

# **INDICI DI VOLATILITÀ**

## *VOLATILITY INDEXES*

**Martina Nardon - Paolo Pianca**

*Dipartimento di Economia, Centro di Economia Quantitativa  
Università Ca' Foscari Venezia*

*Department of Economics, Centre for Quantitative Economics  
University Ca' Foscari of Venice*

**mnardon@unive.it – pianca@unive.it**

## SOMMARIO

Gli indici di volatilità sono strumenti finanziari innovativi che hanno come scopo principale la misurazione della volatilità implicita dei mercati a breve e medio termine. Il più noto e utilizzato è l'indice americano VIX, che viene divulgato in tempo reale dal CBOE e stima la volatilità a 30 giorni del famoso indice azionario S&P 500. Per il suo calcolo si considerano solo i prezzi di mercato di opzioni call e put out-of-the-money. Il valore dell'indice, pertanto, non solo risulta indipendente da ogni tipo di modello che può essere assunto per descrivere la dinamica dell'attività sottostante, ma consente anche di isolare la volatilità attesa dagli altri fattori che influenzano il prezzo delle opzioni quali i dividendi, i tassi di interesse e il tempo che manca alla scadenza. Il calcolo del VIX è basato su un'approssimazione discreta del valore teorico dei contratti di tipo *variance swap* e, in quanto tale, è inficiato da diversi errori che comportano delle implicazioni negative su numerosi strumenti finanziari negoziati sia sui mercati ufficiali che sui mercati OTC.

**PAROLE CHIAVE: INDICI DI VOLATILITÀ, VOLATILITÀ IMPLICITE, ERRORI DI APPROSSIMAZIONE, TITOLI DERIVATI SUL VIX.**

## ABSTRACT

Volatility indexes are innovative financial instruments whose main purpose is measuring implied volatility of the markets in the short and medium term. The best known and used one is the American VIX, which is published in real time by the CBOE and estimates the 30 days volatility of the famous S&P 500 stock index. For its calculation, only the market prices of out-of-the-money call and put options are considered. The value of the index, therefore, not only is independent of any type of model that can be used to describe the dynamics of the underlying asset, but also it allows to isolate the volatility effect from other factors influencing the price of options, such as dividends, interest rates and the time to maturity. The VIX calculation is based on a discrete approximation of the theoretical value of the variance swap contracts; such an approximation is affected by several errors that implies negative effects on several financial instruments traded both on official and OTC markets.

**KEYWORDS: VOLATILITY INDEXES, IMPLIED VOLATILITIES, APPROXIMATION ERRORS, DERIVATIVES ON VIX.**

## 1. Introduzione

Le volatilità implicite calcolate con il modello di Black e Scholes sono comunemente utilizzate per predire la volatilità futura, ma in numerosi contributi scientifici si sono evidenziate alcune distorsioni associate a tale pratica, rilevando l'inconsistenza di prevedere i cambiamenti di volatilità facendo leva su un modello basato sull'ipotesi di una volatilità costante. Si è pensato, quindi, di stimare la volatilità implicita utilizzando procedure alternative, quali i modelli a volatilità stocastica, ma una soluzione migliore si ottiene ricorrendo a tecniche che non sono collegate con un modello specifico (*model free*) e che, basandosi esclusivamente sulla conoscenza dei prezzi di mercato, non soffrono delle incongruenze degli approcci tradizionali.

Questo cambiamento nel calcolo della volatilità implicita è stato recepito anche dagli organismi preposti al controllo delle negoziazioni che avvengono sui mercati ufficiali, dando luogo alla costruzione di indici di volatilità calcolati esclusivamente in base ai prezzi di mercato di opzioni *out-of-the-money*, emesse su un indice azionario che sintetizza l'andamento di un particolare mercato.

A livello accademico, il calcolo di un indice di volatilità fu proposto per la prima volta da Gastineau (1977) e quindi ripreso da Cox e Rubinstein (1985), Brenner e Galai (1989) e Whaley (1993). Gastineau (1977) propone l'uso di una media di volatilità implicite calcolate dai prezzi di opzioni *at-the-money* emesse su 14 titoli azionari con scadenze comprese fra i tre e i sei mesi, combinando tale media con una misura della volatilità storica del mercato azionario. Cox e Rubinstein (1985) suggeriscono un miglioramento della procedura di calcolo di Gastineau, considerando più opzioni call su ciascun titolo e introducendo uno schema di pesi per le volatilità che rende l'indice *in-the-money* e il tempo alla scadenza costante. Brenner e Galai (1989) propongono l'introduzione di un indice di volatilità che vale per i mercati dei titoli azionari, obbligazionari e dei tassi di cambio. Tale indice, che gli autori chiamano indice *Sigma*, è una mistura basata sulla volatilità storica, sulle volatilità implicite di opzioni o su una combinazione pesata di volatilità storiche e implicite. La metodologia

di calcolo proposta da Whaley nel 1993 viene adottata nello stesso anno dal Chicago Board Options Exchange (CBOE) con il nome di indice VIX (*volatility index*) e verrà brevemente illustrata nel prossimo paragrafo.

Ben presto l'indice di volatilità VIX diviene il benchmark per la misurazione della volatilità del mercato azionario americano. Citato in centinaia di articoli scientifici e divulgativi, l'indice VIX misura le aspettative di mercato sulla volatilità a breve termine e, in quanto tale, viene interpretato come una ricetta magica per prevedere l'andamento delle Borse. Negli anni successivi al lancio del VIX, sia accademici che *practitioner* hanno mutato il modo di intendere la volatilità e questi cambiamenti hanno portato alla costruzione di una nuova metodologia per il calcolo dell'indice di volatilità implicita. La nuova procedura di calcolo prescinde da ogni modello di pricing, considera un ampio intervallo di prezzi di esercizio, si basa su una media pesata dei prezzi di opzioni call e put *out-of-the-money* e assume come indice di riferimento lo S&P 500 .

Il VIX è quotato in termini di punti percentuali e traduce, su base annuale, il movimento atteso dell'indice S&P 500 nei prossimi 30 giorni.

Un valore basso dell'indice sta a significare che il mercato non ha "paura", ma come è ben risaputo "quanto tutto tace bisogna cominciare a preoccuparsi". All'aumentare dei valori del VIX aumenta la sensazione di cambiamenti futuri nelle quotazioni di mercato, senza peraltro poter stabilire a priori se si tratta di una variazione positiva o negativa degli indici azionari. Tuttavia, sui mercati si osserva che l'aumento di volatilità a seguito di variazioni negative delle quotazioni è maggiore rispetto al caso di una variazione di prezzo positiva.

