Department of Applied Mathematics, University of Venice

QUADERNI DI DIDATTICA

Tatiana Bassetto, Marco Corazza, Riccardo Gusso, Martina Nardon

Esercizi sulle funzioni di più variabili reali con applicazioni all'economia

Quaderno di Didattica n. 30/2008
Novembre 2008

Quaderno di Didattica n. 30/2008
Novembre 2008

Esercizi su funzioni in più variabili con applicazioni all'economia

Tatiana Bassetto
<tbassetto@unive.it>

Marco Corazza
<corazza@unive.it>

Riccardo Gusso
<rgusso@unive.it>

Martina Nardon
<mnardon@unive.it>

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia
Dorsoduro 3825/E
30123 Venezia, Italy
http://www.dma.unive.it/

Premessa

Questa dispensa propone alcuni esercizi svolti sulle funzioni a valori reali di più variabili reali, con applicazioni all'economia.

Questo lavoro è rivolto agli studenti dei corsi di Matematica II della Facoltà di Economia e rappresenta un utile strumento per la preparazione all'esame.

GLI AUTORI

Regione ammissibile

Esercizio 1 *Sia data la seguente funzione reale di variabili reali:*

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y - 0.5x}{\ln(y - x^2 - 2x + 3)}} \; ;$$

determinare l'insieme dei punti che definiscono il dominio di tale funzione e rappresentarlo graficamente.

Soluzione. Le condizioni che si devono imporre sono:

1. denominatore diverso da zero;
2. argomento del logaritmo positivo;
3. argomento della radice quadrata non negativo.

Se imponiamo che numeratore e denominatore siano positivi si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} y - 0.5x \geq 0 \\ \ln(y - x^2 - 2x + 3) > 0 \end{cases}$$

che diventa

$$\begin{cases} y \geq 0.5x \\ y - x^2 - 2x + 3 > 1 \end{cases}$$

ed infine

$$\begin{cases} y \geq 0.5x \\ y > x^2 + 2x - 2 \end{cases}$$

avente come soluzione

$$D_A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0.5x\big\} \cap \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 + 2x - 2\big\}.$$

Se imponiamo che numeratore e denominatore siano entrambi negativi si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} y - 0.5x \leq 0 \\ \ln(y - x^2 - 2x + 3) < 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} y \leq 0.5x \\ 0 < y - x^2 - 2x + 3 < 1 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} y \leq 0.5x \\ y > x^2 + 2x - 3 \\ y < x^2 + 2x - 2 \end{cases}$$

avente come soluzione

$$D_B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0.5x\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2+2x-3\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2+2x-2\}.$$

Il dominio della funzione è quindi $D = D_A \cup D_B$ ed è rappresentato nella figura 2, in cui sono esclusi i punti delle funzioni $y = x^2 + 2x - 2$ e $y = x^2 + 2x - 3$ e sono inclusi i punti della funzione $y = 0.5x$.

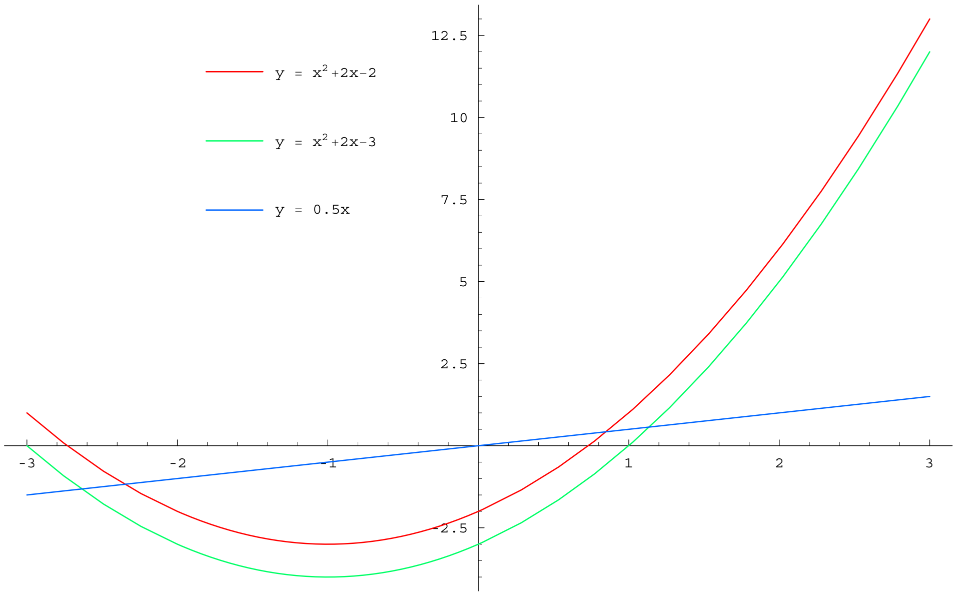

Figura 1: Grafico delle funzioni che delimitano il dominio di $f(x, y)$ (Esercizio 1).

$\square$

Esercizio 2 *Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione e rappresentarlo graficamente:*

$$f(x, y) = \frac{\log(x/y)}{\sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2}} .$$

Soluzione. Le condizioni che si devono imporre sono:

1. denominatori diversi da zero;

2. argomento del logaritmo positivo;

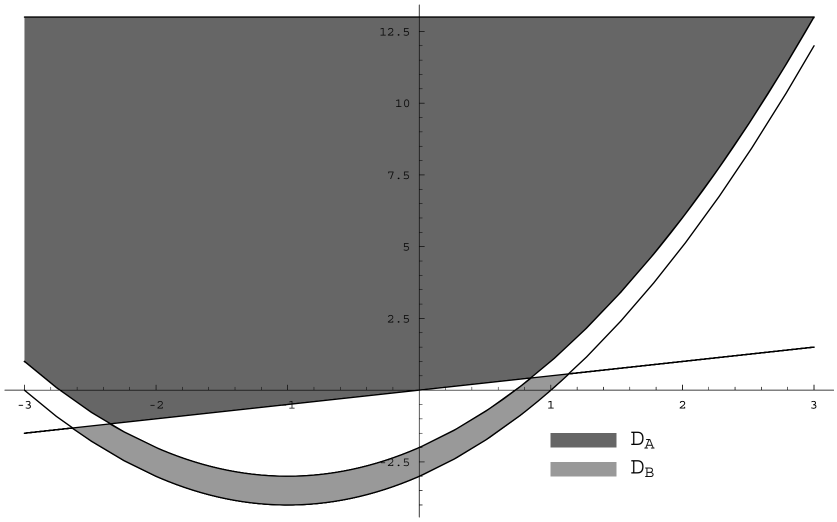

Figura 2: Dominio di $f(x,y)$ (Esercizio 1).

3. argomento di una radice di ordine pari non negativo.

Si deve, quindi, risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x/y > 0 \\ y \neq 0 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 \geq 0 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 \neq 0 \end{cases}$$

che diventa

$$\begin{cases} x/y > 0 \\ y \neq 0 \\ (x-2y)^2 > 0 \end{cases}$$

ed infine

$$\begin{cases} x/y > 0 \\ y \neq 0 \\ (x-2y) \neq 0 \; . \end{cases}$$

La seconda disequazione impone di escludere tutti i punti dell'asse delle ascisse. La terza disequazione impone che tutti i punti della retta $y = 0.5x$ debbono essere esclusi dal dominio. Studiamo la prima disequazione: poiché si tratta di un rapporto, essa risulta soddisfatta quando numeratore e denominatore sono concordi, ossia

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \; . \end{cases}$$

Si noti che entrambe le disuguaglianze valgono in senso stretto e possono essere identificate con il primo ed il terzo quadrante degli assi cartesiani, esclusi gli assi stessi.

Il dominio della funzione è quindi

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0.5x\}.$$

Graficamente si ha:

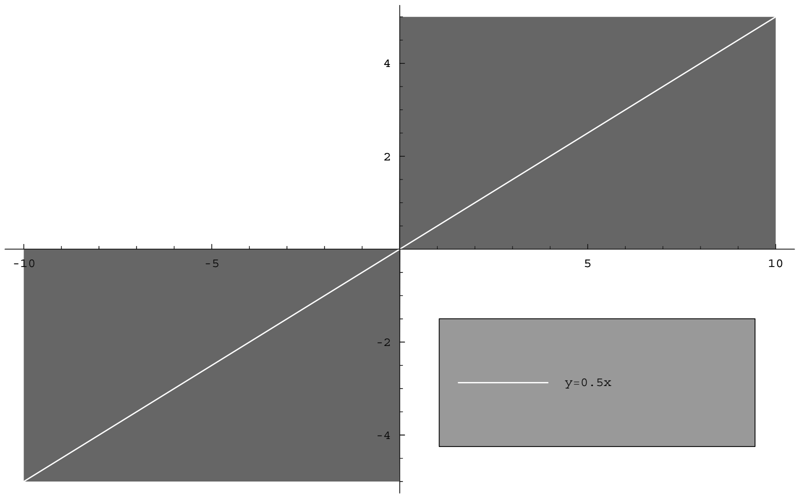

Figura 3: Dominio di $f(x, y)$ (Esercizio 2).

$\square$

Esercizio 3 *Determinare il dominio della seguente funzione e rappresentarlo graficamente:*

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + x - y}\ .$$

Soluzione. Ricordando che l'argomento di una radice di ordine pari deve essere non negativo si ha la condizione:

$$y \leq x^2 + x\ .$$

L'equazione $y = x^2 + x$ è una parabola di vertice $V(-1/2, -1/4)$ e passante per i punti $O(0, 0)$ e $A(-1, 0)$. Per rappresentare graficamente la disequazione precedentemente individuata in corrispondenza di ogni x si debbono scegliere tutti quei punti (x, y) tali che la loro ordinata y sia inferiore o uguale a $x^2 + x$. Graficamente si ha:

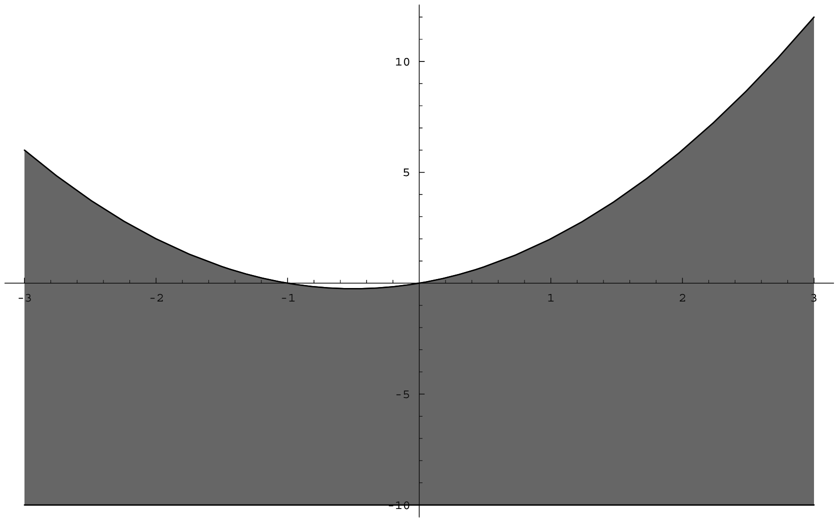

Figura 4: Dominio di $f(x, y)$ (Esercizio 3).

