UNIVERSITÀ CA' FOSCARI DI VENEZIA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA APPLICATA

Esercizi sulle funzioni: modelli lineari e non lineari con applicazioni all'economia

Pierangelo Ciurlia, Riccardo Gusso, Martina Nardon

Quaderno di Didattica n. 20/2006
giugno 2006

Esercizi sulle funzioni: modelli lineari e non lineari con applicazioni all'economia

Pierangelo Ciurlia
<ciurlia@unive.it>

Riccardo Gusso
<rgusso@unive.it>

Martina Nardon
<mnardon@unive.it>

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia
Dorsoduro 3825/E
30123 Venezia, Italy
http://www.dma.unive.it/

Premessa

Questa dispensa propone alcuni esercizi svolti di matematica inerenti alle funzioni reali di variabile reale con applicazioni all'economia. Alcuni problemi sono tratti da temi d'esame o ispirati agli esercizi del testo di Waner e Costenoble (2006) "*Strumenti Quantitativi per la Gestione Aziendale*".

Questo lavoro è rivolto agli studenti dei corsi di Matematica I della Facoltà di Economia e rappresenta un utile strumento per la preparazione all'esame.

GLI AUTORI

Esercizi sulle funzioni

Esercizio 1 *Nel 1994 circa* 10 000 *diplomati delle scuole superiori erano intenzionati a laurearsi in architettura. Questa cifra è scesa a circa* 8 500 *nel 2000 ed è risalita a* 8 800 *nel 2004. Modellate questo numero I come funzione lineare definita a tratti del tempo t espresso in anni trascorsi dal 1994. Utilizzate il modello per stimare il numero dei diplomati intenzionati a laurearsi in architettura nel 2002.*

Soluzione. La funzione $I(t)$, che descrive il numero approssimato di studenti intenzionati ad iscriversi alla facoltà di architettura, è una funzione del tempo t (espresso in anni). Consideriamo questa funzione negli anni compresi dal 1994 al 2004, dove $t = 0$ rappresenta l'anno 1994. I dati dell'esercizio sono riportati nella seguente tabella:

t	0	6	10
$I(t)$	10 000	8 500	8 800

Il dominio di I è l'intervallo $[0, 10]$. Si assume che la situazione descritta possa essere ben approssimata dalla seguente funzione

$$I(t) = \begin{cases} -250t + 10\,000 & 0 \leq t \leq 6 \\ 75t + 8\,050 & 6 < t \leq 10\,. \end{cases}$$

Tale funzione è stata determinata nel modo seguente:

1. il primo tratto si ottiene dall'equazione della retta passante per i punti di coordinate[1]
$$(0,\ 10\,000) \qquad (6,\ 8\,500)\,;$$
2. il secondo tratto si ottiene dall'equazione della retta passante per i punti di coordinate
$$(6,\ 8\,500) \qquad (10,\ 8\,800)\,.$$

Si osservi che la pendenza è negativa nel primo tratto (e quindi la funzione è decrescente), mentre è positiva per $6 < t < 10$ (funzione crescente). Il grafico della funzione è riportato in figura 1.

[1] In alternativa, possiamo determinare l'equazione della retta $y = mx + b$, note la pendenza m e le coordinate di un punto. Ad esempio, dato il punto $(0,\ 10\,000)$ conosciamo l'ordinata all'origine, mentre $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8\,500 - 10\,000}{6-0}$.

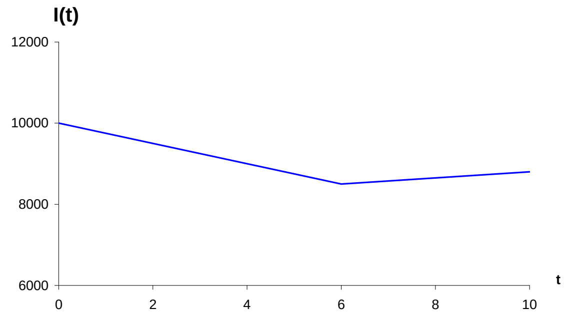


Figura 1: Scelte di carriera.

Cosa si può dire di $I(8)$, ovvero del numero di studenti intenzionati ad iscriversi ad architettura nel 2002? Possiamo stimare tale numero sulla base del modello appena descritto. Si trova allora

$$I(8) = 75 \cdot 8 + 8\,050 = 8\,650\,.$$

□

Esercizio 2 *Siete il direttore dell'ufficio vendite della società Alpha che produce software e dovete decidere a quale prezzo vendere un nuovo programma. Sia q la variabile che descrive la quantità di programmi venduti dalla società e si ipotizzi che q dipenda dal prezzo unitario p in base alla relazione*

$$q = -\frac{1}{2}p + 250\,.$$

Si rappresenti graficamente e si risolva analiticamente (illustrando tutti i passaggi) il problema della determinazione del prezzo che massimizza i ricavi.

