Éducation et didactique

11-2 | 2017
Varia

Une introduction accessible à la « Connaissance par Morceaux »

Modélisation des types de connaissances et de leurs rôles dans l'apprentissage

A friendly introduction to "Knowledge in Pieces": Modeling types of knowledge and their roles in learning

Andrea A. diSessa

Traducteur : Ghislaine Gueudet

OpenEdition Journals

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/educationdidactique/2781
DOI : 10.4000/educationdidactique.2781
ISSN : 2111-4838

Éditeur
Presses universitaires de Rennes

Édition imprimée
Date de publication : 6 décembre 2017
Pagination : 215-231
ISBN : 978-2-7535-7318-5
ISSN : 1956-3485

Référence électronique
Andrea A. diSessa, « Une introduction accessible à la « Connaissance par Morceaux » », *Éducation et didactique* [En ligne], 11-2 | 2017, mis en ligne le 15 décembre 2017, consulté le 09 mai 2019. URL : http://journals.openedition.org/educationdidactique/2781 ; DOI : 10.4000/educationdidactique.2781

UNE INTRODUCTION ACCESSIBLE À LA « CONNAISSANCE PAR MORCEAUX »
MODÉLISATION DES TYPES DE CONNAISSANCES ET DE LEURS RÔLES DANS L'APPRENTISSAGE

Andrea A. diSessa
Professor of the Graduate School of Education, Berkeley
University of California

La Connaissance par Morceaux(CpM) est une perspective épistémologique qui a réussi à produire, dans le champ de la didactique des sciences, des explications significatives de phénomènes d'apprentissage, en particulier en ce qui concerne les conceptions préalables des élèves et les rôles de celles-ci dans l'émergence de la compétence. La CpM est nettement moins utilisée en mathématiques. Cependant, je fais l'hypothèse que les raisons de ce moindre usage relèvent principalement de différences historiques plutôt que d'écarts entre les processus d'apprentissage en mathématiques et en sciences expérimentales.
L'objectif de cet article est de présenter la CpM d'une manière relativement accessible pour des chercheurs en didactique des mathématiques. Je présente les principes généraux et les caractéristiques essentielles de la CpM. Je m'appuie sur une variété d'exemples, y compris d'exemples en mathématiques, pour illustrer le fonctionnement de la CpM, son utilisation pratique et ce que l'on peut en attendre. J'espère ainsi encourager et accompagner une utilisation plus importante de la CpM dans la recherche en didactique des mathématiques.

Mots-clés : Connaissance par Morceaux (CpM), conceptualisation, systèmes complexes.

***A friendly introduction to "Knowledge in Pieces":** Modeling types of knowledge and their roles in learning*

Knowledge in Pieces (KiP) is an epistemological perspective that has had significant success in explaining learning phenomena in science education, notably the phenomenon of students' prior conceptions and their roles in emerging competence. KiP is much less used in mathematics. However, I conjecture that the reasons for relative disuse mostly concern historical differences in traditions rather than in-principle distinctions in the ways mathematics and science are learned.
This article aims to explain KiP in a relatively non-technical way to mathematics educators. I explain the general principles and distinguishing characteristics of KiP. I use a range of examples, including from mathematics, to show how KiP works in practice and what one might expect to gain from using it. My hope is to encourage and help guide a greater use of KiP in mathematics education.

Keywords: Knowledge in Pieces (KiP), conceptual changes, complex systems.

The author wishes to acknowledge the helpful contributions of François Coquet, Gérard Sensevy and Andrée Tiberghien to this translation. The entire project would not have happened without the initiative and highly professional work of Ghislaine Gueudet, who suggested the idea, organized the group, and did the principle work on the translation.
Cet article est une traduction de diSessa, A. A. (2017). "A friendly introduction to 'Knowledge in Pieces': Modeling types of knowledge and their roles in learning". In G. Kaiser (Ed.), ***Invited lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education***, Springer International. Réalisée et publiée avec l'accord des éditions Springer, selon les termes du Creative Commons Attribution 4.0 International License [http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/].
Certaines parties de cet article s'inspirent du texte diSessa, A. A. (2017), "Knowledge in Pieces: An evolving framework for understanding knowing and learning," in T. G. Amin & O. Levrini (Eds.), ***Converging perspectives on conceptual change: Mapping an emerging paradigm in the learning sciences***, Routledge. Utilisé avec l'autorisation de Taylor and Francis / Routledge.
La traduction a été réalisée par Ghislaine Gueudet, avec la contribution directe de Andrea diSessa, et l'aide précieuse de François Coquet, Gérard Sensevy et Andrée Tiberghien.

INTRODUCTION

Présentation

La Connaissance par Morceaux[1] (CpM) désigne un large cadre théorique et empirique, dédié à la compréhension des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage. Celui-ci s'inscrit dans le cadre du « changement conceptuel » (Vosnadiou, 2013), qui s'intéresse à l'apprentissage de contenus spécialement ardus. La CpM a été initialement développée dans le champ de la didactique des sciences physiques – en particulier pour approfondir la compréhension du phénomène de « conceptions préalables » (improprement désignées comme « conceptions fausses » ; Smith, diSessa, & Roschelle, 1993) – cependant elle a depuis été mobilisée dans d'autres domaines, comme les mathématiques, la chimie, l'écologie, l'informatique, et même les perspectives sur les races et le racisme (Philip, 2011).

Mon objectif ici est de proposer une introduction à la CpM qui soit accessible pour des non-spécialistes de son champ d'appartenance, le « changement conceptuel ». Je privilégie les idées fondamentales plutôt que les approfondissements, tout en tentant de mettre en évidence les caractéristiques structurelles propres de la CpM et de respecter la précision technique. Une introduction plus approfondie à la CpM, quoique toujours générale, pour ceux qui souhaiteraient poursuivre plus avant peut être trouvée dans diSessa, Sherin, and Levin (2016).

Avant d'entrer dans le vif du sujet, je voudrais souligner deux points concernant mes choix de présentation. Premièrement, je vais débuter par des exemples de sciences physiques, le « bercail » de la CpM. Je sollicite la bienveillance des lecteurs non-spécialistes : ceci me permet de choisir certains des exemples les plus simples et les plus accessibles d'analyses menées avec la CpM. Ces exemples mettent en évidence les éléments essentiels, et les avantages de ce cadre en comparaison à d'autres perspectives. Ces exemples sont situés au niveau du lycée, donc je suppose qu'ils ne soulèveront pas de problèmes relatifs au contenu physique en jeu. Des exemples mathématiques sont donnés dans les sections 3 et 4. D'autres perspectives en didactique des mathématiques peuvent considérer ces mêmes exemples. Je mentionne certaines de ces perspectives (voir les commentaires et références en sections 3 et 4) ; cependant je ne propose pas dans le cadre de cet article une analyse comparative précise, qui serait trop complexe. Les lecteurs qui connaissent ces perspectives de didactique des mathématiques sont invités à élaborer leurs propres comparaisons et conclusions[2].

La CpM est essentiellement une perspective épistémologique : il s'agit de développer une théorie moderne de la connaissance et de l'apprentissage susceptible de tenir compte à la fois de phénomènes à court terme – l'apprentissage de morceaux et de parties (d'où le nom de Connaissance par Morceaux) – et de phénomènes à long terme, comme le changement conceptuel, le changement de théorie, etc. L'objectif poursuivi est d'établir un lien bilatéral entre la théorie d'une part et d'autre part des données concernant les apprentissages et l'activité intellectuelle. « Bilatéral » implique que (a) la théorie est façonnée par l'observation et construite à partir d'elle, mais également que (b) la théorie peut modéliser directement ce que font les sujets, leur raisonnement et leurs apprentissages, en identifiant le sens général de leurs actions. La CpM est donc construite en réaction aux théories *a priori*, d'un très haut niveau d'abstraction et donc très difficiles à appliquer à la complexité des situations réelles.

La CpM partage des caractéristiques importantes avec deux principales théories antérieures. La première est la psychologie développementale piagétienne et néo-piagétienne, représentée en didactique des mathématiques par Les Steffe, Ernst von Glasersfeld, Robbie Case et beaucoup d'autres. La caractéristique fondamentale commune à la CpM et à ces travaux est le constructivisme : l'intérêt pour la manière dont les changements sur le long terme émergent de structures mentales existantes. La seconde est la modélisation cognitive, comme on peut la trouver dans le travail de John Anderson (par exemple son travail sur les tuteurs intellligents en géométrie), ou Kurt van Lehn (par exemple son travail sur les stratégies arithmétiques invalides). La caractéristique commune avec la CpM, dans le cas de la modélisation cognitive, est la nécessité de rendre compte de phénomènes se déroulant sur le moment. Un aspect caractéristique de la CpM est de tenter d'associer une perspective à long terme ET à une perspective court terme sur l'apprentissage. Selon moi la psychologie piagétienne n'a jamais réussi de manière satisfaisante à expliquer le lien entre les changements à long terme et les actions des élèves sur le moment. Et je considère de même que la modélisation cognitive n'est jamais réellement parvenue à tenir compte des changements ardus qui peuvent nécessiter plusieurs années.