Riassumendo il dominio è $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \wedge y \leq x^2 + x\}$. $\square$

Esercizio 4 *Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione e rappresentarlo graficamente:*

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y}}{\sqrt[4]{y - x - 1}}\ .$$

Soluzione. Ricordando che l'argomento di una radice di ordine pari deve essere non negativo e che il denominatore deve essere diverso da zero si hanno come condizioni

$$\begin{cases} x^2 - y \geq 0 \\ y - x - 1 \geq 0 \\ y - x - 1 \neq 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x^2 - y \geq 0 \\ y - x - 1 > 0 \end{cases}$$

ed infine

$$\begin{cases} y \leq x^2 \\ y > x + 1\ . \end{cases}$$

L'equazione associata alla prima disequazione è quella di una parabola avente vertice $V(0, 0)$ e concavità rivolta verso l'alto. In particolare, la disequazione è soddisfatta, per ogni x, da tutti i punti aventi ordinata inferiore o uguale a x^2. L'equazione associata alla seconda disequazione è la retta $y = x + 1$. Concludendo, il dominio della funzione è il seguente:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \wedge y \leq x^2\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \wedge y > x + 1\}.$$

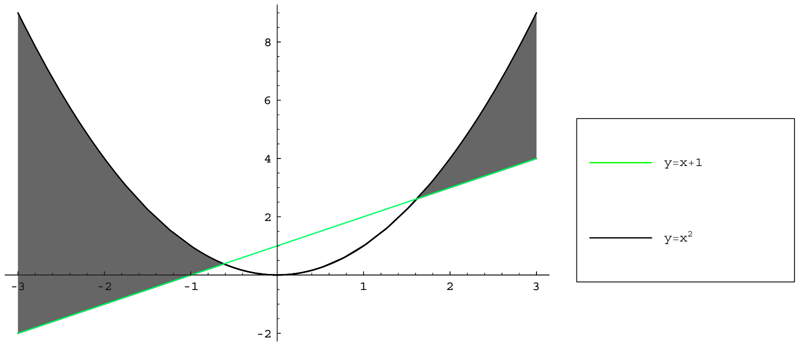

Figura 5: Dominio di $f(x, y)$ (Esercizio 4).

Graficamente si ha:

□

Esercizio 5 *Sia data la seguente funzione:*

$$f(x, y) = \sqrt{(3x - y)(y - x^2)}\ .$$

Determinarne il dominio D e rappresentarlo graficamente.

Soluzione. Poiché l'argomento di una radice di ordine pari dev'essere non negativo, si deve avere $(3x - y)(y - x^2) \geq 0$, ossia devono essere verificate le condizioni

$$\begin{cases} 3x - y \geq 0 \\ y - x^2 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 3x - y \leq 0 \\ y - x^2 \leq 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} y \leq 3x \\ y \geq x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} y \geq 3x \\ y \leq x^2\ . \end{cases}$$

Concludendo, il dominio della funzione è il seguente:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 3x\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x \leq y \leq x^2\right\}.$$

□

Esercizio 6 *Si determini l'insieme di definizione della seguente funzione e lo si rappresenti graficamente:*

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y - x + x^2}}\ .$$

Soluzione. È sufficiente imporre che il denominatore sia strettamente positivo, ossia che $y - x + x^2 > 0$. Consideriamo l'equazione associata $y = -x^2 + x$, che individua una parabola avente concavità rivolta verso il basso e vertice $V(1/2, 1/4)$. La parte di piano che soddisfa la disequazione, e quindi appartiene al dominio, coincide con quella che sta sopra la parabola, esclusa la parabola stessa. □

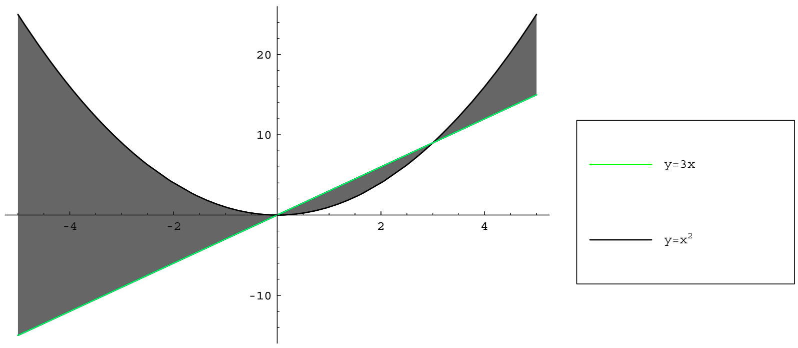

Figura 6: Dominio di $f(x, y)$ (Esercizio 5).

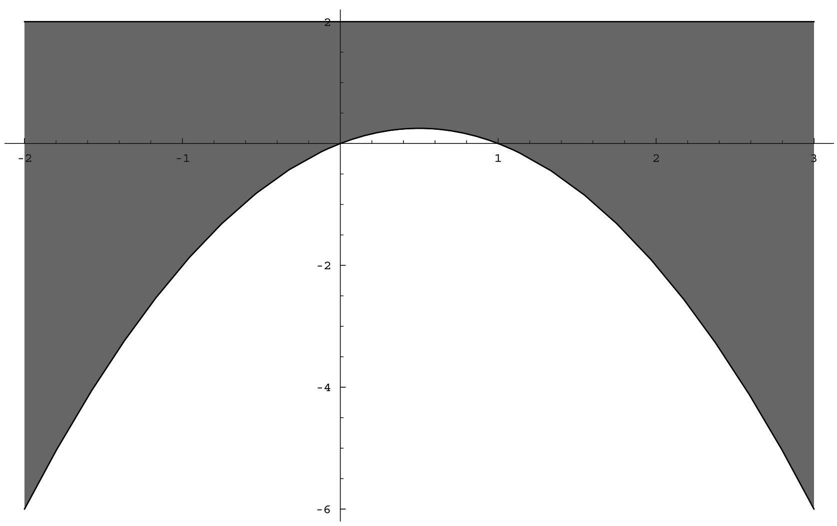

Figura 7: Dominio di $f(x, y)$ (Esercizio 6).

Esercizio 7 *Si determini l'insieme di definizione della seguente funzione e lo si rappresenti graficamente:*

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{\ln[(x-1)^2 + y^2 - 4]}{y - x}}\,.$$

Soluzione.
L'insieme delle soluzioni può essere descritto come segue:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 - 4 \geq 1 \\ y - x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < (x-1)^2 + y^2 - 4 \leq 1 \\ y - x < 0 \end{cases}$$

esplicitando

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 - 5 \geq 0 \\ y > x \end{cases} \cup \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 - 5 \leq 0 \\ (x-1)^2 + y^2 - 4 > 0 \\ y < x \end{cases}$$

L'equazione $y = x$ coincide con la bisettrice del primo e terzo quadrante; l'equazione $(x-1)^2 + y^2 = 5$ rappresenta una circonferenza di centro $C(1, 0)$ e raggio $r = \sqrt{5}$; mentre l'equazione $(x-1)^2 + y^2 = 4$ è una circonferenza di centro C e raggio $r = 2$. Il dominio della funzione è rappresentato nella figura 8, in cui sono esclusi i punti di entrambe le circonferenze ed i punti della funzione.

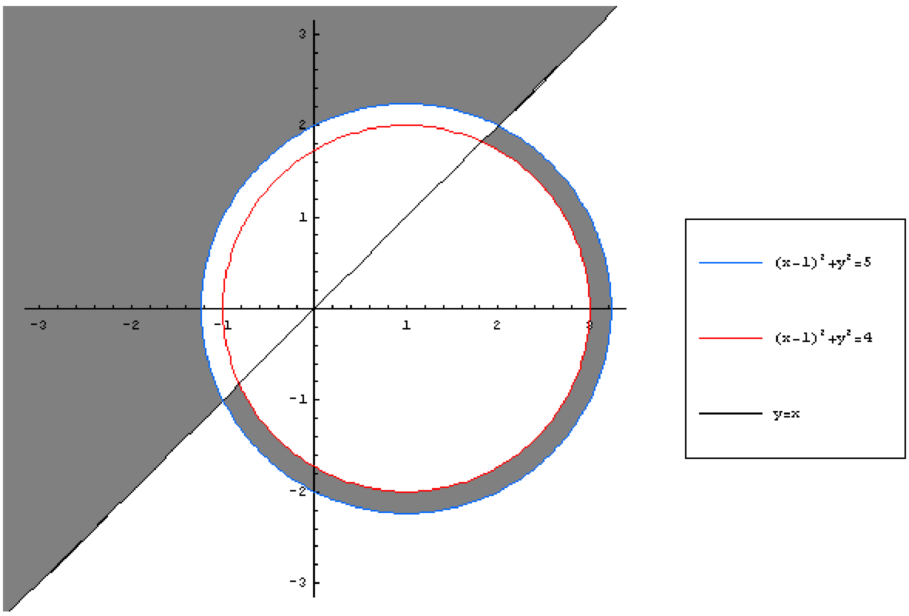

Figura 8: Dominio di $f(x, y)$ (Esercizio 7).

□

Esercizio 8 *Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione, e rappresentarlo graficamente:*

$$f(x, y) = \log(x + \log 3y) \ .$$

Soluzione. Ricordando che l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo si hanno le condizioni

$$\begin{cases} x + \log 3y > 0 \\ 3y > 0 \ . \end{cases}$$

Risolvendo la prima disequazione in y si ottiene la condizione $y > \frac{1}{3}e^{-x}$ che implica ovviamente $y > 0$, per cui si ha che il dominio della funzione è

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} : y > \frac{1}{3}e^{-x}\right\}.$$

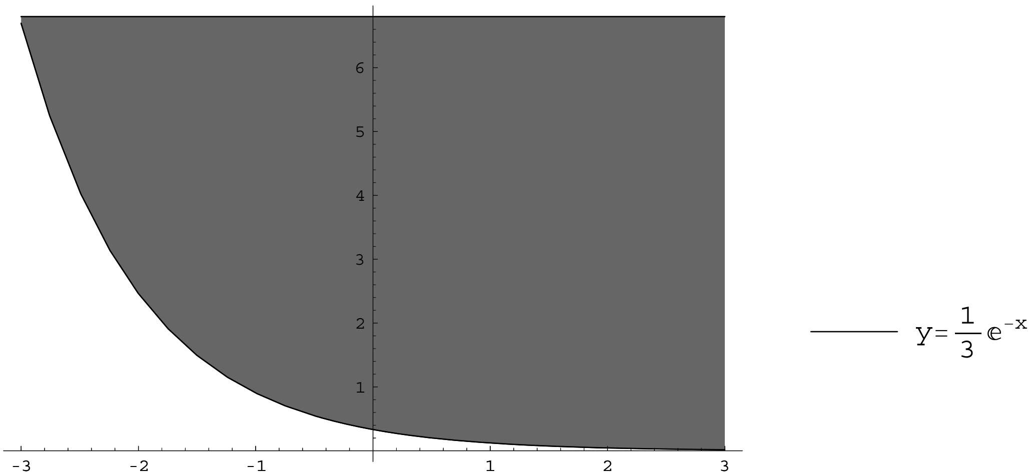

Figura 9: Dominio di $f(x, y)$ (Esercizio 8).

$\square$

Ottimizzazione libera

Esercizio 9 *Sia data la seguente funzione:*

$$f(x,y) = (x-1)^2\left(\sqrt{x^2+1}+\exp(y)\right) .$$

Si determinino gli eventuali punti di massimo, minimo e di sella della funzione.

Soluzione. Il dominio della funzione è $\mathbb{R}^2$, per cui gli eventuali punti estremanti e di sella vanno cercati fra i punti critici di f. Calcoliamo le derivate parziali della funzione:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = 2(x-1)\left(\sqrt{x^2+1}+\exp(y)\right) + (x-1)^2\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = (x-1)^2\exp(y) \end{cases}$$

Uguagliando a zero la seconda derivata parziale si ottiene come condizione necessaria $x = 1$, che è anche sufficiente per annullare la prima derivata parziale, per cui i punti critici di f sono tutti quelli della forma $(1, y)$ con $y \in \mathbb{R}$. Calcoliamoci la matrice hessiana[1] per stabilire di che punti si tratta:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} * & 2(x-1)\exp(y) \\ 2(x-1)\exp(y) & (x-1)^2\exp(y) \end{pmatrix}$$

e quindi

$$H(1,y) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che quindi non ci fornisce informazioni sulla natura di tali punti. Osserviamo però a questo punto che $f(1, y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, e che $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e da questo ricaviamo che i punti $(1, y)$ sono tutti punti di minimo assoluto.

