



## TÍTULO

**EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE MAESTROS  
MEXICANOS DE PRIMARIA SOBRE EL PLANO CARTESIANO**

## AUTORA

**Erica Valdespino Medina**

**Esta edición electrónica ha sido realizada en 2018**

|                         |  |
|-------------------------|--|
| <b>Instituciones</b>    | Universidad Internacional de Andalucía ; Universidad de Huelva   |
| <b>Directora/Tutora</b> | Dra. D. <sup>ª</sup> Nuria Climent Rodríguez   |
| <b>Curso</b>            | <i>Máster Oficial en Investigación de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas</i> |
| <b>ISBN</b>             | 978-84-7993-549-8  |
| ©                       | Erica Valdespino Medina  |
| ©                       | De esta edición: Universidad Internacional de Andalucía  |
| <b>Fecha documento</b>  | 2017   |



## Reconocimiento-No comercial-Sin obras derivadas

### Usted es libre de:

- Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.

### Bajo las condiciones siguientes:

- **Reconocimiento.** Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).
- **No comercial.** No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- **Sin obras derivadas.** No se puede alterar, transformar o generar una obra derivada a partir de esta obra.
- *Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.*
- *Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.*
- *Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.*

TRABAJO FIN DE MÁSTER

---

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE MAESTROS MEXICANOS  
DE PRIMARIA SOBRE EL PLANO CARTESIANO

---

MÁSTER EN INVESTIGACIÓN EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE  
LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES, SOCIALES Y MATEMÁTICAS.



Universidad  
de Huelva

Autora: D.<sup>a</sup> Erica Valdespino Medina.

Directora: Dra. D.<sup>a</sup> Nuria Climent Rodríguez.

**Huelva, España. 2017.**

# **El conocimiento especializado de maestros mexicanos de Primaria sobre el plano cartesiano**

## *Resumen*

*El objetivo de la presente investigación es dar una aproximación al conocimiento especializado deseable de maestros mexicanos de Primaria sobre el concepto de plano cartesiano. El enfoque metodológico que se siguió es de tipo cualitativo. Se realizó una revisión sobre el contenido, la enseñanza y aprendizaje del plano cartesiano en Planes y programas, y libros de texto. El análisis de la información se manejó mediante procedimientos comparativos y analíticos con el modelo MTSK. Se diferenciaron indicadores del MTSK deseable en relación con el plano cartesiano como registro de representación, sus bases y fenómenos relacionados con éste; conexiones con la geometría analítica, con contenidos más elementales de orientación espacial; y contenidos establecidos en el currículo oficial y propuesta de secuenciación.*

**Palabras clave:** *Conocimiento Especializado, Plano Cartesiano, Geometría Analítica, Educación Primaria, Profesor de Matemáticas.*

## The specialized knowledge of Mexican Primary teachers on the Cartesian Plan

### *Abstract*

*The aim of this research is to have an approximation to the desirable specialized knowledge level that Mexican primary teachers (MTSK) should have about the Cartesian Plan. A revision on the content, the teaching and learning process in school plans, programs and textbooks was made and a qualitative methodological approach was used. The analysis of the information was done through analytical and comparative procedures of the MTSK model. The desirable indicators obtained from the MTSK were differentiated to the Cartesian Plan as a representative record as well as It's basis and connections with analytic geometry and with their most basic levels of space orientation and the contents established by the Official Program proposal.*

**Keywords:** *Specialized Knowledge, Cartesian Plan, Analytic Geometry, Primary Education, Mathematics Teacher.*

## Introducción

En México, ser maestro de Primaria y enseñar un contenido matemático implica construir desde diversas realidades culturales y complejas por lo que muchas de las veces se dejan a un lado los asuntos que tienen que ver con el conocimiento de la materia. De acuerdo a la investigación de Valdespino y Carvajal (2012) las nuevas generaciones de docentes<sup>1</sup> expresan que para enseñar matemáticas no existe un espacio particular para tratar los contenidos ya que tanto en la formación como en la práctica profesional no se contempla estudiar los contenidos matemáticos sino cómo enseñar matemática en la Educación Primaria. El docente de Primaria toma en cuenta los contenidos, sin embargo, no necesariamente lo hace con base en una reflexión previa sobre el concepto, las estrategias y los métodos para abordarlos; por lo regular se convierten, durante la labor docente, en un asunto de menor importancia y utilizan estrategias ya conocidas por su experiencia como estudiantes o las adquiridas durante la formación como docente.

En este trabajo usaremos el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo, Contreras, Climent, Escudero-Ávila, Flores-Medrano y Montes, 2014) con el propósito de identificar el conocimiento que requiere el docente en relación con la enseñanza del contenido matemático de Plano Cartesiano (siglas PC en adelante). Se ha elegido el contenido del PC por la escasez de investigaciones al respecto y por ser un tema frontera entre la Geometría Euclídea y la Analítica.

El motivo para la realización de la investigación será contribuir al conocimiento que necesita el profesor, de cara a poder intervenir en un futuro en su formación. Por lo que la pregunta de investigación que se planteará será ¿Qué conocimiento matemático especializado necesitan profesores de Primaria de México para enseñar el PC?, desglosada en:

- a) ¿Qué conocimiento matemático (MK) sobre PC necesitan los profesores de Primaria?
- b) ¿Qué conocimiento didáctico del contenido (PCK) sobre PC necesitan los profesores de Primaria en su práctica?

El objetivo del trabajo de investigación será dar una aproximación al conocimiento especializado deseable de maestros mexicanos de Primaria sobre el concepto de PC. Para responder a qué necesitan los profesores en torno al contenido elegido, haremos una

---

<sup>1</sup>Maestros entre dos y cinco años insertos en la docencia.

revisión sobre la enseñanza y aprendizaje de estos contenidos, un análisis del currículo mexicano, un análisis del tratamiento del contenido en libros de texto de México y una revisión sobre el conocimiento de profesores en relación con el contenido.

## **1. Marco Teórico**

### **1.1. *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas***

El modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK<sup>2</sup>) (Carrillo et al, 2014) se considera una propuesta teórica y una herramienta metodológica que permite analizar distintas prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo, 2016, p.57). El MTSK se origina a partir de las aportaciones de Shulman (1986, 1987) quien plantea la importancia de contar con el conocimiento disciplinar y pedagógico para la enseñanza de una materia, distinguiendo para ello siete componentes de conocimiento: el conocimiento pedagógico general, el conocimiento de los alumnos y sus características, el conocimiento de contextos educativos, el conocimiento de fines, propósitos y valores educativos, el conocimiento del contenido, el conocimiento curricular, y el conocimiento didáctico del contenido (PCK<sup>3</sup>) (Shulman, 1987, p. 8).

A partir de los conocimientos del contenido, curricular y didáctico del contenido, propuestos por Shulman, Deborah Ball y sus colaboradores (Ball, Thames y Phelps, 2008), se interesan por estudiar la naturaleza del conocimiento específico para la enseñanza de la matemática, basándose en el análisis de las demandas de la enseñanza matemática actual y la identificación de los conocimientos matemáticos. Así, definen el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT<sup>4</sup>) (Figura 1) el cual propone componentes que permiten organizar y usar el conocimiento del profesor de matemáticas.

---

<sup>2</sup>En la presente investigación se utilizarán las siglas en inglés con la intención de conservar la comprensión de los textos originales.

<sup>3</sup>Siglas en inglés PCK, correspondientes a *Pedagogical Content Knowledge* (*Conocimiento Didáctico del Contenido*).

<sup>4</sup>En español, *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*.