J'introduis maintenant un ensemble d'entrées imbriquées qui caractérisent le cadre de la CpM. Celles-ci seront développées dans le contexte d'exemples de phénomènes d'apprentissage pour mettre en évidence leur sens dans des cas concrets et pour montrer leur importance.

Une perspective de systèmes complexes

La CpM voit la connaissance en général comme un système complexe formé de nombreux types d'éléments de connaissance, et comportant le plus souvent de nombreux exemplaires d'éléments de chaque type. Deux types différents de connaissances sont illustrés dans la prochaine partie.

L'apprentissage est vu comme la transformation d'un système complexe en un autre, avec éventuellement beaucoup d'éléments qui demeurent communs au cours du changement, mais qui sont organisés différemment. Par exemple, les *connaissances intuitives* des élèves (voir la définition ci-dessous) sont fluides et instables, mais les *concepts aboutis* doivent avoir une plus grande stabilité, et donc correspondre à une organisation plus large et régulière, même si beaucoup d'éléments restent dans le système. « L'écologie conceptuelle » des élèves avant qu'ils ne reçoivent un enseignement doit être finement analysée, en considérant une à une les intuitions, pour comprendre l'apprentissage – il est difficile d'en dire plus au niveau général. Plusieurs intuitions de ce type seront évoquées dans les exemples.

J'utilise les termes « intuitif » et « intuition » ici approximativement et informellement pour décrire le sens commun des élèves, les conceptions a priori de tous les jours. Cependant je vais introduire plus loin un modèle technique pour une classe particulière d'idées de ce type qui s'est avéré être important dans les travaux sur les CpM.

Une perspective de modélisation

Les sciences de l'apprentissage sont encore loin de savoir exactement comment l'apprentissage fonctionne. Il vaut mieux reconnaître explicitement ce fait et tenter d'examiner les échecs et les réussites de nos idées. La CpM construit des modèles, typiquement des modèles de différentes sortes de connaissances, et non une « théorie de l'apprentissage et de l'enseignement » complète ; les limites de ces modèles sont tout aussi importantes (par exemple pour indiquer de futures directions) que leurs réussites avérées.

Une recherche continue d'amélioration

Une perspective de modélisation est naturellement liée à un effort constant d'amélioration des modèles existants, et parfois de développement de nouveaux modèles. En fait, les modèles centraux de la CpM ont eu une histoire étendue de prolongements et d'améliorations (diSessa, Sherin, & Levin, 2016). L'essentiel de l'approche est demeuré inchangé ; des détails ont été complétés, et des prolongements ont été ajoutés pour rendre compte de phénomènes nouveaux.

Je désigne les thèmes ci-dessus comme « macro » parce qu'ils caractérisent un large programme, et qu'ils peuvent être plus facilement vus en considérant l'ensemble de la perspective de la CpM. À l'opposé, les thèmes « micro » ci-dessous peuvent être relativement facilement illustrés dans beaucoup de contextes différents ; ceci sera donné à voir dans les exemples de travaux développés plus loin.

Une approche pluri-échelle

J'ai déjà évoqué le fait de prendre en compte simultanément des phénomènes d'apprentissage et d'activité intellectuelle à long terme et à court terme ; je désigne ceci comme une approche *temporellement pluri-échelle*. La plupart des recherches concernant le changement conceptuel, et donc une importante part de la recherche en éducation, est limitée à des études du type avant / après. Ces recherches ne rendent pas compte du processus de changement tel qu'il advient dans des moments d'activité intellectuelle.

Une orientation systémique comporte aussi une échelle sur une deuxième dimension. Les systèmes complexes sont construits à partir d'éléments plus petits ; ainsi le changement dans ces systèmes doit plutôt être saisi au niveau de la transformation et de la ré-organisation des composants du système.

Ainsi, par exemple, la batterie de « petites » idées, d'intuitions, qui constituent des « conceptions préalables », peut fournir des éléments qui seront affinés et intégrés afin de produire des systèmes complexes répondant aux normes, des concepts conformes. Comme les concepts conformes sont vus en tant que systèmes, leurs propriétés (partielles et générales) sont ainsi suivies empiriquement. Je décris cette attention, portée simultanément aux éléments et au niveau de l'ensemble du système comme *structurellement pluri-échelle*.

Richesse et productivité

Ce thème n'est pas *a prio*ri un postulat constitutif de la CpM, mais c'est un résultat empirique primordial et cohérent. La connaissance « naïve » est, en général, riche et elle échappe aux caractérisations simplistes (par exemple, comme de « fausses conceptions » isolées, de simples fausses convictions). De plus, il est fréquent que l'apprentissage convoque de « vieux » éléments dans de nouvelles configurations pour produire la compréhension attendue. Ceci constitue l'essence même de la CpM en tant que cadre théorique fortement constructiviste, et c'est l'une de ses principales différences avec d'autres cadres proches dans leur effort commun de compréhension des phénomènes d'apprentissage, de connaissance et de changement conceptuel. diSessa (2017) décrit de manière systématique des différences, en comparaison avec d'autres théories du changement conceptuel. Selon moi, faire l'hypothèse de la richesse et de la productivité de la connaissance naïve n'est pas fréquent, même si cette hypothèse est parfois faite, en mathématiques comme en sciences.

Diversité

Une conséquence immédiate de l'existence de connaissances à une échelle fine est qu'il y a de nombreuses dimensions possibles selon lesquelles les apprenants sont différents. Chaque apprenant peut disposer d'un sous-ensemble différent de l'ensemble complet des « petites » intuitions, et peut aussi traiter les mêmes éléments de façon différente. Parmi les théories modernes du changement conceptuel, la CpM est peut-être la seule qui permet de prendre en compte cette diversité entre apprenants.

Importance du contexte

De « petites » idées apparaissent souvent dans certains contextes et non dans d'autres. De plus, lorsqu'elles changent pour entrer dans des systèmes de connaissance conformes, les contextes dans lesquels elles opèrent peuvent aussi changer. Ainsi, comprendre *comment les connaissances dépendent du contexte* est essentiel dans la CpM, alors que c'est peu important voire invisible pour des théories comparables. Cet intérêt rapproche la CpM des approches situées de l'apprentissage (« cognition située »). Voir Brown, Collins, et Duguid (1989) pour une première présentation, ainsi que le travail qui a suivi, par des auteurs tels que Jean Lave et Jim Greeno.

Méthodes empiriques

La CpM n'est pas doctrinaire en ce qui concerne les méthodes ; elle en a mobilisé un grand nombre.

Cependant deux modes de travail plus spécifiques existent. Premièrement, le développement et l'amélioration constante de la théorie est essentiel pour la CpM. Dans la communauté CpM nous étudions les limites des modèles actuels, nous soutenons le perfectionnement des anciens modèles et le développement de nouveaux modèles si nécessaire.

Le développement de la théorie nécessite habituellement les sources de données les plus riches possibles, de manière à pouvoir donner le plus complètement possible les détails du processus, et les synthétiser. Ceci est incompatible avec des données qui seraient rapidement traitées et réduites à des codes a priori ou des catégories. En pratique, des études *microgénétiques* ou *micro-analytiques* de riches données concernant les raisonnements des élèves (par exemple, des interviews cliniques) ou l'apprentissage (des corpus concernant l'apprentissage en classe, individuel ou collectif) ont été systématiquement utilisés en CpM non seulement pour valider la théorie, mais également pour en développer de nouveaux aspects. Voir Parnafes et diSessa (2013) ainsi que la section méthodologique dans diSessa, Sherin et Levin (2016). Cette sorte de collecte de données et d'analyse est fortement en synergie avec l'approche design-based (diSessa & Cobb, 2004), et nous avons fréquemment mené la conception et l'implémentation itérative de curricula parallèlement à la collecte conjointe de riches données sur des déroulements en classe et de suivis individuels minutieux qui ont permis des avancées significatives.

Je vais maintenant donner corps et exemplifier les généralités ci-dessus concernant le développement de la théorie et le travail empirique. Je vais indiquer en caractères gras les thèmes évoqués ci-dessus lorsqu'ils seront pertinents. Comme je l'ai annoncé, je vais commencer par des exemples issus de la physique, et passer ensuite aux mathématiques.

DEUX MODÈLES : DONNÉES ILLUSTRATIVES ET ANALYSES

Dans cette section je présente les deux modèles de types de connaissances les plus connus et les mieux développés de la CpM. Ainsi, cette section illustre la CpM comme une **perspective de modélisation**. Les deux modèles sont à la fois **temporellement** et **structurellement** pluri-échelle ; cependant le premier modèle, les primitives phénoménologiques, est particulièrement centré sur les échelles fines de temps et de structure. Le deuxième, les classes de coordination, donne plus d'importance aux échelles larges.