$\square$

Esercizio 10 *Sia data la seguente funzione:*

$$f(x,y) = 3x^3\left[y^2+\log\left(x^2+\frac{3}{2}\right)\right] .$$

Si determinino gli eventuali punti di massimo, minimo e di sella della funzione.

[1] Abbiamo omesso di calcolare $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ perché non è rilevante ai nostri fini.

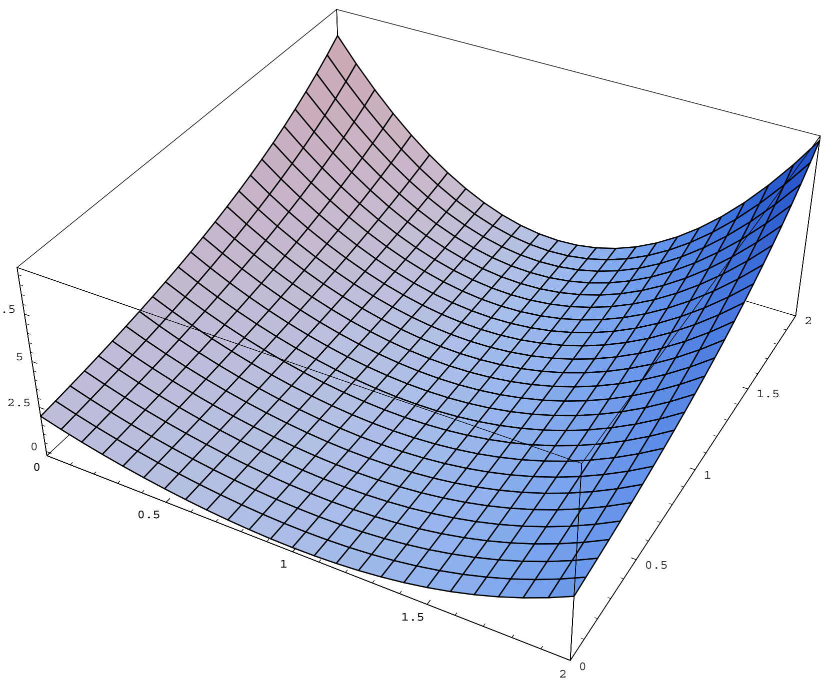

Figura 10: Grafico di $f(x, y)$ (Esercizio 9).

Soluzione. Di nuovo il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}^2$, per cui cerchiamo i punti critici di f:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = \dfrac{6x^4}{\frac{3}{2} + x^2} + 9x^2 \left[y^2 + \log\left(\frac{3}{2} + x^2\right)\right] \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = 6x^3 y \; . \end{cases}$$

Si ricava facilmente dalla prima equazione che una condizione necessaria e sufficiente per annullare il gradiente di f è che si abbia $x = 0$, per cui i punti critici di f sono tutti quelli della forma $(0, y)$ con $y \in \mathbb{R}$. Calcoliamo ora l'hessiana di f per stabilire la natura di tali punti:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} * & 18x^2 y \\ 18x^2 y & 6x^3 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$H(0, y) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che non fornisce informazioni sulla natura di tali punti. Si osserva però facilmente che, essendo $f(0, y) = 0$ e $f(0, y) < 0$ se $y < 0$ e viceversa per $y > 0$, si ha che tali punti sono punti di sella di f.

□

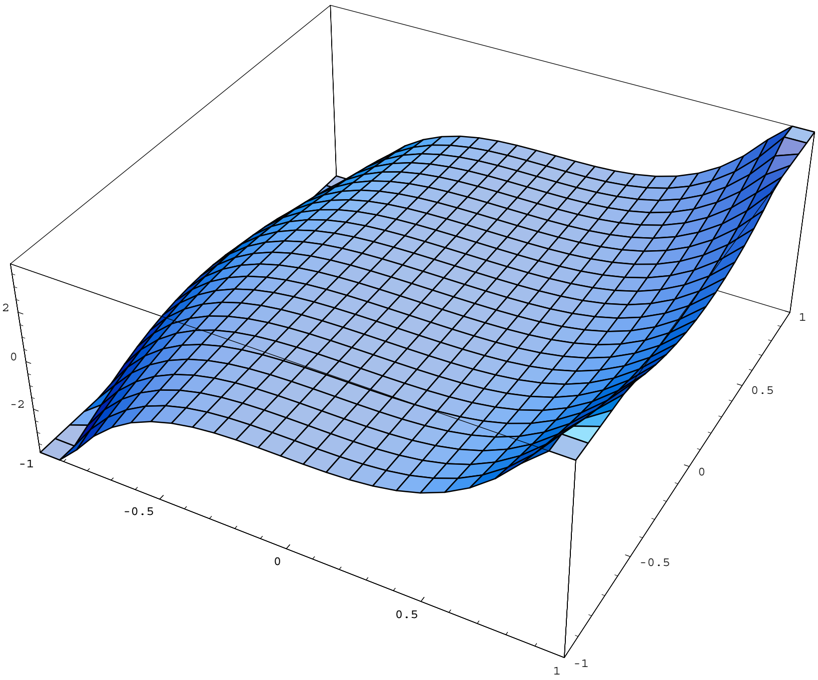

Figura 11: Grafico di $f(x, y)$ (Esercizio 10).

Esercizio 11 *Sia data la seguente funzione reale di variabili reali:*

$$f(x, y) = (x^2 - 3y)^2 e^{-y} \, .$$

Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo della funzione.

Soluzione. Anche in questo caso il dominio della funzione è $D = \mathbb{R}^2$. Calcoliamo le derivate parziali

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2(x^2 - 3y)(2x)e^{-y} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(x^2 - 3y)(-3)e^{-y} + (x^2 - 3y)^2 e^{-y}(-1) \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2 - 3y)e^{-y} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = (x^2 - 3y)e^{-y}(-6 - x^2 + 3y) \, . \end{cases}$$

Poniamo le derivate parziali uguali a zero per determinare i punti critici:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff x = 0 \vee y = x^2/3; \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff y = x^2/3 \vee y = x^2/3 + 2 \, . \end{cases}$$

I punti critici della funzione sono quindi $(x_\alpha^*, y_\alpha^*) = (\alpha, \alpha^2/3)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ ed il punto $(x^*, y^*) = (0, 2)$.
È possibile notare che

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \text{ per } (x,y) = (x_\alpha^*, y_\alpha^*); \\ f(x,y) > 0 \text{ per } (x,y) \neq (x_\alpha^*, y_\alpha^*). \end{cases}$$

Pertanto, $(x_\alpha^*, y_\alpha^*) = (\alpha, \alpha^2/3)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ sono punti di minimo relativo ed assoluto.
Non è possibile ripetere lo stesso ragionamento nel caso di $\mathbf{x}^* =(0,\ 2)$. Calcoliamo la matrice hessiana in tale punto:

$$H(x^*, y^*) = H(0,2) = \begin{pmatrix} -24e^{-2} & 0 \\ 0 & -18e^{-2} \end{pmatrix} .$$

Si calcola facilmente che $\det(H) = 432\, e^{-4} > 0$. Poiché $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big|_{(0,2)} < 0$ questo ci permette di affermare che la matrice hessiana in $(0, 2)$ è definita negativa e quindi che $(0, 2)$ è un punto di massimo relativo.

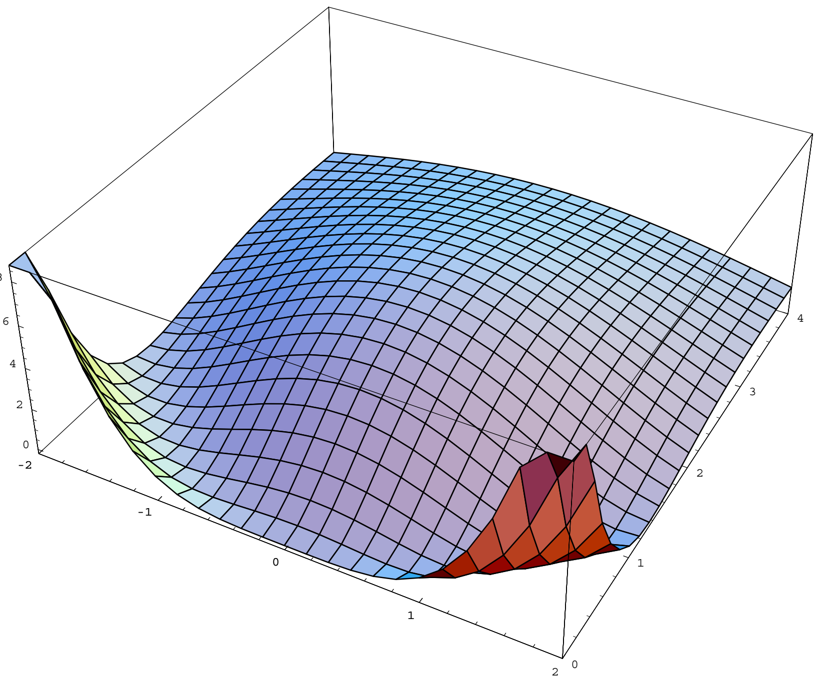

Figura 12: Grafico di $f(x, y)$ (Esercizio 11).

$\square$

Esercizio 12 *Sia data la seguente funzione reale di variabili reali:*

$$f(x,y) = (x+1)^2 \log(1+y^2) .$$

Determinare gli eventuali punti di massimo, minimo e di sella della funzione.

Soluzione. Analogamente ai casi precedenti il dominio è $D = \mathbb{R}^2$. Calcoliamo le derivate parziali:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2(x+1)\log(1+y^2) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = (x+1)^2 \dfrac{2y}{1+y^2} \end{cases}.$$

Poniamo le derivate parziali uguali a zero per determinare i punti critici:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \Longleftrightarrow x = -1 \vee y = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow x = -1 \vee y = 0. \end{cases}$$

Si noti che se sostituiamo $x = -1$, entrambe le derivate parziali si annullano, indipendentemente dal valore assunto dalla variabile y. Analogamente per $y = 0$. I punti critici della funzione sono quindi quelli del tipo $\mathbf{x}_1^* = (-1, \alpha)$ e $\mathbf{x}_2^* = (\alpha, 0)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.
Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\log(1+y^2) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2(x+1)\dfrac{2y}{1+y^2} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (x+1)^2 \dfrac{2(1+y^2)-4y^2}{(1+y^2)^2} \end{cases}$$

da cui

$$H(\mathbf{x}_1^*) = H(-1, \alpha) = \begin{pmatrix} 2\log(1+\alpha^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(\mathbf{x}_2^*) = H(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2(\alpha+1)^2 \end{pmatrix}.$$

In entrambi i casi si ottiene $\det(H) = 0$. Osserviamo che $f(-1, \alpha) = 0 = f(\alpha, 0)$ mentre $f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \neq (-1, \alpha)$ e per ogni $(x, y) \neq (\alpha, 0)$.
È quindi possibile concludere che i punti critici sono punti di minimo relativo ed assoluto. Non ci sono punti di sella.

□

Esercizio 13 *Sia data la seguente funzione reale di variabili reali:*

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{x-y}{xy}\right).$$

Si determini l'insieme di definizione della seguente funzione e, se possibile, lo si rappresenti graficamente. Si calcolino, inoltre, gli eventuali punti di massimo e minimo della funzione.