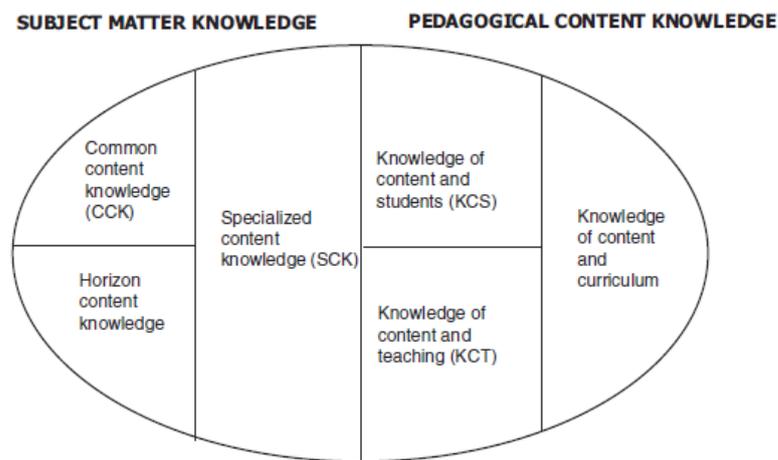


Figura 1. Dominios y subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza.

(Ball et al., 2008, p. 403).

De la caracterización del modelo MKT (Ball et al., 2008) se resalta la aportación particular del *conocimiento matemático especializado* (Specialised Content Knowledge) que recoge la actuación específica del profesor de matemáticas, y el *conocimiento del horizonte* (Horizon Content Knowledge) como el conocimiento matemático avanzado donde el docente reconozca, relacione y asocie los contenidos, otorgando así un carácter de conocimiento profundo y riguroso de los temas.

Finalmente, el grupo SIDM<sup>5</sup> toma las aportaciones de Shulman y del grupo de Ball, y formula el modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas MTSK (Carrillo, Contreras y Flores. 2013, p.199), el cual atiende una serie de problemas de organización y delimitación de los subdominios en el MKT (Carrillo et al., 2013). La estructura del modelo MTSK, en dominios y subdominios que se subdividen en categorías de conocimiento (Carrillo, Montes, Contreras y Climent, 2017), permite su análisis detallado y delimitado, así como el establecimiento de posibles relaciones entre los subdominios (Figura 2) (Flores-Medrano et al., 2016).

El Conocimiento matemático (MK<sup>6</sup>) se refiere a los conocimientos sobre el contenido que tiene el profesor que enseña matemáticas e incluye los subdominios: *Conocimiento de los temas* (KoT<sup>7</sup>), que ofrece la fundamentación teórica de los contenidos que se desarrollan con los estudiantes y del cual se destacan cuatro categorías: “Fenomenología y Aplicaciones”, “Definiciones, Propiedades y sus Fundamentos”, “Registros de

<sup>5</sup>Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática, Universidad de Huelva, España.

<sup>6</sup>Siglas en inglés MK, correspondientes a *Mathematical Knowledge*.

<sup>7</sup>Siglas en inglés KoT, correspondientes a *Knowledge of Topics*.

Representación”, y “Procedimientos”; *Conocimiento de la estructura de la matemática* (KSM<sup>8</sup>), responde a las conexiones y relaciones de los temas que sirve como fundamento para cursos posteriores y nexos con anteriores, siendo las categorías: “Conexiones de Complejización”, “Conexiones de Simplificación”, “Conexiones Transversales” y “Conexiones Auxiliares”; y *Conocimiento de la práctica matemática* (KPM<sup>9</sup>), se centra en las formas de hacer y proceder en matemáticas, entendidas como herramientas para el profesor. En este último subdominio no se han desarrollado categorías sino algunos indicadores, que no serán considerados en este trabajo.

El Conocimiento didáctico del contenido (PCK) está relacionado con el conocimiento del profesor sobre la enseñanza y aprendizaje del contenido. Lo conforman el *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS<sup>10</sup>), acerca de lo que está estipulado que aprenda un estudiante y el nivel conceptual con el que se espera que lo aprenda, incluye las categorías: “Expectativas de Aprendizaje”, “Conocimiento del Nivel de Desarrollo Conceptual y Procedimental Esperado”, y “Secuenciación con Temas Anteriores y Posteriores”; *Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM<sup>11</sup>), conocimiento sobre cómo se aprende un contenido, con las categorías: “Teorías de Aprendizaje”, “Fortalezas y Dificultades Asociadas al Aprendizaje”, “Formas de Interacción de los Alumnos con un Contenido Matemático”, e “Intereses y Expectativas sobre Matemáticas”; y *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT<sup>12</sup>), que incluye la variedad de recursos y estrategias didácticas para presentar un contenido, siendo las categorías que lo caracterizan: “Teorías de Enseñanza”, “Recursos Materiales y Virtuales”, y “Estrategias, Técnicas, Tareas, y Ejemplos”.

---

<sup>8</sup>Siglas en inglés KSM, correspondientes a *Knowledge of the Structure of Mathematics*.

<sup>9</sup>Siglas en inglés KPM, correspondientes a *Knowledge of Practices in Mathematics*.

<sup>10</sup>Siglas en inglés KMLS, correspondientes a *Knowledge of Mathematics Learning Standards*.

<sup>11</sup>Siglas en inglés KFLM, correspondientes a *Knowledge of Features of Learning Mathematics*.

<sup>12</sup>Siglas en inglés KMT, correspondientes a *Knowledge of Mathematics Teaching*.

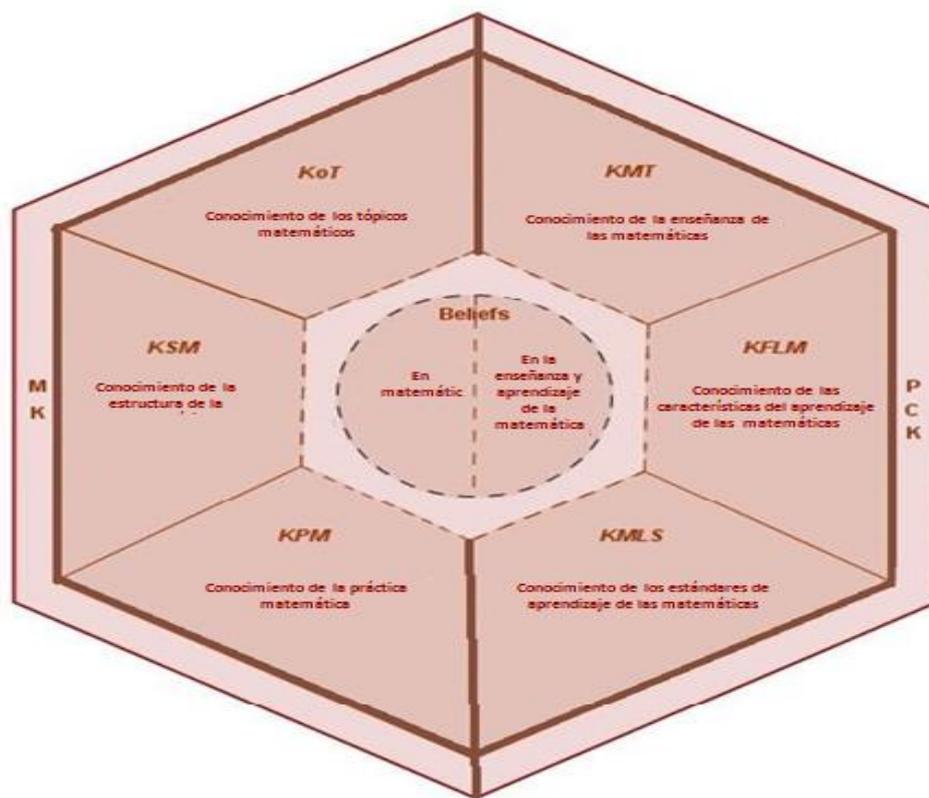


Figura 2. Dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, Carrillo et al., 2013, p.199).