Soluzione. Il **ricavo totale**, che indicheremo con R, è dato dal prodotto tra la quantità venduta q per il prezzo unitario p. Nel caso in esame, R è una funzione del prezzo p:

$$R(p) = q(p)\,\cdot\,p\,.$$

La funzione di domanda

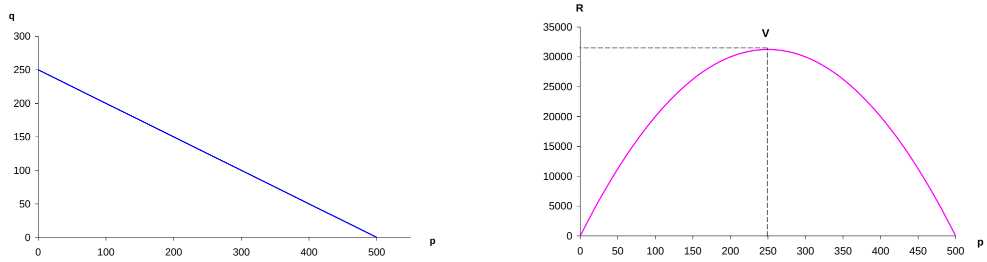
$$q = -\frac{1}{2}p + 250\,,$$

descrive la quantità venduta in funzione del prezzo (il suo grafico è riportato nella figura 2.a). Risulta

$$R = q\,\cdot\,p = \left(-\frac{1}{2}p + 250\right)\,p = -\frac{1}{2}p^2 + 250p\,.$$

Dobbiamo quindi stabilire qual è il prezzo che massimizza i ricavi.

Si osservi che il ricavo è una funzione quadratica del prezzo unitario (il suo grafico è riportato nella figura 2.b). Chiaramente siamo interessati solo a valori non negativi del



(a) (b)

Figura 2: Rappresentazione grafica della funzione di domanda (a) e della funzione ricavo (b).

prezzo e del ricavo; ci limitiamo, quindi, allo studio della funzione per valori di $p \geq 0$ (ed $R \geq 0$).

Come appare chiaro dal grafico della funzione, il massimo è raggiunto in corrispondenza del vertice[2] della parabola di equazione

$$R = -\frac{1}{2}p^2 + 250p\,.$$

Il **prezzo che massimizza i ricavi** è

$$p^* = -\frac{250}{-2 \cdot \frac{1}{2}} = 250$$

e il **ricavo massimo** risulta

$$R^* = -\frac{1}{2}(250)^2 + 250 \, \cdot \, 250 = 31\,250\,.$$

Sebbene non richiesto dall'esercizio, potremmo anche essere interessati a determinare il **livello di vendite ottimale**, che risulta

$$q^* = q(p^*) = -\frac{1}{2}\,250 + 250 = 125\,.$$

□

Esercizio 3 *Alla fine della prima settimana dopo il lancio di un nuovo prodotto della società Alpha i profitti ammontavano a* $150\,000$ *euro, mentre dopo un mese tali profitti risultavano* $850\,000$ *euro. Assumendo che i profitti siano descritti da una funzione esponenziale del tempo,*

a. *trovare un modello che permetta di prevedere il livello dei profitti dopo t settimane;*

[2]Può essere utile ricordare che le coordinate del vertice della parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ sono date da $V = (-\frac{b}{2a}\,,\,-\frac{\Delta}{4a})$, dove $\Delta = b^2 - 4ac$.

b. *utilizzare tale modello per stimare l'ammontare dei profitti dopo* 6 *settimane dal lancio del prodotto;*

c. *commentare l'attendibilità delle stime ottenute.*

Soluzione. Indichiamo con Π il **profitto** che, nel caso in esame, è una quantità che varia nel tempo. Quindi Π (**variabile dipendente**) sarà una funzione di t e verrà indicata con

$$\Pi(t) \qquad\qquad t \geq 0\,,$$

dove t il **tempo** espresso **in settimane** (con 1 mese = 4 settimane). Consideriamo come istante iniziale $t = 0$ l'epoca corrispondente

"*alla fine della prima settimana*".

Più precisamente, si assume che il profitto sia una **funzione esponenziale** del tempo, ovvero una funzione del tipo

$$y = A\,b^x\,,$$

dove A e $b > 0$ sono due **parametri**. Con la notazione introdotta, scriveremo

$$\Pi(t) = A\,b^t\,,$$

e cercheremo di determinare i valori dei parametri a partire dai dati del problema.

È immediato osservare che

$$\Pi(0) = A\,b^0 = A\,.$$

All'epoca iniziale la funzione assume quindi il valore A. Utilizzando una notazione speciale, scriveremo

$$\Pi(t) = \Pi_0\,b^t \qquad \text{con} \qquad \Pi_0 = \Pi(0)\,.$$

Riassumiamo i dati del problema:

$$\begin{array}{ll} t = 0 & \qquad \Pi(0) = 150\,000 \\ t = 4 & \qquad \Pi(4) = 850\,000\,. \end{array}$$

Si tratta di risolvere il seguente sistema di due equazioni in due incognite (Π_0 e $b > 0$):

$$\begin{cases} \Pi_0\,b^0 = 150\,000 \\ \Pi_0\,b^4 = 850\,000 \end{cases}$$

da cui si ricava immediatamente[3]