Connaissances intuitives

Les primitives phénoménologiques (notées **p-prims** dans ce qui suit) sont des éléments de connaissance intuitive qui constituent pour des sujets leur « sens du mécanisme » ; c'est-à-dire ce qui les amène à considérer certains faits comme évidents, certains comme vraisemblables, certains comme invraisemblables, et fournit les explications ou les réfutations de possibilités réelles ou imaginaires. Voici quelques exemples de p-prims, décrites grossièrement : « un effort accru engendre de plus grands résultats » ; « le monde est plein d'influences concurrentes dont la plus forte l'emporte sur les autres, même si un équilibre naturel ou accidentel peut parfois exister » ; « la forme d'une situation détermine la forme de l'action dans cette situation (par exemple les orbites autour de planètes carrées sont manifestement carrées) ». En mathématiques, il existe des idées du même type comme « la multiplication fait grandir » (ce qui est faux si on multiplie par un nombre plus petit que 1) ; la supposition erronée qu'un changement dans une quantité donnée implique généralement un changement semblable dans une quantité liée (plus implique plus, moins implique moins, alors par exemple qu'une surface « crénelée » peut avoir une aire qui diminue alors que son périmètre augmente) ; et « les nombres négatifs n'existent pas dans le monde réel » (que signifierait « moins une vache » ?). Dans le reste de cette partie, je vais seulement discuter des exemples de physique.

Nous devons développer un nouveau modèle pour cette sorte de connaissance parce qu'empiriquement, celle-ci contrevient aux présupposés des types standards de connaissances, comme les convictions ou les principes. Premièrement, il serait incorrect de classer les p-prims comme vraies ou fausses (comme on peut le faire pour des convictions ou des principes). Les p-prims fonctionnent, au sens où elles annoncent des résultats vérifiables dans certaines situations d'usage, mais elles échouent systématiquement dans d'autres circonstances. De fait, le moment où elles viennent à l'esprit du sujet dépend du contexte (**dépendance du contexte**, interne : « l'état d'esprit » ; ou externe : l'évocation sensorielle particulière engendrée par le phénomène). Ainsi, par exemple, il est inexact de dire qu'une personne « croit » une p-prim, comme si celle-ci venait systématiquement à l'esprit quand elle est pertinente, et comme si elle était toujours utilisée de préférence à d'autres modes de pensée (par exemple d'autres p-prims ou même des concepts appris). De plus, les élèves n'ont pas la possibilité d'expliciter et de rejeter des p-prims (une stratégie d'apprentissage souvent recommandée pour les « conceptions fausses »). Les obstacles à une telle considération explicite sont importants : il n'y a pas de vocabulaire commun pour les p-prims, et les sujets peuvent même ne pas être conscients qu'ils ont de telles idées. De plus, le « rejet » est dénué de sens pour des idées qui fonctionnent habituellement, de même que pour des idées qui peuvent devenir productives pour l'apprentissage (voir les exemples qui suivent).

Exemple de données et d'analyse

J., un sujet dans une étude longue par interviews (diSessa, 1996), doit expliquer ce qui se produit lorsqu'une balle est lancée en l'air. J. répond facilement de manière tout à fait formelle : lorsque votre main est retirée, il n'y a qu'une force dans la situation, la gravité, qui ralentit la montée de la balle, jusqu'à inverser son mouvement et la ramener vers le bas.

L'interviewer pose alors une question apparemment anodine : « que se passe-t-il au sommet du lancer ? » Plutôt que de répondre directement, J. commence par reformuler son modèle du lancer. Elle ajoute une autre force : la résistance de l'air, qui change, et « devient de plus en plus forte [comme pour aller vers un équilibre avec une autre force ; voir le commentaire qui suit] jusqu'au point où quand [sic] ça s'arrête. ». Mais alors, elle ajoute encore une autre force, allant vers le haut, qui est égale à la gravité, « en équilibre durant une seconde » au sommet, avant de céder à la gravité. Reprenant au début, elle propose une source pour la force orientée vers le haut : elle vient de votre main, et elle « peut seulement durer un temps limité contre l'air et la gravité ». Par étapes, elle décide que seule la gravité s'oppose à la force imprimée vers le haut, et non la résistance de l'air, et graduellement elle reformule tout le lancer comme une opposition, dans laquelle la force initiale vers le haut surmonte la gravité, atteignant un équilibre au sommet, puis la gravité reprend le dessus.

L'explication des événements ici réside dans le fait que l'interviewer a « incité » J. à appliquer ses idées intuitives sur l'équilibre et la prépondérance ; il a posé une question sur le sommet, parce que le changement de direction à cet endroit semble relever de la prépondérance, une influence devient plus faible, alors que l'autre devient plus forte. J. a « mordu à l'hameçon » et a reformulé ses idées pour inclure des influences contraires : l'influence vers le bas est la gravité, mais elle a dû fournir un effort pour trouver l'influence contraire, en essayant d'abord la résistance de l'air, qui devenait de plus en plus forte, puis en introduisant plutôt une force orientée vers le haut, qui devenait de plus en plus faible. C'est un exemple frappant de **dépendance au contexte** : J. change complètement son modèle après avoir centré son attention sur une partie spécifique du lancer qui lui a suggéré l'équilibre. Cependant, d'autres surprises étaient encore à venir.

Durant les 4 sessions suivantes, l'interviewer revient constamment sur le lancer de balle, en formulant progressivement des critiques directes. « Mais vous avez dit que la force dirigée vers le haut disparaît au sommet du lancer, et aussi qu'elle s'équilibre à cet endroit avec la gravité. Comment peut-elle à la fois valoir zéro et s'équilibrer avec la gravité ? » Durant les deux dernières séances, l'interviewer sort de sa neutralité clinique et propose une séquence d'enseignement sur ordinateur à propos de l'influence de la force sur le mouvement, incluant le modèle physique de lancer avec une force. À la fin de la séquence, J. doit à nouveau décrire ce qu'il advient lors du lancer. De manière similaire à l'entretien initial, mais avec bien plus de soin et de précision, elle donne une explication physique frisant la perfection. Cependant, lorsqu'on lui demande d'éviter une partie accessoire de son explication (la conservation de l'énergie), J. retourne à son modèle des deux forces. Ainsi, nous observons que non seulement J. démontre une surprenante **dépendance au contexte** en termes d'explication du lancer, mais encore cette dépendance au contexte semble très résistante ; elle est centrale dans son système conceptuel.

Après la fin des séances d'interviews, J. savait que pour un observateur il apparaissait qu'elle avait décrit le lancer de deux manières différentes, et que la manière référant à « l'équilibre » serait considérée comme fausse. Cependant elle avait réellement l'impression que les deux relevaient de la même explication.

Éléments notables

La description dominante de la physique intuitive dans les années 1990 présentait celle-ci comme constituant une théorie cohérente (voir diSessa, 2014, pour une revue de littérature et des références), et l'explication basée sur les deux forces était un exemple parfait. Des agents externes (la main) impriment une force qui dépasse la gravité, puis qui est finalement contrebalancée par celle-ci, et finalement dépassée. La perspective CpM cependant est plutôt que la « théorie » apparaît seulement dans certains cas (par exemple lorsque le dépassement semble manifeste). En effet, J. ne semblait pas avoir cette théorie au départ, mais elle l'a construite en quelques minutes. La **dépendance au contexte** manque donc dans la vision conventionnelle ; des « théories », comparables à celle de Newton ne sont pas susceptibles d'aller et venir selon ce sur quoi vous vous centrez en observant une scène. Le cas de J. est particulièrement frappant parce qu'elle n'a jamais renoncé à ses idées intuitives, alors même qu'elle avait amélioré ses idées formelles. Au lieu de cela, les aspects saillants de la situation ont continué à faire apparaître tour à tour l'une ou l'autre « théorie » du lancer. La stabilité à long terme d'une instabilité (le passage d'un modèle du lancer à l'autre) met en évidence l'attention à **différentes échelles de temps** qui est inhabituelle dans les études sur le changement conceptuel mais primordial pour comprendre le mode de pensée de J. Ce qui se passait en un instant à chaque fois (changement du centre d'attention et changement correspondant de modèle du lancer) a continué à se passer durant plusieurs mois d'interviews. De tels phénomènes critiques testent les limites des méthodes d'observation et d'analyse. Par exemple, des tests de type avant / après ont très peu de chances de repérer ce phénomène. L'interprétation en termes de conceptions fausses attribuées au sujet : « J. a retenu le modèle non formel de forces duales dans un lancer » ne peut pas révéler ces aspects pluri-échelle et dépendants au contexte du cas de J.

Un autre sujet de la même étude, K., a commencé par avancer le modèle du lancer par les deux forces. Cependant, ce sujet a réagi à des re-directions similaires de son attention à propos de son explication en reformulant complètement sa description dans le sens du modèle formel. Elle observa alors qu'elle avait changé d'avis, et expliqua ses raisons d'agir ainsi. Elle abandonna alors le modèle des deux forces pour tout le reste des interviews.