### 1.2. Enseñanza y aprendizaje del Plano cartesiano

La metodología didáctica que sugiere la Secretaría de Educación Pública en México (SEP, 2011) para la enseñanza de la matemática, consiste en utilizar situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver problemas y a formular argumentos que validen los resultados. Y que, al mismo tiempo, implique los conocimientos y las habilidades matemáticas que se requieren desarrollar.

La enseñanza de la geometría y la medición en Educación Primaria (SEP, 2011) integra tres aspectos esenciales: 1) La exploración de las características y propiedades de las figuras y cuerpos geométricos; 2) La generación de condiciones para el tránsito a un trabajo con características deductivas; y 3) El conocimiento de los principios básicos de la ubicación espacial y el cálculo geométrico; siendo de interés para la presente investigación la ubicación espacial por su relación con el PC.

Desde la Didáctica de la Matemáticas la enseñanza de la Geometría debe considerar los principios psicológicos sobre la percepción y representación espacial, así como el

desarrollo de situaciones donde el niño interactúe con el mundo real, para posteriormente usar representaciones elementales y sistemas de referencias (Vecino, 2006).

Con relación a los principios psicológicos, el razonamiento espacial juega un papel trascendental en el rendimiento de los estudiantes ya que permite la concepción y el desarrollo de pensamiento espacial del niño (Piaget e Inhelder, 1967, citado en Clements y Battista, 1992), las habilidades espaciales y las representaciones de ideas geométricas, así como con el uso de programas tecnológicos (Clements y Battista, 1992).

Por otro lado, para el desarrollo de situaciones donde el niño pueda interactuar y construir los distintos conceptos geométricos debe considerarse lo que Gálvez (1985) refiere como el tamaño del espacio: el microespacio (el sujeto actúa con las articulaciones propias y con los medios primarios de que se dispone), el mesoespacio (actúa teniendo en cuenta su proximidad física y afectiva y la posibilidad efectiva de utilizar medios que implican una cierta representación del mismo) y macroespacio (espacio que sobrepasa los límites de acceso al mismo y que exige la utilización de medios avanzados de representación).

De tal forma que, la enseñanza del PC en Primaria se utiliza como un espacio geométrico donde se desarrolla la orientación, así como el proceso evolutivo de la representación (mediante fases o niveles) situándose en un sistema de referencia dado y la construcción de un sistema de coordenadas (Gonzato, 2009).

Para Godino (2004), la relación entre orientación espacial y sistemas de referencia en el aula debe integrar los conocimientos sobre el espacio con las propiedades geométricas de los objetos y lugares para constituir un campo de conocimiento idóneo en el desarrollo intelectual de los alumnos. Lo anterior, mediante las nociones básicas de proximidad, separación, orden, cerramiento y continuidad durante la convivencia y el juego inmediato del niño, y posteriormente hacerlo con objetos y elementos reales, para establecer así, relaciones espaciales como: cerca, lejos, entre otros. Para que al desarrollar los contenidos relacionados con la orientación y representación espacial el alumno pueda progresar, en función de sus vivencias y el nivel de competencias o capacidades cognitivas, desde las percepciones intuitivas del espacio, hasta la progresiva construcción de nociones topológicas, proyectivas y euclidianas.

## **2. Metodología**

La metodología cualitativa es un modo de encarar el mundo empírico; la investigación cualitativa es inductiva, es un diseño de investigación flexible (Taylor y Bogdan, 2002). La presente investigación emplea la metodología cualitativa para tratar de distinguir y describir el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico deseable sobre el PC en Primaria mediante la revisión de los Planes y programas de estudio, así como los libros de texto y artículos especializados, siendo que los resultados obtenidos se utilicen como indicadores para un estudio posterior más amplio. Asimismo, la investigación se sitúa en el paradigma interpretativo pues se intenta encontrar sentido a los fenómenos en términos de los significados que, en este caso, se refiere a los conocimientos que exigen a los maestros los programas de estudio y los libros de texto (Hernández, Fernández y Lucio, 2008). Los datos de esta investigación están constituidos por el currículo y los libros de texto oficiales.

El análisis de los datos se realizó, mediante un análisis de contenido, a través del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en correspondencia con los subdominios de conocimiento del modelo MTSK citados en el marco teórico.

## **3. Resultados**

Los resultados del análisis, que evidencian los conocimientos necesarios para el contenido del PC en Primaria y los cuales se obtuvieron tanto del currículo como de los libros de texto, se presentan de acuerdo a los subdominios del modelo MTSK. Se organizan en dos partes. En una primera parte se presentan de modo general el currículo y los libros de texto oficiales (en relación con el PC), y en una segunda parte se desglosa el conocimiento que debe tener el profesor (conocimiento deseable) en cada subdominio extraído de la revisión bibliográfica sobre la enseñanza y aprendizaje del contenido, el análisis del currículo y el análisis de los libros de texto.

### **3.1. El currículo y los libros de texto oficiales en relación con el plano cartesiano**

#### ***3.1.1. El plano cartesiano en el currículo en la Educación Básica de México***

La Educación Primaria en México, dentro del currículo oficial, el estudio de la Geometría tiene como propósito usar e interpretar diversos códigos para la orientación en el espacio y la ubicación de objetos o lugares. Los Estándares Curriculares para la Geometría se

organizan en el eje *Forma, Espacio y Medida* (SEP, 2011), siendo que el contenido de PC se sitúe dentro de ubicación espacial y los elementos para su construcción se presenten en secuencia de contenidos durante los cuatro primeros grados escolares asociados a temas de la geometría plana, incluyendo posteriormente en 5° sistemas de referencias y en 6° la representación gráfica de pares ordenados en el primer cuadrante de un sistema de coordenadas cartesianas.

De acuerdo a la revisión detallada de los programas de estudio de 1° a 6° en Primaria el sentido que se le atribuye al PC es el de una Representación gráfica donde el alumno se enfrenta a situaciones espaciales siendo que el uso y el significado que se le pueda atribuir en los programas escolares pueda coadyuvar como refiere Magaña (2005) en la creación y representación de métodos de solución para las futuras áreas de las matemáticas como lo es para la Geometría Analítica o, como señala Pollack (1997), como parte de la modelización matemática.

Cabe agregar, que los términos de plano y espacio también se emplean en otras asignaturas como: Geografía, Música y Educación Física. En este sentido, Gonzato y Godino (2010) afirman que, en Geografía, la cartografía pone en juego habilidades de visualización y orientación espacial, así como el acercamiento a la realidad explorando nuevos espacios (geográfico, geométrico y físico), aplicados en diferentes trabajos y en el uso de los nuevos medios informáticos para ubicarse y trazar recorridos. Todo esto dando valor a las que deberían ser las nuevas directrices curriculares en la escuela Primaria y Secundaria.