La tabella 1 riporta un tentativo di classificare i vari livelli di ansietà collegati a intervalli di valori dell'indice VIX.

Al momento del suo debutto, il calcolo dell'indice era basato sulla volatilità implicita (calcolata utilizzando il modello di Black e Scholes) di opzioni (americane) emesse sull'indice azionario S&P 100 (OEX). Dal 22 settembre 2003, il CBOE ha apportato numerose e sostanziali modifiche al calcolo del VIX. Un cambiamento chiave riguarda il fatto

che il nuovo indice di volatilità implicita VIX non si basa più su un modello teorico, ma viene calcolato direttamente dai prezzi delle opzioni mediante una formula che approssima il concetto di varianza futura sviluppato da Demeterfi *et al.* (1999). La nuova procedura di calcolo prende spunto da un pionieristico contributo di Breeden e Litzenberger (1978) i quali mostrano come dai prezzi delle opzioni si possa estrarre l'intera distribuzione neutrale al rischio dei prezzi del bene sottostante.

**Tabella 1: Livello di ansietà al variare del VIX**

---

5-10	estremo compiacimento	35-40	ansietà molto elevata
10-15	alto compiacimento	40-45	ansietà altissima
15-20	moderato compiacimento	45-50	panico moderato
25-30	basso compiacimento	50-55	panico
30-35	ansietà moderata	> 55	panico intenso

---

Un altro interessante cambiamento nel calcolo del “nuovo” VIX riguarda l'aver sostituito la volatilità implicita di opzioni (americane) *at-the-money* sull'indice OEX con un insieme di prezzi delle opzioni (europee) emesse sull'indice S&P 500 (SPX); questo cambiamento è stato adottato in quanto l'indice SPX è diventato l'indice di riferimento più importante sia per gli investitori istituzionali che per i mercati dei titoli derivati.

Il VIX è valutato in termini percentuali ed è noto anche come “indice della paura” dato che, nei momenti di indecisione e di caduta dei prezzi di mercato, l'indice tende ad assumere valori molto elevati,

mentre nei periodi di calma si mantiene attorno a valori piuttosto bassi.

La procedura adottata dal CBOE per il calcolo del VIX è inficiata da un insieme di errori di approssimazione che creano non pochi problemi sia in riferimento alle transazioni OTC (*over-the-counter*) dei contratti di tipo *variance swap*, sia in riferimento alle negoziazioni di contratti derivati sull'indice VIX, recentemente introdotti dal CBOE.

Attualmente, in molti mercati evoluti sono presenti uno o più indici di volatilità i cui valori vengono resi disponibili agli operatori con lo scopo di offrire delle precise indicazioni sull'evoluzione futura delle quotazioni dei titoli finanziari. Recentemente anche il mercato italiano si è dotato di un indice di volatilità (IVI) il cui valore viene comunicato con cadenza giornaliera al termine delle contrattazioni e che ha l'obiettivo di offrire agli investitori informazioni sul *sentiment* del mercato azionario italiano a 30, 60, 90 e 180 giorni.

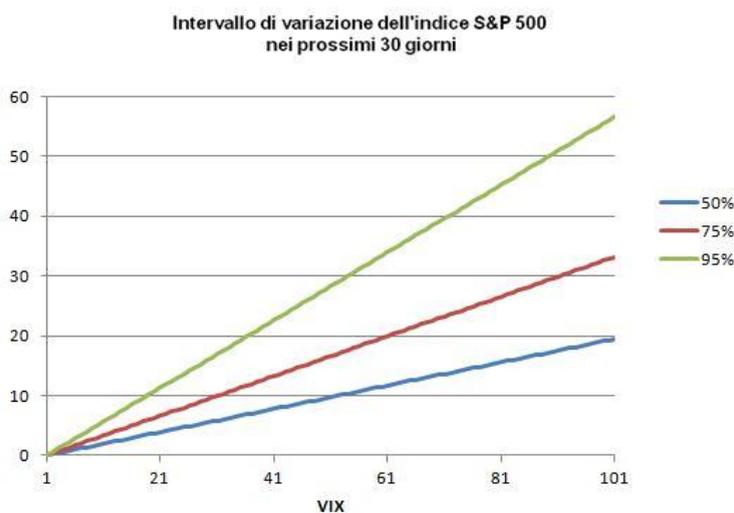
La struttura di questo contributo è la seguente. Il paragrafo 2 descrive le procedure analitiche adottate dal CBOE per il calcolo del VIX, presentando sia la vecchia tecnica basata sulla volatilità implicita sia la nuova metodologia che considera esclusivamente i prezzi di mercato di opzioni *out-of-the-money* sull'indice S&P 500. Nei paragrafi 3 e 4 si presentano, rispettivamente, uno schema di calcolo diretto di tutte le grandezze che risultano coinvolte con il computo del VIX e alcuni approcci per la valutazione dei titoli derivati che hanno come bene sottostante l'indice di volatilità VIX. Il paragrafo 5 illustra i più importanti indici di volatilità presenti nei mercati azionari evoluti. Il paragrafo 6 analizza alcune critiche mosse nei riguardi della validità del VIX. Infine, si riportano alcune considerazioni conclusive su correttezza, impiego, utilità, pregi e limitazioni degli indici di volatilità.

## **2. L'indice di volatilità VIX**

A differenza di un indice azionario il cui valore ha un significato che dipende essenzialmente dalla sua storia, un indice di volatilità ha una semplice interpretazione probabilistica che riguarda l'intervallo atteso

del tasso di variazione del prezzo dell'*asset* (ad esempio, l'indice di Borsa S&P 500) cui l'indice si riferisce. La figura 1 fornisce una tecnica<sup>1</sup> "pronta e rapida" per interpretare il livello dell'indice VIX. Per capire come poter utilizzare la figura supponiamo che il valore corrente dell'indice sia 60.

Consideriamo la retta etichettata "50%"; in corrispondenza del valore 60 tale retta vale circa l'11.50%. Questo valore si può interpretare affermando che, se il valore del VIX è 60 allora nei prossimi 30 giorni con probabilità 1/2 il tasso di variazione dell'indice S&P 500 sarà maggiore o minore dell'11.50%.