Paradoxalement, une évaluation standard employant seulement les premières réponses aurait classé J. comme suivant le formalisme correct, et K. comme « attachée à la théorie naïve ». En réalité, K. était un individu très différent, capable de se corriger de manière autonome et de stabiliser sa compréhension. J., au contraire, alternait les explications avec une ou deux forces, et n'avait pas l'impression qu'elles soient particulièrement différentes. Les méthodologies CpM ne font pas l'hypothèse d'un mode de pensée unique des élèves (**richesse**), et elles pourraient donc mieux décrire et comprendre leurs différences (**diversité**). Ni J. ni K. ne pouvaient être bien caractérisées par leurs réponses initiales. J., mais pas K., était fortement engagée dans une vue centrée sur la recherche d'équilibres dans beaucoup d'aspects de la physique, même si tous deux trouvaient l'idée d'équilibre pertinente dans certains cas.

Des leçons à retenir

L'état de connaissance des individus est complexe, et il n'est pas possible de l'évaluer en faisant l'hypothèse que ces individus vont être différenciés de manière cohérente par leurs premières réponses. L'hypothèse de la cohérence dans la compréhension des élèves est largement suspecte ; J. a toujours conservé à la fois la réponse correcte et la « conception fausse », même à la suite d'un enseignement direct. L'interviewer, sachant l'importance de connaissances fragiles comme les p-prims, a amorcé l'une d'elles (l'équilibre au sommet), et a observé son influence déterminante. Les p-prims expliquent largement les différences entre J. et K. (les deux se référaient à l'équilibre, mais J. y était nettement plus attachée), mais elles ne résolvent pas tout. Dans une recherche suivante (diSessa, Elby, & Hammer, 2002), nous avons découvert que J. démontrait une vision inhabituelle, souvent contre-productive de la nature des connaissances en physique, et non K. La modestie est la meilleure politique : la complexité de l'écologie conceptuelle des élèves nécessite un travail permanent (une amélioration permanente).

Une leçon apprise ici est que les p-prims se comportent très différemment des concepts formels. En termes qui peuvent être plus familiers aux didacticiens des mathématiques, les p-prims offrent une version très structurée (des éléments spécifiques dont l'usage et la contextualité peuvent être examinés dans de nombreuses circonstances) de ce qu'est un « concept-image » d'un élève (Tall & Vinner, 1981). Nous avons besoin d'un modèle différent pour comprendre des idées plus structurées, stables et conséquentes, quelque chose d'analogue au « concept-définition », mais qui utilise la CpM pour, selon moi, mieux approcher les racines cognitives de l'expertise.

Les concepts scientifiques

Les **classes de coordination** constituent un modèle qui vise à appréhender les principales propriétés des concepts experts.

Selon le modèle des classes de coordination, la fonction centrale des concepts est de relever de l'information conceptuellement pertinente de manière fiable à travers un large spectre de circonstances, contrairement à l'activation instable des p-prims. La figure 1 explique ceci.

La figure 2 montre la première difficulté pour la création d'un concept cohérent. Tous les chemins possibles du monde réel (ou imaginaire) aux concepts doivent parvenir au même résultat. Ceci se nomme

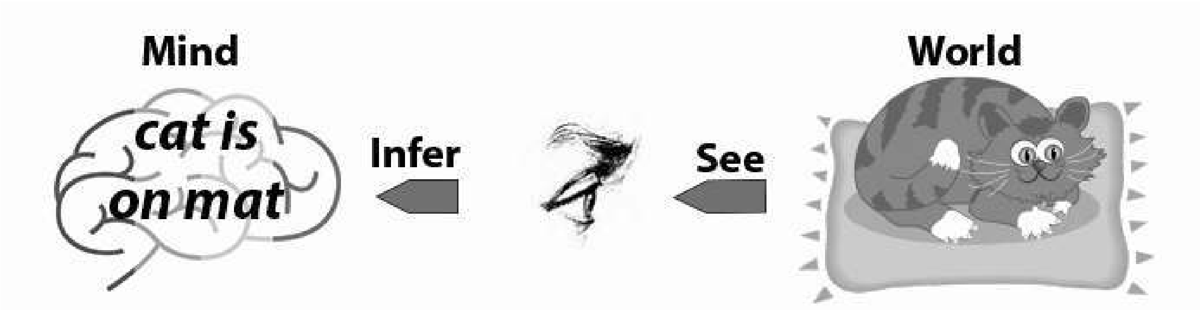

FIG. 1. – Les classes de coordination permettent de relever l'information conceptuellement pertinente, illustrée ici par « la localisation », dans le monde réel. Relever l'information se déroule en deux étapes. (1) « Voir » ou « observer » signifie extraire l'information pertinente : « Le chat est ***au-dessus*** *du tapis » et « Le chat* ***touche*** *le tapis ». (2) « Inférer » signifie tirer des conclusions spécifiques à propos de l'information pertinente (localisation) utilisant ce qui a été observé : « Le chat est* ***sur*** *le tapis ».*

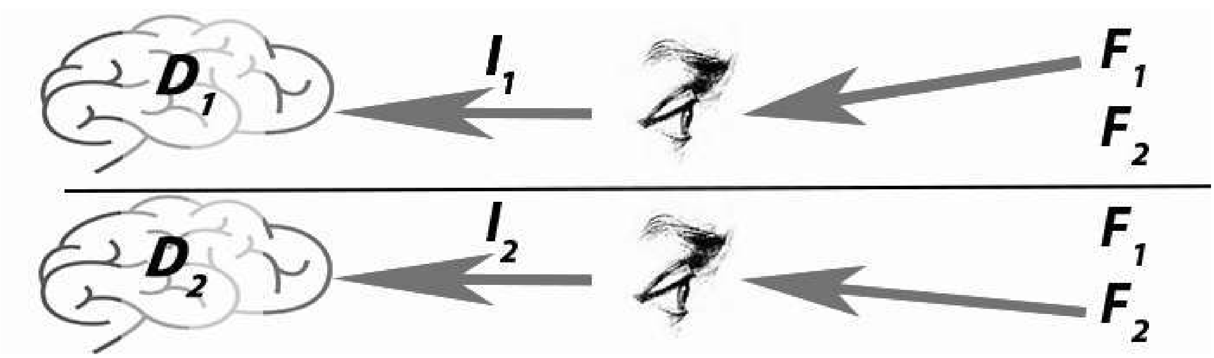

FIG. 2. – Dans des situations où de multiples caractéristiques sont disponibles (F1, F2), différents choix de ce qui est à observer peuvent conduire à différentes inférences (I1, I2) et potentiellement à des déterminations (D1, D2) contradictoires de la « même » information.

l'ajustement, et il s'agit d'une propriété de l'ensemble du système, et non d'une partie de celui-ci.

En physique un exemple de manque d'ajustement est que les élèves vont parfois déterminer des forces en utilisant des inférences intuitives (« Un objet se déplace ; il doit être sous l'influence d'une force »), et parfois par des « méthodes formelles » (« Un objet se déplace à vitesse constante ; selon la troisième loi de Newton, il n'est pas soumis à une force nette »). Un exemple mathématique est que les élèves peuvent rejeter le fait que trois points placés sur l'équateur d'une sphère forment un triangle, même s'ils ont admis le fait qu'une portion de grand cercle est un « segment », et que trois segments connectés forment un triangle.

Les classes de coordination sont des systèmes vastes et complexes. Ceci diffère structurellement des p-prims, qui sont « petites », simples, et relativement indépendantes les unes des autres. L'ajustement constitue une contrainte forte sur les prises d'information possibles (par exemple, relever l'information F1 ou F2 dans la figure 2) et sur les inférences possibles (par exemple I1 et I2) : tous les chemins devraient converger vers le même résultat. C'est-à-dire qu'il y a une contrainte globale sur toutes les parties d'une classe de coordination, qui en fait un modèle fondamentalement **pluri-échelle**. Dans ce cas, pluri-échelle se rapporte à la structure du système de connaissance – ses parties et le système complet – plutôt qu'à ses propriétés temporelles, qui étaient soulignées dans l'exemple de J.

Je ne vais pas élaborer une taxonomie complète des parties des classes de coordination ; cependant, parce que ceci peut éclairer un exemple issu des mathématiques (partie *La loi des grands nombres*), je note qu'une classe de coordination inclut la *pertinence*, en plus de *l'observation* et des *inférences*. La pertinence signifie qu'une classe de coordination doit « savoir » quand un concept s'applique et quand l'information sur ce concept *doit* être disponible. Si on vous pose une question sur la pente, il doit y avoir des informations pertinentes sur l'« accroissement » et le « parcours », et il vous incombe d'être attentif à cette information.

