

EFFECTO NO LINEAL DE CERRAMIENTO DE FISURA EN VIGAS DE PARED DELGADA SOMETIDAS A VIBRACIONES FORZADAS

Víctor H. Cortínez^{a,b} y Franco E. Dotti^{a,b}

^a*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, vcortine@frbb.utn.edu.ar*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

Palabras Clave: Vigas de pared delgada, Fisura batiente, Vibración forzada.

Resumen. La presencia de daños en elementos estructurales representa un aspecto crítico en la seguridad de los mismos. En lo que respecta a estructuras ingenieriles, el tipo de daño más común es el asociado a fisuras por fatiga del material. En su modelación, la fisura completamente abierta o lineal constituye el enfoque empleado en la mayoría de los trabajos científicos presentes en la literatura. Pero para el caso de fisura por fatiga, la realidad es que ésta puede encontrarse abierta o cerrada durante el movimiento. Este efecto de cerramiento, conocido como *breathing*, depende de la naturaleza misma de la fisura y también del tipo de carga y de las amplitudes de vibración. Para su estudio es menester resolver un problema dinámico no lineal.

En el presente artículo se estudia el comportamiento dinámico de vigas de pared delgada con presencia de una fisura de característica batiente. Se muestra que, debido a la no linealidad de la fisura, se evidencian efectos cuya presencia es imposible en la viga sin daño o en la viga con presencia de una fisura abierta o lineal. De los efectos mencionados, pueden destacarse la auto-excitación de resonancias tanto sub-armónicas como súper-armónicas y la presencia de doblamientos de período en el plano de fase.

1 INTRODUCCIÓN

En sistemas estructurales sujetos a cargas repetidas en el tiempo, se producen frecuentemente fisuras que son debidas a la fatiga del material. Considerables esfuerzos de investigación se han realizado en lo que respecta al estudio de la respuesta dinámica de fisuras por fatiga, en un intento de dar con métodos asociados a vibraciones que permitan ser aplicados en la inspección no destructiva.

En el marco del monitoreo de la integridad estructural, la evaluación y diagnóstico de daño debe ser realizada en tiempo real. Es por ello que una característica fundamental de un modelo de daño debe ser la de satisfacer condiciones de simplicidad y precisión en forma balanceada. Por tal razón, la mayor parte de las investigaciones han sido dirigidas a estructuras tipo viga, o eventualmente estructuras de barras. En efecto, para estructuras esbeltas, un modelo viga captura las características más salientes de la dinámica estructural y, al mismo tiempo, es lo suficientemente simple para el tratamiento computacional extensivo.

La mayoría de los trabajos científicos presentes en la literatura se basan en modelos que consideran la fisura como completamente abierta. Pero la realidad es que para una fisura por fatiga puede ocurrir durante el movimiento un cierre total o parcial de la misma. Este efecto puede depender del tipo de carga, ya que cargas compresivas pueden cerrar la fisura, y también de las amplitudes de vibración y la misma geometría de la estructura. Para el estudio de esta situación es menester resolver un problema dinámico no lineal.

En general, el efecto no lineal asociado al cerramiento de la fisura o *breathing* se incorpora combinando los modelos sin fisura y con fisura abierta, mediante una estrategia conveniente de intercambio de los mismos. El enfoque más extendido para el estudio del fenómeno consiste en la integración numérica en el dominio del tiempo de las ecuaciones diferenciales de movimiento combinadas. Esta combinación se realiza mediante el chequeo iterativo del estado (cerrado o abierto) de la fisura, empleando diferentes magnitudes de control. Las primeras contribuciones con respecto al análisis de comportamiento no lineal de una fisura corresponden a los trabajos de [Ibrahim et al. \(1987\)](#) e [Ismail et al. \(1990\)](#). Ambos artículos muestran comparaciones entre un modelo de elementos finitos y resultados de meticulosos ensayos experimentales. Los autores remarcan que la disminución en las frecuencias naturales con respecto al caso sin daño es menor si se considera la presencia del batimiento de la fisura durante el ciclo vibratorio. En base a esto, postularon la posibilidad de subestimar la severidad de la fisura en el caso de que la identificación se realice con el modelo de fisura abierta.

