Department of Applied Mathematics, University of Venice

QUADERNI DI DIDATTICA

Pierangelo Ciurlia, Riccardo Gusso,
Martina Nardon

Esercizi di matematica finanziaria:
regimi finanziari, rendite e ammortamenti

Quaderno di Didattica n. 21/2006
Giugno 2006

Esercizi di matematica finanziaria: regimi finanziari, rendite e ammortamenti

PIERANGELO CIURLIA
<ciurlia@unive.it>

RICCARDO GUSSO
<rgusso@unive.it>

MARTINA NARDON
<mnardon@unive.it>

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia
Dorsoduro 3825/E
30123 Venezia, Italy
http://www.dma.unive.it/

Premessa

Questa dispensa propone alcuni esercizi svolti di matematica finanziaria inerenti ai regimi finanziari, alle rendite e agli ammortamenti. Si presuppone la conoscenza da parte dello studente degli argomenti trattati, sebbene nello svolgimento degli esercizi vi siano frequenti richiami di teoria. Per approfondimenti, si rimanda al testo di Basso A. e P. Pianca (2004) "*Appunti di Matematica Finanziaria*", Cedam, Padova.

GLI AUTORI

Esercizi di matematica finanziaria

Introduzione

Negli esercizi di questa dispensa, tutti gli **importi in euro** sono opportunamente **arrotondati al centesimo**. Ad esempio, €2 589.23658 $\simeq$ €2 589.24 (con un abuso di notazione, scriveremo comunque "=" prima del risultato finale).

Si consiglia di non arrotondare i risultati intermedi inerenti ai tassi di interesse (considerando tutte le cifre che può riportare la calcolatrice), arrotondando solo il risultato finale. Se si tratta di un tasso di interesse e questo viene indicato in percentuale, sarebbe desiderabile approssimare il risultato mantenendo **almeno** due cifre decimali significative. Ad esempio, $i = 0.025368912\ldots \simeq 2.54\,\%$.

Nella descrizione delle operazioni finanziarie, verranno spesso impiegati **diagrammi importi/epoche**[1].

Il regime dell'interesse semplice

Esercizio 1 *Un risparmiatore versa presso un istituto di credito* 2 500 *euro. Si conviene che tale capitale venga remunerato in regime di interesse semplice al tasso annuo* $i = 2.1\,\%$. *Determinare gli interessi maturati dopo* 7 *mesi.*

Soluzione. In regime di interesse semplice, l'interesse viene calcolato in base alla formula

$$I = C\,i\,t\,,$$

dove C è capitale iniziale, i il tasso annuo e t la durata dell'operazione espressa in anni. Nel caso il tempo sia espresso in mesi (m), tale formula diviene

$$I = C\,i\,\frac{m}{12}\,.$$

Sostituendo i dati dell'esercizio nell'espressione precedente, si ottiene

$$I = 2\,500 \cdot 0.021\,\frac{7}{12} = 30.625\,.$$

□

[1] In particolare, verrà utilizzato il colore **blu** per indicare che un importo viene **capitalizzato**, e il colore **rosso** per indicare, invece, un'operazione di **attualizzazione**.

Esercizio 2 *Una banca ha concesso ad un imprenditore un prestito di* $51\,200$ *euro per* 2 *anni e* 6 *mesi concordando una remunerazione in regime di interesse semplice in base al tasso annuo del* 7.5%. *Si trovi l'importo (montante) che l'imprenditore dovrà restituire alla scadenza del contratto.*

Soluzione. Dal punto di vista della banca, si tratta di un'operazione di investimento che inizia all'epoca 0 con la concessione del capitale $C = 51\,200$ euro e termina all'epoca $t = 2 + \frac{6}{12} = 2.5$ anni con la restituzione del montante M, che in regime di interesse semplice viene calcolato con la seguente formula

$$M = C\,(1 + it),$$

dove i è il tasso annuo di interesse, nel nostro esempio pari al 7.5 %. Sostituendo, si ottiene l'importo che l'imprenditore dovrà restituire alla scadenza

$$M = 51\,200\,(1\ +\ 0.075 \cdot 2.5) = 60\,800\,.$$

□

Esercizio 3 *Supponendo che il tasso di interesse annuale sia* $i = 3\,\%$, *calcolare il valore attuale in regime di interesse semplice del pagamento di* $8\,500$ *euro fra* 3 *anni.*

Soluzione. Ricordiamo che la formula che lega il montante ed il capitale iniziale nel regime di interesse semplice è

$$M = C(1 + it) \qquad \text{da cui} \qquad C = \frac{M}{1 + it}\,.$$

Dunque, se vogliamo ricavare il valore attuale, cioè il capitale corrispondente ad un montante di 8 500 euro esigibili fra 3 anni, dobbiamo calcolare[2]

$$C = \frac{M}{1 + it} = \frac{8\,500}{1 + 0.03 \cdot 3} = 7\,798.17\,.$$

□

Esercizio 4 *Si determini il tempo necessario affinché, in regime di interesse semplice, un capitale di* $2\,000$ *euro produca un montante di* $2\,050$ *euro, al tasso del* 2.5 % *annuo.*

Soluzione. Dalla relazione[3]

$$I = C\,i\,t\,,$$

si ottiene facilmente

$$t = \frac{I}{C\,i}\,.$$

[2] Come osservato nella premessa iniziale, l'ammontare in euro del valore attuale C è approssimato al centesimo.

[3] Suggerimento: si provi a svolgere l'esercizio partendo dalla formula del montante.