**Figura 1 - Ampiezza attesa della variazione dell'*asset* (indice S&P 500) nei prossimi 30 giorni condizionata al livello corrente dell'indice VIX**

<sup>1</sup>La tecnica su cui si fonda la costruzione della figura 1 si basa sulle seguenti due ipotesi: il tasso di variazione dell'indice S&P 500 si distribuisce in modo normale e la sua media nei prossimi 30 giorni è nulla. Entrambe le ipotesi sono facilmente accettabili.

Le rette etichettate 75% e 95% presentano probabilità diverse per lo stesso valore dell'indice; con livello dell'indice VIX pari a 60, la retta "75%" ("95%") indica che si ha una probabilità pari a 0.75 (rispettivamente 0.95) che il tasso di variazione dell'indice S&P 500 nei prossimi 30 giorni stia nell'intervallo [-0.20, 0.20] ([-0.34, 0.34]). Viceversa, la probabilità che nei prossimi 30 giorni il tasso di variazione dell'indice superi il 20% (il 34%) è del 25% (del 5%).

Le rette rappresentate in figura sono state costruite in base alle seguenti relazioni:

$$\text{Tasso di variazione atteso al 50\%} = 0.1947 * \text{VIX},$$

$$\text{Tasso di variazione atteso al 75\%} = 0.3321 * \text{VIX},$$

$$\text{Tasso di variazione atteso al 95\%} = 0.5658 * \text{VIX}.$$

Queste relazioni derivano dalle proprietà della distribuzione normale standardizzata. Un numero casuale estratto da tale distribuzione ha probabilità del 50% di distare da zero per meno di 0.6745 volte lo scarto quadratico medio; ha probabilità del 75% di distare da zero per meno di 1.1504 volte lo scarto quadratico medio e con una probabilità del 95% di distare da zero per meno di 1.96 volte lo scarto quadratico medio.

Dato che il VIX rappresenta uno scarto quadratico medio su base annua, per trasformare i valori in volatilità mensili si deve dividere ciascuno dei precedenti coefficienti per la radice quadrata di 12 (ad esempio,  $0.6745/\sqrt{12} = 0.1947$ ).

Con un valore del VIX pari a 60, i valori esatti degli scostamenti dei tassi di variazione attesi sono 11.68%, 19.92% e 33.95%.

## 2.1 Il vecchio indice di volatilità VXO

La prima divulgazione di un indice di volatilità si basa su un contributo scientifico di Whaley del 1993 e utilizza quotazioni di mercato di opzioni sull'indice S&P 100 per il calcolo di una media delle volatilità implicite ottenute con la formula di Black e Scholes. Le volatilità

implicite si riferiscono a otto opzioni *at-the-money* e alle due scadenze mensili più vicine.

La serie di ciascuna opzione con scadenza più vicina è definita come la serie che ha il minor tempo alla scadenza e che ha almeno 8 giorni di calendario prima della scadenza (il limite di 8 giorni prima della scadenza è imposto in quanto opzioni con durata più breve presentano una volatilità piuttosto elevata; tali opzioni, inoltre, possono presentare delle distorsioni nei prezzi dovute alla scarsa liquidità). Le serie con la seconda scadenza più vicina sono i contratti che scadono il mese successivo alla serie più vicina. Per ciascuna delle due scadenze vengono calcolate le volatilità implicite di 4 opzioni, due call e due put, con prezzi di esercizio che sono a cavallo del valore corrente dell'indice.

L'indice di volatilità VXO è tuttora calcolato dal CBOE e reso disponibile agli operatori; la serie storica dei valori, reperibile sul sito internet del CBOE raccoglie tutte le quotazioni a iniziare dall'anno 1986.

## **2.2 Il nuovo indice di volatilità VIX**

L'obiettivo fondamentale del nuovo indice VIX rimane invariato e cioè stimare la volatilità del mercato a trenta giorni.

Ci sono, comunque, delle importanti differenze. Mentre il vecchio indice, rietichettato con la sigla VXO, si basa sul calcolo della volatilità implicita (ottenuta dal modello di Black e Scholes) di opzioni sull'indice S&P 100 (*ticker* OEX), il nuovo indice di volatilità, attivato dal CBOE dal 22 settembre 2003, è una media pesata dei prezzi di mercato di opzioni *out-of-the-money* emesse sull'indice S&P 500 (*ticker* SPX).

Le motivazioni per la scelta dell'indice S&P 500 sono dovute al fatto che tale indice è diventato negli ultimi anni il benchmark non solo per il mercato azionario ma anche per il mercato dei titoli derivati. All'epoca  $t$ , la formula utilizzata dal CBOE per il calcolo della varianza implicita è

$$\sigma_{VIX}^2 = \frac{2}{T-t} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta K_i}{K_i^2} Q_t(K_i, T) e^{r_t(T-t)} - \frac{1}{T-t} \left[ \frac{F_t}{K_0} - 1 \right]^2, \quad (1)$$

dove:

$T$  è l'epoca di scadenza comune a tutte le opzioni utilizzate per il calcolo dell'indice, e  $T - t$  il tempo mancante alla scadenza;

$F_t$  è il valore *forward* dell'indice S&P 500 all'epoca  $t$  calcolato in base ai prezzi delle opzioni con la stessa scadenza;

$K_i$  è il prezzo d'esercizio dell' $i$ -esima opzione *out-of-the-money* utilizzata nel calcolo: una call se  $K_i < F_t$  e una put se  $K_i > F_t$ ;

$Q_t(K_i, T)$  indica all'epoca  $t$  la media dei prezzi disponibili *bid* e *ask* dell'opzione *out-of-the-money* con prezzo d'esercizio  $K_i$ ;

$K_0$  è il primo prezzo di esercizio minore o uguale al livello *forward* dell'indice  $F_t$  ( $K_0 \leq F_t$ );

$r_t$  è il tasso istantaneo di interesse (all'epoca  $t$ ) per titoli non rischiosi con scadenza all'epoca  $T$ ,

$\Delta K_i$  indica la semisomma di due prezzi d'esercizio a cavallo del prezzo d'esercizio  $K_i$ .

Si osservi che, nel caso del prezzo di esercizio minimo,  $\Delta K_i$  è la differenza tra tale prezzo e quello immediatamente più elevato e che nel caso del prezzo di esercizio massimo,  $\Delta K_i$  è la differenza tra tale prezzo e quello immediatamente inferiore.

Una volta ottenuta una stima della varianza implicita, l'indice VIX viene calcolato come la radice quadrata di tale varianza implicita moltiplicata per 100.

