ANALISI INTERVALLARE
PER MODELLI DI SELEZIONE DEL PORTAFOGLIO

Silvio Giove
Dipartimento di Matematica Applicata, Università Ca Foscari di Venezia
e-mail: sgiove@unive.it

Stefania Funari
Dipartimento di Matematica Applicata, Università Ca Foscari di Venezia
e-mail: funari@unive.it

Carla Nardelli
Dipartimento di Discipline Economico-Aziendali, Università di Messina
e-mail: nardelli@unive.it

1. Introduzione

Fra gli approcci proposti in letteratura per affrontare i problemi di selezione del portafoglio, oltre ai metodi derivati dal ben noto modello di Markowitz, è interessante considerare la programmazione *possibilistica* in cui i tassi di rendimento, anziché essere descritti da variabili casuali, sono rappresentati da variabili *possibilistiche* (Inuiguchi-Ramik, 2000, Tanaka-Guo-Turksen, 2000). Diverso è in tal caso il significato dell'incertezza assegnato a tali variabili, che risulta caratterizzato da *ambiguità* piuttosto che da stocasticità, si veda al proposito Inuiguchi-Sakawa (1995). Seguendo tale filone, ma con un approccio leggermente diverso, i coefficienti della funzione obiettivo e dei vincoli possono essere rappresentati da opportuni intervalli. A tal proposito segnaliamo che in Alefeld-Mayer (2000) vengono presentate la teoria e le applicazioni dell'analisi intervallare. Applicazioni dell'analisi intervallare a problemi di programmazione si trovano in Chinneck-Ramadan (2000), dove viene affrontato un problema di programmazione lineare, ed in Inuiguchi-Sakawa (1995) che considera un problema analogo ma la funzione oggetto viene ottimizzata per mezzo del criterio del *minimax regret*. A tal proposito ricordiamo che in Inuiguchi-Tanino (2000) viene proposto un nuovo approccio alla programmazione *possibilistica* basato sul metodo del *regret,* secondo cui il decisore ha come obiettivo la minimizzazione di un funzionale che rappresenta la massima deviazione possibile tra il rendimento realizzato del portafoglio ed il rendimento di un benchmark. Ispirandosi a tale approccio, nel presente lavoro viene affrontato un problema di selezione del portafoglio in cui i coefficienti della funzione obiettivo e dei vincoli sono rappresentati da intervalli. La selezione del portafoglio viene affrontata come un problema di programmazione non lineare a coefficienti intervallari, con il metodo del *regret*, e la quantificazione del rischio di portafoglio è data da una misura di possibilità.

2. Regret e portafoglio a variabili intervallari

Si definisce la funzione *regret* nel modo seguente

$$r(x;c) = \max_{\substack{y \geq 0 \\ e^T y = 1}} F(y^T c, x^T c) \qquad (2.1)$$

dove la funzione $F : \Re_0^+ \times \Re_0^+ \to \Re^+$ è continua, strettamente crescente nella prima componente e strettamente decrescente nella seconda; $x \in \Re^n$ rappresenta il vettore delle quote di portafoglio, $c \in \Re^n$ indica il vettore dei prezzi, ciascuno dei quali appartenente ad un intervallo strettamente positivo:

$$c_i \in C_i, \quad C_i = [c_i^{\inf},\ c_i^{\sup}], \quad c_i^{\inf} > 0 \qquad (2.2)$$

ed $e = (1,...,1)^T$.

Si osservi che, come conseguenza della definizione (2.1), se y^* massimizza la funzione F rispetto alla sua prima componente, segue immediatamente dai vincoli $y \geq 0,\ e^T y = 1$ che

$$c^T y^* \geq c^T x \qquad (2.3)$$

Si assuma che

$$F(a,b) \geq 0, \forall a \geq b > 0 \qquad (2.4)$$

e

$$F(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b > 0 \qquad (2.5)$$

in quanto nel caso migliore (che si ottiene quando il portafoglio scelto x soddisfa $c^T x = c^T y^*$) facciamo in modo che il *regret* risulti nullo.

Si ipotizzi inoltre che $\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset$, in modo da garantire che non esiste un titolo dominante, nel senso che tutti i valori di rendimento di questo titolo non sono sistematicamente maggiori dei valori assunti dai rendimenti di tutti gli altri titoli.
E' possibile dimostrare che anche la funzione *regret* definita in (2.1) è una variabile intervallare.

Proposizione: al variare di $x \in X = \{x \in \Re^n :\ x \geq 0,\ e^T x = 1\}$ e di $c \in C = C_1 \times C_2 \times ... \times C_n$, si ha che il *regret* $r(x;c)$ è un intervallo $r = [r^{\inf}, r^{\sup}]$, dove $r^{\inf} = 0$ e $r^{\sup} = \max_{\substack{x,c \\ x \in X \\ c \in C}} r(x;c) = \max_i \{\max_{j \neq i} F(c_i^{\sup}, c_j^{\inf})\}$.

3. Misure di possibilità per intervalli ed applicazione alla selezione del portafoglio

In questo lavoro vengono formulati e studiati alcuni modelli di selezione di portafoglio che utilizzano la funzione *regret* e un'estensione alle variabili intervallari delle definizioni di misure di possibilità e necessità associate a numeri *fuzzy* presentate in Inuiguchi-Ramik (2000).
Indicata con $Pos\{I \leq h\}$ la misura di possibiltà che l'intervallo I sia minore di h, dove h è un parametro reale positivo, viene formulato il seguente problema di selezione di portafoglio:

$$\begin{aligned} &\max_{h,x} Pos\{r(x;c) \leq h\} \\ &e^T x = 1 \\ &x \geq 0 \\ &c \in C \end{aligned} \tag{3.1}$$

Il problema (3.1) viene discusso ed analizzato al variare della forma funzionale di F presente nella funzione *regret*; in particolare risultano interessanti i due casi in cui F è una funzione lineare oppure frazionaria.

Bibliografia

Alefeld, G., Mayer G. (2000), “Interval Analysis: theory and applications”, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 121, 421-464.

Chinneck J.W., Ramadan K. (2000), “Linear programming with interval coefficients”, *Journal of the Operational Research Society*, 51, 209-220.

Inuiguchi M., Ramik J. (2000), “Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem”, *Fuzzy Sets and Systems,* 111, 3-28.

Inuiguchi M., Sakawa M. (1995), “Minimax regret solution to linear programming problems with an interval objective function”, *European Journal of Operational Research*, 86, 526-536.

Inuiguchi M., Tanino T. (2000), “Portfolio selection under indipendent possibilistic information”, *Fuzzy Sets and Systems,* 115, 83-92.

Tanaka H., Guo P., Turksen I.B. (2000), “Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibilities distributions ”, *Fuzzy Sets and Systems,* 111, 387-397.