### **3.1.2. Libros de texto de Educación Básica de México**

En los libros de texto<sup>13</sup>, *Desafíos matemáticos* (SEP, 2015), el contenido de PC se introduce a partir de 5° con sistemas de referencias y en 6° la Representación gráfica cartesiana. Durante la revisión de los libros de texto, se contempla que desde el 1° al 4° curso se van construyendo las bases para el concepto de PC mediante el conocimiento de temas de ubicación espacial como: dirección y sentido sobre una línea horizontal (izquierda a derecha) o sobre una línea vertical (arriba para abajo) y posición (anterior, posterior y laterales) (en 1° curso); puntos cardinales (sur-norte, oriente-poniente) (en 2° curso); la construcción y ubicación de un punto en un mapa y un croquis y distancia de un punto a otro (en 3° curso); y trazo y propiedades de las figuras planas (vértices, líneas y

---

<sup>13</sup>El uso de los libros de texto oficial tiene un carácter obligatorio para cada grado escolar en las escuelas de Educación Básica de México. Estos son los libros de texto que se analizan en esta investigación.

ángulos); ángulos (grados y giros); el punto; la recta (por su dirección: horizontal, vertical y oblicua; por su posición: paralelas y perpendicular) y segmentos.

En 5° se utilizan los elementos de los mapas, los croquis y el plano cuadrícula para ubicar puntos y establecer sistemas de referencias en situaciones cercanas a su realidad (Figura 3), donde con base en la información que hay en el mapa sobre una localidad habitual, el estudiante debe responder a indicaciones como: a) Escriban los nombres de tres lugares que se puedan ubicar en el mapa o b) Sebastián acaba de llegar a la colonia. ¿Qué indicaciones le darían para ir de su casa a la escuela?

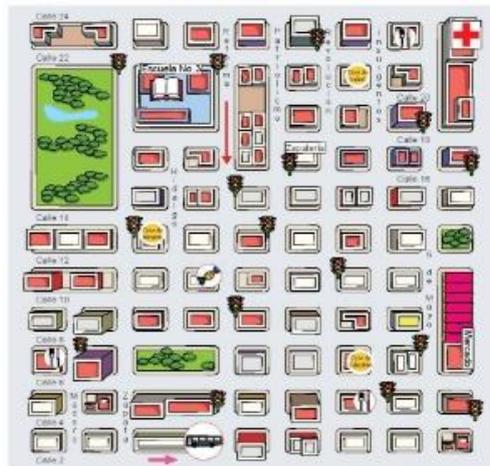


Figura 3. Desafíos matemáticos 5° (SEP, 2015, p.24).

Para 6° se plantean las propiedades del PC como son: los cuadrantes (rectas perpendiculares, números enteros), eje horizontal (abscisa), eje vertical (ordenada), coordenadas, sistemas de coordenadas, punto en el origen (intersección de los dos ejes), características de los puntos que se ubican sobre el eje horizontal y vertical; regularidades de algunas coordenadas de los puntos y las rectas que estos determinan en el plano: recta paralela al eje vertical (mismo número en las abscisas) o recta paralela a eje horizontal (mismo valor en las ordenadas); la recta y reproducir una figura plana con información de las coordenadas. Por ejemplo, en equipos, los estudiantes observan el croquis (Figura 4), ubican el semáforo número 3, determinan un par de números ordenados para la ubicación del mismo y responden preguntas como: a) ¿Qué características tienen las coordenadas de 5 puntos que se ubican sobre el eje horizontal? o b) ¿Qué características tienen las coordenadas de los puntos que se ubican sobre una paralela al eje horizontal?

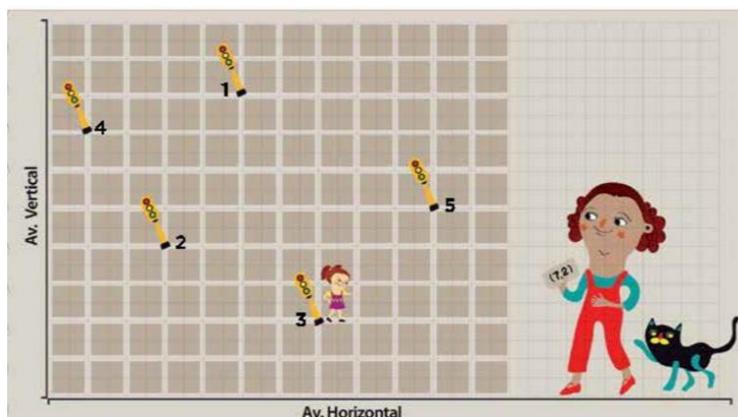


Figura 4. Desafíos matemáticos 6° (SEP, 2015, p.90).

### 3.2. Conocimiento especializado deseable en relación con la enseñanza del plano cartesiano

#### 3.2.1. Conocimiento de los temas matemáticos (KoT)

Respecto al conocimiento de los temas en 5° de Primaria, las situaciones (*Fenomenología*) que se utilizan en el libro de texto para estructurar y desarrollar la orientación espacial son: el croquis, el plano y el mapa (cuadricular) de sus localidades. En 6° de Primaria, se presentan situaciones cercanas a su realidad como son: el cine o el teatro, y están organizados de acuerdo al concepto de PC en el primer cuadrante (Figura 5). El conocimiento específico del maestro sobre las situaciones presentadas en los libros de texto contribuye a la interpretación de planos, croquis y mapas, así como situaciones de organización espacial en las que se hace uso de cuadrícula que dan sentido al PC.

**13 ¿Por dónde empiezo?**

**Consigna**  
En parejas, resuelvan el siguiente problema.

Daniel invitó a sus primos Isaac, Luis, Rocio y Patricia a una obra de teatro. Los boletos que compró no están juntos pero todos corresponden a la sección Balcón C del teatro. El siguiente plano representa las diferentes secciones de asientos.

• Preferente A  
 • Preferente A.A.  
 • Preferente B  
 • Preferente BB  
 • Balcón C  
 • Balcón D  
 • Balcón E

a) ¿Cómo describiría Daniel a sus primos en qué parte del teatro están sus lugares, si ellos no tienen el plano a la vista?

b) El siguiente plano corresponde a la zona de la sección Balcón C en la cual se ubican los lugares de Daniel, Isaac, Luis, Rocio y Patricia. Marquenlos con una X, según la siguiente información:

- El lugar de Daniel está en la segunda fila, décima columna.
- El lugar de Isaac está en la sexta fila, quinta columna.
- El lugar de Luis está en la quinta fila, octava columna.
- El lugar de Rocio está en la tercera fila, décima segunda columna.
- El lugar de Patricia está en la sexta fila, décima primera columna.

Figura 5. Lección 13. Desafíos matemáticos 6° (SEP, 2015, pp.26-27).

El conocimiento y uso de **Registros de representación** en 5º, el croquis, el plano y el mapa cumplen con la funcionalidad de constituir un espacio en donde se desarrollan los elementos matemáticos (estándar y no estándar) referentes a la orientación como son: **punto** en el mapa, croquis o plano cuadrícula; **puntos cardinales**: norte-sur, oriente-poniente; **distancia** de un punto a otro; **posición**: anterior, posterior y laterales, y **dirección y sentido**: sobre línea horizontal (izquierda a derecha) o sobre línea vertical (arriba para abajo) y coordenadas. Así como el uso de los símbolos presentes en mapas y planos: puntos cardinales, escala gráfica, representación de lugares como aeropuerto, restaurantes, señalamientos de sentidos de las calles, entre otros. Entendemos que el conocimiento de todos estos elementos corresponde a comprender y saber interpretar croquis, planos y mapas como sistemas de representación, de ahí que lo hagamos pertenecer con esta categoría del conocimiento deseable del profesor.

La Representación gráfica tiene la potencialidad de poder entenderse a través de la visualización y relacionar los aspectos geométricos y topológicos. Por lo que se considera importante que el maestro distinga los principales elementos que caracteriza a los sistemas de representación empleados (ver Tabla 1).

