). Pourquoi donc dites-vous, dans la
derniere phrase de la page 122, que dans (8.10) h^{n+1} ne sent
que l'effet de F[h^{n+1}] ?
Il me semble qu'en fait les deux termes "source" du schema (8.2)
(-F[h^{n+1}] \d_v f^n et - F[h^n] \d_v h^n) sont presents dans
(8.10), si bien que l'analyse des qualites eventuelles de (8.10)
devrait reposer sur l'analyse de la contribution des nouveaux
termes sources en Y et W.

(...)
Benjamin
```

Quand je parcourais ce message, en lisant `-F[h^{n+1}] \d_v h^n`, il y avait dans ma tête non seulement cette formule TEX, mais aussi sa transcription en notation mathématique, $-F[h^{n+1}] \cdot \nabla_v f^n$, et enfin la représentation que je me faisais de cet objet (en l'occurrence la variation de la densité de particules f^n sous l'effet de la force induite par une densité h^{n+1} ...).

Je terminerai cette section avec une illustration spectaculaire des nouvelles possibilités offertes par TEX , en combinaison avec un autre langage révolutionnaire en son temps. Dans mon laboratoire de recherche à l'École normale supérieure de Lyon, travaille un mathématicien aveugle de renommée internationale : tous ses échanges se font par TEX . Il lui suffit, en effet, de convertir les caractères `ASCII` au moyen d'un code braille, ce que des périphériques modernes branchés à un ordinateur font très bien. Utiliser un codage spécifique pour les formules mathématiques serait d'une complexité infiniment plus grande ! Avec de l'entraînement, il est capable de lire des livres entiers directement au moyen de leur code source.

UNIVERSALITÉ ET INDIVIDUALITÉ

Dire que le langage mathématique est universel est un lieu commun, mais il est bon de le rappeler car c'est un fait remarquable. Le processus mathématique lui-même, la façon de penser les mathématiques, varient considérablement d'un pays à l'autre ou d'un individu à l'autre : ainsi les mathématiques françaises sont connues pour être parmi les plus abstraites du monde – surpassées peut-être seulement par les mathématiques japonaises. Mais le langage mathématique est le même pour tous, et les formules écrites en France, aux États-Unis, en Russie, en Antarctique ou dans la Terre de Feu seront les mêmes, à quelques exceptions mineures près[2]. Les mathématiques françaises, *via* Bourbaki, ont joué leur rôle dans ce remarquable état de fait.

Nous avons déjà vu comment cette universalité avait permis la naissance d'un logiciel d'écriture universel, TEX. Ce n'est pas le seul exemple de logiciel universel, et un certain nombre de standards s'imposent peu à peu : par exemple, `matlab`, programme de simulation numérique dont les codes sont de plus en plus utilisés pour illustrer des articles numériques ; les programmes sont alors reproductibles par chacun.

Ceci laisse pour autant la part à l'individualité : au-delà du choix de la langue (anglais extrêmement dominant bien sûr, avec une résistance du français dans certaines branches très théoriques des mathématiques), il y a le choix des tournures, de la présentation. Un texte mathématique moderne ne sonne pas comme un texte vieux de 30 ans : cela peut se traduire par un ton moins précieux (« nous souhaiterions remercier » cède la place à « je remercie »), le choix du cadre théorique (moins de généralités, plus d'exemples), les explications (plus de raisonnements heuristiques pédagogiques), etc. La façon de donner les détails d'une démonstration (mâche-t-on le travail au lecteur ou pas), le degré de rigueur (fluctuant

2. C'est ainsi que les intervalles ouverts sont notés]a,b[dans le monde francophone et (a,b) dans le monde anglo-saxon... en pratique, quand on traduit un texte mathématique du français vers l'anglais, c'est presque l'unique modification que l'on doit apporter aux formules !

selon les époques), le dosage entre texte et formules (les textes de mathématiques anciens nous paraissent souvent verbeux et illisibles du fait de la faible proportion de formules), tout cela concourt au style de chacun et subit des variations considérables en fonction de l'environnement et de la personnalité de l'auteur. Certains auteurs sont connus pour être incompréhensibles à cause de leurs explications parcimonieuses, ou de leurs notations mal choisies ; d'autres au contraire sont réputés pour « illuminer » le lecteur ; en ce sens, l'écriture de chacun est personnelle.

Une analyse un tant soit peu systématique nécessiterait un travail considérable et de nombreux exemples ; ce pourrait être l'objet d'un article à part entière. Pour l'instant, je me contenterai de conclure en rappelant l'importance de l'esthétique dans le développement des mathématiques, art autant que science, qui laisse aux personnalités la possibilité de s'exprimer par-delà les formules.