Por su parte, [Changhe et al. \(1989\)](#) emplearon el ángulo entre el momento flector instantáneo y el eje tangente rotante para determinar la condición de la fisura, en rotores con desbalance teniendo en cuenta el efecto de cerramiento. Asumieron que la fisura se halla completamente abierta o completamente cerrada, es decir, un sistema bilineal.

Por su parte, [Shen y Chu \(1992\)](#) plantearon una analogía entre una viga con fisura y un sistema bilineal de masa y resorte, en vigas cantiléver de sección rectangular. Consideraron que la fisura se mantiene abierta cuando la deformación normal en la zona cercana a la punta de la fisura es positiva y cerrada en caso contrario. [Sundermayer y Weaver \(1995\)](#) también emplearon esta analogía, considerando como variable de control el momento flector, el cual, pasado cierto umbral produce el cerramiento de la fisura.

Para vigas Bernoulli-Euler y también Timoshenko, [Brandon y Abraham \(1995\)](#), [Abraham y Brandon \(1995\)](#), [Brandon y Sudraud \(1998\)](#) y [Kisa y Brandon \(2000\)](#) han realizado una detallada investigación del efecto de cerramiento de fisura. Emplearon el método de síntesis modal por componentes en orden de obtener la 'firma' no lineal de la fisura batiente: la aparición de resonancias armónicas. Esto representa en sí mismo un diagnóstico de daño a Nivel 1, ya que la existencia de dichos fenómenos conlleva a la conclusión de que hay al

menos una fisura presente.

Tsyfnasky y Bersneovich (1998) presentaron un interesante estudio de detección de fisuras en vigas Bernoulli-Euler considerando el efecto de cerramiento y también efectos geoméricamente no lineales. Remarcaron la gran sensibilidad que presentan las súper-resonancias cuando son empleadas como indicadores de daño. Ponderaron que esta sensibilidad es superior en el orden de diez veces en comparación con las técnicas lineales de detección. Posteriormente, los autores realizaron una aplicación de este método a la detección de daño en alas de aeronaves (Tsyfnasky y Bersneovich, 2000).

El efecto de fisura batiente ha sido abordado por varios investigadores en los últimos años. Al ser un efecto no lineal, su consideración involucra una dificultad adicional tanto en la modelación como en la identificación de fisuras en estructuras. Puede ser una opción el hecho de no considerarlo en ciertos problemas particulares, siempre y cuando se realice al menos una cuantificación previa de su efecto. Entre distintos trabajos recientes que emplean métodos similares a los ya detallados pueden mencionarse los de Sinha y Friswell (2002), Patil y Maiti (2003), Bovsunovsky y Surace (2005), Mazanoglu y Sabuncu (2010) y Rezaee y Hassannejad (2011).

En lo que respecta a vigas de pared delgada, el efecto de cerramiento de fisura no ha sido estudiado aún. Incluso son pocos los trabajos que consideran la presencia de fisuras en elementos de esta tipología estructural (Cortínez et al., 2009; Cortínez y Dotti, 2010; Dotti et al., 2011a; Dotti et al., 2011b). Presumiblemente esto se deba a la mayor complejidad que representan los acoplamientos entre movimientos, propios de las vigas de pared delgada.

En este trabajo se estudia el efecto de cerramiento de fisura en vigas de pared delgada, extendiendo para ello el modelo de Cortínez y Dotti (2010). Se muestra que, debido a dicho efecto, se evidencian comportamientos cuya presencia es imposible en la viga sin daño o en la viga con presencia de una fisura abierta o lineal. De los efectos mencionados, pueden destacarse la auto-excitación de resonancias armónicas y la presencia de doblamientos de período en el plano de fase.

2 FORMULACIÓN DE VIGAS DE PARED DELGADA

2.1 Campo de desplazamientos

La Figura 1 muestra una viga de pared delgada de sección abierta general, con presencia de una discontinuidad geométrica seccional. El punto de referencia C es coincidente con el centroide de la sección transversal original de la viga. Por su parte, B es un punto genérico ubicado en la línea media de la pared de la sección. Las coordenadas de los puntos ubicados en esta línea media se denotan como $Y(s)$ y $Z(s)$. El objetivo de la discontinuidad seccional es el de proporcionar una reducción en la rigidez local similar a la que generaría una fisura y será analizado en lo subsiguiente.