Risultano assegnate le grandezze M e C, da cui si ricava l'interesse

$$I = M - C = 2\,050 - 2\,000 = 50\,.$$

Sostituendo i dati del problema, si ha il risultato

$$t = \frac{50}{2\,000 \cdot 0.025} = 1 \text{ anno}\,.$$

$\square$

Esercizio 5 *Determinare il tasso di interesse annuo affinché, in regime di interesse semplice, un capitale di* $1\,600$ *euro produca un interesse di* 80 *euro in sei mesi.*

Soluzione. Dalla formula dell'interesse semplice[4]

$$I = C\,i\,t\,,$$

si ricava immediatamente

$$i = \frac{I}{C\,t}\,.$$

Risultano assegnate le grandezze $I = 80$, $C = 1\,600$ e $t = \frac{6}{12} = 0.5$. Sostituendo tali dati nella formula precedente si ottiene

$$i = \frac{80}{1\,600 \cdot 0.5} = 0.1 = 10\,\%\,.$$

$\square$

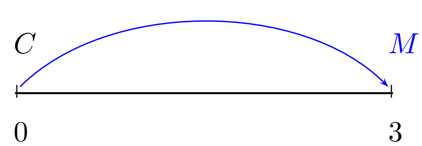
Il regime dell'interesse composto

Esercizio 6 *Il capitale iniziale di* $3\,500$ *euro viene impiegato in regime di interesse composto ad un tasso annuo del* $4.3\,\%$*. Si calcoli il montante dopo* 3 *anni.*

Soluzione. I dati del problema sono i seguenti: $C = 3\,500$, $i = 0.043$ e $t = 3$. In base alla formula del montante in regime di interesse composto, si ottiene

$$M \;=\; C\,(1+i)^t \;=\; 3\,500\,(1+0.043)^3 = 3\,971.19\,.$$

L'operazione è descritta schematicamente mediante il seguente *diagramma importi/epoche*.



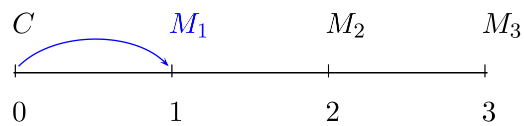
[4] Suggerimento: si provi a svolgere l'esercizio partendo dalla formula del montante, ricordando che $M = C + I$.

In virtù della scindibilità del regime dell'interesse composto, è possibile calcolare il montante finale anche calcolando i montanti alle epoche intermedie $t = 1$ e $t = 2$. Indichiamo con M_1, M_2 ed M_3 i montanti alla fine del primo, del secondo e del terzo anno, rispettivamente.

Per il calcolo del montante finale si può procedere per passi come segue:

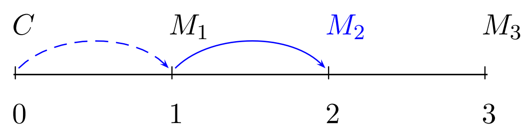
1. si calcola il montante del capitale C alla fine del primo anno

$$M_1 = C\,(1 + 0.043)^1 = 3\,500 \cdot 1.043 = 3\,650.50\,;$$



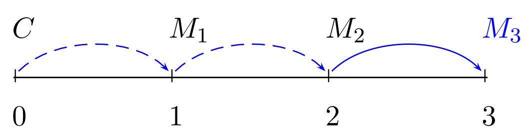
2. M_1 costituirà il capitale all'inizio del secondo anno, che verrà impiegato alle stesse condizioni (ovvero al tasso $i = 4.3\,\%$). Si procede quindi al calcolo del montante alla fine del secondo anno

$$M_2 = M_1\,(1 + 0.043)^1 = 3\,650.50 \cdot 1.043 = 3\,807.47\,;$$



3. si calcola, infine, il montante all'epoca $t = 3$ considerando come capitale all'inizio del periodo considerato M_2. Si ottiene

$$M_3 = M_2\,(1 + 0.043)^1 = 3\,807.47 \cdot 1.043 = 3\,971.19\,.$$



Si osservi che il risultato coincide con quello ottenuto facendo i conti "senza interruzioni"[5]. □

Esercizio 7 *Dopo 3 anni e 9 mesi un risparmiatore ritira un montante di 12 000 euro maturato su un proprio deposito a risparmio vincolato. Si calcoli il capitale iniziale (o valore attuale) del deposito, sapendo che gli interessi sono stati computati in regime di interesse composto a un tasso annuo del 4.5 %.*

Soluzione. Dalla relazione

$$M = C(1+i)^t\,,$$

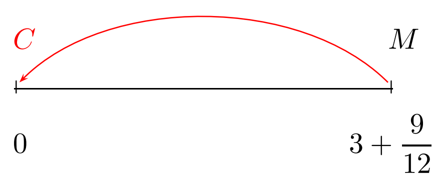
che esprime il montante nel regime di interesse composto come funzione esponenziale del tempo, si ricava che

$$C = M(1+i)^{-t}\,,$$

dove C è il capitale iniziale (o il valore attualizzato V) del montante M. Pertanto,

$$C = 12\,000\,(1+0.045)^{-\left(3+\frac{9}{12}\right)} = 12\,000\,(1+0.045)^{-45/12} = 10\,174.08$$

è il valore attuale del montante dell'operazione d'investimento in esame che ha durata $t = 3 + \frac{9}{12}$.



□

Esercizio 8 *Calcolare l'interesse prodotto da un investimento di 3 000 euro per 6 anni al tasso annuale $i = 1.75\%$ nel regime dell'interesse composto.*

Soluzione. La formula del montante nel regime di interesse composto è

$$M = C(1+i)^t.$$

Ricordando che l'interesse è dato dalla differenza fra il montante ottenuto e il capitale investito, si ha

$$I = M - C = C(1+i)^t - C = C\left[(1+i)^t - 1\right]$$

che nel nostro caso dà il valore

$$I = 3\,000 \cdot [(1+0.0175)^6 - 1] = 329.11\,.$$

□

[5] Suggerimento: si provi a svolgere il medesimo esercizio in regime di interesse semplice. Si confrontino i risultati della capitalizzazione con e senza interruzioni.

Esercizio 9 *Si determini in quanto tempo, in regime di interesse composto, un capitale di* 8 000 *euro produce un interesse di* 800 *euro al tasso annuo del* 2.5 %.