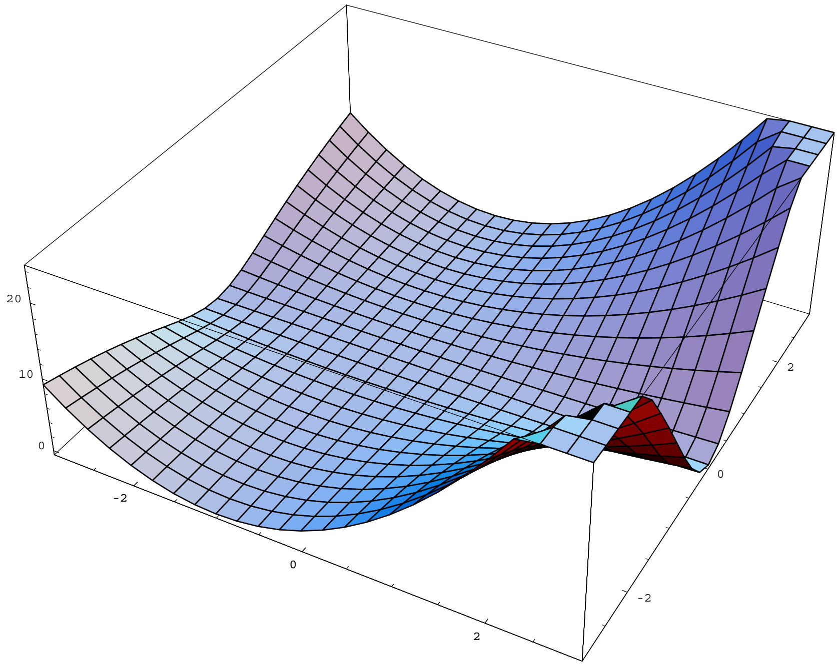

Figura 13: Grafico di $f(x, y)$ (Esercizio 12).

Soluzione. Per la determinazione del dominio della funzione osserviamo che si deve avere:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ \dfrac{x-y}{xy} > 0 \, . \end{cases}$$

Le prime due disequazioni escludono dal dominio gli assi cartesiani. La terza disequazione viene esplicitata in

$$\begin{cases} x - y > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - y < 0 \\ xy < 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} y < x \\ xy > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y > x \\ xy < 0 \end{cases}$$

Le soluzioni per i due sistemi sono, rispettivamente:

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x \wedge xy > 0\right\};$$
$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x \wedge xy < 0\right\}.$$

Il dominio della funzione è $D = D_1 \cup D_2$, come rappresentato nella figura 14, in cui sono esclusi i punti appartenenti alla forntiera
Calcoliamo le derivate parziali ricordando che il dominio esclude il punto (0, 0). Notiamo,

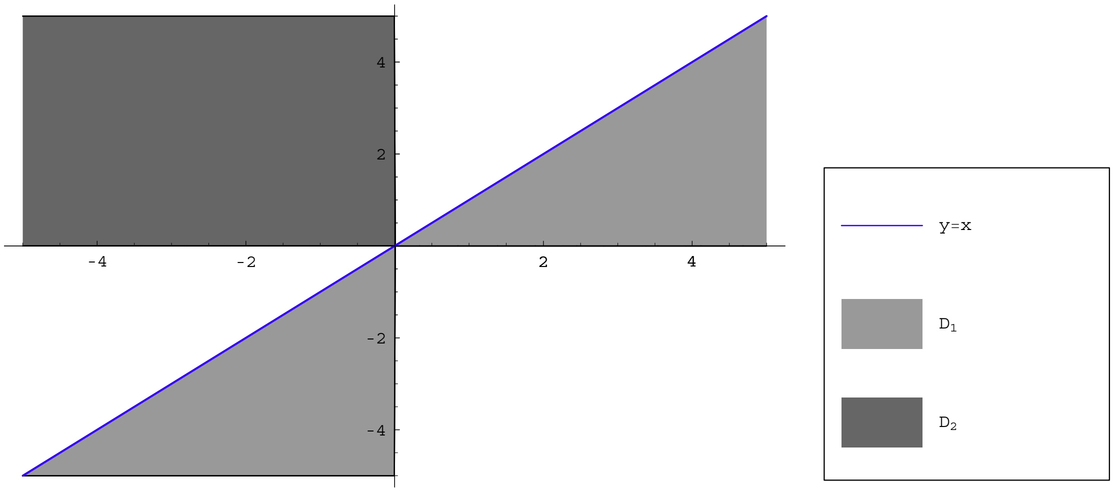

Figura 14: Dominio di $f(x, y)$ (Esercizio 13).

inoltre, che è possibile riscrivere la funzione nel modo seguente:

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{x-y}{xy}\right) = \ln\left(\frac{x}{xy} - \frac{y}{xy}\right) = \ln\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right).$$

Si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{xy}{x-y}\right) = \dfrac{y}{x(x-y)} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-1}{y^2}\left(\dfrac{xy}{x-y}\right) = \dfrac{-x}{y(x-y)} \end{cases}.$$

Poniamo le derivate parziali uguali a zero per determinare i punti critici

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \qquad \text{non appartiene al dominio;} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \qquad \text{non appartiene al dominio.} \end{cases}$$

Pertanto questa funzione non ammette punti critici e, quindi, dato che il suo dominio è un insieme aperto e quindi non vi sono potenziali punti estremanti di frontiera, non ha punti di massimo o di minimo relativi. □

Esercizio 14 *Determinare i punti di massimo e minimo relativi della funzione*

$$f(x, y) = \frac{y^2 + x^2 y + 8x}{xy}.$$

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che dal dominio della funzione dobbiamo escludere i punti per cui $x = 0$ oppure $y = 0$, e quindi $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$. Calcoliamo ora il gradiente di f e uguagliamolo a zero per trovare i punti critici:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x^2 - y}{x^2} & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y^2 - 8x}{xy^2} & = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = \dfrac{y^2}{8} \end{cases} ;$$

tale sistema ammette le due soluzioni $x = 0, y = 0$, che però non è accettabile per le considerazioni sul dominio, e $x = 2, y = 4$ che dunque è l'unico punto critico della nostra funzione. Calcoliamoci dunque la matrice hessiana per stabilire di che tipo di punto si tratta

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2y/x^3 & -1/x^2 \\ -1/x^2 & 16/y^3 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene

$$H(2, 4) = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} .$$

Essendo $H(2, 4)_{1,1} = 1$ e $\det H(2, 4) = 3/16$, si ha dunque che $(2, 4)$ è un punto di minimo relativo. Inoltre dato che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x, 1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + x^2 + 8x}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x, 1) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + x^2 + 8x}{x} = -\infty$$

si vede subito che la funzione non ammette punti di **massimo** e **minimo assoluto**. □

Esercizio 15 *Si trovino i punti di massimo, minimo e di sella della funzione*

$$f(x, y) = (x^2 - 3x + 2) \log(1 + y^2) .$$

Soluzione. Dato che non ci sono restrizioni sul dominio della funzione, calcoliamo le derivate parziali per trovare i punti critici di f:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = (2x - 3) \log(1 + y^2) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = (x^2 - 3x + 2)\dfrac{2y}{1 + y^2} & = 0 . \end{cases}$$

Per annullare la prima derivata parziale si deve avere $x = \frac{3}{2}$ oppure $y = 0$; dato che $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$, si conclude che l'unica scelta possibile per annullare il

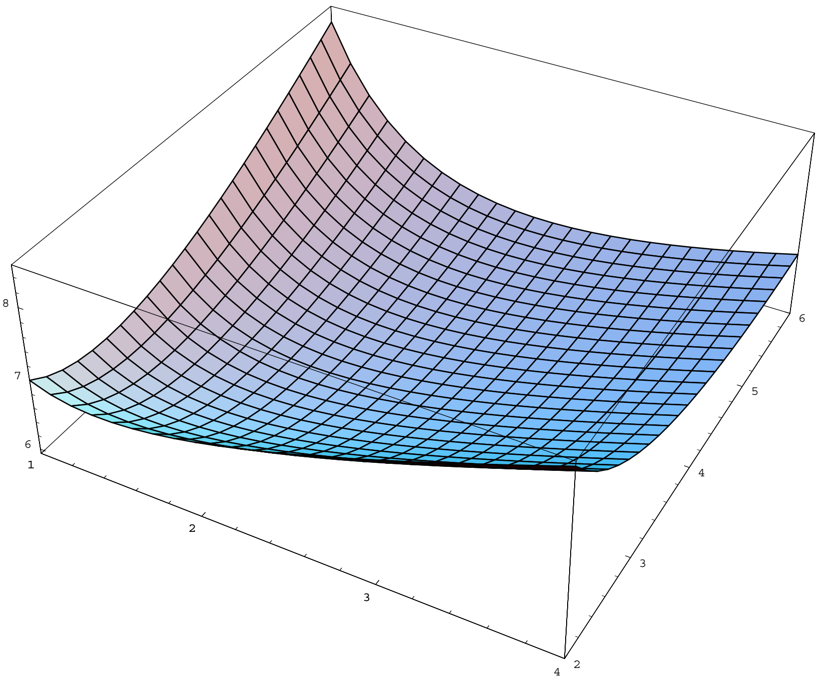

Figura 15: Grafico di $f(x, y)$ (Esercizio 14).

gradiente è $y = 0$, ossia i punti critici di f sono quelli del tipo $(x, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo ora l'hessiana per stabilire la natura di tali punti:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2\log(1+y^2) & 2(2x-3)\dfrac{y}{1+y^2} \\ \\ 2(2x-3)\dfrac{y}{1+y^2} & (x^2-3x+2)\dfrac{2-2y^2}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

da cui

$$H(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \\ 0 & 2(x^2-3x+2) \end{pmatrix}$$

che non fornisce informazioni. Possiamo tuttavia stabilire la natura dei punti critici osservando che $f(x, 0) = 0$ e che per $y \neq 0$, essendo $\log(1+y^2) > 0$, il segno di f è determinato da quello di $x^2 - 3x + 2$, e quindi:

1. se $\bar{x} < 1$ o $\bar{x} > 2$ si ha $f(x, y) > 0$ per ogni $y \neq 0$ e $x \in]\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta[$ con δ opportuno, e dunque $(\bar{x}, 0)$ è un punto di minimo relativo;

2. se $1 < \bar{x} < 2$ si ha $f(x, y) < 0$ per ogni $y \neq 0$ e $x \in]\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta[$ con δ opportuno, e dunque $(\bar{x}, 0)$ è un punto di massimo relativo;

3. se $\bar{x} = 1$ o $\bar{x} = 2$ si ha ad esempio $f(x, y) > 0$ per $x < 1$ e $y \neq 0$, e $f(x, y) < 0$ per $1 < x < 2$ e $y \neq 0$ (e considerazioni analoghe valgono per il caso $\bar{x} = 2$) e dunque i punti $(1, 0)$ e $(2, 0)$ sono punti di sella.

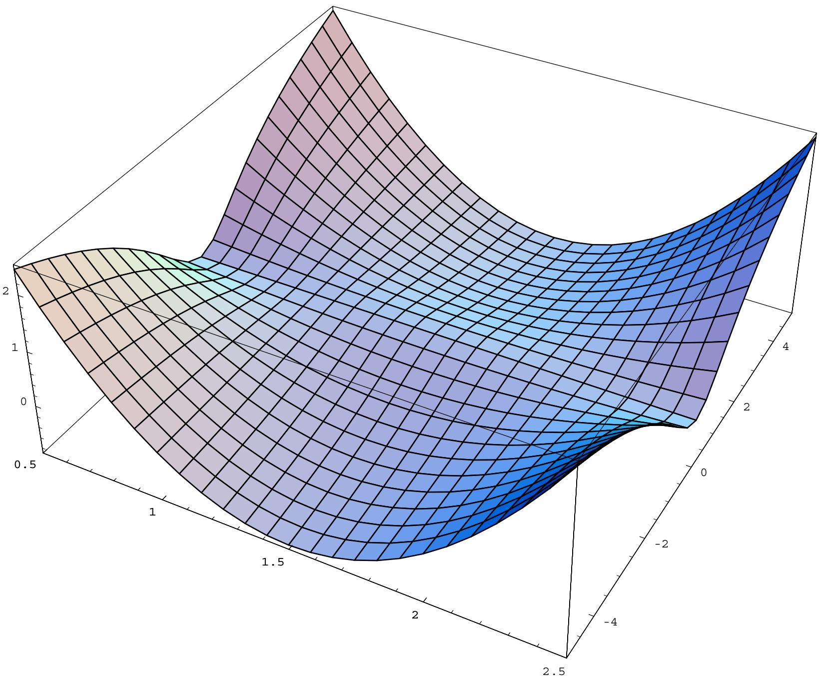

Figura 16: Grafico di $f(x, y)$ (Esercizio 15).