Dufresne, Mestre, Thaden-Koch, Gerace, et Leonard (2005) ont donné un exemple accessible de phénomène de classe de coordination. Ils ont montré à deux groupes d'étudiants de l'université, l'un en parcours d'ingénieurs et l'autre en sciences sociales, différentes simulations du mouvement d'une balle roulant le long d'une piste descendante, mais remontant ensuite à sa hauteur d'origine. Ils ont ensuite demandé, parmi ces simulations, lesquelles semblaient réalistes. Les sujets voyaient les déplacements dans deux contextes : l'un montrait uniquement la balle principale, et l'autre montrait aussi simultanément le mouvement uniforme d'une balle sur une piste parallèle horizontale. Les jugements portés sur le réalisme du mouvement par les étudiants de sciences sociales restaient pratiquement identiques dans la situation à une ou à deux balles. En revanche les ingénieurs changeaient radicalement d'avis, en passant du mouvement correct à un autre qu'aucun d'eux n'avait initialement considéré comme correct. Dans le cas des deux balles, les ingénieurs réussissaient nettement moins bien que les étudiants en sciences sociales !

En utilisant des interviews cliniques, les chercheurs ont confirmé que les ingénieurs regardaient (« observaient ») différentes choses dans les différentes situations. Le mouvement relatif devenait prééminent dans le cas de deux balles, et modifiait les aspects du mouvement sur lesquels se focalisait l'attention. Dans la représentation avec deux balles, une sorte d'équilibre, « de changements se compensant mutuellement » était dominant dans leurs inférences sur le réalisme. Le mouvement même qu'ils avaient résolument rejeté comme non réaliste devenait alors le plus réaliste.

Leçons à retenir : Les concepts scientifiques sont à l'origine de glissements d'attention pendant l'apprentissage, et donc de différentes déterminations (incohérentes) de leurs propriétés. Cette caractéristique est facilement attestée pour des concepts comme celui de « force » et il y a toutes les raisons (et certaines sources) pour croire que ceci est également vrai pour les concepts mathématiques. Ainsi, les sujets doivent apprendre de diverses manières à interpréter des concepts donnés dans différents contextes ; ces manières doivent être différemment importantes selon les conditions, et cependant toutes les déterminations doivent « s'ajuster ». À nouveau, ce principe de cohérence local / global met en évidence la sensibilité de la CpM à la multiplicité des échelles de structure conceptuelle.

C'est seulement moyennement surprenant que l'inférence "coupable" ici relève de l'équilibre, qui était également impliqué dans le cas de J. Ainsi, à nouveau, un élément de petite échelle, semblable aux p-prims « équilibre », joue un rôle déterminant. L'équilibre est une idée intuitive centrale, mais c'est aussi un principe puissant dans la compréhension scientifique (**productivité**). Les changements d'énergie cinétique et d'énergie potentielle *s'équilibrent* toujours. Dans le cas ci-dessus, les élèves ingénieurs ont accordé plus d'importance à l'équilibre que les étudiants de sciences sociales, mais ils n'ont pas encore bien appris ce qui s'équilibre exactement, et quand est-ce que l'équilibre est approprié (pertinence). On apprend ainsi que certaines p-prims sont puissantes, mais qu'elles n'ont pas encore pris leur place dans l'apprentissage de la physique. Incidemment, cette analyse rend aussi compte d'une différence surprenante entre différents groupes d'étudiants, ingénieurs d'une part et sciences sociales d'autre part (**diversité**).

Les p-prims et les classes de coordination sont des modèles qui se complètent bien. Au sein des classes de coordination, les p-prims rendent compte de certains problèmes (principalement en termes d'inférences inappropriées), mais elles peuvent également mener sur de bonnes trajectoires d'apprentissage, dans la construction du système complet. L'équilibre est une magnifique idée physique, mais des versions naïves de l'équilibre doivent être développées précisément en évitant les généralisations abusives. La linéarité en mathématiques est une idée comparable. C'est une idée magnifique et puissante, mais elle ne fonctionne pas, par exemple, pour toutes les fonctions. $Sin(a + b)$ n'est pas égal à $sin(a) + sin(b)$. Lorsque l'équilibre et la linéarité se développent, elles ont toutes deux besoin d'être coordonnées correctement avec des vérifications et d'autres modes de pensée.

EXEMPLES EN MATHÉMATIQUES

Cette partie présente des exemples en mathématiques. Le champ des analyses CpM en mathématiques est moins riche que pour la physique, et les tendances générales sont moins bien repérées. Mais donner une idée de ce à quoi la CpM ressemble en mathématiques et encourager de futurs travaux de ce type est le but premier de cet article.

La loi des grands nombres

Joseph Wagner (2006) a utilisé les principales idées de la théorie des classes de coordination pour étudier l'apprentissage de la loi des grands nombres en statistiques : la distribution des fréquences observées, pour de grands échantillons d'événements aléatoires se rapproche plus de la moyenne théorique (moyenne empirique asymptotique) que pour de petits échantillons. De manière complémentaire, les petits échantillons montrent une plus grande dispersion ; une plus grande proportion de leurs fréquences observées est éloignée de la moyenne théorique attendue. Ainsi, si on utilise un échantillon de 1000 tirages à pile ou face, on est à peu près sûr que la fréquence de « pile » dans l'échantillon sera environ de 50 %, et de même 50 % pour la fréquence des « face ». Un échantillon de 10 lancers peut facilement contenir, disons, 70 % de pile et 30 % de face. Dans le cas extrême d'un unique lancer, on est certain d'être aussi loin que possible de la moyenne empirique asymptotique : 100 % de pile, ou 100 % de face.

Wagner a découvert que les élèves manifestaient des difficultés régulières en termes de classes de coordination pendant leur apprentissage. Beaucoup avaient de très longues trajectoires d'apprentissage, correspondant à l'apprentissage de la loi des grands nombres dans différents contextes d'utilisation. D'une manière plus techniquement détaillée, le raisonnement dans différents contextes implique différents types de connaissances (différentes observations, différentes inférences), qui peuvent nécessiter une acquisition séparée pour différents contextes. De plus, le raisonnement à propos de la loi dans chaque contexte doit s'ajuster en termes de « résultat conceptuel » (par exemple, quelle est la valeur attendue). En bref, la dépendance au contexte est un phénomène très important pour la loi des grands nombres, et l'intégrité systématique (une **propriété structurelle à grande échelle**, en fait, la plus importante propriété structurelle à grande échelle des classes de coordination) est difficile à atteindre, du fait de la richesse des perspectives intuitives qui peuvent être adoptées dans chaque contexte local particulier (structure d'échelle fine ; pensez aux p-prims).

À titre d'illustration, je présente une description abrégée d'une des études de cas de Wagner. Tout comme le cas de J., il s'agit d'un exemple assez extrême, mais dans lequel les phénomènes relevant de la théorie des classes de coordination sont très visibles. En particulier, nous allons observer la nécessité de réaliser les apprentissages à travers un large panel de situations. La loi des grands nombres peut même ne pas sembler pertinente à un sujet donné dans certaines situations, ou elle peut être appliquée d'une manière non conforme, selon les caractéristiques intuitives de la situation. Je suis la description de l'apprentissage de ce sujet donnée dans diSessa (2004), mais une analyse plus détaillée peut être trouvée dans Wagner (2006).

Le sujet, nommé M., (« Maria » dans Wagner, 2006), était une étudiante de première année qui suivait son premier cours de statistique. Wagner l'a interviewée à de multiples occasions durant le semestre (la méthodologie est semblable à celle employée pour J.), et il a utilisé un ensemble des questions de même forme, impliquant la loi des grands nombres. Il s'agissait dans ces questions de déterminer s'il était plus probable, pour un petit ou pour un grand échantillon, d'obtenir une fréquence tombant dans un certain intervalle : des intervalles contenant la moyenne théorique, ou des intervalles proches ou éloignés de cette moyenne. Est-ce que vous choisiriez un petit, ou un grand échantillon, si vous voulez que la fréquence des « pile » soit entre 60 % et 80 % ? La loi des grands nombres dit qu'il vaut mieux alors choisir un petit nombre de lancers ; à l'opposé, un grand nombre de lancers va presque certainement fournir une fréquence de « pile » qui s'approche de 50 %.

Nous entrons dans la saga de Maria après qu'elle ait appris, avec difficulté, à appliquer la loi des grands nombres dans le cas de lancers de pièces. Juste après une longue discussion sur la situation du lancer de pièces, l'interviewer (Jo) montre à M. un jeu « la roue » : une roue est divisée en 10 secteurs angulaires égaux ; lorsqu'on fait tourner la roue, une flèche s'arrête aléatoirement sur l'un d'entre eux. 7 des secteurs angulaires sont en bleu et trois en vert. Jo demande à M. s'il valait mieux faire tourner la roue un grand, ou un petit nombre de fois, pour obtenir une fréquence observée de bleu située entre 40 et 60 %.