Soluzione. Dalla relazione

$$M = C\,(1+i)^t,$$

mediante semplici passaggi algebrici si ottiene

$$t = \frac{\ln M/C}{\ln(1+i)} = \frac{\ln M - \ln C}{\ln(1+i)}\,.$$

Sostituendo i dati del problema, si ha il risultato

$$t = \frac{\ln 8\,800/8\,000}{\ln(1+0.025)}\frac{\ln 1.1}{\ln 1.025} = 3.859866163\ldots\,,$$

ovvero circa 3 anni, 10 mesi e 10 giorni. □

Esercizio 10 *Determinare il tasso di interesse annuo affinché, in regime di interesse composto, un capitale di* 1 600 *euro produca un interesse di* 80 *euro in sei mesi.*

Soluzione. Dalla formula del montante, e ricordando che $M = C + I$, si ricava immediatamente

$$i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1\,.$$

Risultano assegnate le grandezze $M = 1\,680$ e $t = \frac{6}{12} = 0.5$. Sostituendo tali dati nella formula precedente si ottiene

$$i = \left(\frac{1\,680}{1\,600}\right)^{\frac{1}{0.5}} - 1 = 0.1025 = 10.25\,\%\,.$$

□

Tassi equivalenti

Esercizio 11 *Determinare, in regime di interesse semplice,*

- *il tasso bimestrale equivalente al tasso di interesse annuo del* 9 %*;*
- *il tasso annuo equivalente al tasso semestrale del* 5 %*.*

Soluzione. Il tasso periodale i_m è equivalente al tasso annuo i se lo stesso capitale C produce nello stesso periodo di tempo t il medesimo interesse. Ricordiamo che in un anno vengono effettuate $m = 6$ capitalizzazioni bimestrali. In regime di interesse semplice si ha

$$C\,i\,t = C\,i_m\,m\,t\,.$$

Ponendo $C = 1$ e $t = 1$, si ricava immediatamente

$$i = m\, i_m \qquad \text{e} \qquad i_m = \frac{i}{m}\,.$$

Sostituendo i dati del problema, si ottiene il tasso bimestrale i_6 equivalente al tasso annuo $i = 9\,\%$

$$i_6 = \frac{i}{6} = \frac{0.09}{6} = 0.015 = 1.5\,\%\,,$$

e il tasso annuo i equivalente al tasso semestrale $i_2 = 5\,\%$

$$i = 2\, i_2 = 2 \cdot 0.05 = 0.1 = 10\,\%\,.$$

□

Esercizio 12 *Dato il tasso annuo dell'8 %, si trovino in regime di interesse composto gli equivalenti tassi semestrale e mensile.*

Soluzione. Nel regime di interesse composto la relazione fra tassi equivalenti è

$$1 + i = (1 + i_m)^m,$$

dove i è il tasso di interesse annuo e i_m è il tasso di interesse relativo a $1/m$-simo di anno. Noto i, si può quindi calcolare i_m come

$$i_m = (1 + i)^{1/m} - 1.$$

Pertanto, il tasso semestrale ($m = 2$) e il tasso mensile ($m = 12$) equivalenti al tasso annuo $i = 8\,\%$ sono rispettivamente pari a

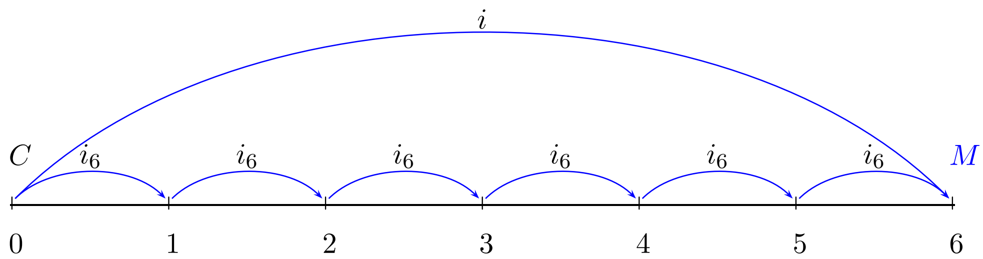
$$i_2 = (1 + 0.08)^{1/2} - 1 \simeq 0.03923\,,$$

$$i_{12} = (1 + 0.08)^{1/12} - 1 \simeq 0.00643\,.$$

□

Esercizio 13 *Dato il tasso di interesse annuale* $i = 3.5\,\%$ *si trovi il tasso equivalente bimestrale in regime di capitalizzazione composta.*

Soluzione. Il tasso bimestrale i_6 è equivalente al tasso annuo i se lo stesso capitale C produce nello stesso periodo di tempo (un anno) lo stesso montante. Ricordiamo che in un anno vengono effettuate 6 capitalizzazioni bimestrali.



In regime di interesse composto si ha quindi

$$C\,(1+i_6)^6 = C\,(1+i)\,,$$

da cui si ricava immediatamente

$$i_6 = (1+i)^{\frac{1}{6}} - 1 = 1.035^{\frac{1}{6}} - 1 = 0.005750039\ldots \simeq 0.575\,\%$$

□

Esercizio 14 *Si determini, in regime di interesse composto, il tasso di sconto semestrale equivalente al tasso di interesse annuo del* 6 %*.*

Soluzione. Ricordiamo che la relazione che lega il tasso di sconto d al tasso di interesse i è

$$d = \frac{i}{1+i}\,.$$

Tale relazione vale in qualsiasi regime finanziario.

Se è noto il tasso di interesse semestrale i_2, il tasso di sconto relativo allo stesso periodo, indicato con d_2, è dato da

$$d_2 = \frac{i_2}{1+i_2}\,.$$

Dai dati del problema si ha

$$i_2 = (1+i)^{\frac{1}{2}} - 1 = (1+0.06)^{\frac{1}{2}} - 1 \simeq 0.029563$$

e, conseguentemente,

$$d_2 = \frac{i_2}{1+i_2} \simeq 0.028714\,.$$

Si osservi che

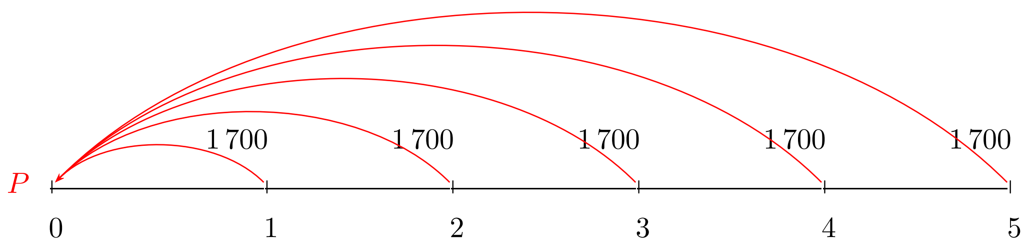
$$i > d\,.$$

□

Rendite

Esercizio 15 *Una motocicletta viene acquistata oggi con l'accordo tra l'acquirente e il venditore di effettuare il pagamento mediante 5 versamenti annuali, al termine di ogni anno, del valore di 1 700 euro ciascuno. Sapendo che il tasso di interesse concordato è del 7 % annuo, si determini il valore della motocicletta.*

Soluzione. L'operazione finanziaria è schematizzata come segue.