La relazione (1) usa solamente opzioni *out-of-the-money* con l'eccezione del prezzo  $K_0$  in corrispondenza del quale l'opzione call risulta *in-the-money*.

L'ultimo termine della relazione (1) rappresenta l'aggiustamento necessario per convertire, mediante la relazione di parità, questa opzione call *in-the-money* in un'opzione put *out-of-the-money*.

Il calcolo comprende tutte le opzioni call negoziate con prezzo d'esercizio maggiore di  $F_t$  e tutte le put con prezzo d'esercizio minore di  $F_t$ .

Per essere incluse le opzioni debbono avere un prezzo *bid* strettamente positivo. Inoltre, per la determinazione del livello forward dell'indice  $F_t$ , il CBOE sceglie la coppia di opzioni call e put con i prezzi  $c_t$  e  $p_t$  la cui differenza assoluta è minima. Quindi il prezzo forward è determinato attraverso la relazione di parità

$$F_t = e^{r_t(T-t)}[c_t(K, T) - p_t(K, T)] + K. \quad (2)$$

Il CBOE usa la relazione (1) per calcolare  $\sigma^2$  con le due scadenze più vicine  $T_1$  e  $T_2$ , fra tutte le opzioni negoziate. Inoltre, la procedura adottata dal CBOE prevede di interpolare tra questi due valori per ottenere una stima con 30 giorni alla scadenza.

L'indice VIX rappresenta una volatilità su base annua espressa in termini percentuali di questo valore a 30 giorni, usando la convenzione *giorni effettivi/365* per il calcolo dei giorni:

$$VIX_t = 100 * \sqrt{\frac{365}{30} \left[ T_1 \sigma^2(t, T_1) \frac{NC_2 - 30}{NC_2 - NC_1} + T_2 \sigma^2(t, T_2) \frac{30 - NC_1}{NC_2 - NC_1} \right]}. \quad (3)$$

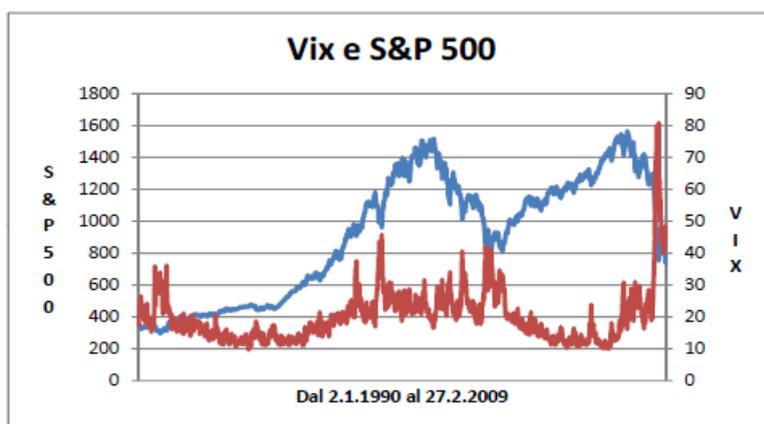
Dove  $NC_1$  ed  $NC_2$  rappresentano il numero di giorni di calendario che mancano alle due scadenze.

Anche nel caso dell'indice VIX, quando le opzioni in esame hanno scadenza minore o uguale a otto giorni, il CBOE passa a considerare contratti di opzione che si riferiscono al secondo e al terzo mese, in modo da minimizzare le anomalie nei prezzi che tipicamente si possono presentare quando si avvicina l'epoca di scadenza.

Le quotazioni dell'indice VIX vengono rese note durante tutto il periodo di negoziazione e sono disponibili ad iniziare dal 1990; il valore massimo (*intraday*) toccato dall'indice VIX è stato di 89.53 punti, valore raggiunto in data 24 ottobre 2008, in concomitanza con il

momento forse più difficile della pesante crisi finanziaria che ha colpito recentemente la maggior parte dei mercati azionari evoluti. L'andamento dell'indice VIX e dell'indice S&P 500 viene illustrato ricorrendo all'aiuto di alcuni grafici.

Nella figura 2 viene rappresentato l'andamento dell'indice VIX e dell'indice S&P 500 relativamente al periodo gennaio 1990-febbraio 2009.



**Figura 2 - Andamento dell'indice VIX e dell'indice S&P 500**

In primo luogo, si può notare che il grafico dell'indice VIX è molto più "frastagliato" e quindi la volatilità della volatilità dell'indice S&P 500 è maggiore della volatilità dell'indice stesso. Inoltre, si nota che in certi periodi i due indici tendono a muoversi in direzione opposta. A tal proposito si vedano le due figure successive che si riferiscono, rispettivamente, all'anno 2001 caratterizzato da un crollo delle quotazioni in seguito all'attentato delle Torri Gemelle e all'anno 2008 caratterizzato da una costante diminuzione dei corsi dovuta alla pesante crisi economico-finanziaria mondiale.

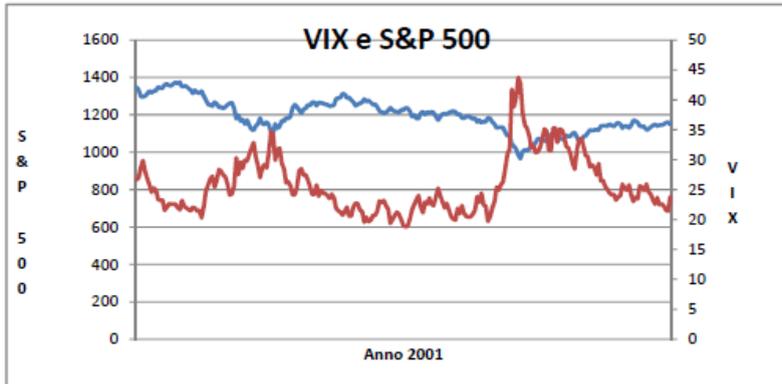


Figura 3 - Andamento dell'indice VIX e dell'indice S&P 500

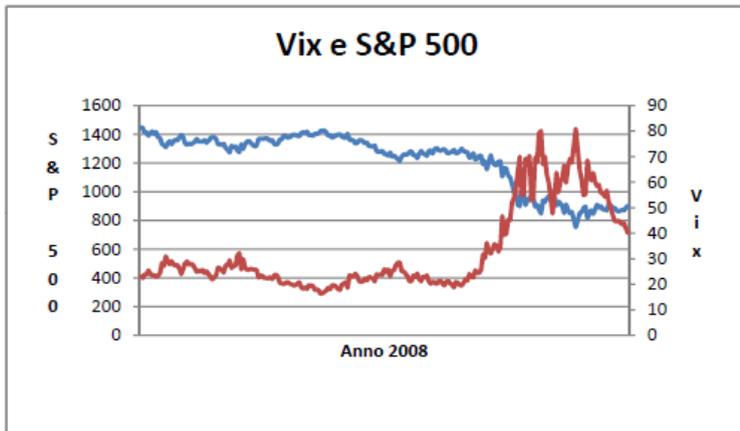


Figura 4 - Andamento dell'indice VIX e dell'indice S&P 500

La correlazione inversa non è ovviamente perfetta: ad esempio negli anni 1996 e 1997 tutti e due gli indici hanno evidenziato un andamento crescente.