> M. : OK… Arrêt sur le bleu ? Bon, soixante-dix pour cent de ce disque est bleu. Oui. Soixante-dix pour cent

est bleu, donc, pour obtenir entre quarante et soixante pour cent de bleu, et bien je dirais qu'il n'y a pas vraiment de différence. [Elle veut dire qu'il n'y a pas de différence entre un grand et un petit échantillon.]
Jo : Pourquoi ?
M. : Parce que si soixante-dix pour cent du disque… ou de la roue est bleu, alors… c'est plus probable de tomber sur du bleu, quel que soit le nombre de fois où on fait tourner la flèche. En quelque sorte ça n'a pas d'importance. Ce n'est pas comme le lancer de pièces…

M. dit qu'elle ne voit pas la situation de la roue comme une situation d'application de la loi des grands nombres. La caractéristique de *pertinence* de la théorie des classes de coordination décrit le problème qu'elle rencontre. Le corpus complet de données suggère que M. ne voit pas que le concept de moyenne théorique s'applique dans le cas de la roue. Elle sait que en lançant la roue, on obtient 70 % du temps du bleu, et 30 % du temps du vert. Elle raisonne correctement pour une seule mise en rotation de la roue. Mais tout simplement elle ne croit pas à l'existence d'une moyenne empirique asymptotique, d'une moyenne théorique de bleu ou de vert. Elle « voit » un événement aléatoire, mais elle ne peut pas en inférer une moyenne empirique asymptotique ; elle ne semble même pas savoir qu'une moyenne empirique asymptotique existe dans ce cas.

Jo a montré à M. une simulation informatique de la situation de la roue, et lui a proposé de faire l'expérience de représenter les issues (histogramme) de nombreux échantillons d'un certain nombre de lancers de la roue. Est-ce que le pourcentage de bleu se stabiliserait autour d'une valeur donnée, de la même manière que le lancer de pièce convergeait toujours vers 50 % ? M. était réticente à prédire quelque chose. Finalement, et en hésitant, elle suggéra que le bleu pourrait se stabiliser aux alentours de 70 %. Quand la simulation fut lancée, M. était clairement surprise. « Ça monte (se stabilise) autour de 70 % ! »

Ici, nous rencontrons une difficulté parce que nous en connaissons bien moins sur les p-prims (ou sur des éléments de connaissance semblables) qui contrôlent les jugements de M. que dans le cas de J., où l'interviewer avait entrevu le fait que l'équilibre provoquerait une manière différente de penser le lancer, et où Dufresne *et al*. ont montré que parfois le « modèle de l'équilibre » contrôlait aussi parfois les jugements des élèves ingénieurs à propos du réalisme de descriptions de mouvements de balles roulantes. Une bonne analyse en termes de classes de coordination demande plus que ce que permettent les données disponibles ici. Cependant, nous relevons un indice plus tôt dans la conversation, lorsque Jo a demandé à M. d'expliquer en quoi le lancer de roue différait du lancer de pièce. M. répondit : « la différence, euh, entre la pièce et ça (la roue) est que dans chaque lancer, pour la pièce, je sais qu'il y a… cinquante pour cent de chances d'avoir pile, cinquante pour cent de chance d'avoir face. » Mais avec la roue « ce n'est pas pareil ». Bien que M. ne puisse pas clairement identifier la différence, il semble probable qu'elle considère le résultat 50-50 du lancer de pièce comme *inhérent* à la pièce, « dans chaque lancer… », tandis que la roue, en elle-même, ne porte pas visiblement (pour elle), la proportion 70-30 comme une caractéristique intrinsèque. Un autre facteur explicatif pourrait être lié au fait bien connu, à propos des fractions : les élèves semblent développer d'abord une compétence conceptuelle avec les fractions simples comme ½. Mais là encore, nous n'avons pas assez de données pour une décision sur cette hypothèse.

Quelle qu'en soit la cause, le fait majeur ici par rapport aux classes de coordination est que M. ne voit tout simplement pas la situation de la roue comme similaire à celle du lancer de pièce. La partie *pertinence* de sa classe de coordination en cours de développement est le problème le plus évident. En particulier, elle ne considère pas naturellement qu'une moyenne théorique est pertinente (ni déterminable) dans le cas de la roue. Ce cas a eu une fin heureuse parce que le résultat empirique (la simulation informatique) a été suffisante pour convaincre M. que la moyenne théorique existait dans le cas de la roue, et elle commença alors à raisonner de manière plus conforme à propos des questions de Jo. En résumé, il y avait une **contextualité** conceptuelle qui l'empêchait d'utiliser le même mode de raisonnement, la loi des grands nombres, dans des situations différentes. M. devait apprendre que la moyenne théorique existait pour les lancers de roue, et qu'elle était liée aux « chances » concernant un unique lancer, comme pour les pièces : la moyenne empirique asymptotique correspond aux « chances » pour un unique lancer.

Le dernier cas de dépendance au contexte que je rapporte (il en existe de nombreux autres) concerne la taille moyenne d'échantillons d'hommes aux États-Unis lorsqu'ils s'inscrivent pour le service militaire dans de petits ou de grands bureaux de poste. Si la taille moyenne aux États-Unis est de 5 pieds 9 pouces[3], est-ce qu'il est plus probable d'observer une fréquence de 6 pieds enregistrée en une journée dans un petit ou dans un grand bureau de poste (avec un petit ou un grand échantillon) ? Dans un premier temps, M. n'avait simplement aucune idée de la réponse. Sur l'insistance de l'interviewer, elle proposa en hésitant une idée sur le fait que les plus grands ensembles de nombres qui ont de plus petites moyennes. La loi des grands nombres à nouveau n'apparaissait pas dans ce contexte.

Jo improvisa alors un changement de contexte. Est-ce que vous choisiriez plutôt un grand ou un petit échantillon d'hommes pour évaluer cette taille moyenne à l'université ? La réponse de M. fut immédiate et certaine : un plus grand échantillon serait « plus représentatif », « plus pertinent ». Il est vraisemblable que le contexte de l'échantillon évoquait un souvenir, ou une intuition du type « les grands échantillons sont meilleurs ». Ayant activé cette intuition, M. l'appliqua aisément au problème du bureau de poste.

La raison pour laquelle la « représentativité[4] » et la « justesse » étaient mobilisées dans la situation de l'échantillonnage à l'université et non dans la situation précédente peuvent sembler opaques. Mais M. n'avait mentionné ces idées intuitives dans aucun problème précédent ; une fois sollicitée en ce sens, elle réussit à utiliser ces idées productivement dans de nouveaux contextes. La combinaison mise en évidence ici de la **dépendance au contexte** et de la **productivité** est caractéristique des analyses en CpM. Certaines intuitions, même si elles ne sont pas souvent mobilisées, peuvent être utiles au sujet si elles sont portées à son attention.

L'exemple suivant est l'une des premières applications de la CpM en mathématiques (une dizaine d'années avant le travail de Wagner) ; et le dernier exemple est l'un des plus récents (une dizaine d'années après le travail de Wagner).

Comprendre les fractions

Jack Smith (1995) a réalisé une étude sur la compréhension par les élèves des nombres rationnels et de leur représentation sous forme de fractions, selon les principes essentiels de la CpM. Il commença par remettre en cause les travaux précédents car (a) ceux-ci utilisaient des dimensions a priori de la compétence mathématique et aussi (b) évaluaient systématiquement la compétence par le succès à des tests.

Il proposa de tester plutôt la compétence en examinant directement les stratégies utilisées par les élèves pour résoudre une variété de problèmes. En particulier, il réalisa une analyse exhaustive des stratégies utilisées par les élèves durant des interviews cliniques à propos d'un ensemble de problèmes sur les fractions qui était soigneusement choisi pour mettre en évidence des idées essentielles à la fois pour des questions de routine et pour de nouveaux aspects. Pour cette étude les élèves choisis représentaient une importante variété en termes d'âge, puisqu'ils étaient dans des classes de CM1, de 4^{e}, et une classe à double niveau de 1re et Terminale. Smith regarda plus particulièrement les stratégies utilisées par les élèves qui pouvaient être qualifiés « d'experts » pour ce sujet. Son intention était de décrire la nature de la compétence de haut niveau en examinant directement l'activité des élèves.

Les résultats étaient surprenants et typiques de ce que produit l'approche CpM. Les élèves experts ont utilisé un large panel de stratégies particulièrement adaptées au type précis de problème posé. Ils utilisaient parfois aussi les méthodes générales qu'ils avaient apprises (des méthodes comme la réduction au même dénominateur, ou la conversion sous forme décimale), mais ces méthodes générales n'étaient mobilisées presque uniquement lorsqu'aucune des autres méthodes ne fonctionnait. Un examen approfondi des manuels scolaires a mis en évidence que probablement très peu, si ce n'est aucune, de ces méthodes n'avait fait l'objet d'un enseignement. L'expertise des élèves semblait dépasser le fait de réussir à apprendre ce qui était enseigné.

En bref, l'expertise est : (a) « fragmentée » (**dépendante du contexte**) en ce qu'elle est hautement adaptée aux particularités de chaque problème ; (b) **riche**, composée d'une large variété de stratégies ; et (c) basée de manière significative sur l'invention, plutôt que sur l'instruction. Les deux derniers points suggèrent la **productivité**, l'utilisation de riches idées intuitives développées par les sujets eux-mêmes, et que cette richesse constitue leur expertise, contrairement à ce que l'enseignement traditionnel semble supposer.