□

Esercizio 16 *Si trovino, al variare di $a \in \mathbb{R}$, gli eventuali punti di massimo, minimo e di sella della funzione*

$$f(x, y) = 2(a-3)x^2 - y + (a^2 - 4a - 5)y^2 \, .$$

Soluzione. Calcoliamo il gradiente di f e uguagliamolo a 0 per trovare i punti critici:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4(a-3)x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -1 + 2(a^2 - 4a - 5)y = 0 \, . \end{cases}$$

Osserviamo innanzitutto che nel caso $a = 3$ la prima componente del gradiente è sempre nulla; ma per $a = 3$ la funzione si riduce a $g(y) = -y - 8y^2$, che, come si osserva facilmente, ha un unico punto di **massimo assoluto** per $y = -\frac{1}{16}$. Supponiamo quindi $a \neq 3$; a questo punto per l'esistenza di punti critici è che sia abbia $a^2 - 4a - 5 \neq 0$, cioè $a \neq -1, 5$, altrimenti si avrebbe $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$. Quindi, nell'ipotesi $a \neq 3 \wedge a \neq -1, 5$, si ha che l'unico punto critico di f è $\left(0, \dfrac{1}{2(a^2 - 4a - 5)}\right)$. Per stabilire la natura di tale punto studiamo il comportamento della matrice hessiana al variare di a. Si ha

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 4(a-3) & 0 \\ 0 & 2(a^2 - 4a - 5) \end{pmatrix}$$

e quindi il nostro punto critico sarà:

1. di minimo relativo se si ha
$$\begin{cases} 4(a-3) > 0 \\ 8(a-3)(a^2-4a-5) > 0\ ; \end{cases}$$
tale sistema di disequazioni si risolve facilmente e fornisce la condizione $a > 5$; dunque se $a > 5$ si ha che $\left(0, \dfrac{1}{2(a^2-4a-5)}\right)$ è un punto di minimo relativo e in esso la funzione vale $-\dfrac{1}{4(a^2-4a-5)} < 0$; dato che si verifica facilmente che per $a > 5$ si ha $\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y) = +\infty$, si conclude che tale punto è un punto di **minimo assoluto**;

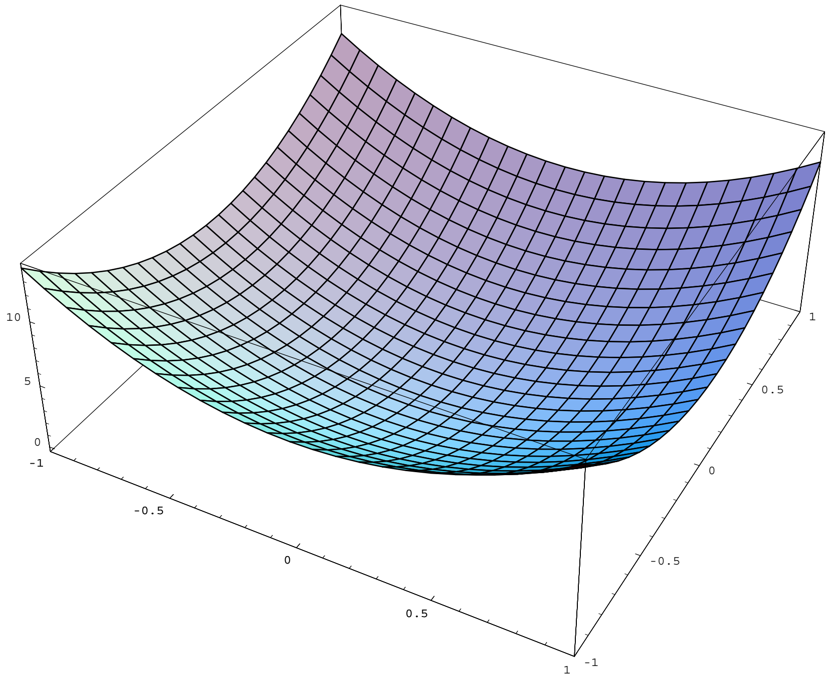

Figura 17: Grafico di $f(x,y)$, $a = 6$ (Esercizio 16).

2. di massimo relativo se si ha
$$\begin{cases} 4(a-3) < 0 \\ 8(a-3)(a^2-4a-5) > 0\ ; \end{cases}$$
anche tale sistema si risolve facilmente e dà la condizione $-1 < a < 3$; in tal caso la funzione in esso vale $-\dfrac{1}{4(a^2-4a-5)} > 0$, ed essendo $\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y) = -\infty$, si conclude che il punto è di **massimo assoluto**;

3. di sella se
$$8(a-3)(a^2-4a-5) < 0$$
tale disequazione si risolve facilmente e fornisce la condizione $a < -1$ oppure $3 < a < 5$.

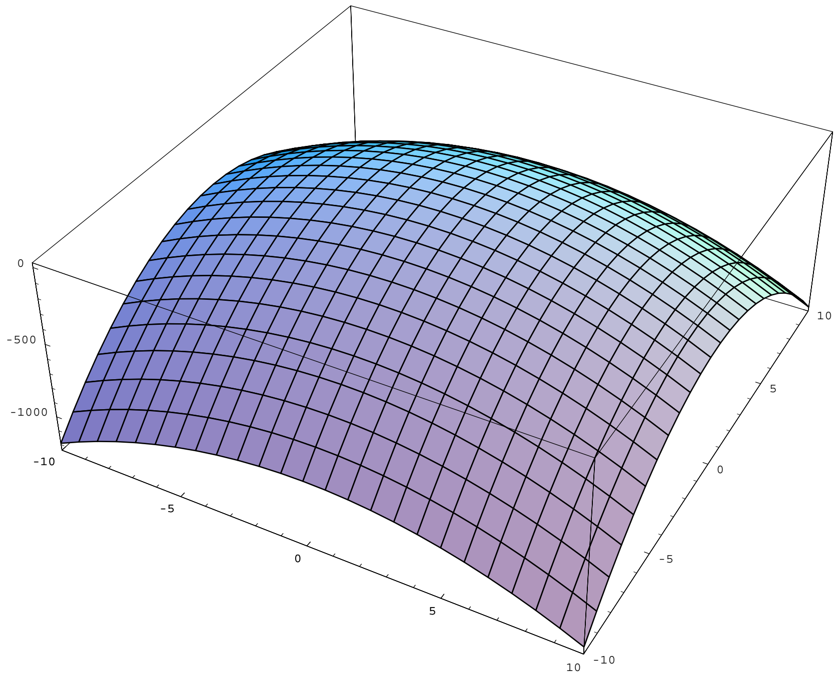

Figura 18: Grafico di $f(x, y)$, $a = 1$ (Esercizio 16).

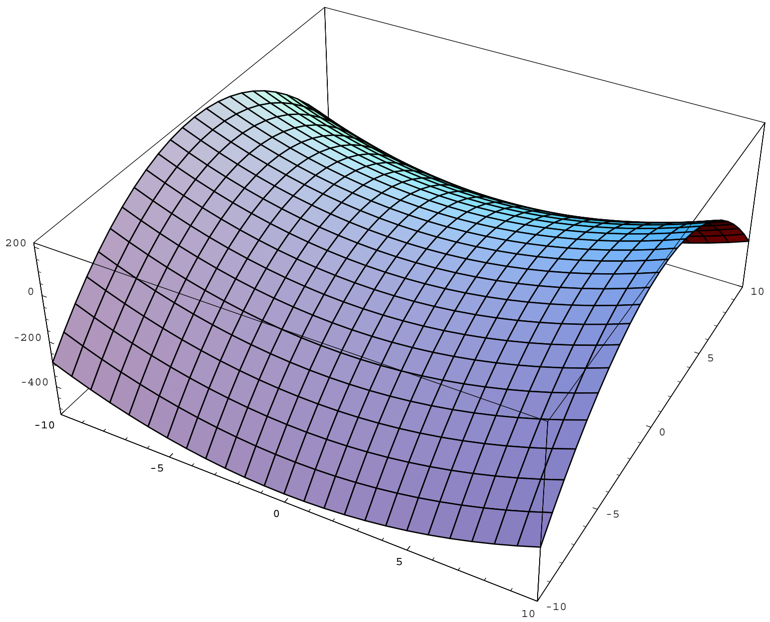

Figura 19: Grafico di $f(x, y)$, $a = 4$ (Esercizio 16).

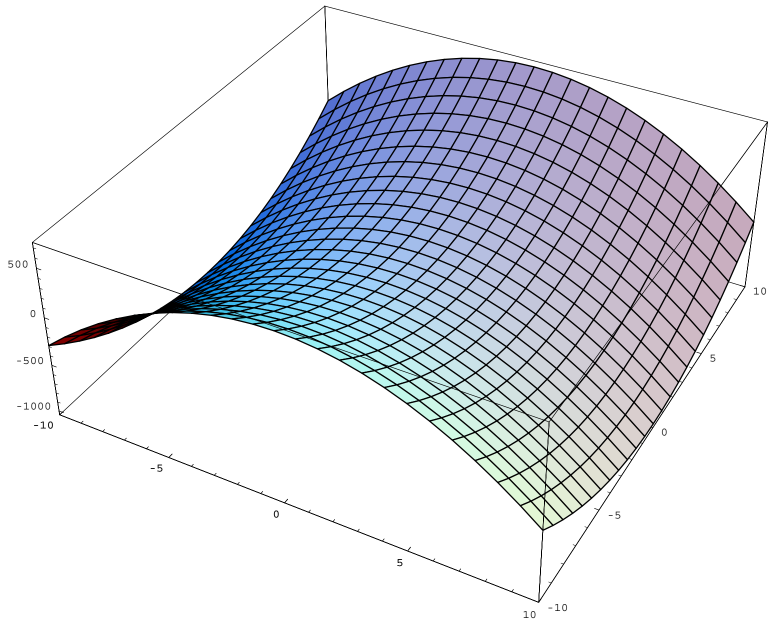

Figura 20: Grafico di $f(x, y)$, $a = -2$ (Esercizio 16).

$\square$

Massimi e minimi vincolati

Esercizio 17 *Determinare i massimi e i minimi della funzione* $f(x, y) = -x^2 - 2y^2$ *nella regione di piano individuata dal vincolo* $x + y = b$ *al variare di* $b > 0$.