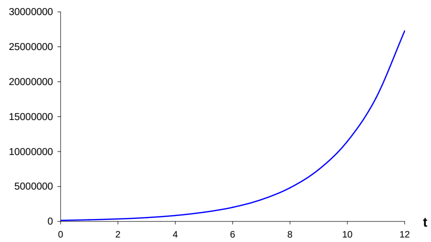
$$\Pi_0 = 150\,000$$

e, per sostituzione,

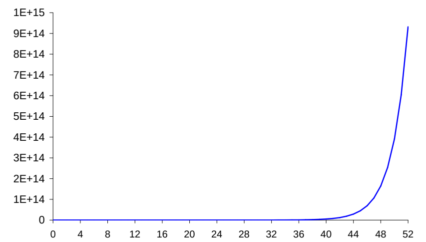
$$150\,b^4 = 850 \qquad \text{da cui} \qquad b = 1.54287917\ldots\,.$$

Possiamo quindi scrivere il seguente modello esponenziale

$$\Pi(t) = 150\,000\,(1.54287917)^t \qquad t \geq 0$$



(a)



(b)

Figura 3: Grafico della funzione del profitto $\Pi(t)$ nei primi 3 mesi (a) e nel primo anno (b).

e utilizzare tale modello per calcolare $\Pi(6)$,

$$\Pi(6) = 150\,000\,(1.54287917)^6 = 2\,023\,404.69\,.$$

Il modello trovato è attendibile (ossia può essere tranquillamente utilizzato) per stimare il profitto in corrispondenza di qualsiasi epoca t? Cosa succede per t "grande"? Si osservino i due grafici riportati in figura 3 e si traggano le opportune conclusioni. □

Esercizio 4 *Un noto ristorante del centro incrementa ogni anno del* 5 % *il numero dei clienti. Dopo quanto tempo il numero di clienti sarà aumentato del* 50 % *?*

Soluzione. Indichiamo con $N(t)$ la funzione che descrive il numero di clienti al variare del tempo (espresso in anni). Assumiamo[4]

$$N\,:\,\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+\,.$$

Cerchiamo di costruire un modello matematico idoneo a descrivere il problema in esame.

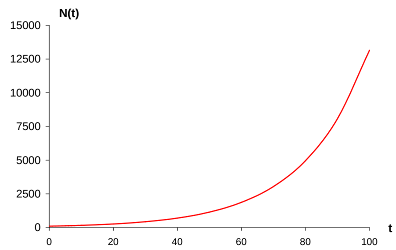
In $t = 0$, il numero dei clienti sarà $N(0)$. Supponiamo che questo valore sia noto (sia cioè un parametro del nostro problema) e adottiamo la notazione $N(0) = N_0$.

Procediamo come segue:

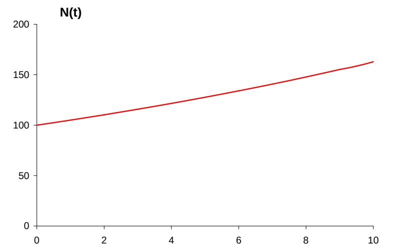
$$\begin{array}{ll}
t = 0 & N(0) = N_0 \\
t = 1 & N(1) = N_0 + 5\%\,N_0 = N_0\,(1 + 0.05) = N_0\,(1.05) \\
t = 2 & N(2) = N(1)\,(1.05) = N_0\,(1.05)^2 \\
t = 3 & N(3) = N(2)\,(1.05) = N_0\,(1.05)^3 \\
\dots & \dots \\
t = n & N(n) = N(n-1)\,(1.05) = N_0\,(1.05)^n \\
\dots & \dots
\end{array}$$

[3]Come avevamo, del resto, già scoperto.

[4]Il "numero dei clienti" dovrebbe essere intero. . . , ma qui assumiamo sia un numero reale non negativo.



(a)



(b)

Figura 4: Grafico della funzione $N(t) = N_0(1.05)^t$, con $N_0 = 100$, per $0 \le t \le 100$ nel caso (a) e $0 \le t \le 10$ nel caso (b).

Abbiamo così costruito una successione[5] di valori per $N(t)$, dove $t = 0, 1, 2, \ldots$.

In generale, poiché il tempo t può assumere valori non negativi, possiamo scrivere

$$N(t) = N_0(1.05)^t \qquad t \ge 0\,.$$

Il modello così determinato è esponenziale del tipo

$$y = A\, b^x\,,$$

con $b = 1.05$, e quindi è una funzione crescente essendo la base $b > 1$ (si veda la figura 4).

Ci si chiede dopo quanto tempo t^* il numero di clienti sarà aumentato del $50\,\%$. Osservato che

$$N(t^*) = N_0 + 50\%\, N_0 = 1.5\, N_0\,,$$

si tratta di risolvere, rispetto alla variabile t, la seguente equazione

$$1.5\, N_0 \;=\; N_0(1.05)^t \qquad \text{da cui} \qquad 1.5 \;=\; (1.05)^t\,.$$

Si ha[6]

$$t^* = \log_{1.05} 1.5 = \frac{\ln 1.5}{\ln 1.05} = 8.310386222\ldots \simeq 8.31\,,$$

che corrisponde circa a 8 anni, 3 mesi e 22 giorni. □

Esercizio 5 *Le due associazioni studentesche Sigma ed Alpha decidono di raccogliere fondi vendendo magliette nello Student Center, ma non hanno ancora stabilito il prezzo unitario. Il presidente di Sigma ricorda che una volta sono riusciti a vendere* 400 *magliette in una settimana a* 8 *euro l'una, mentre il presidente di Alpha afferma che in base alle esperienze passate, si possono vendere* 600 *magliette alla settimana a un prezzo di* 4 *euro l'una.*

[5]Si tratta di una successione di termini crescenti in progressione geometrica di ragione 1.05.