Un'interessante caratteristica dell'indice VIX è legata a una sorta di "effetto weekend" che si manifesta in un livello meno elevato dell'indice al trascorrere dei giorni della settimana. In media il livello dell'indice registrato il venerdì risulta di 0.5 punti inferiore al livello del lunedì.

### **3. Procedura di calcolo dell'indice VIX**

L'algoritmo utilizzato dal CBOE per il calcolo dell'indice di volatilità implicita VIX si basa sulla formula (1) e può essere schematizzato nei seguenti otto passi.

#### *Passo 1: Raccolta delle informazioni utili*

Le informazioni necessarie per il calcolo dell'indice VIX sono le quotazioni *bid-ask* di tutte le opzioni *out-of-the-money* call e put sull'indice S&P 500 che si riferiscono alla scadenza più vicina e a quella immediatamente successiva. Per ciascuna delle due scadenze considerate viene calcolato il tasso di interesse "non rischioso" e per ciascun prezzo di esercizio si calcola la differenza tra la quotazione media dei prezzi *bid* e *ask* della call e della put.

#### *Passo 2: Calcolo del tempo alla scadenza in minuti e in anni*

Il tempo alla scadenza nella formula (3) viene calcolato con grande accuratezza e inizialmente misurato in minuti. Come prima cosa si calcola il numero di minuti che intercorrono fra l'epoca corrente e la mezzanotte del giorno corrente. Quindi si calcolano i minuti fra la mezzanotte del giorno corrente e la mezzanotte del giorno antecedente la scadenza dell'opzione. Infine, si calcolano i minuti fra la mezzanotte del giorno prima della scadenza e il momento del giorno di scadenza in cui avviene il regolamento in contanti del contratto. Quest'ultima quantità risulta ovviamente costante dato che il

regolamento in contanti avviene alle 8.30 del giorno di scadenza e risulta di 510 minuti.

La prima e la seconda componente dipendono rispettivamente dal momento del giorno in cui si effettua la valutazione e dal numero di giorni che mancano alla scadenza.

Il valore su base annua si ottiene immediatamente ricordando che in 365 giorni ci sono 525600 minuti.

*Passo 3: Calcolo del fattore di montante per ciascuna scadenza*

Il fattore di montante è definito come il valore che una unità monetaria (1 dollaro nel caso del VIX) accumulerà alla data di scadenza dell'opzione, qualora venga investito al tasso di interesse privo di rischio che può essere stimato considerando titoli di Stato a breve scadenza.

*Passo 4: Identificazione dell'opzione at-the-money per ciascuna scadenza*

Per identificare le opzioni che per ciascuna scadenza intervengono nel computo dell'indice, si deve come prima cosa calcolare il prezzo medio *bid-ask* delle opzioni call e put relativamente alla prima e alla seconda scadenza. In corrispondenza di ciascun prezzo d'esercizio per il quale siano disponibili prezzi call e put, si calcola la differenza assoluta delle quotazioni.

Si osservi che le opzioni call e put con prezzi *bid* uguali a zero non vengono presi in considerazione. Il prezzo d'esercizio con la differenza assoluta più bassa individua l'opzione *at-the-money*.

*Passo 5: Calcolo per ciascuna scadenza del livello forward dell'indice*

Una volta identificata l'opzione *at-the-money*, si può calcolare il livello implicito *forward* dell'indice utilizzando la versione *forward* della relazione di parità valida per le opzioni call e put europee:

$$F_i = K_i + e^{r_i T_i}(c_i - p_i) \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

dove  $K_i$  è il prezzo d'esercizio che individua l'opzione *at-the-money*,  $c_i$  e  $p_i$  sono i prezzi (calcolati come media bid-ask) della call e della put.

*Passo 6: Identificazione delle serie di opzioni utilizzate nel calcolo del VIX*

Nel calcolo del VIX vengono utilizzati solo i prezzi delle opzioni call e put *out-of-the-money*. Per distinguere tra opzioni *in-the-money* e *out-of-the-money* viene utilizzato il prezzo d'esercizio  $K_{i,0}$ , che è quel prezzo d'esercizio appena sotto il livello forward calcolato al passo 5. Le opzioni call *out-of-the-money* sono quelle con prezzo d'esercizio maggiore o uguale a  $K_{i,0}$ , le put *out-of-the-money* sono quelle con prezzo d'esercizio minore o uguale a  $K_{i,0}$ . Se qualcuna di queste serie ha prezzo *bid* uguale a zero allora viene eliminata. Si noti che nel caso in cui i prezzi *bid* di due call (o put) con prezzi d'esercizio adiacenti siano nulli, tutte le serie call (put) con prezzi d'esercizio più alti (bassi) vengono eliminate anche se i loro prezzi *bid* sono positivi.

*Passo 7: Calcolo della varianza implicita per ciascuna scadenza*

La formula per il calcolo della varianza implicita relativa alla prima scadenza è

$$\sigma_1^2 = \frac{2}{T_1} \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\Delta K_{1,i}}{K_{1,i}^2} Q(K_{1,i}, T_1) e^{r_1 T_1} - \frac{1}{T_1} \left[ \frac{F_1}{K_{1,0}} - 1 \right]^2, \quad (5)$$

dove  $T_1$  è il tempo (espresso in anni) che manca alla prima scadenza,  $n_1$  è il numero di opzioni della serie *out-of-the-money* per la prima scadenza,  $K_{1,i}$  è il prezzo d'esercizio dell'*i*-sima opzione,  $r_1$  è il tasso di interesse che corrisponde alla prima scadenza,  $F_1$  è il livello forward dell'indice implicito dai prezzi call e put *at-the-money*,  $Q$  è il prezzo medio *bid-ask* dell'opzione con prezzo d'esercizio  $K_{1,i}$ , e  $K_{1,0}$  è il prezzo d'esercizio appena sotto il prezzo *forward* implicito.