La seguente equazione

$$P = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + R(1+i)^{-4} + R(1+i)^{-5}$$

stabilisce che il prezzo della motocicletta P è pari al valore attuale dei pagamenti futuri, esigibili in corrispondenza di determinate epoche ($t = 1, 2, \ldots, 5$). L'insieme di tali pagamenti costituisce una rendita a rata costante R, posticipata, immediata, di durata $n = 5$ anni.

Noto l'importo delle rate da pagare, $R = 1\,700$ euro, si tratta di determinare il prezzo P. Sostituendo i dati del problema nell'equazione precedente, si ha

$$P = 1\,700 \left[(1.07)^{-1} + (1.07)^{-2} + (1.07)^{-3} + (1.07)^{-4} + (1.07)^{-5}\right] = 6\,970.34\,.$$

In alternativa, possiamo utilizzare la formula (più compatta e che ci permette di compiere più speditamente i calcoli) del valore attuale di una rendita immediata a rata costante R posticipata di n rate[6]:

$$P = R\, a_{\overline{n}|i} = R\,\frac{1 - v^n}{i} = R\,\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}\,.$$

Sostituendo i dati dell'esercizio, si ottiene

$$P = 1\,700 \frac{1 - (1.07)^{-5}}{0.07} = 6\,970.34\,.$$

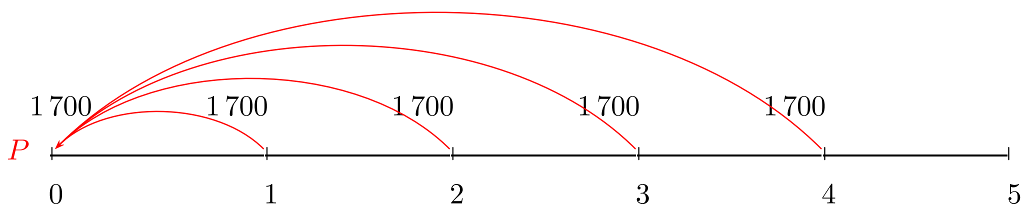
□

[6]Si ricordi che il simbolo $a_{\overline{n}|i}$ (si legge "a figurato n al tasso i") è utilizzato in matematica finanziaria per indicare il valore attuale di una rendita immediata, a rata costante e unitaria, posticipata, di n rate

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}\,.$$

Esercizio 16 *Una motocicletta viene acquistata oggi con l'accordo tra l'acquirente e il venditore di effettuare il pagamento mediante* 5 *versamenti annuali del valore di* 1 700 *euro ciascuno. Il primo versamento viene effettuato in data odierna. Sapendo che il tasso di interesse concordato è dell'*8.5 % *annuo, si determini il valore della motocicletta.*

Soluzione. L'operazione finanziaria è schematizzata come segue.



Si osservi che nessuna rata viene pagata all'epoca $t = 5$. La quinta rata viene pagata in $t = 4$ (ovvero all'inizio del quinto anno, che evidentemente coincide con l'epoca $t = 4$).

L'equivalenza finanziaria

$$P = R(1+i)^0 + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + R(1+i)^{-4}$$

richiede che il prezzo della motocicletta P sia pari alla somma dei valori attuali dei pagamenti, di importo costante pari a $R = 1\,700$ euro, esigibili in corrispondenza delle epoche $t = 0, 1, 2, 3, 4$. L'insieme di tali pagamenti costituisce una rendita a rata costante R, anticipata (ciascuna rata è esigibile all'inizio del periodo di riferimento), immediata, di durata $n = 5$ anni.

Possiamo calcolare P a partire dalla somma dei valori attuali delle singole rate

$$P = 1\,700\left[1 + (1.085)^{-1} + (1.085)^{-2} + (1.085)^{-3} + (1.085)^{-4}\right] = 7\,268.51\,.$$

In alternativa, possiamo utilizzare la formula del valore attuale di una rendita a rata costante R, anticipata e immediata, di n rate[7]:

$$P = R\,\ddot{a}_{\overline{n}|i} = R\,\frac{1-v^n}{i}(1+i) = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)\,.$$

Si ottiene

$$P = 1\,700\frac{1-(1.085)^{-5}}{0.085}(1.085) = 7\,268.51\,.$$

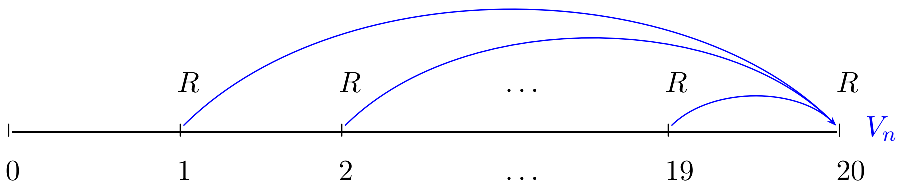
□

Esercizio 17 *Si vuole costituire un capitale di* 12 000 *euro in* 5 *anni mediante dei versamenti trimestrali, di importo costante e posticipati, in un conto corrente bancario che remunera i depositi al tasso annuo del* 2, 5 %*. Qual è l'ammontare di ciascun versamento?*

[7] Si ricordi che il simbolo $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ (si legge "a puntato, o anticipato, figurato n al tasso i") è utilizzato in matematica finanziaria per indicare il valore attuale di una rendita immediata, a rata costante e unitaria, anticipata, di n rate

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)\,.$$

Soluzione. Si tratta di un caso di rendita temporanea a rata costante posticipata della quale conosciamo il montante finale $V_n = 12\,000$ ed il numero di rate $n = 5 \cdot 4 = 20$. Al fine di costituire tale capitale a scadenza, si effettuano quindi 20 versamenti trimestrali.