[6]Si osservi che è stata applicata la formula per il cambiamento di base dei logaritmi

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}\,.$$

Se come base c si considera il numero e, si ottiene $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$. Si osservi, inoltre, che con le notazioni "$\ln x$" e "$\log x$" si indicherà indifferentemente il logaritmo di x in base e, ovvero il *logaritmo naturale* di x.

a. *Basandovi su queste poche informazioni, costruite un'equazione di domanda lineare per le magliette; esprimete poi il ricavo settimanale R come funzione del prezzo unitario p.*

b. *L'amministrazione dell'università chiede* 500 *euro alla settimana per l'utilizzo dello Student Center. Scrivete il profitto mensile* Π *come funzione del prezzo unitario p; determinate il prezzo che si dovrebbe fissare per ottenere il maggior profitto settimanale. Qual è il maggior profitto settimanale possibile?*

Soluzione. Sia q la quantità di magliette venduta. La funzione di domanda lineare che si ottiene a partire dai dati del problema è la seguente

$$q = -50p + 800\,.$$

Il ricavo settimanale è dato dall'espressione

$$R(p) = q(p)\,\cdot\,p = -50p^2 + 800p\,,$$

mentre i **costi** settimanali sono **fissi** e pari a 500 euro, quindi la **funzione di costo** è indipendente dalla quantità venduta (e dal prezzo) per cui risulta

$$C = 500\,.$$

Dalla differenza tra ricavi e costi fissi settimanali, si ottiene che il profitto su base settimanale π è

$$\pi = -50p^2 + 800p - 500\,.$$

Assumendo che un mese corrisponda esattamente a quattro settimane, il **profitto mensile** Π è dato da

$$\Pi = 4, \pi = 4(R\, -\, C) = -200p^2 + 3\,200p - 2\,000\,.$$

Si deve determinare qual è il prezzo che massimizza il **profitto settimanale** (e ovviamente anche il profitto mensile). Il profitto è quindi una funzione quadratica del prezzo e raggiunge il suo valore massimo in corrispondenza di

$$p^* = -\frac{800}{2(-50)} = 8\,.$$

Il massimo profitto è allora

$$\pi^* = 2\,700\,.$$

□

Esercizio 6 *Supponiamo che, dopo un'attenta analisi dei bilanci degli ultimi* 5 *anni dell'azienda Ypsilon, si sia determinato il seguente andamento dei profitti* Π *in funzione dei ricavi* R

$$\Pi(R) = 0.175\,R - 18.9\,,$$

dove Π *ed* R *sono espressi in milioni di euro.*

Si analizzi tale modello e le informazioni che esso può fornire relativamente all'azienda in questione, e lo si utilizzi per trovare un'equazione che esprima i costi annui C *come funzione affine dei ricavi annui.*

Soluzione. Il modello che descrive il profitto in funzione dei ricavi è di tipo lineare (affine). Il coefficiente angolare della retta $\Pi = 0.175\,R - 18.9$ esprime il rapporto tra una variazione del profitto dell'azienda e una variazione del ricavo[7]. Nel caso in esame esso è positivo e pari a 0.175, ciò significa che per ogni milione di euro di ricavi il profitto cresce di 175 000 euro. Possiamo, inoltre, osservare che il profitto dell'azienda è negativo fino a che non si raggiunge un ricavo R sufficiente a coprire i costi di produzione, e cioè tale che

$$0.175\,R - 18.9 = 0\,,$$

da cui

$$R = \frac{18.9}{0.175} = 108 \text{ milioni di euro}\,.$$

Ricordando che

$$\textbf{Profitto} = \textbf{Ricavi} - \textbf{Costi}\,,$$

si ha

$$\textbf{Costi} = \textbf{Ricavi} - \textbf{Profitto}$$

e quindi

$$C(R) = R - P(R) = R - 0.175\,R + 18.9 = 0.825\,R + 18.9\,,$$

che è effettivamente una funzione affine.

Dalla relazione precedente otteniamo che l'azienda Ypsilon ha dei costi fissi di produzione di 18.9 milioni di euro e che, per ogni milione di euro di ricavi, 825 000 euro di essi vengono assorbiti dai costi di produzione. □

Esercizio 7 *Un'analisi di mercato commissionata da una nota marca di automobili, in vista della produzione del nuovo modello di punta della propria linea, ha stabilito che i potenziali acquirenti sono disposti a pagare un prezzo maggiore pur di avere un prodotto esclusivo. Ad esempio, se verranno prodotti solo* 50 *esemplari il prezzo medio offerto sarà di* 200 000 *euro, mentre se ne verranno prodotti* 80 *esso scenderà a* 140 000 *euro. Assumendo che vi sia una relazione affine fra il prezzo offerto e la quantità di auto prodotte, calcolare quante automobili vanno costruite per massimizzare il ricavo. A quanto ammonta il ricavo massimo?*

Soluzione. Assumiamo dunque che la relazione fra prezzo offerto p e quantità di auto realizzate q abbia un andamento di tipo **affine**, cioè

$$p = mq + k$$

dove m e k sono i due parametri da determinare. Imponendo le condizioni fornite dai dati a disposizione, si ottiene il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} 200\,000 = m \cdot 50 + k \\ 140\,000 = m \cdot 80 + k\,. \end{cases}$$

[7]In un modello lineare tale rapporto è ovviamente costante e rappresenta geometricamente la pendenza della retta.