La sommatoria include un'unica opzione (call o put) per ciascun prezzo di esercizio tranne nel caso *at-the-money* in cui si considera sia la call

che la put. In tal caso, per evitare il doppio conteggio si considera la media del prezzo della call e della put.

La stessa procedura è utilizzata per calcolare la varianza implicita relativa alla seconda scadenza.

*Passo 8: Calcolo della volatilità annualizzata sulla base dei prossimi 30 giorni di calendario*

Le varianze dei contratti che si riferiscono alla prima e alla seconda scadenza corrispondono ai tempi alla scadenza di  $T_1$  e  $T_2$  anni. L'indice VIX mantiene costante il tempo alla scadenza e la costante vale 30 giorni, ovvero  $30/365=0.0821917808$  anni. Per ottenere la varianza su un intervallo di tempo di 30 giorni di calendario, si prevede di interpolare fra le varianze della prima e della seconda scadenza.

Per avere il livello dell'indice VIX si deve trasformare su base annua la varianza a 30-giorni ed estrarre la radice quadrata; questo valore moltiplicato per 100 rappresenta esattamente il livello dell'indice VIX divulgato dal CBOE.

#### **4. Titoli derivati sull'indice VIX**

Il 26 marzo 2004, presso il CBOE, ha avuto luogo la negoziazione del primo contratto *future* sull'indice VIX. Il simbolo di tale contratto è VX e il moltiplicatore è di 1000 dollari; il payoff alla scadenza è quindi

$$\$1000(S_T - K), \quad (6)$$

dove  $S_T$  rappresenta il livello dell'indice VIX alla scadenza e  $K$  è il livello di consegna che, conformemente ai prezzi di consegna per i contratti *future* tradizionali, viene fissato in ogni epoca di inizio della negoziazione scegliendo il livello in corrispondenza del quale non ci siano scambi di denaro fra gli operatori che decidono di sottoscrivere il contratto in posizione corta o lunga.

La variazione minima (*tick*) è di 0.05 punti indice che corrisponde al valore di 50 dollari per ogni contratto. La data di scadenza è il

mercoledì che precede il terzo venerdì del mese in cui il contratto scade (*final settlement date*). Il contratto viene liquidato per contanti per un ammontare dato dal prodotto fra 1000 dollari (moltiplicatore) e il numero di punti indice che esprime la differenza fra il valore dell'indice alla scadenza  $S_T$  e il livello di consegna  $K$ .

Le scadenze riguardano i prossimi sei mesi e i cinque mesi futuri nel ciclo trimestrale di febbraio. Ad esempio, il giorno 28 gennaio 2016 vengono scambiati contratti con le seguenti scadenze: febbraio 2016, marzo 2016, aprile 2016, maggio 2016, giugno 2016 e luglio 2016, che sono le scadenze relative ai prossimi sei mesi e febbraio 2016 (già compresa), maggio 2016 (già compresa), agosto 2016, novembre 2016 e febbraio 2017.

Il bene sottostante di un contratto future sull'indice VIX è il livello VIX moltiplicato per 10 ed è indicato con il simbolo VXB; si ha pertanto

$$VXB = 10 * VIX. \quad (7)$$

La dimensione di un contratto è di 100 dollari per VXB. Ad esempio, con un valore del VIX di 17.33, registrato al momento del debutto (26 marzo 2004), l'indice VXB è 173.3 e la dimensione del contratto future è di 17330 dollari.

Si deve osservare che i prezzi di consegna (il livello futuro dell'indice) dei contratti future sull'indice VIX sono basati esclusivamente sulle sensazioni che gli operatori hanno sull'andamento futuro delle quotazioni di mercato e non su relazioni di tipo *cost-of-carry* (capitalizzazione del livello corrente)

$$F_{t,T} \neq VXB_t e^{r(T-t)}. \quad (8)$$

Un interessante modello teorico per la valutazione dei contratti future sull'indice VIX è proposto da Brenner *et al.* (2007)

Il 24 febbraio 2006 sono iniziate le prime negoziazioni dei contratti di opzioni sull'indice VIX con simbolo (*ticker*) VRO. La negoziazione di opzioni sull'indice VIX può risultare utile per gli operatori che

desiderano proteggere il loro portafoglio contro improvvisi cali di mercato o che desiderano speculare sulle variazioni della volatilità futura.

Il moltiplicatore dei contratti di opzione è di 100 dollari (se l'opzione scade *in-the-money* ogni punto indice di differenza con il prezzo d'esercizio comporta un pagamento di 100 dollari). Il *tick* (variazione minima dei prezzi) è di 0.05 punti indice (5 dollari) per le opzioni quotate meno di 3 dollari e di 0.10 punti indice (10 dollari) per le serie di opzioni quotate più di 3 dollari. I prezzi di esercizio quotati presentano variazioni minime di 2.5 punti indice e sono previsti prezzi d'esercizio che rendono inizialmente l'opzione sia *in-the-money* sia *out-of-the-money*. In seguito a variazioni del livello dell'indice vengono aggiunti nuovi prezzi di esercizio.

Le opzioni su indice VIX sono di tipo europeo e, diversamente da quanto avviene per le opzioni sui singoli titoli o sugli indici azionari, si riscontrano spesso quotazioni che sono inferiori al valore intrinseco dell'opzione; infatti, il premio più che alla quotazione corrente dell'indice fa riferimento alle aspettative degli operatori relativamente al livello del VIX nel giorno di scadenza. La scadenza è prevista il mercoledì che precede di trenta giorni il terzo venerdì del mese successivo al mese di scadenza.

Recentemente, sono stati proposti modelli teorici per valutare le opzioni sull'indice VIX. Due sono gli approcci che normalmente vengono impiegati per trovare una formula di valutazione per le opzioni sull'indice VIX. Un approccio tradizionale che prevede di utilizzare un processo stocastico per la dinamica del VIX e richiede di stimare i parametri del modello in base ai dati storici. In tale direzione, i contributi più significativi sono Whaley (1993), Grünbichler e Longstaff (1996) e Detemple e Osakwe (2000).