Tabla 1  
Sistemas de representación para aproximarse al PC<sup>14</sup>

| Sistemas de representación   | Elementos  |
|--|--|
| <i>Croquis</i> : explica a grandes rasgos los puntos destacados para llegar a un lugar.  | No necesariamente requiere de uso de orientación ni escala.  |
| <i>Plano geográfico</i> (donde se representa la Tierra en forma plana principalmente y en la cual se representa coordenadas o líneas imaginarias). | El punto, la recta (horizontal, vertical, paralelas, perpendicular y secante) y los ángulos.   |
| <i>Mapa</i> : son proyecciones a escalas diferentes dependiendo de las superficies (pequeña y gran escala o topográfico y temático).               | La escala (interpreta el tamaño real), la orientación (puntos cardinales) y simbología geométrica o pictórica (claves para interpretar el territorio). |

Para llevar a cabo la ubicación en un gráfico, es común tratar de buscar algún elemento (orientación, símbolos, lugares u objetos) que sirva de referencia. El sistema de referencia reticular se utiliza para ubicar un punto mediante la conformación de una cuadrícula integrada por una serie de líneas horizontales y verticales que, al ser relacionadas, sirven para construir coordenadas alfabéticas (A, C) y ubicar con precisión un lugar, siendo, por lo tanto, que la utilización del sistema de referencia reticular sea un precedente clave para el PC (Moreno, 1999).

<sup>14</sup>De acuerdo a la Asociación Cartográfica Internacional. En Conceptos Cartográficos. IGN & UPM-LatinGEO. Spain.

En 6º, el sistema de representación cartesiana se sitúa en un cuadrante del PC, simulando un mapa terrestre (Figura 6), donde, primero, se trata de reconocer coordenadas que dan lugar a la representación de dos dimensiones conjuntas ((x,y) las cuales representan un orden) mediante el uso de símbolos alfanuméricos (F,4) o numéricos (6,8), para posteriormente representar un punto (nombrado por una letra alfabética), un punto en el origen, un punto en el eje de las abscisas o un punto en el eje de las ordenadas.

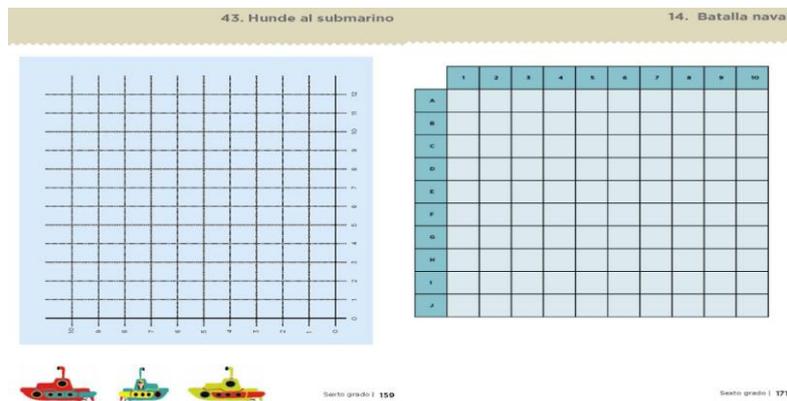


Figura 6. Lección 43. Desafíos matemáticos 6º (SEP, 2015. pp.159 y 171).

Una vez que los estudiantes ubican puntos en el PC y determinan coordenadas en los puntos y rectas de éste, se plantean regularidades con algunas coordenadas (puntos que se ubican sobre el eje horizontal-vertical) y la recta: la recta (mismo valor de abscisa y mismo valor de ordenada); la recta paralela al eje vertical (mismo número en las abscisas) y recta paralela a eje horizontal (mismo valor en las ordenadas); reconocer pares ordenados como vértices para reproducir una figura y atribuirle así una interpretación geométrica (Figura 7). Lo anterior, mediante el uso de instrucciones como: reproducir en el PC una figura geométrica utilizando pares ordenados (nombrados por un compañero) y que representarán los vértices de ésta.

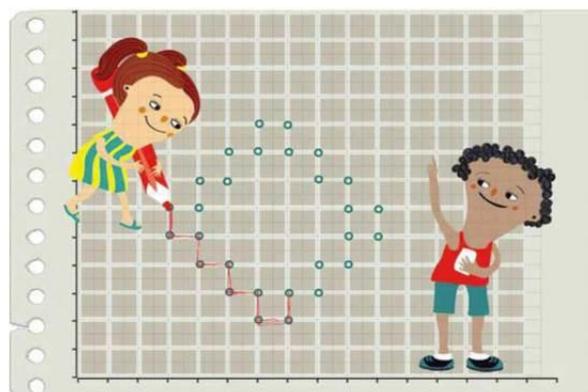


Figura 7. Lección 43. Desafíos matemáticos 6º (SEP, 2015. pp. 94).

El profesor debe conocer los fundamentos del concepto de PC y las características de distintos elementos geométricos en relación con su representación en el PC. Así, con respecto al KoT en la categoría de **definiciones y propiedades**, debe saber que el PC es un gráfico que está formado por dos rectas perpendiculares, cada una de ellas representando la recta real, denominadas ejes de coordenadas cartesianas. La recta horizontal se denomina eje de abscisas, o eje  $x$  (con valores positivos a la derecha y negativos a la izquierda), y la recta vertical, eje de ordenadas o eje  $y$  (con valores positivos hacia arriba y negativos hacia abajo). La intersección de ambas rectas se corresponde con el punto  $O$  (punto en el origen  $(0,0)$ ) de cada una de ellas, estableciendo así cuatro cuadrantes I, II, III y IV que se enumeran en sentido contrario a las manecillas del reloj. Donde en el cuadrante I los valores de  $x$  y los de  $y$  son positivos; en el cuadrante II los valores de  $x$  son negativos y los valores de  $y$  son positivos; en el cuadrante III los valores de  $x$  y los de  $y$  son negativos y el cuadrante IV los valores de  $x$  son positivos y los valores de  $y$  son negativos (Moreno, 1999. p.725).

### 3.2.2. Conocimiento de la estructura matemática (KSM)

El conocimiento de la estructura responde a las relaciones que el profesor establece entre los distintos contenidos (Flores-Medrano et al., 2013.p.61), ya sea del curso que está impartiendo o con contenidos de otros cursos o niveles educativos. En el presente estudio surgieron tres conexiones para el contenido de PC: de **simplificación**, relación con contenidos anteriores; de **complejización**, relación con contenidos y **transversal** con otros sistemas de referencia que usan el mismo fundamento (Figura 8).