Il est possible de résumer l'orientation de Smith afin de souligner les stratégies relevant typiquement des CpM, par opposition aux autres approches :

– éviter les vues *a priori* ou « rationnelles » de la compétence pour préférer les approches empiriques directes : observer ce que les élèves disent et font ;
– formuler les analyses en termes de systèmes de connaissance (une approche en termes **de systèmes complexes**) englobant des éléments et des relations entre ces éléments (par exemple, les stratégies ad hoc étaient souvent, mais pas toujours, mobilisées par les élèves de préférence à des modes de pensée plus généraux ayant été enseignés) ;
– découvrir que la compréhension des meilleurs élèves, et non pas seulement leurs idées intuitives, est riche (elle a de nombreux éléments), diverse, et implique beaucoup d'idées très spécifiées et adaptées au contexte. Donc cette compréhension est d'une certaine manière plus proche des idées pré-enseignement qu'on ne pouvait s'y attendre.

Smith n'a pas utilisé les modèles (p-prims, etc.) qui ont plus tard été connus comme constituant l'essentiel de la CpM. Cependant les spécificités de son orientation CpM se sont révélées productives. Je pense que c'est une leçon importante : indépendamment des modèles techniques et des détails, les principes et les orientations générales de la CpM peuvent éclairer l'apprentissage d'une manière qui n'est pas accessible aux autres approches. Pour débuter avec la CpM, ce peut être un bon choix de commencer à ce niveau, puis seulement dans un deuxième temps passer à des niveaux plus techniques lorsqu'il devient important d'être attentif aux détails, et lorsque l'apport de ces aspects techniques devient significatif.

Connaissance conceptuelle et connaissance procédurale dans la production de stratégies innovantes

La relation entre connaissance procédurale et connaissance conceptuelle est un thème ancien et important en didactique des mathématiques. Il y a un assentiment général sur le fait qu'il s'agit d'équilibrer ces deux modes de connaissance. Cependant, à un niveau plus fin, il s'agit de prendre en compte leurs relations plus en détail. Quelle connaissance conceptuelle est importante, quand et comment ? Il est bien connu que les élèves peuvent développer spontanément des stratégies innovantes (voir par exemple Kamii, 2000), et qu'ils le font effectivement (voir par exemple le travail de Smith ci-dessus). Quelle est l'importance de la connaissance conceptuelle dans l'innovation, quelle connaissance conceptuelle précise est importante, et quelle est la nature et l'origine de ces ressources ?

Mariana Levin (2012) a étudié le développement de stratégies pré-algébriques. Son étude impliquait un élève qui débutait par une méthode d'essais-erreurs pour résoudre des problèmes du type « La longueur d'un rectangle est trois fois sa largeur plus six. Si le périmètre est 148 pieds, trouver la longueur et la largeur. » Au fil de résolutions répétées de tels problèmes, l'élève a progressé sans recevoir d'enseignement, passant d'une méthode par essai-erreur à une méthode algorithmique que les mathématiciens identifieraient comme interpolation / extrapolation linéaire. L'un des aspects intéressants cette évolution était des « schèmes de co-variation » dont le développement semblait ancré (**productivité**) dans le champ de l'analyse (proportionnalité des accroissements) plus que dans un contenu enseigné en classe. Ce développement pouvait en effet être décrit selon six niveaux différents de schèmes de co-variation, évoluant progressivement d'une approche qualitative (l'intuition du « plus implique plus », mais dans une circonstance où celle-ci est productive) à des principes quantitatifs, précis, et « d'aspect mathématique ».

Afin de suivre de manière optimale et de généraliser le chemin suivi par cet élève, Levin a étendu le modèle des classes de coordination à ce qu'elle a appelé un modèle de « système de stratégie », ce qui illustre le caractère fécond et évolutif de la CpM (**amélioration continue**). Son modèle conservait l'attention aux catégories de perception (« voir », Fig. 1) et aux relations inférentielles (par exemple les schèmes de co-variation). Mais il apportait aussi des innovations théoriques : typiquement dans des systèmes de stratégie il y a plus qu'une classe de coordination. Certaines actions procédurales étaient soutenues de façon spécifique par des conceptions générales (inférences).

En plus de l'idée de co-variation, un ensemble de catégories intuitives, telles que « l'ordre de grandeur », le « résultat », la « cible », « l'erreur » sont fortement intervenues dans le développement de l'élève. Finalement, l'étude de Levin a montré le pouvoir surprenant des racines intuitives – celles qui n'avaient jamais été évoquées en classe – et a proposé un cadre systématique pour comprendre leur rôle dans le développement des systèmes procéduraux et conceptuels.

Autres exemples

En plus de ce qui a été présenté ci-dessus, je recommande quelques autres exemples de travaux se référant à la CpM qui pourront être utiles aux chercheurs en didactique des mathématiques de différentes spécialités pour comprendre la perspective CpM. Andrew Izsák's a développé un large ensemble de travaux utilisant la CpM et concernant par exemple les aires (Izsák, 2005), et l'initiation à l'algèbre (Izsák, 2000). De même Adi Adiredja (2014) a abordé le concept de limite avec la CpM. L'analyse menée par Adiredja est importante dans le contexte de cet article, car elle illustre comment on peut étudier l'apprentissage de ce concept de limite à un grain fin, en incluant la productivité des idées intuitives et non pas uniquement les difficultés qu'elles suscitent. Il est utile de comparer ce travail avec celui de Sierpinska (1990) et de Tall et Vinner (1981) sur le même thème.

THÈMES TRANSVERSAUX

Dans cette dernière partie, j'identifie la position et la contribution potentielle de la CpM à thèmes d'importance dans l'étude des apprentissages en mathématiques et en sciences.

Continuité et discontinuité de l'apprentissage

Je crois que l'un des problèmes centraux et toujours non résolu à propos de l'apprentissage concerne le fait de voir celui-ci comme un processus continu ou discontinu. En particulier, comment interprétons-nous des difficultés persistantes, qui affectent les élèves durant de longues périodes ? En didactique des sciences, les « conceptions fausses » ou les « théories intuitives » considèrent que les conceptions intuitives sont ancrées et improductives. Elles sont considérées comme inutiles, ou plutôt comme nuisibles, parce qu'elles sont tout simplement fausses (Smith, diSessa & Roschelle, 1993). En didactique des mathématiques, on trouve aussi beaucoup de discussions sur les conceptions fausses (par exemple à propos des représentations graphiques Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990) et sur la nature essentiellement problématique des règles intuitives comme « plus implique plus » (Stavy & Tirosh, 2000). Mais, plus souvent que dans le cas des sciences, les chercheurs mettent en cause des discontinuités dans la forme, plutôt que dans le seul contenu. Par exemple Sierpinska (1990) parle « d'obstacles épistémologiques » fondamentaux, des changements à grande échelle dans les « façons de connaître ». Vinner (1997) parlent de « pseudo-concepts » qui affectent l'apprentissage ; et certaines interprétations de la distinction entre conceptualisation comme processus et comme objet (Sfard, 1991) présente la forme « processus » comme inférieure aux conceptions du niveau des objets (pas nécessairement selon Sfard elle-même). Or, la transition entre mode de pensée processus et objet a toujours été intrinsèquement difficile. Tall (2002) souligne l'existence de discontinuités possibles dues à de profonds processus neurologiques (« le cerveau limbique », niveau sensori-moteur). De manière semblable, (comme anticipé dans la note 4), Kahnemen et Tversky considèrent que les difficultés d'apprentissage en probabilités et statistiques reposent sur ce qui est appelé les « processus duaux » dans les théories de la pensée (voir Glöckner & Witteman, 2010 pour une synthèse critique). La pensée instinctive (intuitive) doit être remplacée par un mode de pensée radicalement différent, basé sur le suivi de règles conscientes et explicites.

Inversement, des chercheurs en didactique des mathématiques ont parfois mis en avant la productivité des idées intuitives (par exemple Fischbein, 1987), et plus particulièrement les chercheurs constructivistes se sont intéressés à la continuité entre les idées expertes et naïves (Moss & Case, 1999 est de mon point de vue un exemple remarquable parmi bien d'autres). Cependant, très peu d'études s'approchent du degré de détail et de fiabilité en termes d'analyses à l'appui des éléments avancés sur les systèmes de connaissances et les processus de transformation que l'on trouve dans les meilleures analyses CpM.

Ces problèmes sont trop complexes et non résolus pour être discutés ici, mais la CpM offre un point de vue et des résultats qui peuvent soutenir une vision plus continue de l'apprentissage, et aller contre les visions discontinues. Par exemple, les experts comme les novices utilisent des idées intuitives, même si leur connaissance diffère à de plus larges échelles d'organisation. L'organisation progressive et la construction d'un nouveau système ne sont pas par essence discontinues : il n'y a pas nécessairement de fossé, même dans un long chemin. C'est simplement que, avant et après, les choses semblent sensiblement différentes. Une difficulté résistante dans l'apprentissage peut signifier simplement (a) une inadéquation entre nos attentes d'enseignants concernant la durée de l'apprentissage et les réalités de la transformation, et (b) un manque de compréhension des détails des processus pertinents. La CpM offre des modèles inhabituels mais détaillés et maniables de la connaissance intuitive à une échelle fine, qui peuvent éclairer l'incorporation de cette connaissance dans l'expertise, et des méthodologies capables de découvrir et de décrire finement des éléments particuliers. Ces problèmes sont traités plus en détail dans Gueudet *et al.* (2016).