Dato che il periodo della rendita è di tre mesi, dobbiamo innanzitutto ricavare il tasso trimestrale equivalente al tasso annuale in regime di interesse composto

$$i_4 = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1+0.025)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0.00619224632\ldots \simeq 0.619\,\%.$$

A questo punto ricordiamo che la formula del montante di una rendita temporanea a rata (trimestrale) costante posticipata è[8]

$$V_n = R s_{\overline{n}|i_4} = R\frac{(1+i_4)^n - 1}{i_4}\,.$$

La rata R è quindi data da

$$R = \frac{V_n}{s_{\overline{n}|i_4}} = \frac{V_n}{\dfrac{(1+i_4)^n - 1}{i_4}}$$

per cui si ottiene

$$R = \frac{12\,000}{\dfrac{1.00619224632^{20} - 1}{0.00619224632}} = 565.47\,.$$

□

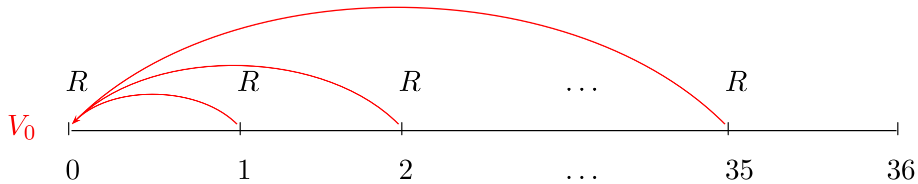
Esercizio 18 *Si supponga di dover pagare all'inizio di ogni mese il canone di affitto di un immobile per* 3 *anni. Il locatore propone in alternativa di pagare tutto l'affitto subito versando* 20 000 *euro. Tenendo conto che il tasso di interesse offerto dalla banca al locatario sul conto corrente da cui preleva i soldi per pagare l'affitto è dell'*1.25 % *annuo, si determini l'ammontare del canone mensile che rende le due modalità di pagamento indifferenti.*

[8] Si ricordi che il simbolo $s_{\overline{n}|i}$ (si legge "s figurato n al tasso i") è utilizzato in matematica finanziaria per indicare il montante di una rendita immediata, a rata costante e unitaria, posticipata, di n rate

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\,.$$

Soluzione. Tale operazione finanziaria si configura come una rendita mensile anticipata a rata costante di cui sono noti il valore attuale $V_0 = 20\,000$ euro, il numero di rate $n = 12 \cdot 3 = 36$ ed il tasso di interesse annuo $i = 1.25\,\%$. Poiché le rate sono mensili e la durata della rendita viene espressa in mesi ($n = 36$), dobbiamo calcolare il tasso di interesse mensile equivalente al tasso annuo $i = 1.25\,\%$

$$i_{12} = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1.0125)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.00103575\ldots \simeq 0.1036\,\%\,.$$



Ricordando che la formula del valore attuale di una rendita temporanea a rata (mensile) costante anticipata è

$$V_0 = R\,\ddot{a}_{\overline{n}|i_{12}} = R(1+i_{12})a_{\overline{n}|i_{12}} = R(1+i_{12})\frac{1-(1+i_{12})^{-n}}{i_{12}}\,,$$

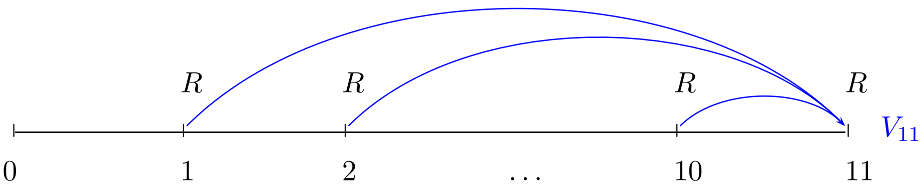
otteniamo

$$R = \frac{V_0}{\dfrac{1-(1+i_{12})^{-n}}{i_{12}}(1+i_{12})} = \frac{20\,000}{\dfrac{1-1.00103575^{-36}}{0.00103575}\,1.00103575} = 565.68\,.$$

$\square$

Esercizio 19 *In previsione dell'acquisto di un appartamento, un giovane lavoratore dipendente decide di depositare su un conto bancario che frutta interessi in base a un tasso annuo del $4.2\,\%$ un terzo del proprio stipendio annuale (per semplicità, si assuma che il versamento avvenga in un'unica soluzione alla data 31/12 di ogni anno). Nell'ipotesi che lo stipendio rimanga costante e venga corrisposto solo per 12 mensilità, ciascuna di $1\,350$ euro, si determini il risparmio accumulato dopo 11 anni lavorativi.*

Soluzione. Si tratta di determinare il montante di una rendita annua posticipata a rata costante R e durata $n = 11$ anni, caratterizzata da versamenti effettuati alla fine di ciascun anno secondo il seguente diagrammi importi/epoche.