La presente teoría de vigas se basa en las siguientes hipótesis fundamentales: 1) La sección transversal es indeformable en su propio plano, aunque el alabeo se considera permitido fuera del mismo, y 2) La distribución de alabeo se representa mediante la función de Saint-Venant de vigas isótropas. De acuerdo con estas hipótesis, el campo de desplazamientos se asume de la forma (Cortínez y Rossi, 1998)

$$\begin{aligned}u_x &= u - y\theta_z - z\theta_y - \omega\theta_x, \\u_y &= v - z\phi_x, \\u_z &= w + y\phi_x,\end{aligned}\tag{1}$$

donde ω es la función de alabeo (Cortínez y Piovan, 2002), u , v y w son los desplazamientos

del punto C en las direcciones x , y y z , respectivamente. Los desplazamientos generalizados se han definido de la siguiente manera: θ_y y θ_z como giros flexionales, ϕ_x como el giro torsional y θ_x como la variable que pondera el alabeo no uniforme.

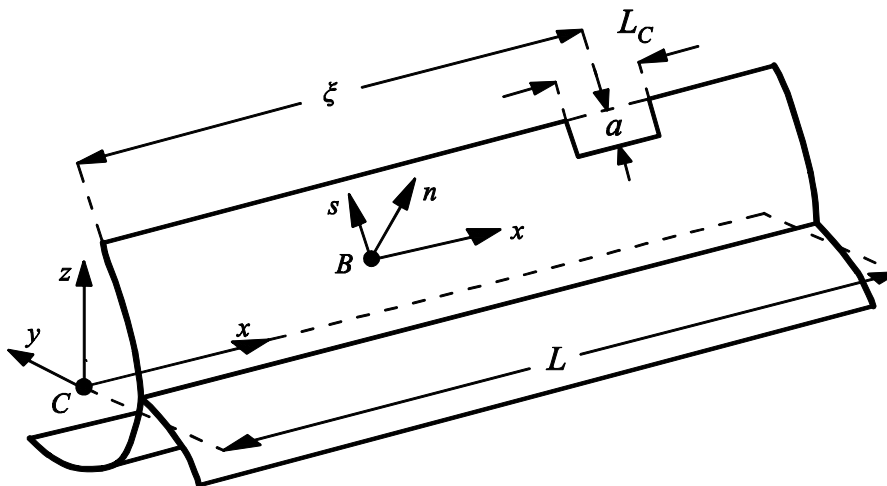


Figura 1: Esquema de viga de pared delgada genérica con sección abierta y presencia de discontinuidad seccional. Sistemas de coordenadas y notación.

El campo de desplazamientos puede expresarse en el sistema intrínseco (B : x, s, n) de la siguiente manera

$$U = u_x, \quad V = u_y \frac{dY}{ds} + u_z \frac{dZ}{ds}, \quad W = -u_y \frac{dZ}{ds} + u_z \frac{dY}{ds}, \tag{2}$$

$$\Phi_x = -\frac{\partial u_x}{\partial n}, \quad \Phi_s = \frac{\partial}{\partial n} \left(u_y \frac{dY}{ds} + u_z \frac{dZ}{ds} \right). \tag{3}$$

donde U, V y W son los desplazamientos placa en las direcciones x, s y n , respectivamente, y Φ_x y Φ_s son rotaciones flexionales con respecto a las direcciones s y n , respectivamente.

Ahora, substituyendo (2) y (3) en la expresión general de trabajos virtuales, y luego integrando con respecto a s y n , puede obtenerse la ecuación variacional unidimensional de movimiento. Este procedimiento se halla claramente explicado en el trabajo de [Dotti et al. \(2011b\)](#).

2.2 Ley constitutiva

La ley constitutiva para los materiales isótropos, ortótropos y compuestos con laminación cruzada simétrica o especialmente ortótropa puede expresarse de la siguiente forma