Una tecnica diversa e innovativa è suggerita da Carr e Lee (2007); tale tecnica non si basa sulla conoscenza del processo che regola l'andamento del bene sottostante e non richiede alcuna procedura di stima in quanto impiega solo dati che sono direttamente osservabili sul mercato o da questi facilmente calcolabili.

In data 1 luglio 2008, il CBOE ha lanciato opzioni call binarie di tipo *all-or-nothing* sugli indici S&P 500 (SPX) e VIX. Le opzioni binarie sull'indice S&P 500 hanno simbolo BSZ; le opzioni sull'indice VIX hanno simbolo BVX e sono caratterizzate da una struttura molto semplice: se alla scadenza il livello dell'indice VIX è maggiore o uguale al livello di esercizio, l'acquirente dell'opzione call binaria riceve 100 dollari per ogni contratto sottoscritto. L'opzione è di tipo europeo. Il premio viene pagato al momento della negoziazione e varia tra 1 e 100 dollari per ogni contratto.

## **5. Altri indici di volatilità**

Attualmente, oltre al VIX e al VXO, esistono nel mercato USA numerosi indici di volatilità che vengono calcolati e diffusi in tempo reale. Fra questi si possono menzionare il VXD (Dow Jones Industrial Average Volatility Index) e il VXN (Nasdaq-100 Volatility Index).

In Europa troviamo il VDAX, indice di volatilità che si riferisce al mercato tedesco (si veda il documento di Deutsche Börse), gli indici VX1 e VX6 che riguardano le opzioni sull'indice CAC-40 e che sono calcolati dal MONEP - *Marché des Options Negotiables de Paris* – (si veda Moreaux et al., 1999), l'indice VFTSE del mercato inglese; per il mercato svizzero troviamo invece l'indice VSMI.

Ci sono anche indici di volatilità che non vengono diffusi in tempo reale; fra questi l'indice del mercato australiano AVIX, calcolato impiegando la metodologia proposta da Dowling e Muthuswamy (2003) e basato sulle volatilità implicite di opzioni sull'indice S&P ASX200, l'indice per il mercato greco GVIX, calcolato seguendo quanto indicato da Skiadopoulos (2004), l'indice SAVI (South African Volatility Index) che viene calcolato in base alle volatilità implicite di opzioni sull'indice TOP40 e l'indice India VIX recentemente introdotto e basato sui prezzi delle opzioni negoziate sull'indice Nifty 50.

Il 18 febbraio 2013 è stato lanciato sul mercato italiano l'indice FTSE MIB implied volatility con lo scopo di misurare la volatilità dell'indice FTSE MIB il cui valore sintetizza l'andamento dei “migliori 40” titoli

azionari italiani. Al termine delle contrattazioni di ogni giornata borsistica vengono comunicati (con dati annualizzati) i valori dell'indice calcolati in base ai prezzi delle opzioni *out-of-the-money* disponibili sul mercato IDEM. La tecnica di calcolo ricalca la metodologia utilizzata dal CBOE con l'avvertenza di generalizzare il calcolo delle approssimazioni degli integrali al caso in cui le ampiezze degli intervalli fra due punti (prezzi d'esercizio) non siano uguali (per maggiori dettagli si veda FTSE, 2014).

## 6. Critiche e svantaggi dell'indice VIX

Il calcolo del nuovo VIX è basato su un'approssimazione discreta della seguente formula proposta da Demeterfi *et al.* (1999)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2}{T} \left\{ \ln \frac{F_0}{S^*} - \left[ \frac{F_0}{S^*} - 1 \right] + e^{rT} \int_0^{S^*} \frac{p(T,K)}{K^2} dK + e^{rT} \int_{S^*}^{+\infty} \frac{c(T,K)}{K^2} dK \right\} \quad (9)$$

(si veda in particolare la loro relazione (26)), calcolata per un valore  $S^*$  dell'attività sottostante opzioni call e put, dove  $F_0 = S_0 e^{rT}$  è il valore *forward* del prezzo  $S_0$  per la scadenza  $T$ .

L'espressione (9) sintetizza il concetto di varianza implicita futura associata a un contratto di tipo *variance swap*<sup>2</sup>, che è un contratto di tipo forward sulla varianza (calcolata su base annuale) realizzata dalle quotazioni di un titolo finanziario. Il prezzo di consegna rappresenta il livello di varianza fissato ad un valore tale che fra le parti contrattuali non ci siano inizialmente scambi di denaro (per maggiori dettagli si veda Demeterfi *et al.*, 1999).

---

<sup>2</sup> Con tali contratti, che sono attivamente scambiati nei mercati non regolamentati, l'operatore in posizione lunga ottiene un profitto se la volatilità realizzata durante il periodo di vita dello swap supera il livello di volatilità implicita fissato all'inizio del contratto. Il profitto viene pagato alla scadenza ed è calcolato in base a un importo nozionale che ha lo scopo di tradurre in denaro il *payoff* del contratto.

Come dimostrato da Jiang e Tian (2005), la varianza implicita indipendente dal modello fornisce una previsione più efficiente e maggiori informazioni sulla volatilità futura rispetto sia alla varianza implicita sia alla varianza storica. Ci si deve pertanto attendere che il nuovo VIX sia più efficiente rispetto al vecchio nella determinazione dei valori di volatilità ottenuti dai prezzi di mercato delle opzioni. D'altra parte la mole di calcoli richiesta per la costruzione del nuovo VIX è piuttosto consistente in quanto si richiede di calcolare un integrale di prezzi pesati su un intervallo infinito.

La procedura adottata dal CBOE per il calcolo del VIX, descritta precedentemente e sintetizzata nella relazione (1), è solo un'approssimazione della relazione (9) e non tiene conto di alcuni accorgimenti che possono permettere di minimizzare gli errori di implementazione. Come conseguenza si hanno dei valori del VIX che sono sostanzialmente distorti, con un insieme di implicazioni negative sui titoli derivati che hanno come sottostante l'indice di volatilità.