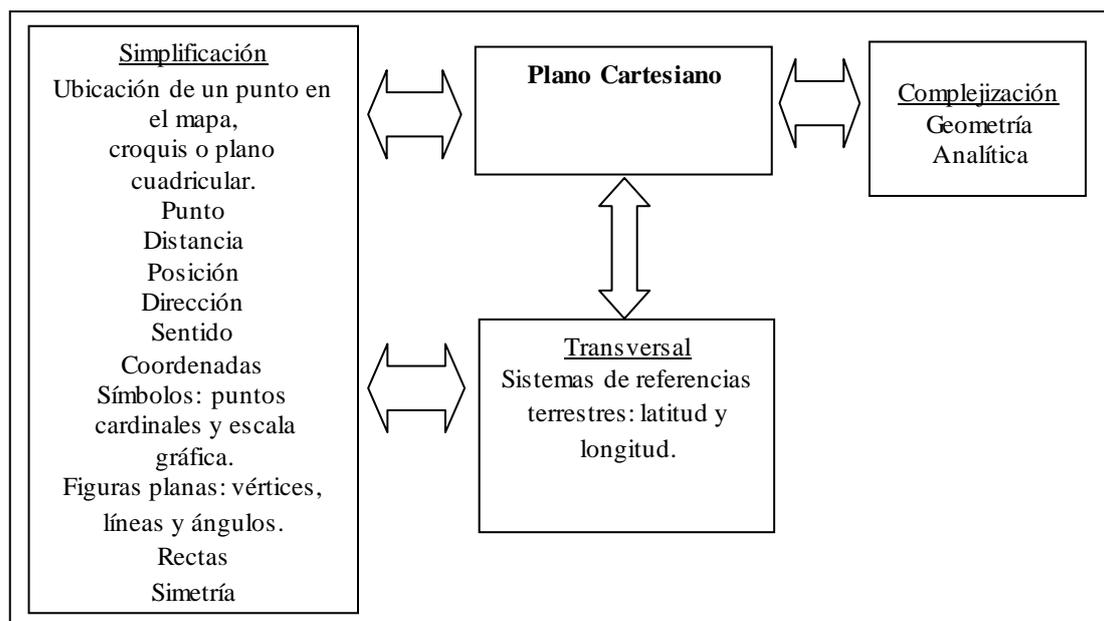


Figura 8. Conocimiento de la estructura matemática sobre el PC.

La Conexión de Simplificación contribuye a comprender las bases del PC y conocer cómo éstas ejercen su función sobre los contenidos del PC como son: los cuadrantes, las abscisas, las ordenadas, el punto en el origen, sistemas de coordenadas, características de los puntos que se ubican sobre el eje horizontal y vertical, regularidades de las coordenadas de los puntos o la reproducción de figuras planas con información de las coordenadas.

La Conexión de Complejización hace referencia a conocer que el PC es la base para el estudio de la Geometría Analítica, que permitirá abordar interpretaciones geométricas desde una perspectiva diferente a la de la Geometría Euclídea. Conocer lo que construye al PC en Primaria posiblemente volverá evidente e intuitiva a la Geometría Analítica cuando, por ejemplo, un par ordenado represente un punto en la gráfica de una ecuación, con valores para la variable independiente  $x$  y el valor que adquiere la variable dependiente  $y$ , y escrita por lo regular en tablas para establecer un orden.

El libro para el maestro de 6° *Desafíos matemáticos* incluye, la definición de sistema de referencia (Figura 9) antes de abordar el contenido de PC, lo cual hace considerar que los programas de estudio dan por hecho que el maestro ya cuenta con los conocimientos y elementos previos para la construcción del PC. El conocimiento de posibles relaciones entre el PC y otros sistemas de referencia sería KSM.

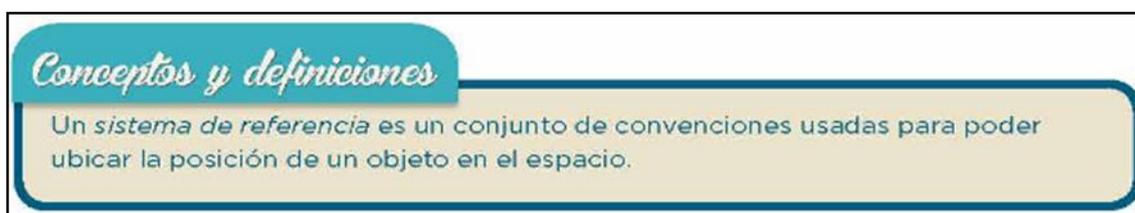


Figura 9. Lección 13, Bloque I. Libro para el maestro 6° (SEP, 2015. pp.46).

Finalmente, asociamos la relación que puede establecer el profesor entre el PC y las coordenadas geográficas (latitud y longitud) a una Conexión Transversal, dado que ambos tipos de coordenadas tienen la retícula cuadrangular como base (Figura 10).



Para localizar lugares en la superficie terrestre se utilizan como referencia círculos imaginarios: unos rodean el planeta y se trazan paralelos al ecuador, los otros pasan por los polos. Así, se forma una red que permite ubicar con exactitud un lugar en la superficie terrestre.

**La Tierra está inclinada**

Nuestro planeta gira alrededor del Sol describiendo una trayectoria elíptica a la que se llama órbita de la Tierra. El eje terrestre se encuentra ligeramente inclinado respecto al plano de su órbita.

Figura 10. Lección 1, Bloque I. Libro de Geografía 5° (SEP, 2015. pp.12).

**3.2.3. Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)**

En el libro de Desafíos matemáticos de 5° se destacan dos Materiales recortables para el contenido de PC (Figura 11): el primero se caracteriza por el uso de retículas para trazar y reproducir figuras geométricas (vértices, líneas y ángulos) mediante el uso de sistemas de referencias; y el segundo, utiliza el plano cuadrícula donde nuevamente se pone en juego el sistema de referencia y el uso de códigos para identificar columnas y filas. Conocer que entre los Materiales recortables existe una relación y transición para llegar a la enseñanza del PC posibilitando que el estudiante se pueda apropiarse del conocimiento y desarrolle el pensamiento espacial, es un conocimiento útil para la enseñanza del contenido. Por ejemplo, pasar de la ubicación de un punto en el plano reticular al plano cuadrícula y posteriormente concretar en el PC en 6°.

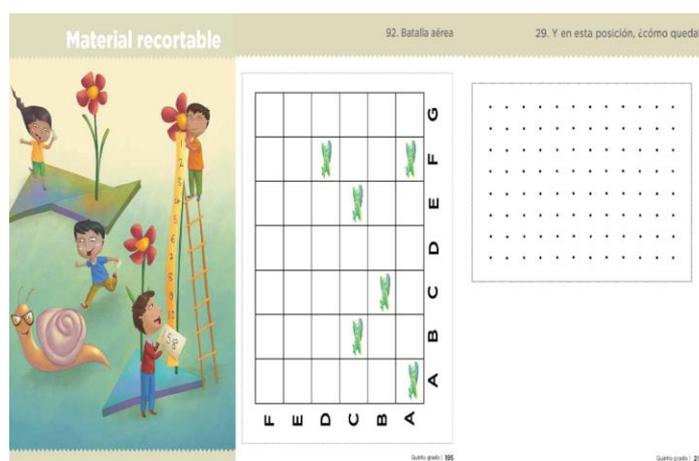


Figura 11. Desafíos matemáticos 5° (SEP, 2015).

En 6°, se distinguen dos Materiales recortables para el contenido de PC (Figura 7). El primero es la *Batalla naval* donde los estudiantes, por medio del juego, adivinan coordenadas previamente representadas en sus tableros (espacios cuadrículados) con el objetivo de hundir las naves. En el segundo recortable, *Hunde el submarino*, el objetivo del juego es el mismo que el anterior, pero se presenta de manera formal el primer cuadrante del PC. Así identificamos como conocimiento deseable: Conocer que ambos materiales posibilitan el juego dinámico dentro del aula y ponen en la práctica la experiencia espacial de los estudiantes tanto para crear una coordenada como para potenciar un pensamiento abstracto, al tratar de generar una idea visual y adivinar dónde se ubican las naves o submarinos de los compañeros.

Algunas sugerencias que se proponen en el libro oficial de 4° es el uso del Geoplano circular o cuadrícula (Figura 12). El Geoplano es un material concreto que se utiliza para la construcción de figuras planas con el uso de puntos y los cuales sirven como referentes. El empleo del Geoplano es otra forma de representar el concepto y los elementos del PC al interactuar de manera dinámica y activa con el objeto, sería un conocimiento deseable para el profesor.