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{xs} \\ N_{xn} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{55}^{(H)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \gamma_{xs}^{(0)} \\ \gamma_{xn}^{(0)} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{xs} \end{Bmatrix}, \tag{4}$$

siendo $\bar{A}_{11}, \bar{A}_{66}, \bar{A}_{55}^{(H)}, \bar{D}_{11}$ y \bar{D}_{66} constantes del laminado ([Kollár y Springer, 2003](#)); $N_{xx}, N_{xs}, N_{xn}, M_{xx}$ y M_{xs} , las resultantes de tensión en el espesor; y $\epsilon_{xx}^{(0)}, \gamma_{xs}^{(0)}, \gamma_{xn}^{(0)}, \kappa_{xx}$, y κ_{xs} , las

deformaciones membranales y curvaturas (Ver por ejemplo Cortínez y Piovan, 2002). Las ecuaciones constitutivas (4) se hallan integradas en el espesor. Para asociar la ley constitutiva a la sección transversal de la viga, debe considerarse que la zona de influencia de la discontinuidad seccional queda delimitada en dirección axial de la siguiente manera

$$\xi - \frac{L_C}{2} < x < \xi + \frac{L_C}{2}. \quad (5)$$

Así, reemplazando convenientemente (4) en las expresiones de los esfuerzos generalizados, obtenidas del principio de trabajos virtuales, puede escribirse la ley constitutiva de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \{Q\} &= [J^{(0)}] \{\Delta\}, & 0 \leq x \leq \xi - \frac{L_C}{2} & \quad \& \quad \xi + \frac{L_C}{2} \leq x \leq L, \\ \{Q\} &= [J^{(c)}] \{\Delta\}, & \xi - \frac{L_C}{2} < x < \xi + \frac{L_C}{2}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde las matrices $[J^{(c)}]$ y $[J^{(0)}]$ son las matrices constitutivas de esfuerzos y contienen las propiedades de inercia de las secciones transversales con y sin discontinuidad seccional, respectivamente (Dotti, 2011). Por su parte, $\{Q\}$ es el vector de esfuerzos viga generalizados y $\{\Delta\}$ es el vector de deformaciones generalizadas. Esto es:

$$\{Q\} = \{N, M_y, M_z, B, Q_y, Q_z, T_w, T_{sv}\}^T, \quad (7)$$

$$\{\Delta\} = \{\varepsilon_{D1}, -\varepsilon_{D2}, -\varepsilon_{D3}, -\varepsilon_{D4}, \varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D7}, \varepsilon_{D8}\}^T, \quad (8)$$

siendo N el esfuerzo axial, M_y y M_z los momentos flectores, B el bimomento, Q_y y Q_z los esfuerzos de corte, T_w el momento flexotorsor, T_{sv} el torque de Saint-Venant y

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D1} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{D2} &= \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, & \varepsilon_{D3} &= \frac{\partial \theta_z}{\partial x}, & \varepsilon_{D4} &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{D5} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z, & \varepsilon_{D6} &= \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_y, & \varepsilon_{D7} &= \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \theta_x, & \varepsilon_{D8} &= \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \end{aligned} \quad (9)$$

las deformaciones generalizadas.

3 MODELO DE FISURA COMPLETAMENTE ABIERTA

La dimensión de la discontinuidad seccional en dirección axial, L_C , debe ser elegida de tal manera que dicha discontinuidad produzca un comportamiento análogo al que habría en presencia de una fisura, en términos de reducción local de la rigidez. A partir de la expresión (6), la energía de deformación asociada a una viga de pared delgada genérica (Figura 1) puede ser expresada como $U = U_I + U_{II} + U_{III}$. Aquí, U_I es la energía de deformación asociada al modo I de la mecánica de fracturas y, por lo tanto, a los esfuerzos N , M_y , M_z y B . El criterio de Griffith (Broek, 1984; Anderson, 1994) permite definir un factor de intensidad de tensiones equivalente, asociado a la discontinuidad seccional, de la siguiente manera

$$K_I(a, \xi, L_C) = \sqrt{\frac{E^*}{e [1 - (\nu^*)^2]} \frac{\partial U_I(a, \xi, L_C)}{\partial a}}, \quad (10)$$

siendo $E^* = \bar{A}_{11}/e$, ν^* el coeficiente de Poisson promediado y e el espesor del perfil de pared

delgada. La dependencia del factor de intensidad de tensiones equivalente con respecto a la ubicación de la discontinuidad ξ se debe a que, si bien prácticamente la discontinuidad es pequeña, no es infinitamente pequeña por lo que se considera la variabilidad de los esfuerzos con la coordenada x .