Soluzione. Esplicitiamo la variabile y nel vincolo e sostituiamo la relazione cosí ottenuta nella funzione obiettivo del problema di ottimizzazione: si ha $y = b - x$ e quindi la funzione diventa $f(x, x - b) = -x^2 - 2(b - x)^2 = -3x^2 + 4xb - 2b^2$. A questo punto il problema è ridotto alla ricerca dei massimi e minimi per una funzione reale di variabile reale; calcoliamo quindi la derivata: $f'(x) = -6x + 4b$ da cui osserviamo subito che il punto $x^* = \frac{2b}{3}$ è un punto di massimo; ricordando che $y = -x + b$, ricaviamo l'ordinata corrispondente $y^* = \frac{b}{3}$, e dunque possiamo concludere che per ogni $b > 0$ la funzione ha un punto di **massimo assoluto** in $(\frac{2b}{3}, \frac{b}{3})$ nella regione di piano individuata dal vincolo $x + y = b$. Osservando inoltre che $\lim_{x \to (+\infty, +\infty)} -3x^2 + 4xb - 2b^2 = -\infty$ si conclude che la funzione non ammette punti di minimo assoluto in tale regione del piano. $\square$

Esercizio 18 *È dato il seguente problema di programmazione matematica classica:*

$$\begin{cases} \max & 2\dfrac{y}{x^2} \\ \text{s.t.} & x - y = 2 \; . \end{cases}$$

Determinare, se esistono, le soluzioni di questo problema.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che dobbiamo escludere tutti i punti per cui $x = 0$, che non appartengono al dominio della funzione. Dopodiché, come nell'esercizio precedente, ricaviamo la y dal vincolo, ottenendo $y = x - 2$, e sostituiamo nella funzione obiettivo, che diventa

$$f(x, 2 - x) = 2\frac{x - 2}{x^2} \; .$$

Calcolando la derivata si ha

$$f'(x, 2 - x) = 2\frac{x(-x + 4)}{x^4}$$

e quindi si ricava subito che $f(x, 2 - x)$ è decrescente in $] - \infty, 0[$, crescente in $]0, 4[$ e decrescente in $]4, +\infty[$, da cui si ricava che la soluzione del problema di massimizzazione è data dal punto $(4, 2)$ ove la funzione vale $1/4$. $\square$

Esercizio 19 *Data la funzione*

$$f(x, y) = x - 6y$$

ed avente il seguente sistema di vincoli

$$\begin{cases} -x + y \leq 4 \\ \dfrac{1}{2}x - y \geq -6 \\ -\dfrac{1}{4}x + y \geq -1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

si rappresenti sul piano la regione ammissibile e si determinino gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti della funzione.

Soluzione. La regione ammissibile è rappresentata nella figura 21, e, non essendo un insieme limitato di $\mathbb{R}^2$, non è garantita l'esistenza di massimi e minimi assoluti. Dato

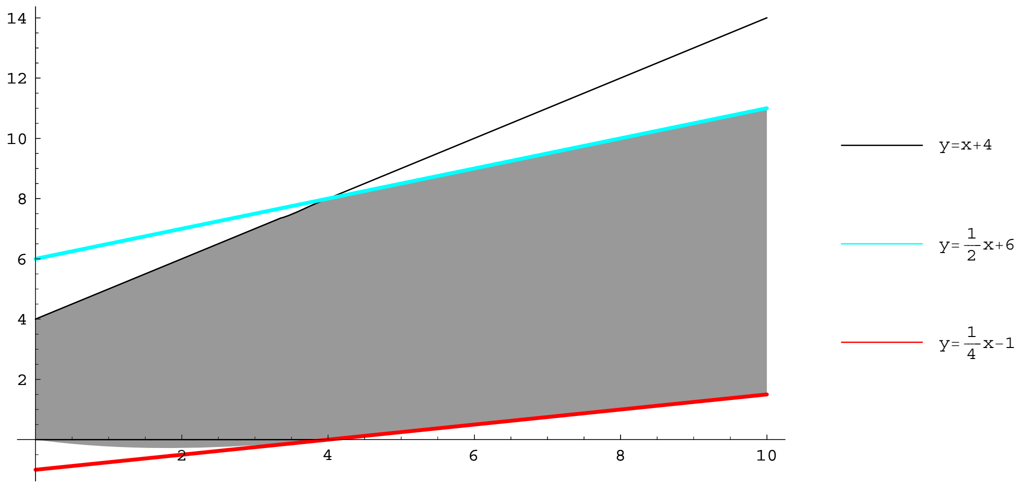

Figura 21: Regione ammissibile di $f(x, y)$ (Esercizio 19).

che $\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \frac{\partial f}{\partial y} = -6$, la funzione non ammette punti critici, per cui dovremo verificare l'esistenza di eventuali massimi e minimi assoluti sulla frontiera della regione ammissibile. Il gradiente di f ci suggerisce inoltre che la direzione di crescita della funzione è quella che punta verso la frontiera "inferiore" della regione ammissibile. Per la ricerca del massimo della funzione dovremo controllare dunque le due restrizioni:

1. $f(x, 0)$ con $x \in [0, 4]$; essendo $f(x, 0) = x$, si ha che chiaramente il massimo è assunto nel punto $(4, 0)$, dove la funzione assume il valore 4;

2. $f(x, \frac{1}{4}x - 1)$ con $x \in [4, +\infty[$; essendo $f(x, \frac{1}{4}x - 1) = -\frac{1}{2}x + 6$ che è strettamente decrescente in $[4, +\infty[$, otteniamo nuovamente che il massimo è assunto in $(4, 0)$.

Concludendo si ha che il **massimo assoluto** di f è assunto in $(4, 0)$, e vale 4, mentre la funzione non ha punti di minimo né assoluti, come ovvio dalle considerazioni appena fatte sulla decrescenza di $f(x, \frac{1}{4}x - 1)$ in $[4, +\infty[$, né relativi, come ci si accorge facilmente considerando il comportamento di f sulla frontiera "superiore" della regione ammissibile. $\square$

Esercizio 20 *Si risolva il seguente problema di programmazione matematica:*

$$\begin{cases} \max & 4x + 3y \\ \text{s.t.} & 2x - 3y \geq 0 \\ & \dfrac{x}{2} - y \leq 0 \\ & x + y \leq 5 \\ & x, y \geq 0\ . \end{cases}$$

Soluzione. È utile anche in questo caso rappresentare graficamente la regione ammissibile del problema, che è rappresentata nella figura 22. In questo caso il problema

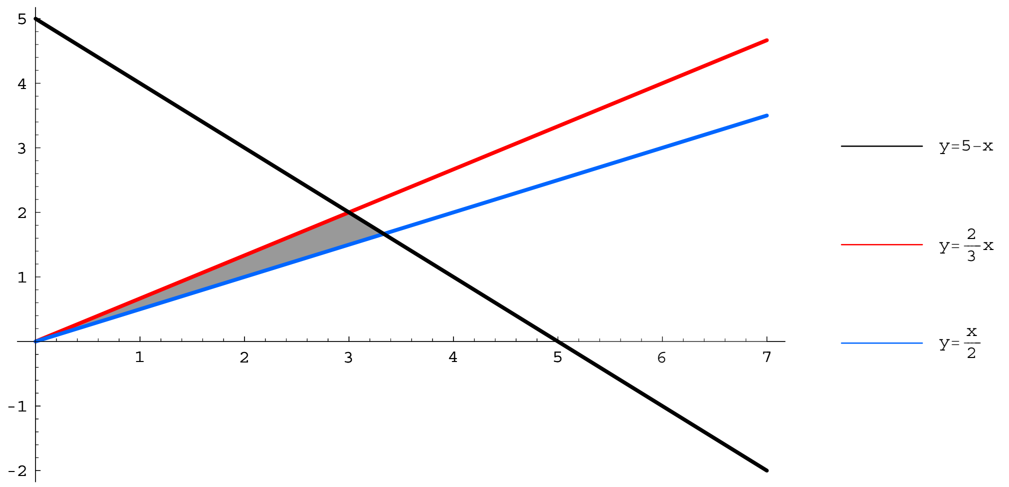

Figura 22: Regione ammissibile di $f(x, y)$ (Esercizio 20).

di massimizzazione può essere risolto più velocemente osservando che le curve di livello della funzione sono le rette di equazione $4x + 3y = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, ossia, in forma esplicita rispetto a y, il fascio di rette parallele $y = -\frac{4}{3}x + \frac{k}{3}$, e la direzione di crescita della funzione, individuata dal gradiente $\nabla f = (4, 3)$ ci suggerisce che il massimo sarà assunto in corrispondenza della retta del fascio che passa per il punto P di intersezione fra le rette $y = 5 - x$ e $y = \frac{x}{2}$. Quindi per determinare il massimo dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = 5 - x \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

che da come risultato le coordinate del punto di massimo $P(x = \frac{10}{3}, y = \frac{5}{3})$. Il valore assunto dalla funzione in P, cioè $f\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{55}{3}$ corrisponde effettivamente al livello della curva di livello che passa per P, come si verifica imponendo che valga

$$\frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{10}{3} + \frac{k}{3}\,.$$

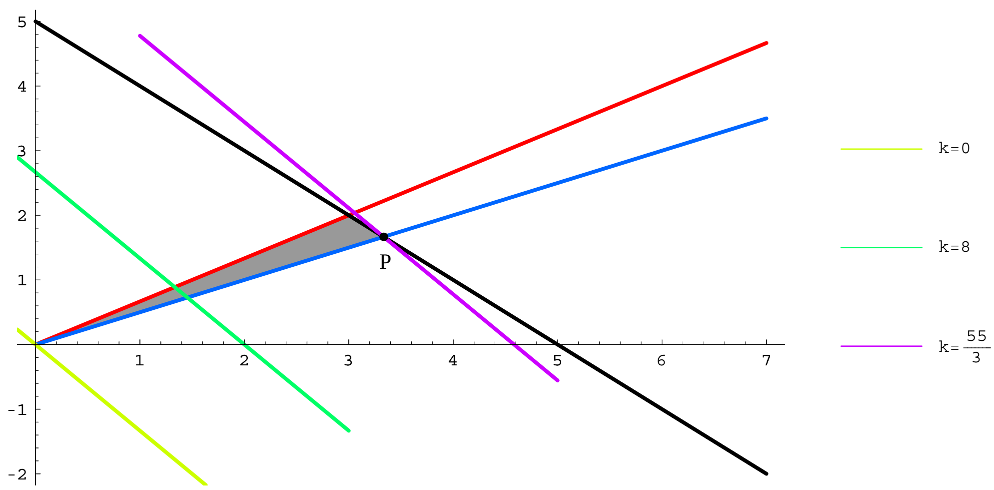

Figura 23: Curve di livello di $f(x, y)$ e punto di massimo (Esercizio 20).

□

Esercizio 21 *Si risolva il seguente problema di programmazione lineare:*

$$\begin{cases} \min & 3x + 4y \\ \text{s.t.} & x + 2y \geq 2 \\ & 2x + 3y \geq 6 \\ & x + y \leq 5 \\ & x - 3y \geq 4 \\ & x, y \geq 0\,. \end{cases}$$

Soluzione. Anche in questo caso rappresentiamo in un grafico i vincoli e la regione ammissibile del problema (figura 24).

Le curve di livello sono date dal fascio di rette parallele $y = -\frac{3}{4}x + \frac{k}{4}$, e, osservando che il gradiente è $\nabla f = (3, 4)$, il minimo si troverà in corrispondenza della retta del fascio che passa per il vertice P della regione ammissibile di coordinate $(4, 0)$, che dunque è il punto di minimo cercato, ove la funzione obiettivo assume valore 12.

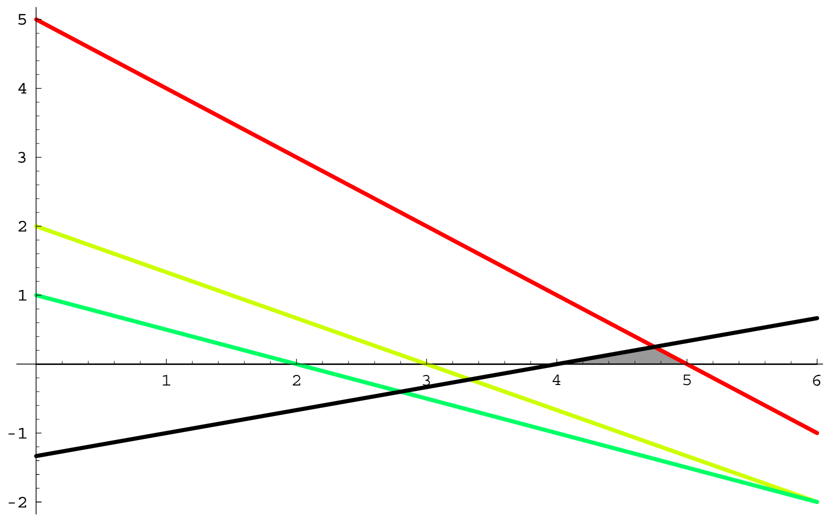

Figura 24: Vincoli e regione ammissibile (Esercizio 21).