Risolvendolo otteniamo $m = -2000$ e $k = 300\,000$, per cui la forma esplicita della relazione fra il prezzo e la quantità è

$$p = -2000q + 300\,000\,.$$

A questo punto, ricordando che il ricavo è dato dal prodotto del prezzo unitario di vendita per la quantità di auto, possiamo scrivere la relazione fra R e q come segue

$$R(q) = p(q) \cdot q = (-2\,000q + 300\,000)q = -2\,000q^2 + 300\,000q\,. \tag{1}$$

La relazione è dunque **quadratica**, ossia del tipo $ax^2 + bx + c$, e il suo grafico è quello di una parabola[8]. Pertanto, per trovare la quantità che dà il ricavo massimo dovremo calcolare l'ascissa del vertice della parabola, la cui espressione è come ben noto $-\frac{b}{2a}$. Essendo $b = 300\,000$ e $a = -2\,000$, nel nostro caso si ha dunque che $q_{max} = 75$. Il ricavo massimo è quindi dato da

$$R_{max} = R(q_{max}) = -2\,000 \cdot 75^2 + 300\,000 \cdot 75 = \ 11\,250\,000\,.$$

□

Esercizio 8 *Un analista di mercato sta cercando di stabilire qual è il modello migliore che rappresenta l'andamento dei ricavi dell'azienda C&C in funzione del tempo, sapendo che essi ammontavano a* 5 *e* 7.2 *miliardi di euro negli anni 1999 e 2004, rispettivamente. I dati sui ricavi relativi agli anni compresi tra il 1999 e il 2004 (dove con* $t = 0$ *si è indicato l'anno 1999 e con* $t = 5$ *l'anno 2004) sono riportati nella seguente tabella*

t	0	1	2	3	4	5
$R(t)$	5	5.8	5.8	6.5	7	7.2

Si stabilisca quale tra un modello lineare affine e uno esponenziale è il più idoneo a rappresentare l'andamento dei ricavi di C&C.

Soluzione. Ricordiamo che un modello **affine** dei ricavi in funzione di t è della forma

$$R(t) = mt + k\,,$$

mentre uno **esponenziale** è della forma

$$R(t) = ab^t\,,$$

con $b > 0$.

I parametri m, k, a e b devono essere determinati a partire dai dati. Imponendo le condizioni fornite dai dati sui ricavi nel 1999 e 2004 al modello affine si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 5 = m \cdot 0 + k \\ 7.2 = m \cdot 5 + k\,, \end{cases}$$

da cui si ricava $m = 0.44$ e $k = 5$; per cui il modello affine è

$$R(t) = 0.44 \cdot t + 5.$$

[8] La funzione è concava poiché $a < 0$.

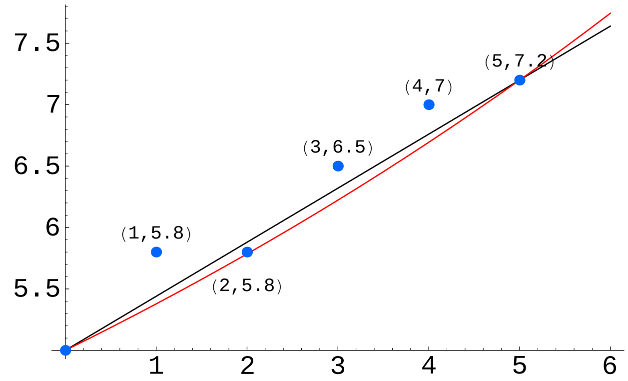


Figura 5: Andamento dei ricavi di C&C.

Analogamente, per il modello esponenziale si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a \cdot b^0 = 5 \\ a \cdot b^5 = 7.2\,, \end{cases}$$

da cui si ricava $a = 5$ e $b = 1.44^{\frac{1}{5}}$; per cui il modello esponenziale si può scrivere come

$$R(t) = 5 \cdot (1.44)^{\frac{t}{5}}\,.$$

Per stabilire quale dei due modelli rappresenta meglio l'andamento dei ricavi di C&C, tracciamo nella figura 5, che riporta i dati reali, i grafici delle funzioni affine ed esponenziale precedentemente ottenuto.