La longitud L_C se determina mediante una comparación entre el factor K_I de la ecuación (10) y una expresión teórica del factor de intensidad de tensiones para vigas de pared delgada con fisura de fatiga, obtenida por Cortínez et al. (2009) en base al concepto de integral G^* . Los parámetros intrínsecos de la fisura, es decir, su ubicación y profundidad, se asocian a ξ y a , respectivamente. Así, la determinación de L_C se realiza numéricamente, minimizando el error de ambos factores. Esto representa un problema de optimización, definido de la siguiente manera

$$\min \left(H_K(L_C) = \frac{100}{n_\xi n_a} \sum_{j=1}^{n_\xi} \sum_{i=1}^{n_a} \left| \frac{K_I(a_i, \xi_j, L_C) - K_I^{(t)}(a_i)}{K_I^{(t)}(a_i)} \right| \right), \tag{11}$$

donde la expresión teórica del factor de intensidad de tensiones se ha denotado como $K_I^{(t)}$ y n_a y n_ξ corresponden respectivamente a la cantidad total de severidades y ubicaciones de fisura empleadas en la formación de la función objetivo H_K . La optimización de este problema de una variable es muy sencilla y su costo computacional es bajo. Una vez obtenido el valor de L_C , el modelo de viga de pared delgada conteniendo una fisura abierta queda completamente determinado (Para más detalles referirse a Dotti, 2011).

4 MODELO DE FISURA BATIENTE

Las consideraciones realizadas anteriormente implican que la fisura está en todo momento abierta, es decir, se trata de un análisis lineal. Si bien el estudio de la fisura abierta constituye la mayoría de los trabajos científicos presentes en la literatura, la realidad es que para una fisura por fatiga puede ocurrir durante el movimiento un cierre total o parcial de la misma. Este efecto depende principalmente del tipo de carga y de las amplitudes de vibración. Para el estudio de tal situación es menester resolver un problema dinámico no lineal.

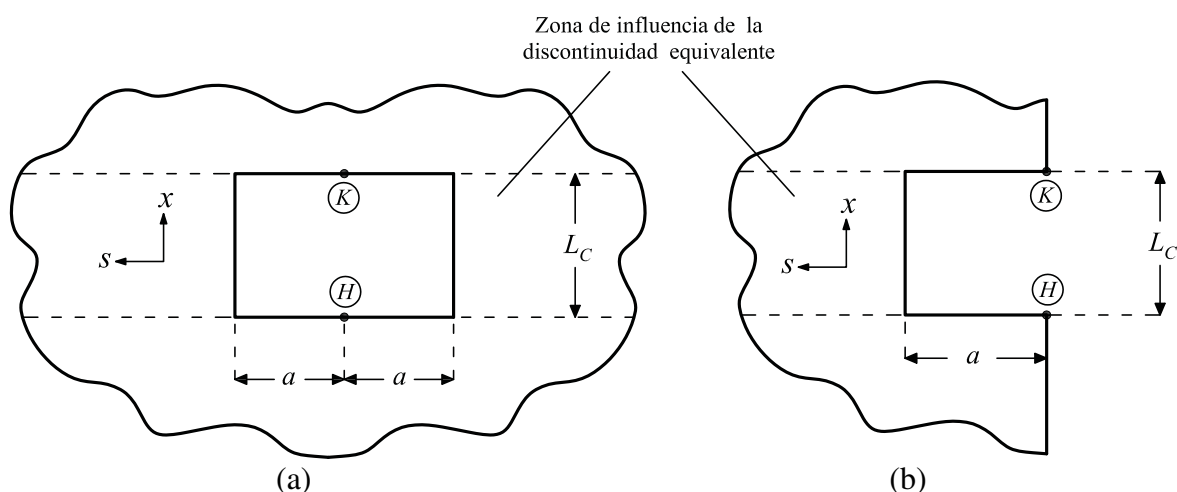


Figura 2: Ubicación de los puntos H y K, cuya diferencia entre desplazamientos axiales permiten indicar el cerramiento o apertura de la fisura para los casos de (a) fisura interna y (b) fisura externa.

En la respuesta dinámica de las vigas bajo estudio, la presencia de una fisura batiente hará que la matriz constitutiva de esfuerzos sea dependiente del tiempo en la zona de influencia de la discontinuidad seccional equivalente. En base a ello, se simula el efecto de batimiento o

breathing mediante el siguiente criterio.

Criterio de fisura no lineal: Se asume que si la fisura se hallase abierta, la matriz constitutiva en la zona de la discontinuidad seccional será igual a la obtenida para una fisura lineal o abierta. Por otro lado, si la fisura se hallase cerrada, la matriz constitutiva de la zona de la discontinuidad será igual a la correspondiente al estado base o sin daño.