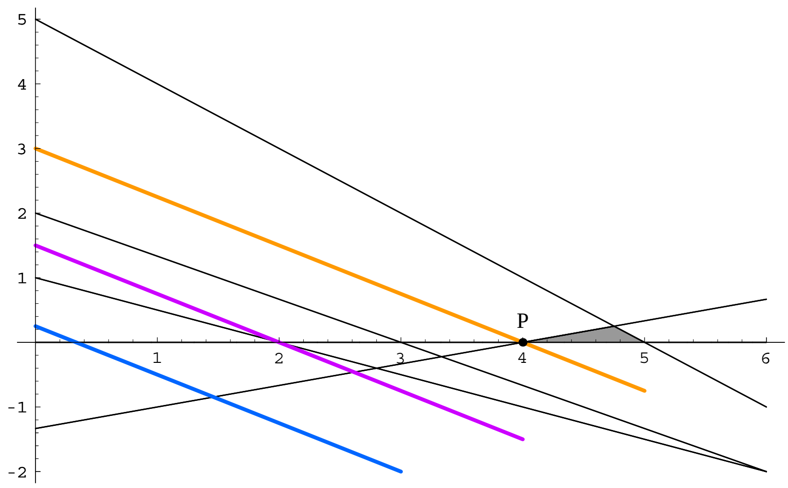

Figura 25: Curve di livello e punto di minimo (Esercizio 21).

□

Esercizio 22 *Si determinino il massimo e il minimo di* $f(x,y) = e^x(x+2y)$ *sul dominio* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 1\}$.

Soluzione. Osserviamo che, essendo D un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$, per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluti su D. Cominciamo con il cercare gli eventuali punti di massimo e minimo interni a D, verificando l'esistenza di eventuali punti critici per f:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x(x+2y+1) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2e^x = 0\ . \end{cases}$$

Dato che $\frac{\partial f}{\partial y}$ è sempre strettamente positiva, la funzione non ammette punti critici, e dunque i suoi massimi e minimi andranno cercati sulla frontiera di D. Dovremo quindi

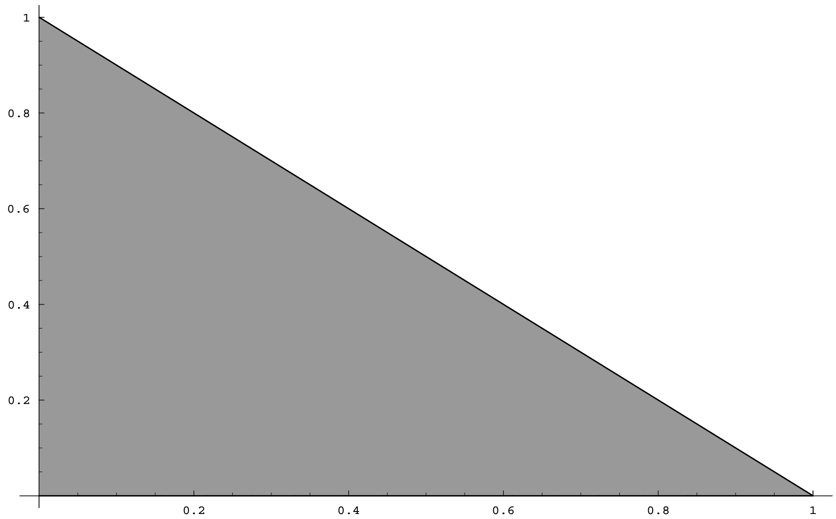

Figura 26: Regione ammissibile di $f(x,y)$ (Esercizio 22).

studiare separatamente il comportamento di f sui tre segmenti che compongono la frontiera di D.

1. $f(0,y)$ con $0 \le y \le 1$; essendo $f(0,y) = 2y$, che è evidentemente strettamente crescente per $y \in [0,1]$, il minimo lungo questo segmento si trova nel punto $(0,0)$, e vale $f(0,0) = 0$, ed il massimo nel punto $(0,1)$ ed è $f(0,1) = 2$;

2. $f(x,0)$ con $0 \le x \le 1$; essendo $f(x,0) = xe^x$, che è strettamente crescente per $x \in [0,1]$, si ha nuovamente che il minimo lungo questo segmento è assunto nel punto $(0,0)$ già considerato, ed il massimo in $(1,0)$ e si ha $f(1,0) = e > 2$;

3. $f(x,1-x)$ con $0 \le x \le 1$; essendo $f(x,1-x) = e^x(2-x)$ e $f'(x,1-x) = e^x(1-x) \ge 0$ per $x \in [0,1]$ e nulla solo per $x = 1$, si ha che il minimo lungo questo segmento è assunto nel punto $(0,1)$ già considerato, ed il massimo in $(1,0)$ anch'esso già considerato.

Riassumendo si ha che $(0,0)$ è il punto di **minimo assoluto** di f su D e $(1,0)$ il punto di **massimo assoluto** di f su D. $\square$

Esercizio 23 *Un'azienda cinematografica deve decidere a quali prezzi (espressi in migliaia di Euro) x e y vendere due pellicole di film. Il ricavo previsto è descritto dalla funzione*

$$R(x, y) = 3x^2 + 2x^2y - 3x - y \ .$$

Nessuna pellicola viene ceduta gratuitamente e il prezzo x, che deve essere maggiore o uguale a y, può al massimo essere uguale a 5. Stabilire i prezzi che massimizzano il ricavo.

Soluzione. Il problema può essere formalizzato in questo modo:

$$\begin{cases} \max & 3x^2 + 2x^2y - 3x - y \\ \text{s.t.} & 0 < x \leq 5 \\ & y \leq x \\ & y > 0 \ . \end{cases}$$

La regione ammissibile in questo problema è $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 5, \ y \leq x, \ y > 0\}$ e corrisponde alla parte di piano racchiusa nel triangolo di vertici $O(0, 0), A(5, 0), B(5, 5)$, compresi i punti della frontiera $(A, B]$ e $(O, B]$. Bisogna esaminare dapprima i punti

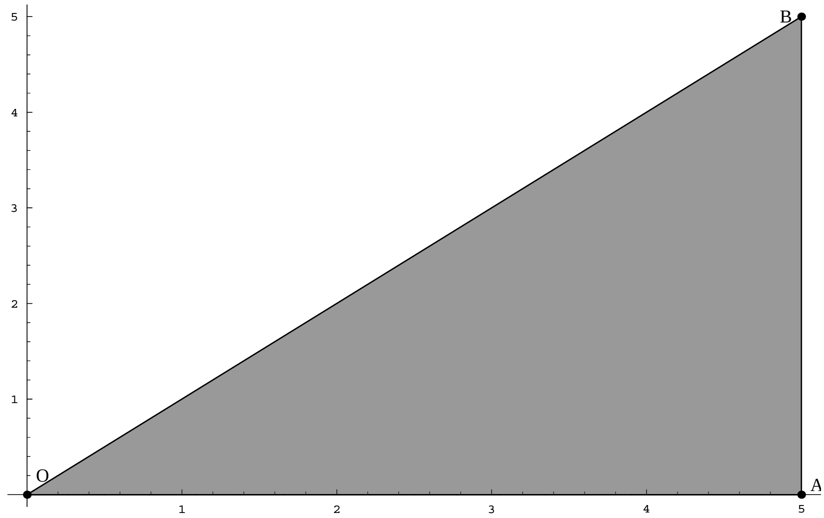

Figura 27: Regione ammissibile di $R(x, y)$ (Esercizio 23).

interni; calcoliamo i punti critici:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x} = 6x + 4xy - 3 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial R}{\partial y} = 2x^2 - 1 = 0 \ . \end{cases}$$

Risolvendo, si ottiene che l'unico punto critico è $C\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{3\sqrt{2} - 6}{4}\right)$.

Essendo $3\sqrt{2} - 6 < 0$, il punto C è punto (di sella, come si verifica facilmente) esterno

alla regione ammissibile. Bisogna quindi cercare il massimo sulla frontiera. Ci sono due segmenti da esaminare: il primo è $AB = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 5,\ 0 < y \leq 5\}$. In esso si ha $R(5, y) = 60 + 49y$, che è evidentemente crescente in $[0, 5]$, e quindi il massimo si ha in $B(5, 5)$ e vale $f(5, 5) = 305$.
Il secondo segmento da considerare è $0B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 5,\ y = x\}$ e in esso si ha $R(x, x) = 2x^3+3x^2-4x$. Studiamo il segno della derivata prima $R'(x, x) = 6x^2+6x-4$, ed osserviamo che la derivata prima si annulla in un punto $x_1 < 0$ ed in un punto $0 < x_2 < 5$, ed è positiva per valori esterni all'intervallo di queste due radici, negativa all'interno. Se ne deduce che lungo questo intervallo il massimo si ha nuovamente in $B(5, 5)$. In conclusione: per massimizzare i ricavi l'azienda dovrebbe vendere sia la prima sia la seconda pellicola a 5000 Euro. □

Esercizio 24 *Un laboratorio produce due tipi di gelato, chiamati Dolce e Amaro. Se in una settimana si producono x chilogrammi del tipo Dolce e y chilogrammi del tipo Amaro, il costo totale è*

$$C(x, y) = 600 + 200x + 200y - 2x^2y\ .$$

Si può minimizzare il costo settimanale producendo entrambi i tipi di gelato, in un quantitativo totale che sia strettamente inferiore a 300 chilogrammi?