Dalla semplice osservazione della figura 5, si nota come il modello che si avvicina di più ai dati della tabella sia quello affine[9]. $\square$

Esercizio 9 *Un'inchiesta giornalistica ha evidenziato che il numero di scippi ai danni di persone anziane nelle grandi città raddoppia ogni* 4 *mesi. Se tale andamento si manterrà nel tempo, dopo quanti mesi gli scippi triplicheranno?*

Soluzione. Indichiamo con $N(t)$ il numero di scippi in funzione del tempo, dove come unità di tempo prendiamo 4 mesi, cioè $t = 0$ significa "oggi", $t = 1$ significa "4 mesi", $t = 2$ significa "8 mesi", ecc. Se si assume $N(0) = a$, si ha $N(1) = a \cdot 2$, $N(2) = N(1) \cdot 2 = a \cdot 2^2$ e, in generale[10], $N(k) = a \cdot 2^k$ per ogni $k \geq 0$, come si prova facilmente per induzione[11]. Pertanto, il modello che descrive il numero di scippi in funzione del tempo è di tipo **esponenziale**:

$$N(t) = a\,2^t \qquad t \geq 0\,.$$

[9]Tale modo di procedere non è certamente il più rigoroso, in quanto non abbiamo utilizzato strumenti quantitativi e statistici sofisticati, ma fornisce senz'altro una conclusione accettabile. L'idea alla base è quella di cercare di approssimare al meglio la funzione dei ricavi tale da minimizzare lo scostamento dai dati reali. Nel caso in esame, la funzione affine risulta essere quella più "vicina" ai dati rilevati.

[10]Si veda lo svolgimento dell'esercizio 4.

[11]Per $k = 0$ la tesi è ovviamente vera; supponiamo sia vera per k qualsiasi e proviamo che essa vale per $k + 1$. Si ha, infatti, $N(k + 1) = N(k) \cdot 2 = a \cdot 2^k \cdot 2a \cdot 2^{k+1}$.

Per conoscere dopo quanto tempo il numero di scippi triplica dobbiamo risolvere l'equazione

$$N(t) = 3N(0)$$

nell'incognita t. Ossia dobbiamo determinare l'epoca t^* in corrispondenza della quale il numero degli scippi risulta triplicato. Si ottiene quindi

$$a2^t = 3a \qquad \text{da cui} \qquad 2^t = 3\,,$$

che ha come soluzione $t^* = \log_2 3 \simeq 1.58496$, e dunque il numero di scippi triplica ogni $1.58496 \cdot 4 \simeq 6.3$ mesi. □

Esercizio 10 *Per produrre un nuovo capo d'abbigliamento per donna, un'azienda tessile sostiene costi fissi per* 75 600 *euro e costi variabili nella misura del* 40 % *del ricavo totale. Determinare quante unità del nuovo prodotto l'azienda deve vendere per ottenere il pareggio tra costi e ricavi, assumendo che sia in grado di vendere fino a* 610 *unità ad un prezzo unitario di* 315 *euro.*

Soluzione. Per definizione, il **punto di pareggio** è la quantità q tale per cui il profitto $\Pi(q)$, dato dalla differenza tra ricavi totali $R(q)$ e costi di produzione $C(q)$, è nullo, ossia

$$R(q) = C(q)\,.$$

Dal problema sappiamo che i ricavi totali sono descritti da una funzione lineare,

$$R(q) = 315\,q\,,$$

mentre i costi di produzione, dati dalla somma dei costi fissi e di quelli variabili, sono una funzione affine della quantità q, ossia

$$\begin{aligned} C(q) &= 75\,600 + 0.4R(q) \\ &= 75\,600 + 126\,q. \end{aligned}$$

Eguagliando i ricavi totali ai costi di produzione, otteniamo la seguente equazione

$$315\,q = 75\,600 + 126\,q\,,$$

da cui si ricava che il punto di pareggio q^* è

$$q^* = \frac{75\,600}{189} = 400\,.$$

Osserviamo che per valori di $q \in (400,\, 610]$, l'azienda tessile realizzerà dei profitti, ossia si avrà $\Pi(q) > 0$. □

Esercizio 11 *La tabella seguente riassume le vendite annue medie (espresse in milioni di copie) di tutti i volumi universitari presenti nel catalogo di Alpha e Beta, due importanti società editrici specializzate nel settore dell'editoria universitaria:*

	Alpha	Beta
Numero di volumi	230	180
Vendite annue (milioni)	1.7	1.2

Si chiede di:

- ***a.*** *Utilizzare questi dati per esprimere le vendite annue medie y di una società editrice come funzione lineare del numero x di volumi presenti in catalogo.*
- ***b.*** *Stabilire in che misura il modello è coerente con la situazione della società editrice Gamma che ha un catalogo di 120 volumi universitari e vende 0.9 milioni di copie.*
- ***c.*** *Individuare un dominio all'interno del quale il modello sia coerente con delle vendite annue comprese tra 0 e 2.5 milioni.*

Soluzione.
a. Dalla tabella ricaviamo le coordinate di due punti del grafico delle vendite annue medie y come funzione del numero x di volumi presenti in catalogo: $(230, 1.7)$ e $(180, 1.2)$. La pendenza m è

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1.2 - 1.7}{180 - 230} = \frac{-0.5}{-50} = 0.01\,.$$