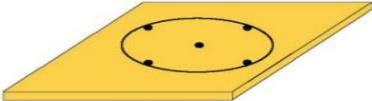
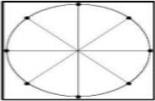
37
Geoplano circular

**Consigna**

Sigue las indicaciones para construir el geoplano, y después haz los ejercicios.

**Instrucciones:**

- En una base de madera o pedazo de unicel coloca el transportador que hiciste en el desafío anterior y pon una tachuela en el centro.
- Coloca una tachuela en el extremo de cada línea marcada en el transportador de papel.
- Traza con un plumón la circunferencia y retira con cuidado el círculo de papel.

En el geoplano, representa con ligas de colores los siguientes ángulos; luego reúnete con un compañero para que comparen su trabajo y comenten si los ángulos que hicieron son iguales o no, y a qué conclusión llegaron.

- a) Ángulo de 180° (rojo)
- b) Ángulo de 60° (negro)
- c) Ángulo de 135° (azul)
- d) Ángulo de 270° (amarillo)
- e) Ángulo de 225° (blanco)
- f) Ángulo de 300° (verde)
- g) Ángulo de 45° (anaranjado)

matemáticos

Figura 12. Desafíos matemáticos 4° (SEP, 2015, pp 66).

Las estrategias didácticas que ofrece el libro oficial de 6° para el PC se desarrollan en tres lecciones: 41 ¿Dónde están los semáforos?; 42 “Un plano regular”; y 43 “Hunde al submarino”. Conocer que en estas lecciones, la intencionalidad específica (Figura 13) es enseñar a usar los ejes de coordenadas cartesianas para la construcción de figuras (polígonos) a partir de unir los puntos identificados como pares ordenados en un plano; trasladando al niño a anticipar y predecir el resultado de sus trazos; analizar las características de las figuras resultantes con las que interactúa, y desarrollar así la imaginación espacial, la percepción geométrica y la habilidad en el uso de la regla al trazar líneas y figuras, supone un conocimiento sobre las tareas propuestas que asociamos a KMT.

**42** Un plano regular

**Consigna**

En parejas, realicen lo que se pide a continuación; si es necesario, utilicen el plano cartesiano.

- Recorten el plano cartesiano de la página 161 y ubiquen en él los puntos  $(3, 0)$ ,  $(8, 0)$  y  $(5, 0)$ .
- ¿Qué características tienen las coordenadas de 5 puntos que se ubican sobre el eje horizontal?
- ¿Qué características tienen las coordenadas de los puntos que se ubican sobre una paralela al eje horizontal?
- Ubiquen los puntos  $(5, 8)$ ,  $(5, 2)$  y  $(5, 6)$  y únanlos.
- Sumen 1 a las abscisas de los puntos del inciso d, localicenlos en el plano cartesiano y únanlos. ¿Qué sucede?
- Mencionen las características que deben tener todos los pares ordenados que se ubican en una recta paralela al eje vertical o paralela al horizontal.

Sexto grado | 91

Figura 13. Lección 42, Desafíos matemáticos 6° (SEP, 2015. pp.91).

### 3.2.4. Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

Para el subdominio del conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas se rescata la categoría **Fortalezas y Dificultades** asociadas al aprendizaje del

PC. Al final de cada una de las lecciones del libro del maestro se sugieren *Observaciones posteriores* (Figura 14) con la intención de conocer, identificar y reflexionar tanto de los errores como de las posibilidades para aprender el conocimiento matemático.

### Observaciones posteriores

1. ¿Cuáles fueron las dudas y los errores más frecuentes de los alumnos?
2. ¿Qué hizo para que los alumnos pudieran avanzar?
3. ¿Qué cambios deben hacerse para mejorar las consignas?

Figura 14. Observaciones posteriores en el Libro del maestro (SEP, 2015).

Conocer los alcances o limitaciones de los estudiantes para la construcción del PC genera canales de posibilidades que permitan el acceso a diferentes interpretaciones y facilite el desarrollo del aprendizaje. Por ejemplo, los errores que pudiera generar la ubicación en el PC con o sin contar con la nomenclatura convencional.

Durante el desarrollo de las actividades relacionadas al PC, el libro oficial va señalando a los maestros los posibles errores, obstáculos y dificultades comunes durante la enseñanza (ver Tabla 2).

Tabla 2  
*Dificultades para construir el PC*

| Ubicación espacial y sistemas de referencias, 5°   | Sistemas de referencias y PC, 6°   |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>-Conocer dificultades de los alumnos en relación con la interpretación de mapas y con la orientación espacial (distinguir entre la derecha del alumno y la derecha de lo que tiene enfrente).</li> <li>-Que la descripción les sirva como referencia cuando tengan que señalar otras rutas.</li> <li>-Que los alumnos hagan referencia a cuadras que deben recorrer y sobre qué calles.</li> <li>-Que consideren el sentido de las calles.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>-Dificultad para relacionar un objeto con el par ordenado.</li> </ul> |

En la categoría *Teorías de Aprendizaje*, la teoría del tamaño del espacio (diferenciándose entre microespacio, mesoespacio y macroespacio, como explicábamos en el marco teórico) puede ser útil para organizar la enseñanza del PC donde el estudiante establezca una relación entre sí y el espacio formal para el desarrollo y apropiación de los conceptos geométricos con el PC.

Finalmente, en relación con la categoría *Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático*, es conveniente que el profesor conozca el lenguaje o vocabulario coloquial (por arriba de, etc.) usado comúnmente por los estudiantes para ubicar puntos de referencia. Es importante que el docente conozca que al desarrollar el conocimiento del PC el estudiante amplía su vocabulario del lenguaje matemático que posteriormente le dará sentido y significado a la geometría compleja. Por ejemplo, cuadrantes en el plano, distancia entre puntos, etc.

### 3.2.5. Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

El subdominio del conocimiento de los estándares de aprendizaje está determinado por la categoría de *expectativas de aprendizaje*, relacionada con los contenidos establecidos en los Planes y programas de la SEP, donde el PC, se ubica en 6° de Primaria y la secuenciación de los temas (ver Tabla 3). El principal objetivo de conocer dónde se encuentra ubicado el contenido de PC en el currículo, así como la secuenciación de los temas, es la de tener una postura crítica y reflexiva al pensar en lo que el estudiante debe/puede aprender en un determinado nivel escolar (Flores-Medrano et al., 2016, p. 67).

Tabla 3.  
*Secuenciación del contenido PC*

| Grado | Secuenciación  |
|-------|--|
| 1°    | Ubicación espacial:<br>Bloque I. Relación con su entorno (dentro y fuera de la escuela).<br>Bloque III y IV. Relación con otros seres u objetos (cerca o lejos ¿de qué?; ¿quién se acercó más?)  |
| 2°    | Ubicación espacial: relacionados con temas de medidas como por ejemplo: movimiento de las manecillas del reloj (izquierda-derecha, arriba-abajo).  |
| 3°    | Ubicación espacial:<br>Bloque IV: Representación de desplazamiento sobre el plano: trayectos tomando en cuenta puntos de referencia.<br>Diseño, lectura e interpretación de croquis.<br>Observación y representación de objetos desde diversas perspectivas. |
| 4°    | Ubicación espacial: relacionados con temas de figuras y cuerpos (construcción de figuras: izquierda-derecha, arriba-abajo).  |
| 5°    | Bloque I. Sistemas de representación:<br>Croquis, plano y mapa.<br>Bloque V. Sistemas de referencias reticulares.  |
| 6°    | Bloque I. Sistemas de referencias reticular: uso de dos referentes para localizar un punto.<br><b>Bloque III. Coordenadas y PC.</b>  |