Para efectuar el cumplimiento de este criterio, es necesario definir un indicador del cerramiento, que debe ser variable en el tiempo. Estos indicadores se asocian a los desplazamientos axiales (dirección x) de los puntos H y K , marcados en la [Figura 2](#). En la configuración no deformada, dichos puntos se hallan separados por la distancia L_C . Durante el movimiento, si los puntos se alejan en dirección axial, se considera que la fisura se halla totalmente abierta. Por su parte, si los puntos se acercan, es decir que su distancia medida en dirección axial pasa a ser menor que L_C , la fisura se considera cerrada.

En términos matemáticos, la fisura se asume cerrada si la magnitud ${}^t\Delta u_{HK}$ es negativa y abierta si la misma es positiva, siendo ${}^t\Delta u_{HK}$ la diferencia entre los desplazamientos axiales de los puntos H y K . Esto es

$${}^t\Delta u_{HK} = {}^t u_x^{(K)} - {}^t u_x^{(H)}. \quad (12)$$

Los desplazamientos ${}^t u_x^{(H)}$ y ${}^t u_x^{(K)}$ se obtienen a partir del campo de desplazamientos (1) y tienen las siguientes expresiones

$${}^t u_x^{(H)} = {}^t u(x_H) - y_H {}^t \theta_z(x_H) - z_H {}^t \theta_y(x_H) - \omega {}^t \theta_x(x_H), \quad (13)$$

$${}^t u_x^{(K)} = {}^t u(x_K) - y_K {}^t \theta_z(x_K) - z_K {}^t \theta_y(x_K) - \omega {}^t \theta_x(x_K), \quad (14)$$

donde $\{x_H = \xi - L_C/2, y_H, z_H\}$ y $\{x_K = \xi + L_C/2, y_K, z_K\}$ son las coordenadas de los puntos H y K , respectivamente. El superíndice t ubicado a la izquierda de las magnitudes de desplazamiento indica que dichas magnitudes son dependientes del tiempo.

Teniendo en cuenta lo establecido, la matriz constitutiva de esfuerzos para el caso de fisura no lineal se obtiene de la siguiente manera

$$[J_b] = \begin{cases} [J^{(0)}] & \text{si } \Delta u_{HK} < 0 \\ [J^{(c)}] & \text{si } \Delta u_{HK} \geq 0 \end{cases}. \quad (15)$$

El modelo resultante puede considerarse como bilineal, dado que preserva las propiedades de dos sistemas lineales: caso de fisura completamente abierta y caso sin daño. Todas las características no lineales del modelo se derivan del mecanismo de batimiento de fisura. Este técnica de modelado de la fisura no lineal tiene la ventaja de ser fácilmente adaptable a un modelo de elementos finitos y de capturar la fuente principal de no linealidad de una fisura por fatiga, a un costo computacional relativamente bajo.

5 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

5.1 Elemento dañado

La forma de considerar el daño que se sugiere en este trabajo, basada en la presencia de una discontinuidad seccional equivalente, es de sencilla implementación en un modelo de elementos finitos unidimensional convencional. La teoría presentada en las secciones anteriores posibilita designar fácilmente un elemento dañado asociado a cada fisura presente

en la estructura. Conociendo los parámetros asociados a una fisura, esto es ubicación y severidad de la misma, esta implementación se logra mediante tres pasos básicos, que permiten abordar el problema. Estos pasos son:

- (1) Asignar las propiedades de rigidez adecuadas a cada elemento finito representativo de una fisura. Esto se asocia a la severidad a del daño en cuestión.
- (2) Imponer que la longitud de cada elemento dañado en cuestión sea igual a la longitud de discontinuidad equivalente L_C , calculada para la fisura que este elemento representa. Como se ha indicado, L_C se obtiene a partir de conceptos de mecánica de fracturas.
- (3) Imponer que el punto medio del elemento dañado sea coincidente con la ubicación ξ de su fisura asociada.

Siendo el modelo bilineal, la matriz rigidez global se considera dada por

$$[K] = \begin{cases} [K]^{(0)} & \text{si } \Delta u_{HK} < 0 \\ [K]^{(c)} & \text{si } \Delta u_{HK} \geq 0 \end{cases}, \quad (16)$$

donde $[K]^{(0)}$ corresponde a la matriz de rigidez global asociada al estado sin daño y $[K]^{(c)}$ a la misma matriz, pero asociada a la presencia de una fisura completamente abierta. La matriz de masa se considera invariante con el tiempo, tomándose en todos los casos la correspondiente al estado sin daño.