Utilizzando il punto $(230, 1.7)$ otteniamo l'equazione che definisce il modello lineare

$$\begin{aligned} y &= y_0 + m(x - x_0) \\ &= 1.7 + 0.01\,(x - 230) \\ &= 0.01x - 0.6\,. \end{aligned}$$

b. In base al modello lineare precedentemente determinato, la vendita annua media di 0.9 milioni è quella di una società editrice con un numero x di volumi, arrotondato al più vicino intero positivo, pari a

$$0.9 = 0.01x - 0.6 \qquad \text{da cui} \qquad x = 150\,.$$

Pertanto, la società editrice Gamma, con delle vendite annue medie di 0.9 milioni di copie, ha in catalogo un numero di volumi universitari minore rispetto a quello indicato dal modello lineare.

c. Per individuare un dominio coerente con il modello lineare definito dall'equazione $y = 0.01x - 0.6$, calcoliamo i valori della variabile indipendente x per i quali l'equazione assume i valori (espressi in milioni di copie) $y = 0$ e $y = 2.5$. Si ha

$$0 = 0.01x - 0.6 \qquad \text{da cui} \qquad x = 60$$

e

$$2.5 = 0.01x - 0.6 \qquad \text{da cui} \qquad x = 310\,.$$

Pertanto, gli interi positivi appartenenti all'intervallo $[60, 310]$ definiscono un dominio coerente con $0 \leq y(x) \leq 2.5$. $\square$

Esercizio 12 *La società Delta ha appena realizzato un nuovo modello di lavastoviglie integrata, la Favorit. Analizzando il potenziale di domanda del nuovo prodotto, l'ufficio marketing stima che l'azienda riesca a vendere* 1 100 *Favorit al mese a* 360 *euro, ma solo* 800 *al mese a* 420 *euro. Si determini il prezzo al quale l'azienda deve vendere le lavastoviglie Favorit per ottenere il massimo ricavo, supponendo che la domanda per questo nuovo prodotto sia di tipo lineare. Stabilire inoltre qual è il ricavo mensile massimo?*

Soluzione. Dalle coordinate dei due punti $(360, 1\,100)$ e $(420, 800)$ è possibile ricavare la pendenza m

$$m = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} = \frac{800 - 1\,100}{420 - 360} = \frac{-300}{60} = -5\,.$$

Utilizzando il valore trovato di m e uno dei due punti, ad esempio $(360, 1\,100)$, ricaviamo l'equazione della retta

$$\begin{aligned} q &= q_0 + m(p - p_0) \\ &= 1\,100 - 5(p - 360) \\ &= -5p + 2\,900. \end{aligned}$$

L'equazione del ricavo mensile R è data da

$$\begin{aligned} R &= p \cdot q \\ &= p \cdot (-5p + 2\,900) \\ &= -5p^2 + 2\,900p\,. \end{aligned}$$

Trattandosi dell'equazione di una parabola, sappiamo che il massimo ricavo si ottiene in corrispondenza dell'ascissa del vertice, ossia per un livello del prezzo p uguale a

$$p^* = -\frac{b}{2a} = -\frac{2\,900}{2(-5)} = 290\,.$$

Pertanto, il ricavo mensile massimo è pari a

$$R(290) = -5(290)^2 + 2\,900(290) = 420\,500\,.$$

□

Esercizio 13 *Il protossido di azoto è uno dei gas a effetto serra responsabili del progressivo riscaldamento del pianeta. Secondo le previsioni di un centro di ricerche sul clima, la quantità di protossido di azoto (misurata in parti di volume per bilione) è approssimabile con*

$$N(t) \simeq 284\, e^{0.0004143t}, \qquad 0 \leq t \leq 350\,,$$

dove t è il tempo in anni trascorsi dall'inizio dell'industrializzazione (anno 1750).

a. *Utilizzate il modello per stimare la quantità di protossido di azoto presente nell'atmosfera nel 1900, 2000 e 2100.*

b. *Quando, approssimando alla decina di anni, il livello supererà* 320 *parti per bilione?*

Soluzione.
a. La quantità di protossido di azoto presente nell'atmosfera negli anni 1900, 2000 e 2100 è pari rispettivamente a

$$\begin{array}{llll} \text{per} & t = 1900 - 1750 = 150 & N(150) \simeq 284\, e^{0.0004143 \cdot 150} & \simeq 302.2091 \\ \text{per} & t = 2000 - 1750 = 250 & N(250) \simeq 284\, e^{0.0004143 \cdot 250} & \simeq 314.9926 \\ \text{per} & t = 2100 - 1750 = 350 & N(350) \simeq 284\, e^{0.0004143 \cdot 350} & \simeq 328.3168\,. \end{array}$$

b. Per trovare il valore di t, arrotondato alla decina di anni, per cui $N(t) > 320$ parti per bilione, scriviamo la seguente equazione esponenziale

$$320 = 284\, e^{0.0004143\, t}\,,$$

che in forma logaritmica diventa

$$0.0004143\, t = \log \frac{320}{284}\,.$$

Possiamo ora esplicitare t

$$t = \frac{\log 320 - \log 284}{0.0004143} \simeq 288.0684\,.$$

Occorreranno quindi approssimativamente 290 anni (ossia, intorno all'anno 2040) perchè la quantità di protossido di azoto presente nell'atmosfera superi il livello di 320 parti per bilione. □