Soluzione. La formalizzazione del problema è la seguente:

$$\begin{cases} \min & 600 + 200x + 200y - 2x^2y \\ \text{s.t.} & x + y < 300 \\ & x > 0 \\ & y > 0\ . \end{cases}$$

La regione ammissibile è $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ y < 300 - x\}$ e corrisponde alla parte di piano racchiusa nel triangolo di vertici $O(0, 0), A(300, 0), B(0, 300)$, escluse le frontiere. Bisogna esaminare quindi solo i punti interni (figura 28). Calcoliamo i punti critici:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial x} = 200 - 4xy = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial C}{\partial y} = 200 - 2x^2 = 0\ . \end{cases}$$

Risolvendo, l'unico punto critico ammissibile è $C(10, 5)$, che è effettivamente punto interno alla regione ammissibile. Calcoliamo a questo punto l'hessiana

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} = -4y \\[2ex] \dfrac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} = -4x \\[2ex] \dfrac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

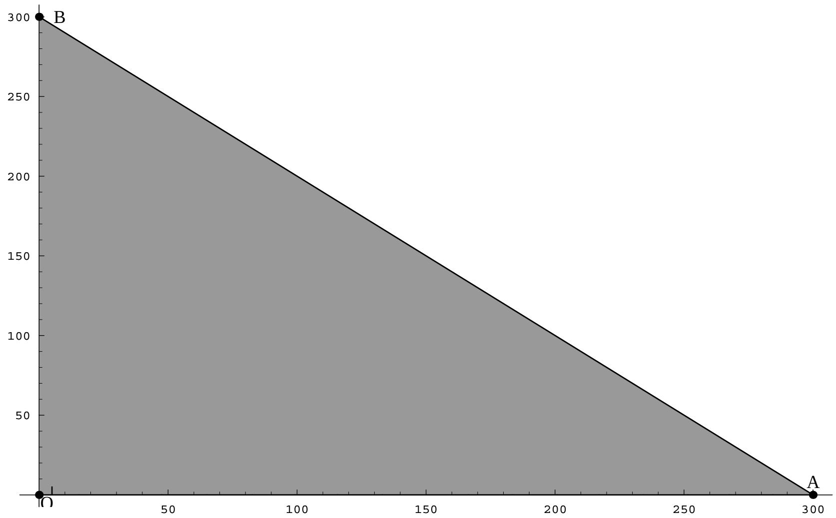

Figura 28: Regione ammissibile di $C(x, y)$ (Esercizio 24).

e quindi

$$H(10, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -40 & -20 \\ -20 & 0 \end{pmatrix} .$$

Essendo $\det(H) = -400 < 0$ possiamo concludere che il punto critico è un punto di sella. Dunque, non è possibile soddisfare la richiesta. □

Esercizio 25 *La vostra impresa di spedizione deve costruire un capannone della forma di parallelepipedo e della capacità di* 4000 m^3*. Una tale opera non richiede fondamenta, il suo costo è di* 20 *euro al* m^2 *per il tetto e di* 160 *euro al* m^2 *per le pareti. Quali dimensioni del capannone minimizzano la spesa?*

Soluzione. Indicando con x, y, z rispettivamente la lunghezza, profondità e altezza del capannone, si ha che la funzione di costo $C(x, y, z)$ per la costruzione di esso è data dalla somma della spesa per le 4 pareti laterali e per il tetto; osservando che le pareti parallele hanno costo uguale si ottiene $C(x, y, z) = 20xy + 320zx + 320zy = 20xy + 320z(x + y)$. La formalizzazione del problema è quindi:

$$\begin{cases} \min & 20xy + 320z(x+y) \\ \text{s.t.} & xyz = 4000 \\ & x > 0 \\ & y > 0 \\ & z > 0 \,. \end{cases}$$

Sostituendo $z = 4000/(xy)$ nella funzione di costo otteniamo che il problema si riduce ad un problema di ottimizzazione in due variabili:

$$\begin{cases} \min & 20xy + \dfrac{320 \cdot 4000}{y} + \dfrac{320 \cdot 4000}{x} \\ \text{s.t.} & x > 0 \\ & y > 0 \; . \end{cases}$$

Calcoliamo i punti critici

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 20y - \dfrac{1280000}{x^2} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 20x - \dfrac{1280000}{y^2} = 0 \; . \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene che l'unico punto critico è $A(40, 40)$. Per verificare di che punto si tratta dobbiamo calcolare l'hessiana:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2560000}{x^3} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 20 \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2560000}{y^3} \end{cases}$$

da cui

$$H(40, 40) = \begin{pmatrix} 40 & 20 \\ 20 & 40 \end{pmatrix} \; .$$

Essendo $\det(H) > 0$ e osservando che $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ possiamo concludere che il punto critico è un punto di minimo assoluto per il problema in due variabili. Conclusione: le dimensioni del capannone dovrebbero essere: lunghezza di 40 metri, profondità di 40 metri ed altezza di $2,5$ metri. □

Esercizio 26 *Si determinino i punti di massimo e minimo assoluti di* $f(x, y) = 2x^3 + 3xy^2$ *nella regione di piano* $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\right\}$.

Soluzione. Anche in questo caso il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di massimo e minimo assoluti. Cominciamo con il cercare i punti critici interni a D:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 3y^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6xy = 0 \; . \end{cases}$$

Osserviamo quindi che l'unico punto che annulla $\frac{\partial f}{\partial x}$ è $(0, 0)$, nel quale si annulla anche $\frac{\partial f}{\partial y}$. Calcoliamo la matrice hessiana per stabilire di che tipo di punto si tratta:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

da cui vediamo subito che la matrice hessiana non ci fornisce informazioni. Osserviamo subito però che se restringiamo il dominio di f al segmento di vertici $(-3,0),(3,0)$, si ha $f(x,0)=2x^3$, che assume evidentemente valori negativi o positivi a seconda che sia $x<0$ o $x>0$, ed essendo $f(0,0)=0$ se ne deduce subito che esso è dunque un punto di sella.
A questo punto dobbiamo cercare i massimi e minimi sulla frontiera di D, ossia dove vale la condizione $y^2=9-x^2$. Sostituendola nella definizione della funzione otteniamo che $f(x,y\in\text{frontiera})=2x^3+3x(9-x^2)=27x-x^3$, e quindi $f'(x,y\in\text{frontiera})=27-3x^2$, da cui ricaviamo che $f_{|\partial D}$ è crescente per $x\in[-3,3]$, e quindi ammette un minimo in $(-3,0)$, che quindi sarà il **minimo assoluto** di f su D, ed è $f(-3,0)=-54$, e un massimo, che sarà quindi il **massimo assoluto** di f su D, in $(3,0)$ ed è $f(3,0)=54$. $\square$

Esercizio 27 *Si trovino i massimi e i minimi assoluti della funzione*

$$f(x,y)=3x+2y$$

nella regione di piano individuata dai vincoli

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-3)^2\le 13\\ e^{4x-3y}\le e^{15}\\ x,y\ge 0\,.\end{cases}$$

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che il primo vincolo $(x-3)^2+(y-3)^2\le 13$ individua una circonferenza di centro $C(3,3)$ e raggio $r=\sqrt{13}$, mentre il secondo vincolo può essere riscritto come $y\ge\frac{4}{3}x-5$; la regione del piano individuata è rappresentata nella figura 28.
In questo caso l'approccio tradizionale, mediante la ricerca dei massimi prima all'interno e poi sulla frontiera del dominio, è laborioso data la forma della frontiera stessa. Ragioniamo invece in questo modo: individuiamo le curve di livello di f; in questo caso esse sono rappresentate da un fascio di rette parallele di equazione $y=-\frac{3}{2}x+\frac{k}{2}$, al variare di $k\in\mathbb{R}$. Si osserva inoltre che la direzione di crescita della funzione, come indicato dal gradiente $\nabla f=(3,2)$ è quella verso "nord-est"; dunque il minimo e il massimo della funzione saranno raggiunti rispettivamente nei punti in cui le curve (rette) di livello di f sono tangenti alla circonferenza di equazione $(x-3)^2+(y-3)^2=13$. Dal punto di vista analitico dobbiamo quindi considerare il sistema

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-3)^2=13\\ y=-3/2x+k/2\end{cases}$$

e trovare i valori di k per cui come soluzione otteniamo un punto solo di intersezione fra retta e circonferenza, che è appunto la condizione di tangenza. Sostituendo la seconda equazione nella prima e risolvendo si ottiene

$$\frac{13}{4}x^2-\left(\frac{3}{2}k-3\right)x+5+\frac{k^2}{4}-3k=0$$

cui dobbiamo imporre che abbia un'unica soluzione, cioè che il suo discriminante sia nullo:

$$\left(\frac{3}{2}k-3\right)^2-13\left(5+\frac{k^2}{4}-3k\right)=0.$$

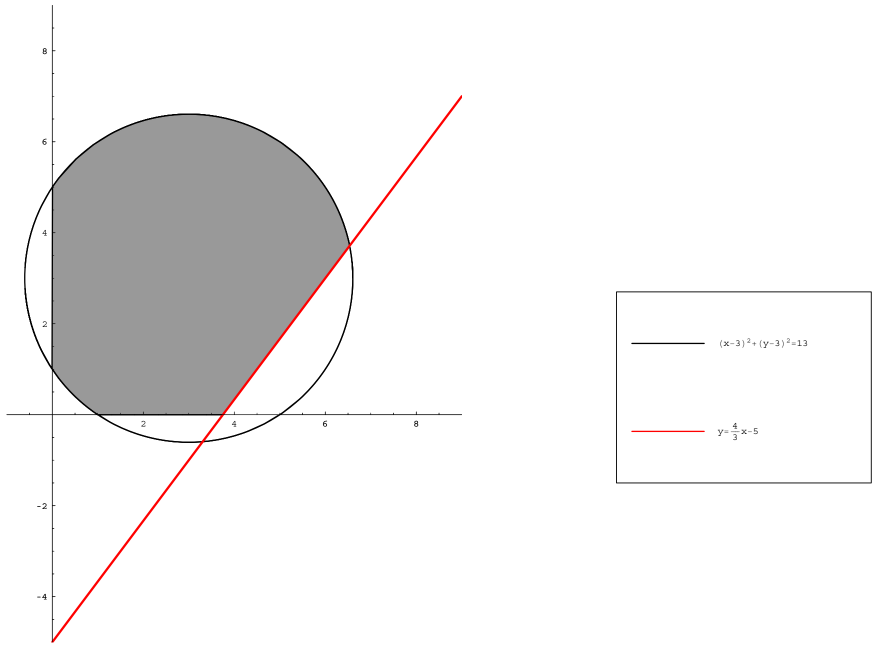

Figura 29: Regione ammissibile di $f(x, y)$ (Esercizio 27).

Risolvendo quest'equazione di secondo grado in k si ottengono le due soluzioni $k_1 = 2$ e $k_2 = 28$, che dunque sono rispettivamente il massimo e il minimo di f. Per trovare le coordinate dei punti di massimo e minimo basta sostituire questi due valori nel sistema di partenza, e ricavare le coordinate x e y, e si ottengono rispettivamente $(0, 1)$ e $(6, 5)$.

$\square$

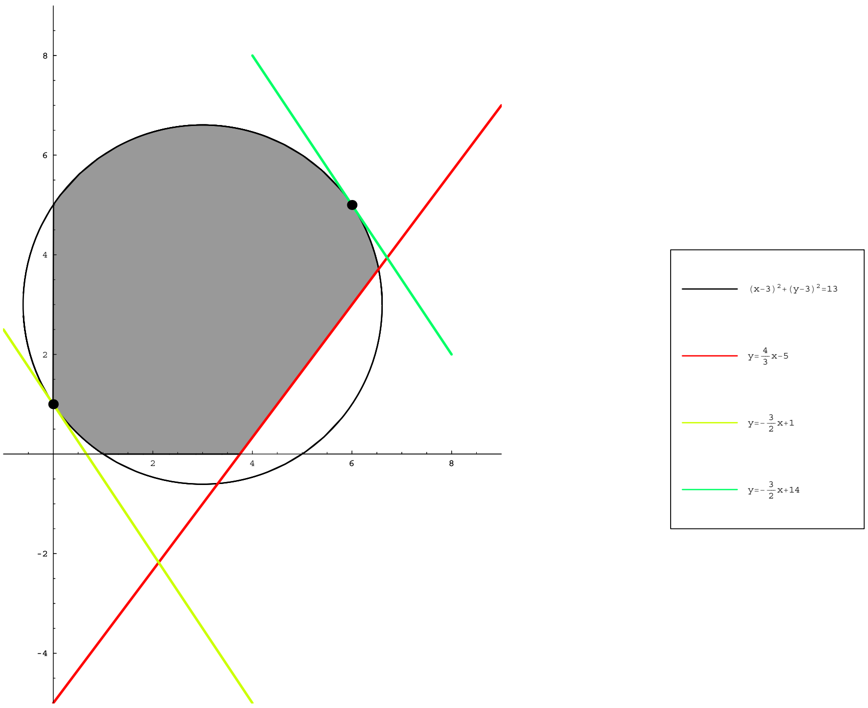

Figura 30: Rette tangenti nei punti di max e min di $f(x,y)$ (Esercizio 27).

Bibliografia

[G] Guerraggio A. (2004) *Matematica*, Bruno Mondadori.

[WC] Waner S., S.R. Costenoble (2006) *Strumenti Quantitativi per la Gestione Aziendale*, Apogeo, Milano.