Comprendre les représentations

Pour conclure, je souhaite mentionner deux études de type CpM concernant la nature générale de la compétence représentationnelle, une compétence centrale en mathématiques, et les rôles des ressources intuitives dans l'apprentissage des représentations.

Bruce Sherin (2001) a entrepris une étude détaillée de la manière dont les élèves utilisent différents systèmes de représentation et apprennent avec ceux-ci en physique (algèbre *vs* logiciel). L'un des résultats essentiels établis par Sherin est que certaines connaissances de type p-prims réalisent une médiation entre les structures du monde réel (« causalité ») et leur représentation dans un modèle. Par exemple, l'idée « plus il y a de X, plus il y a de Y » (par exemple plus d'accélération signifie une force plus grande) se traduit dans le modèle par « $Y = kX$ » (par exemple $F = ma$). Le travail de Sherin peut être particulièrement intéressant pour des didacticiens des mathématiques qui s'intéressent à la manière dont les représentations prennent sens dans le raisonnement sur des situations issues du monde réel (modélisation), comment de telles situations peuvent amorcer la compréhension de structures mathématiques, et le rôle précis joué par la connaissance intuitive dans ces processus. Ce travail prolonge un travail précédemment mené par Vergnaud (1983), mais en adoptant une approche CpM.

Finalement, diSessa, Hammer, Sherin, et Kolpakowsi (1991) ont étudié les ressources « naïves » mobilisées par de jeunes élèves pour raisonner à propos des représentations. À l'opposé des travaux sur les conceptions fausses, nous avons mis au jour une expertise très significative concernant les représentations. Cependant cette expertise est différente de ce qui est normalement attendu en classe. Elle concerne plus l'aspect productif des représentations (par exemple, leur conception et des avis sur leur pertinence) et moins les détails des représentations enseignées. Ce répertoire de compétence intuitive est typiquement ignoré dans l'enseignement scolaire ; cette observation est partagée avec quelques didacticiens des mathématiques (comme Kamii, 2000).

NOTES

1. L'expression originale est "*Knowledge in Pieces*" (KiP). Cette expression pourrait être littéralement traduite par « connaissance en pièces », mais cette expression littérale ne rendrait pas le sens d'une connaissance composée de petites parties. L'expression « connaissances en miettes » a été retenue dans (Lautrey, Rémi, Sander & Tiberghien, 2008). Les échanges avec Andrea diSessa ont conduit ici à lui préférer l'expression « connaissance par morceaux », car dénuée de connotations négatives.

2. J'indique plus loin certaines pistes pour des comparaisons plus détaillées selon le sujet spécifique. Le conseil le plus pertinent que je peux donner au lecteur souhaitant s'engager dans des comparaisons est de se demander, (1) si les travaux sur le même sujet identifient en détail les idées précurseurs (peu le font), en tenant compte de leur caractère à la fois productif et problématique ; et (2) si l'analyse des données comporte une investigation approfondie et une explication des raisonnements des élèves dans l'action, associée à des comparaisons à long terme. La présentation qui suit de thèmes particuliers des CpM développe ces aspects.

3. Note de la traductrice : 5 pieds et 9 pouces correspondent à 1,75 m et 6 pieds à 1,83 m (12 pouces valent un pied).

4. Kahneman et Tversky (1972) proposent un traitement classique des « fausses conceptions » en statistiques, incluant la « représentativité ». Cependant, leur cadre théorique est très différent de la CpM. La productivité en particulier n'est pas prise en compte, alors que nous avons noté son importance pour l'idée de représentativité dans le cas de M. Ces auteurs affirment que, pour effectuer un apprentissage, il s'agit d'exclure les intuitions, et de suivre les règles formelles. Pratt et Noss (2002) proposent en revanche une approche compatible avec la CpM des intuitions statistiques.

RÉFÉRENCES

Adiredja, A. (2014). *Leveraging students' intuitive knowledge about the formal definition of a limit* (Unpublished doctoral dissertation). University of California, Berkeley, CA.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, *18*(1), 32-42.

diSessa, A. A. (1996). What do "just plain folk" know about physics? In D. R. Olson & N. Torrance (Eds.), *The handbook of education and human development: New models of learning, teaching, and schooling* (p. 709-730). Oxford, UK: Blackwell Publishers, Ltd.

diSessa, A. A. (2004). Contextuality and coordination in conceptual change. In E. Redish & M. Vicentini (Eds.), *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi": Research on physics education* (p. 137-156). Amsterdam: ISO Press/Italian Physics Society.

diSessa, A. A. (2014). A history of conceptual change research: Threads and fault lines. In K. Sawyer (Ed.), *Cambridge handbook of the learning sciences* (2nd ed., p. 88-108). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

diSessa, A. A. (2017). Conceptual change in a microcosm: Comparative analysis of a learning event. *Human Development*, *60*(1), 1-37.

diSessa, A. A., & Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *Journal of the Learning Sci*ences, *13*(1), 77-103.

diSessa, A. A., Elby, A., & Hammer, D. (2002). J's epistemological stance and strategies. In G. Sinatra & P. Pintrich (Eds.), *Intentional conceptual change* (p. 237-290). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

diSessa, A. A., Hammer, D., Sherin, B., & Kolpakowski, T. (1991). Inventing graphing: Meta-representational expertise in children. *Journal of Mathematical Behavior*, *10*(2), 117-160.

diSessa, A. A., Sherin, B., & Levin, M. (2016). Knowledge analysis: An introduction. In A. diSessa, M. Levin & N. Brown (Eds.), *Knowledge and interaction: A synthetic agenda for the learning sciences* (p. 30-71). New York, NY: Routledge.

Dufresne, R., Mestre, J., Thaden-Koch, T., Gerace, W., & Leonard, W. (2005). When transfer fails: Effect of knowledge, expectations and observations on transfer in physics. In J. Mestre (Ed.), *Transfer of learning: Research and perspectives* (p. 155-215). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dortrecht, Netherlands: Kluwer Academic.

Gueudet, G., Bosch, M., diSessa, A., Kwon, O. N., & Verschaffel, L. (2016). *Transitions in mathematics education*. In G. Kaiser (Series Ed.), ICME-13 Topical Surveys. Switzerland: Springer International.

Izsák, A. (2000). Inscribing the winch: Mechanisms by which students develop knowledge structures for representing the physical world with algebra. *Journal of the Learning Sciences*, *9*(1), 31-74.

Izsák, A. (2005). "You have to count the squares": Applying Knowledge in Pieces to learning rectangular area. *Journal of the Learning Sciences*, *14*(3), 361-403.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, *3*, 430-454.

Kamii, C., with Housman, L. (2000). *Young children reinvent arithmetic* (2nd ed.). New York, NY: Teachers College Press.

Lautrey, J, Rémi, S., Sander, E, & Tiberghien, A. (2008). *Les connaissances naïves*. Paris: Armand Colin.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, *60*(1), 1-64.

Levin (Campbell), M. E. (2012). *Modeling the co-development of strategic and conceptual knowledge during mathematical problem solving* (Unpublished doctoral dissertation). University of California, Berkeley, CA.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 122-147.

Parnafes, O., & diSessa, A. A. (2013). Microgenetic learning analysis: A methodology for studying knowledge in transition. *Human Development*, *56*(5), 5-37.

Philip, T. (2011). A "Knowledge in Pieces" approach to studying ideological change in teachers' reasoning about race, racism and racial justice. *Cognition and Instruction*, *11*(3), 297-329.

Pratt, D., & Noss, R. (2002). The microevolution of mathematical knowledge: The case of randomness. *The Journal of the Learning Sciences*, *11*(4), 453-488.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics, *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24-36.

Sherin, B. (2001). A comparison of programming languages and algebraic notation as expressive languages for physics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(1), 1-61.

Smith, J. P. (1995). Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction*, *13*(1), 3-50.

Smith, J. P., diSessa, A. A., & Roschelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *Journal of the Learning Sciences*, *3*(2), 115-163.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis-)understand science and mathematics*. New York, NY: Teachers College Press.

Tall, D. (2002). Continuities and discontinuities in long-term learning schemas. In D. Tall & M. Thomas (Eds.), *Intelligence, learning and understanding: A tribute to Richard Skemp* (p. 151-177). Flaxton QLD, Australia: Post Pressed.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (p. 127-174). New York, NY: Academic Press.

Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(2), 97-129.

Vosniadou, S. (Ed.) (2013). *International handbook of research on conceptual change* (2nd ed.). New York, NY: Routledge.

Wagner, J. (2006). Transfer in pieces. *Cognition and Instruction*, *24*(1), 1-71.