Esercizio 14 *La tabella seguente riporta i dati relativi alle vendite trimestrali di microprocessori e il prezzo medio di vendita all'ingrosso per ogni trimestre.*

	1997 II trim.	*1997 III trim.*	*1998 I trim.*
Prezzo all'ingrosso	\$235	\$215	\$210
Vendite (in milioni)	21	24	23

Ricavare dai dati del secondo trimestre 1997 e del primo trimestre 1998 una funzione lineare di domanda di microprocessori.
Utilizzate il modello per stimare le vendite trimestrali nel caso in cui il prezzo passi a \$ 215. *È possibile rappresentare tutti e tre i punti dati tramite la stessa funzione lineare di domanda?*

Soluzione. Si assume che la funzione di domanda sia di tipo lineare affine,

$$q(p) = mp + b\,,$$

dove q rappresenta la quantità (il numero di microprocessori venduti) e p il prezzo unitario.

Imponiamo alla retta di passare per i due punti di coordinate (235, 21) e (210, 23). Si tratta di calcolare i valori di m e b che soddisfano il sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} 21 = 235\, m + b \\ 23 = 210\, m + b \end{cases}$$

da cui si ricava

$$m = -\frac{2}{25} \qquad b = \frac{199}{5}.$$

La funzione di domanda risulta quindi

$$q = -\frac{2}{25}p + \frac{199}{5}.$$

Se $p = 215$, sostituendo tale valore nella funzione di domanda appena determinata si ha

$$q(215) = -\frac{2}{25}215 + \frac{199}{5} = \frac{113}{5}22.6 \neq 24\,.$$

È evidentemente impossibile che tutti i tre punti riportati nella tabella si dispongano linearmente; si osservi che il prezzo relativo al terzo trimestre del 1997 è intermedio tra i prezzi relativi agli altri due periodi considerati ($235 > 215 > 210$), ma le vendite corrispondenti risultano superiori. □

Esercizio 15 *Se la stima della popolazione mondiale nel 1900 era di* 1.6 *miliardi e nel 1990 di* 5.3 *miliardi*[12]*, assumendo una crescita esponenziale, cerchiamo una funzione adatta a rappresentare il fenomeno. In quale momento del mondo esistevano solo due persone? Commentare la vostra risposta.*

Soluzione. Esprimiamo la funzione nella forma

$$y = A\,b^t\,,$$

dove t è il tempo espresso in anni, con $0 \leq t \leq 90$ ($t = 0$ corrisponde all'anno 1900).

Il problema consiste nel trovare la curva esponenziale passante per i punti di coordinate $(0, 1.6)$ e $(90, 5.3)$; il sistema da risolvere è quindi il seguente

$$\begin{cases} 1.6 = A\,b^0 \\ 5.3 = A\,b^{90}\,. \end{cases}$$

Dividendo la seconda equazione per la prima, si ottiene

$$b^{90} = \frac{5.3}{1.6} \qquad \text{da cui} \qquad b = \left(\frac{5.3}{1.6}\right)^{\frac{1}{90}} \simeq 1.01339676\,.$$

La soluzione è quindi

$$A = 1.6 \qquad b = 1.01339676\,.$$

Per sapere quando sono esistiti Adamo ed Eva (da soli), bisogna risolvere l'equazione

$$2 \cdot 10^{-9} = 1.6\,(1.01339676)^t \qquad \text{da cui} \qquad t = \frac{\ln(2 \cdot 10^{-9})}{\ln 1.01339676}\,.$$

Si osservi che il risultato è negativo (stiamo tornando indietro nel tempo, a partire dal 1900) e si ha $t \simeq -1505$. Secondo il modello adottato, Adamo ed Eva dovrebbero essere vissuti circa 400 anni d.C.! □

[12] Assumiamo che entrambe le stime si riferiscano all'inizio dell'anno di riferimento. Quindi dal 1900 al 1990 contiamo esattamente 90 anni.

Esercizio 16 *La quantità di carbonio-14 che rimane in un campione di peso A grammi è data da*

$$C(t) = A\,(0.999879)^t,$$

indicando con t il tempo in anni[13]. *Qual è l'età di un fossile in cui solo il 30 % del carbonio-14 è decaduto.*

Soluzione. Se un fossile di peso A ha visto decadere il 30 % del proprio carbonio (quindi conservandone il 70 % = 0.7), si ricava l'età del fossile risolvendo la seguente equazione:

$$0.7A = A\,(0.999879)^t\,,$$

da cui

$$t^* = \frac{\ln 0.7}{\ln 0.999879} \simeq 2947.548469\,,$$

ovvero 2950 anni circa. □

[13] Quindi ogni anno se ne conserva più del 99.9 %.

Bibliografia

[BC] Barozzi, G.C., C. Corradi (1999). *Matematica Generale per le Scienze Economiche.* Il Mulino, Bologna.

[CFF] Cardin M., P. Ferretti, S. Funari (2005). *Introduzione Soft alla Matematica per l'Economia e la Finanza.* Diaprtimento di Matematica Applicata, Università Ca' Foscari di Venezia.

[WC] Waner S., S.R. Costenoble (2006). *Strumenti Quantitativi per la Gestione Aziendale.* Apogeo, Milano.