Un primo errore originato dall'implementazione del calcolo del VIX basato sulla relazione (1) è un errore di troncamento, causato dalla limitata disponibilità dei prezzi di esercizio. Per il calcolo della varianza implicita indipendente dal modello si richiede un intervallo infinito di prezzi di esercizio come indicato dalla relazione (9). Indicati con  $K_L$  e con  $K_U$  i prezzi di esercizio minimo e massimo negoziati sul mercato per una certa scadenza, il CBOE introduce, con la procedura usata, un errore di troncamento in quanto sostituisce un intervallo infinito di prezzi d'esercizio con l'intervallo finito  $[K_L, K_U]$ . Si noti che la consistenza dell'errore di troncamento può variare sostanzialmente nel tempo, non solo in quanto il CBOE aggiunge nuovi prezzi di esercizio quando l'indice si discosta dai prezzi di esercizio esistenti, ma anche a causa delle restrizioni sulle opzioni da impiegare nel calcolo dell'indice: ogni opzione con prezzo *bid* nullo viene considerata mal quotata e il corrispondente prezzo d'esercizio viene escluso nel calcolo.

Un secondo tipo di errore è un errore di discretizzazione nel calcolo degli integrali che potrebbe essere minimizzato usando una partizione opportunamente fine dei prezzi d'esercizio; il CBOE usa una partizione

basata sui prezzi d'esercizio effettivamente quotati e in quanto tale la partizione risulta piuttosto grossolana.

Un terzo tipo di errore si riferisce alla modalità non corretta utilizzata dal CBOE per calcolare lo sviluppo in serie di Taylor della funzione logaritmo che compare nella formula di Demeterfi *et al.* La dimensione di tale errore è comunque trascurabile.

Un quarto errore è dovuto all'interpolazione delle scadenze utilizzata nella procedura di calcolo. Il VIX si riferisce alla varianza implicita con una scadenza fissata di 30 giorni. Solo una volta al mese sono negoziate opzioni che scadono esattamente dopo un mese; in assenza di un congruo numero di opzioni che scadono esattamente dopo 30 giorni, la soluzione proposta consiste nel considerare le due scadenze più vicine alla scadenza di 30 giorni e nell'interpolare linearmente la varianza fra tali scadenze, presupponendo che la varianza sia una funzione lineare delle scadenze. L'errore nasce dal fatto che, come è ben noto in letteratura (si veda ad esempio Xu e Taylor, 1994), la struttura per scadenza della varianza implicita non è una funzione lineare né monotona rispetto alla vita residua dell'opzione.

## **7. Osservazioni conclusive**

Fin dalla sua divulgazione avvenuta nel 1993, l'indice VIX viene considerato a livello mondiale come punto di riferimento per anticipare l'andamento e la volatilità futura dei mercati azionari. Inizialmente il VIX si basava sul calcolo della volatilità implicita di opzioni *at-the-money* emesse sull'indice azionario S&P 100.

Dopo dieci anni dal lancio, la metodologia di calcolo del VIX è stata modificata in varie direzioni, seguendo le indicazioni suggerite dalla moderna teoria finanziaria. In particolare, come indice di riferimento si è scelto l'indice S&P 500 e il calcolo della volatilità implicita è basato esclusivamente sui prezzi di mercato di opzioni *out-of-the-money*.

Le caratteristiche fondamentali dell'indice rimangono comunque invariate: il VIX continua a fornire istante per istante le indicazioni più attendibili sulla volatilità futura a breve termine.

Sono in molti sia operatori sia accademici a sostenere che il VIX sia uno strumento utile al fine di costruire opportune strategie in grado di proteggere i portafogli da indesiderate oscillazioni dei prezzi.

Non mancano però delle posizioni critiche sull'eccesso di utilizzo dell'indice e sulle sue capacità di prevedere fasi di spiccato rialzo o ribasso dei corsi azionari. In effetti, l'indice VIX si riferisce a un periodo di 30 giorni, ma la maggior parte delle opzioni ha una scadenza.

Inoltre, il valore del VIX si riferisce all'intero indice S&P 500 e non al singolo settore del mercato; d'altra parte, è ben noto che la volatilità dei titoli tecnologici è superiore a quella delle altre tipologie di azioni. È doveroso osservare, infine, che il calcolo pratico dell'indice comporta un insieme di approssimazioni che possono sottostimare o sovrastimare la vera volatilità di parecchie decine di punti indice, producendo distorsioni significative sulla numerosa famiglia di prodotti finanziari scambiati sui mercati ufficiali e che prendono come valore di riferimento un indice di volatilità implicita.

### **Riferimenti bibliografici**

Black F. e M. Scholes M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.

Breeden D.T. e R.H. Litzenberger (1978) Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, 51(4), 621-651.

Brenner M. e D. Galai (1989) New financial instrument for hedging changes in volatility. *Financial Analysts Journal*, 45(4), 61-65.

Brenner M., J. Shu e J.E. Zhang (2007) *The Market for Volatility Trading; Vix Futures*. NYU Working Paper No. FIN-07-003. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1293137>

Carr P. e R. Lee (2007) Realized volatility and variance: options via swap. *RISK*, May, 76-83.

Cox J.C. e M. Rubinstein (1985) *Options Markets*, Prentice-Hall Inc.

- Demeterfi K.E., E. Derman, M. Kamal e J. Zou (1999) More than You ever wanted to know about volatility swaps. *Quantitative Strategies Research Notes*, NEGE, University of Minho, Goldman Sachs.
- Detemple J. e C. Osakwe (2000) The valuation of volatility options. *European Finance Review*, 4, 21-50.
- Deutsche Börse (2003) *Guide to the volatility indices of Deutsche Börse AG*. Technical report.
- Dowling S. e J. Muthuswamy (2003) *The implied volatility index of Australian index options*. Reserve Bank of Australia and University of Sidney.
- FTSE Russel (2014), *Ground rules for the FTSE implied volatility index series*, Version 1.1
- Gastineau G. (1977) An index of listed options premium. *Financial Analyst Journal*, 33, 70-75.
- Grünbichler A. e F.A. Longstaff (1996) Valuing futures and options on volatility. *Journal of Banking and Finance*, 20, 985-1001.
- Jiang G.J. e Y.S. Tian (2005) Model-free implied volatility and its information content. *Review of Financial Studies*, 18, 1305-1342.
- Moreaux F., P. Navatte e C. Villa (1999) The predictive power of the French market volatility index: a multi horizon study. *European Financial Review*, 2(2), 303-320.
- Skiadopoulos G. (2004) The Greek implied volatility index: Construction and properties. *Applied Financial Economics*, 14(6), 1187-96.
- Whaley R. (1993) Derivatives on market volatility: hedging tools long overdue. *Journal of Derivatives*, 1(1), 71-84.
- Xu X. e S.J. Taylor (1994) The term structure of volatility implied by foreign exchange options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, 57-74.