L'ammontare R dei versamenti nell'ipotesi che lo stipendio del lavoratore rimanga costante è

$$R = \frac{1}{3}\,(12 \cdot 1\,350) = 5\,400\,.$$

Il montante V_n di una rendita annua posticipata a rata costante è

$$V_n = R\, s_{\overline{n}|i}\,,$$

dove $s_{\overline{n}|i}$, il montante di una rendita annua, unitaria, posticipata, immediata e temporanea, è definito dalla seguente espressione

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

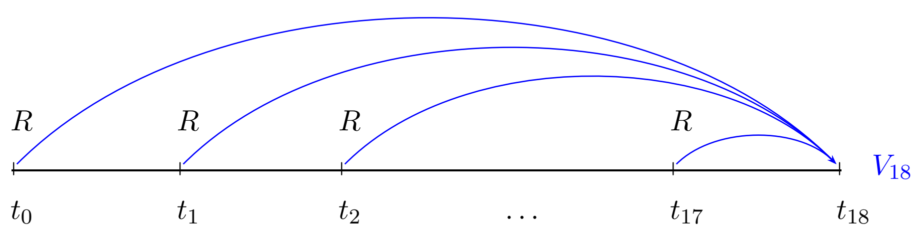
Pertanto,

$$V_{11} = 5\,400 \frac{1.042^{11} - 1}{0.042} = 5\,400 \cdot 13.62700887 = 73\,585.85$$

è il risparmio accumulato dal lavoratore dopo 11 anni lavorativi. □

Esercizio 20 *Si trovi il montante di una rendita anticipata costituita da* 18 *rate annue costanti di importo pari a* 470 *euro. Il tasso tecnico della rendita è del* 5 %.

Soluzione. Se indichiamo con $R = 470$ euro la rata costante e con $t_k = k$, per $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, 18$, le epoche di riferimento, possiamo rappresentare l'operazione finanziaria (rendita) mediante il seguente diagramma importi/epoche.



Il montante V_n di una rendita annua anticipata a rata costante è

$$V_n = R\, \ddot{s}_{\overline{n}|i},$$

dove $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$, il montante di una rendita annua, unitaria, anticipata, immediata e temporanea, è definito dalla seguente espressione

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

All'epoca finale $n = 18$, il montante della rendita in esame è pari a

$$V_{18} = 470 \cdot 1.05 \cdot \frac{1.05^{18} - 1}{0.05} = 470 \cdot 29.539003907 = 13\,883.33\,.$$

□

Esercizio 21 *Un'azienda stipula con una società finanziaria un contratto di* leasing *(locazione) di durata quadriennale relativo ad un automezzo commerciale il cui prezzo di listino è di* 30 000 *euro. Il contratto prevede il versamento immediato di una quota pari al* 10 % *del valore del bene; l'azienda locataria si impegna inoltre a versare per tutta la durata del contratto canoni trimestrali posticipati di importo costante e, al termine del periodo di locazione, può acquistare l'automezzo pagando il prezzo di riscatto pari al* 15 % *del valore del bene. Si determini l'importo del canone sapendo che la società finanziaria intende ottenere dall'operazione un rendimento annuo del* 7.5 %*.*

Soluzione. Indichiamo con $F = 30\,000$ euro il prezzo di listino dell'automezzo. Sia A l'ammontare del *maxicanone anticipato* (pagato all'epoca $t = 0$), calcolato in percentuale sul prezzo di fattura del bene; si ha

$$A = 0.10\,F = 0.10 \cdot 30\,000 = 3\,000\,.$$

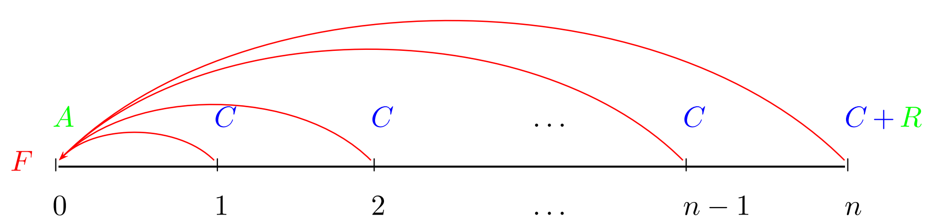
Sia R il *prezzo di riscatto* del bene, ovvero il prezzo versato in caso di acquisto del bene al termine del contratto di locazione, calcolato in percentuale sul valore F; si ha

$$R = 0.15\,F = 0.15 \cdot 30\,000 = 4\,500\,.$$

L'azienda locatrice dovrà pagare, inoltre, un insieme di canoni periodici (trimestrali, corrisposti in via posticipata) di importo costante C. Tale insieme di pagamenti si configura come una rendita temporanea (di n rate), immediata (il primo pagamento viene effettuato a partire dal primo periodo), a rata costante C posticipata (i pagamenti vengono effettuati alla fine del periodo di riferimento).

Noti i valori F, A, R, il numero dei canoni $n = 4 \cdot 4 = 16$ e il tasso di remunerazione annuo i, si deve determinare l'importo dei canoni trimestrali C.

L'operazione finanziaria di *leasing* è schematizzata come segue[9].



[9]Si noti che il maxicanone iniziale e il prezzo di riscatto sono stati evidenziati in un colore diverso per distinguerli dall'insieme dei canoni ordinari C corrisposti trimestralmente.

L'equazione[10]

$$F = A + C\frac{1-(1+i_4)^{-16}}{i_4} + R(1+i)^{-4} = A + C a_{\overline{16}|i_4} + R(1+i)^{-4}$$

stabilisce che, da un punto di vista finanziario, è equo scambiare un bene di valore F contro un insieme di pagamenti $\{A, C, C, \ldots, C, R\}$.

Dall'equazione precedente, con alcuni semplici passaggi algebrici, si ricava C in funzione delle altre variabili in gioco:

$$C = \frac{F - A - R(1+i_4)^{-16}}{a_{\overline{n}|i}}.$$

Poiché i canoni sono trimestrali e il tempo è espresso in trimestri, è necessario determinare il tasso trimestrale i_4 equivalente al tasso annuo i. Si ha

$$i_4 = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1+0.075)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0.0182446\ldots$$

Sostituendo i dati nella formula trovata per C si ha

$$C = \frac{30\,000 - 3\,000 - 4\,500\,(1+0.0182446)^{-16}}{a_{\overline{16}|0.0182446}} = 1716.27\,.$$

□

Ammortamenti

Esercizio 22 ***(Ammortamento italiano)*** *Un prestito di ammontare* 30 000 *euro viene ammortizzato in* 6 *anni mediante il pagamento di rate annuali posticipate con quote di capitale costanti. Sapendo che il tasso di interesse annuo è dell'*8.5 %, *si rediga il piano di ammortamento.*

Soluzione. Indichiamo con $S = 30\,000$ la somma mutuata. Per la restituzione di tale capitale è previsto il pagamento di $n = 6$ rate caratterizzate da quote di ammortamento (capitale) costanti.