Dentro de los Planes y programas, así como los libros oficiales, el tema de PC sólo se puntualiza como la Representación gráfica (KMLS) (Figura 15) y no se puede evidenciar el sentido matemático que debe o pudiera atribuirle el docente para el aprendizaje.

| Bloque III  |  |   |  |
|---|--|---|--|
| COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente   |  |   |  |
| APRENDIZAJES ESPERADOS  | EJES   |   |  |
|   | SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO  | FORMA, ESPACIO Y MEDIDA   | MANEJO DE LA INFORMACIÓN   |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Utiliza el sistema de coordenadas cartesianas para ubicar puntos o trazar figuras en el primer cuadrante.</li> <li>• Resuelve problemas que implican conversiones del Sistema Internacional (SI) y el Sistema Inglés de Medidas.</li> <li>• Resuelve problemas que involucran el uso de medidas de tendencia central (media, mediana y moda).</li> </ul> | <p><b>NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificación de una fracción o un decimal entre dos fracciones o decimales dados. Acercamiento a la propiedad de densidad de los racionales, en contraste con los números naturales.</li> <li>• Determinación de múltiplos y divisores de números naturales. Análisis de regularidades al obtener los múltiplos de dos, tres y cinco.</li> </ul> | <p><b>UBICACIÓN ESPACIAL</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Representación gráfica</u> de pares ordenados en el primer cuadrante de un sistema de coordenadas cartesianas.</li> </ul> <p><b>MEDIDA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Relación entre unidades del Sistema Internacional de Medidas y las unidades más comunes del Sistema Inglés.</li> <li>• Comparación del volumen de dos o más cuerpos, ya sea directamente o mediante una unidad intermediaria.</li> </ul> | <p><b>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparación de razones en casos simples.</li> </ul> <p><b>ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Uso de la media (promedio), la mediana y la moda en la resolución de problemas.</li> </ul> |

Figura 15. Programa de Estudio (SEP, 2011. p. 77).

#### 4. Conclusiones

Conocer y analizar la Representación gráfica del PC en 6° de Primaria evidenció la intención y el significado geométrico para ese nivel, así como la trascendencia en los niveles de abstracción de los estudiantes. El objetivo de la presente investigación fue construir una propuesta de MTSK deseable del maestro de Primaria en relación con PC por lo que, a manera de conclusión se presenta una tabla (ver Tabla 4) de indicadores de MTSK.

Tabla 4  
Indicadores de MTSK deseable para el PC

| MTSK |   | Indicadores para el PC   |
|------|---|--|
| KoT  | Fenomenología   | -Conocer que la interpretación de planos, croquis y mapas, así como situaciones de organización espacial en las que se hace uso de cuadrícula, son situaciones que dan sentido al PC.  |
|      | Registros de representación                                       | -Saber interpretar planos, mapas y croquis y los símbolos que en esos aparecen.<br>-Diferenciar entre croquis, plano y mapa como representaciones de la realidad.<br>-Saber que el PC representa dos dimensiones.  |
|      | Definiciones y propiedades  | -Conocer los elementos y las características de distintos elementos geométricos en la representación del PC.<br>-Saber qué es un sistema de referencia en orientación espacial.  |
| KSM  | Conexión de Simplificación  | -Conocer que la ubicación espacial ejerce una función sobre los contenidos del PC.   |
|      | Conexión de Complejización  | -Conocer que el PC es la base para el estudio de la Geometría Analítica.   |
|      | Conexión Transversal  | -Conocer otros sistemas de referencias como es el sistema terrestre (latitud y longitud) en Geografía.   |
| KMT  | Recursos materiales y virtuales                                   | -Saber que los materiales impresos o concretos para el PC promueven la actividad dinámica de la enseñanza poniendo en práctica la experiencia previa de los estudiantes sobre ubicación espacial.<br>-Conocer las posibilidades de tramas de puntos y cuadrículas como representaciones relacionadas con el PC.<br>-Conocer que entre los Materiales recortables de 5º y 6º existe una relación y transición para llegar a la enseñanza del PC.<br>-Conocer que el uso del Geoplano podría considerarse otra forma de representar el concepto y los elementos del PC al interactuar de manera dinámica y activa con el objeto. |
|      | Estrategias Didácticas  | -Conocer que en los libros oficiales hay lecciones específicas que trasladan al niño a anticipar, predecir, analizar y desarrollar la imaginación espacial y la percepción geométrica.   |
| KMLS | Secuenciación con los temas anteriores y posteriores.             | -Conocer que el contenido de PC se ubica en 6º de Primaria (Bloque III) y los contenidos matemáticos requeridos para la enseñanza están relacionados con ubicación espacial.   |
| KFLM | Fortalezas y Dificultades.  | -Conocer los alcances o limitaciones de los estudiantes para la construcción del PC.   |
|      | Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático. | -Conocer el vocabulario natural de los alumnos en relación con la ubicación espacial y que el vocabulario formal en el aprendizaje del PC, amplía el lenguaje matemático del estudiante, que posteriormente le dará sentido y significado a la geometría compleja.   |

## Referencias Bibliográficas

- Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Carrillo, J., Contreras, L.C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de Matemáticas en Investigación. En L. Rico, Ma. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada: España.
- Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M.A. (2014). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Carrillo, J., Montes, M.A., Contreras, L.C. y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 22, 185-205.
- Clements, D. H., y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á. y Carrillo, J. (2016). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila y E. Flores-Medrano (Eds.) *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones. pp. 57-69.
- Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano: una proposición para enseñanza de la geometría en la escuela primaria*. Tesis Doctoral. México: IPN.
- Godino, J.D. (2004). Orientación espacial y sistemas de referencia. En Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., Cid, E., Ruiz F. y Roa, R. (Eds.). *Didáctica de las matemáticas para maestros. Proyecto Edumat-Maestros. España: Universidad de Granada*. pp. 341-353.
- [https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9\\_didactica\\_maestros.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf)

- Gonzato, M., (2009). *Significados de Referencia para el estudio de la orientación espacial en Primaria*. Trabajo de Fin de Máster. Universidad de Granada: España.
- Gonzato, M., y Godino, J. D. (2010). Aspectos históricos, sociales y educativos de la orientación espacial. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 23, 45-58.
- Hernández, R., Fernández, C. y Lucio, P. (2008). *Metodología de la Investigación*. México: Mc Graw Hill.
- Magaña, M. F. (2005). *Instrumentos y Matemáticas. Historia, Fundamentos Y Perspectivas Educativas*. UNAM: México.
- Moreno, J.L. (1999). *Libro de las matemáticas*. México: UIA.
- Pollack, H.O. (1997). Modelización matemática y geometría. En Alsina, C. *Geometría y Realidad*. Universidad Politécnica de Cataluña: España.
- [http://www.bylibyethost22.com/varios/geometria\\_realidad.pdf](http://www.bylibyethost22.com/varios/geometria_realidad.pdf).
- Secretaría de Educación Pública (2011). *Planes y programas de estudio de Educación Básica*. México: SEP.
- Secretaría de Educación Pública (2015). *Libros de Texto para Educación Básica: Desafíos matemáticos*. México: SEP.
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57 (1), 1-22.
- Taylor, S. y Bogdan, R. (2002). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. México: Paidós.
- Valdespino, E. y Carvajal, A. (2012). *Reconstrucción de las experiencias de los docentes principiantes al enseñar matemáticas en escuelas Primarias del DF y Chiapas*. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional: México.
- Vecino, F. (2006). Didáctica de la Geometría en Educación Primaria. En Chamorro, C. (Eds.). *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 301-328). España: Pearson.