Calcoliamo innanzitutto la quota di capitale, ricordando a tal fine che in generale sussiste il vincolo di chiusura

$$S = \sum_{k=1}^{n} C_k\,.$$

Nel caso dell'ammortamento italiano, la quota di capitale è costante $C_k = C$, per cui si ha

$$S = \sum_{k=1}^{n} C = n\,C \qquad \text{da cui} \qquad C = \frac{S}{n}\,.$$

[10]Avremmo potuto scrivere, in maniera del tutto equivalente, la seguente equazione

$$F = A + C\frac{1-(1+i_4)^{-16}}{i_4} + R(1+i_4)^{-16}.$$

La quota di capitale è quindi
$$C = \frac{30\,000}{6} = 5\,000\,.$$
Ricordando che $D_0 = S$, dalle relazioni che seguono

$$D_k = D_{k-1} - C = \frac{n-k}{n} S$$

$$I_k = i\, D_{k-1} = i\, \frac{n-k+1}{n} S$$

$$R_k = C + I_k\,,$$

per $k = 1, 2, \ldots, n$, possiamo ricavare tutte le altre grandezze.
Il piano di ammortamento è il seguente

k	R_k	$C_k = C$	I_k	D_k
0	0	0	0	30000.00
1	7550.00	5000.00	2550.00	25000.00
2	7125.00	5000.00	2125.00	20000.00
3	6700.00	5000.00	1700.00	15000.00
4	6275.00	5000.00	1275.00	10000.00
5	5850.00	5000.00	850.00	5000.00
6	5425.00	5000.00	425.00	0

Riportiamo i calcoli per esteso solamente per la prima rata

$$I_1 = i\, D_0 = 0.085 \cdot 30\,000 = 2\,550$$

$$D_1 = D_0 - C = 30\,000 - 5\,000 = 25\,000$$

$$R_1 = C + I_1 = 5\,000 + 2\,550 = 7\,550\,.$$

□

Esercizio 23 *(**Ammortamento a rate costanti posticipate**) Per procedere al rinnovo di un macchinario obsoleto, un imprenditore tessile contratta con un istituto di credito un prestito di* 75 000 *euro, da rimborsarsi in* 6 *rate semestrali posticipate di importo costante in base al tasso di interesse annuo dell'*8 %*. Si rediga il piano di ammortamento del prestito.*

Soluzione. Il modello di ammortamento adottato dalle parti contrattuali, che prevede il pagamento di rate costanti posticipate, va sotto il nome di *ammortamento francese*. Secondo tale modello di ammortamento, la somma $S = 75\,000$ euro, che all'epoca $t = 0$

passa dall'istituto di creditore (parte creditrice) all'imprenditore tessile (parte debitrice), è intesa come il valore attuale di una rendita posticipata a rate costanti di importo R. Sfruttando allora la nota equivalenza finanziaria

$$S = \sum_{k=1}^{n} R(1+i)^{-k} = R\, a_{\overline{n}|i},$$

si ottiene facilmente l'importo incognito R

$$R = \frac{S}{a_{\overline{n}|i}}.$$

Prima di procedere all'effettivo calcolo di R, occorre convertire il tasso annuo $i = 8\%$ nell'equivalente tasso semestrale i_2

$$i_2 = (1 + 0.08)^{1/2} - 1 = 0.03923048454\ldots,$$

essendo le sei rate di ammortamento pagate con cadenza semestrale. Riscrivendo la relazione di cui sopra otteniamo l'importo della rata costante

$$R = \frac{75\,000}{\dfrac{1-(1+0.03923048454)^{-6}}{0.03923048454}} = 14\,271.32.$$

Il piano di ammortamento da redigere è rappresentabile mediante la seguente tabella:

Epoca k	$R = C_k + I_k$	C_k	I_k	D_k
0	0			
1	14 271.32			
2	14 271.32			
3	14 271.32			
4	14 271.32			
5	14 271.32			
6	14 271.32			0

dove è stato riportato l'importo costante delle rate di ammortamento, ossia $R_k = R = 14\,271.32$ euro, per $k = 1, \ldots, 6$, e il vincolo di chiusura sul debito residuo all'epoca finale, $D_6 = 0$. Per determinare le quantità incognite C_k, I_k e D_k, possiamo sfruttare la caratteristica dell'ammortamento francese di avere quote di capitale crescenti in progressione geometrica di ragione $(1 + i)$, ossia

$$\begin{aligned} C_k &= C_{k-1}(1+i), \\ &= C_{k-2}(1+i)(1+i) = C_{k-2}(1+i)^2, \\ &= \ldots \\ &= C_1(1+i)^{k-1}, \qquad\qquad k = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Una volta trovata un'espressione per C_1 si riesce agevolmente a calcolare tutte le altre quote di capitale. Partendo dalla condizione di chiusura, $S = \sum_{k=1}^{n} C_k$, e svolgendo semplici passaggi si ottiene per C_1 la seguente relazione

$$C_1 = R(1+i)^{-n},$$

da cui, sostituendo, si ha

$$C_k = R(1+i)^{-(n-k+1)}, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Per differenza tra le rate e le quote di capitale si possono ottenere direttamente anche le quote interessi I_k

$$I_k = R\big[1-(1+i)^{-(n-k+1)}\big], \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Infine, il debito residuo D_k può essere scritto come segue

$$\begin{aligned} D_k &= \sum_{j=k+1}^{n} C_j \\ &= R \sum_{j=k+1}^{n} (1+i)^{-(n-j+1)} \\ &= R\, a_{\overline{n-k}|i}, \qquad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1. \end{aligned}$$

Tali relazioni consentono di calcolare per ogni epoca k le singole voci del piano di ammortamento:

k	$R = C_k + I_k$	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	75 000.00
1	14 271.32	11 329.03	2 942.29	63 670.97
2	14 271.32	11 773.48	2 497.84	51 897.49
3	14 271.32	12 235.36	2 035.96	39 662.13
4	14 271.32	12 715.36	1 555.96	26 946.77
5	14 271.32	13 214.19	1 057.13	13 732.58
6	14 271.32	13 732.58	538.74	0

□

Esercizio 24 *Si completi il seguente piano di ammortamento:*

k	t_k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	0	5000
1	1		1000		
2	3				2341
3	6			369	

Soluzione. Ovviamente $D_3 = 0$. Per il vincolo di chiusura, si ha

$$C_3 = D_2\,,$$

e quindi $C_3 = 2\,341$; di conseguenza possiamo ricavarci immediatamente R_3 facendo la somma di quota capitale ed interesse

$$R_3 = C_3 + I_3 = 2\,341 + 369 = 2\,710\,,$$

e in questo modo abbiamo completato l'ultima riga:

k	t_k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	0	5000
1	1		1000		
2	3				2341
3	6	2710	2341	369	0

Per proseguire con l'esercizio è necessario ricavare il tasso di interesse; siccome l'ultima rata viene pagata dopo 3 anni dalla penultima si ha che

$$I_3 = D_2(1+i)^3 - D_2\,,$$

da cui si ricava che il tasso di interesse annuo i è dato da

$$i = \left(\frac{I_3}{D_2}+1\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(\frac{369}{2\,341}+1\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.05\ldots \simeq 5\,\%\,.$$

A questo punto, siccome la prima rata viene pagata dopo un anno, si ha

$$I_1 = S\,i = 5\,000 \cdot 0.05 = 250$$

e quindi possiamo anche ricavare R_1 e D_1:

$$R_1 = C_1 + I_1 = 1\,000 + 250 = 1\,250\,,$$

$$D_1 = S - C_1 = 5\,000 - 1\,000 = 4\,000.$$

Abbiamo così completato la riga corrispondente a $k = 1$:

k	t_k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	0	5000
1	1	1250	1000	250	4000
2	3				2341
3	6	2710	2341	369	0

Per concludere, ricaviamo I_2 osservando che la seconda rata viene pagata a distanza di due anni dalla prima

$$I_2 = D_1(1+i)^2 - D_1 = 4\,000 \cdot (1.05^2) - 4\,000 = 410\,.$$

La quota capitale C_2 si ottiene considerando il debito residuo

$$D_2 = D_1 - C_2 \qquad \text{da cui} \qquad C_2 = D_1 - D_2 = 4\,000 - 2\,341 = 1\,659\,,$$

e la rata R_2 per somma di quota capitale ed interesse

$$R_2 = C_2 + I_2 = 1\,659 + 410 = 2\,069\,.$$

Abbiamo così completato il piano di ammortamento:

k	t_k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	0	5000
1	1	1250	1000	250	4000
2	3	2069	1659	410	2341
3	6	2710	2341	369	0

□

Esercizio 25 *Si completi il seguente piano di ammortamento con quote di capitale costanti.*

k	$R_k = C_k + I_k$	$C_k = C$	I_k	D_k
0	0	0	0	
1	6 500			25 000
2			1 250	
3				
4				
5				
6				

Soluzione. Trattandosi di ammortamento a quote di capitale costanti, la colonna di C_k è formata da valori tutti uguali tra di loro. La seconda quota interessi è calcolata sul debito residuo del primo anno, vale a dire su 25 000 euro:

$$I_2 = i\, D_1 \,.$$

Sostituendo i dati del problema si deve risolvere l'equazione

$$1\,250 = 25\,000\, i \qquad \text{da cui} \qquad i = 0.05 \,.$$

Stabilito il tasso dell'operazione, e indicato con S l'importo mutuato, la rata di 6 500 euro è data dalla somma tra la prima quota capitale (cioè, 1/6 del debito) e la prima quota interessi (cioè, il 5 % di S):

$$R_1 = C_1 + I_1 = \frac{1}{6}\, S + 0.05\, S = 6\,500 \,,$$

da cui ricaviamo

$$S = 30\,000 \,.$$

La quota di capitale è quindi

$$C = \frac{30\,000}{6} = 5\,000.$$

La compilazione del piano di ammortamento è lasciata al lettore[11].

□

Esercizio 26 *Un individuo riceve a prestito la somma di* 40 000 *euro che deve restituire in* n *rate annue costanti, pagate in via posticipata, di importo* 9 495.86 *euro ciascuna e calcolate in base al tasso annuo del* 6 %. *Si determini il numero di rate necessarie per estinguere il debito e si rediga il piano di ammortamento.*

Cenno di soluzione. Dalla relazione

$$R\, \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = S$$

[11] Si veda, a tal proposito, il procedimento proposto nell'esercizio 22.

si ricava

$$n = \left\lfloor -\frac{\ln(1 - iS/R)}{\ln(1+i)} \right\rfloor .$$

Si osservi che il numero di rate deve essere **intero** e tale che il loro valore attuale sia uguale (o, meglio, maggiore o uguale) alla somma presa a prestito. Sostituendo i dati del problema, si ottiene $n = 5$ (si noti anche che, per effetto dell'arrotondamento dell'importo della rata, otteniamo $4.99999\ldots$).

□

Esercizio 27 *Si riceve oggi un finanziamento di* 500 000 *euro da restituire in* 2 *rate di uguale importo pagate rispettivamente tra* 2 *anni e tra* 4 *anni. Se il tasso di interesse annuo è del* 5 %, *calcolare la rata e redigere il piano di ammortamento.*

Suggerimento. Si possono seguire due procedimenti alternativi per la determinazione della quota interessi:

1. calcolo di I_k ($k = 1, 2$) utilizzando la formula dell'interesse in regime di interesse composto
$$I_1 = D_0[(1+i)^2 - 1]$$
$$I_2 = D_1[(1+i)^2 - 1]\,;$$
2. calcolo di I_k ($k = 1, 2$) utilizzando la relazione $I_k = i_{BI} D_{k-1}$, dove con i_{BI} si è indicato il tasso *biennale* equivalente al tasso annuo i
$$i_{BI} = (1+i)^2 - 1.$$

□