El elemento finito empleado en la discretización de las ecuaciones de movimiento consta de dos nodos y siete grados de libertad en cada nodo. Denominado EDCIC2N, presenta deformaciones de corte constantes para evitar el bloqueo sin estrategias de integración reducida (Oñate, 1992). Fue originalmente introducido por Cortínez y Rossi (1998) para vigas rectas isótropas, y extendido naturalmente por Piovan (2003) al dominio de materiales compuestos.

5.2 Fisura batiente

Dado que el sistema es bilineal y conserva las propiedades de dos sistemas lineales, si el problema de vibraciones forzadas considerando la presencia de una fisura batiente se aborda como un problema lineal, se comete un error en el momento de cambio de estado de la fisura (abierta a cerrada, o viceversa). Pero si la fisura es de pequeña a moderada, la no linealidad presente es débil ya que el cambio porcentual en los componentes de la matriz de rigidez no es grande, por lo que se espera que el mencionado error sea pequeño.

Así, el problema vibratorio aludido se aborda mediante una adaptación del esquema de integración de Newmark (1959) para sistemas lineales. El error que se comete al aplicar el esquema lineal se debe al desbalance entre esfuerzos internos y externos generado por el cambio brusco de la matriz de rigidez. Dadas las características del problema, dicho error se reduce mediante la subdivisión del intervalo de cálculo en el que se produce el cambio de estado de la fisura.

Asumiendo como constante la aceleración promedio (regla trapezoidal), y considerando conocidos los vectores globales de desplazamientos $\{W\}$, velocidades $\{\dot{W}\}$ y aceleraciones $\{\ddot{W}\}$ en el tiempo t , en el tiempo $t + \Delta t$ se expresa

$$\{{}^{t+\Delta t}\dot{W}\} = \{{}^t\dot{W}\} + \frac{\Delta t}{2} (\{{}^t\ddot{W}\} + \{{}^{t+\Delta t}\ddot{W}\}), \quad (17)$$

$$\{ {}^{t+\Delta t} W \} = \{ {}^t W \} + \{ {}^t \dot{W} \} \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4} (\{ {}^t \ddot{W} \} + \{ {}^{t+\Delta t} \ddot{W} \}). \quad (18)$$

A partir de (17) y (18) pueden obtenerse expresiones para las aceleraciones $\{ {}^{t+\Delta t} \ddot{W} \}$ y las velocidades $\{ {}^{t+\Delta t} \dot{W} \}$, en términos de los desplazamientos $\{ {}^{t+\Delta t} W \}$ (ver Bathe, 1996).

A partir de los desplazamientos $\{ {}^t W \}$ se evalúa el valor del indicador ${}^t \Delta u_{HK}$, introducido en la ecuación (12) y se obtiene consecuentemente ${}^t K$ de la expresión (16). Así, un vector global de desplazamientos provisorio $\{ {}^{t+\Delta t} W \}^{(p)}$ puede obtenerse a partir de considerar (17) y (18) en la ecuación de equilibrio dinámico

$$[M] \{ {}^{t+\Delta t} \ddot{W} \} + [D] \{ {}^{t+\Delta t} \dot{W} \} + [{}^t K] \{ {}^{t+\Delta t} W \}^{(p)} = \{ {}^{t+\Delta t} P \}, \quad (19)$$

donde $\{ P \}$ es el vector global de cargas nodales, $[M]$ la matriz global de masa y $[D]$ la matriz global de amortiguamiento. Este último es considerado proporcional o de Rayleigh (Bathe, 1996). Ahora bien, si el signo del indicador ${}^{t+\Delta t} \Delta u_{HK}^{(p)}$ es el mismo que el de ${}^t \Delta u_{HK}$, se considera que el estado de la fisura no ha cambiado en el transcurso del intervalo $t + \Delta t$, por lo que el vector de desplazamientos provisorio se acepta como correcto, quedando entonces $\{ {}^{t+\Delta t} W \} = \{ {}^{t+\Delta t} W \}^{(p)}$. Si por el contrario el signo del indicador cambia, el estado de la fisura ha cambiado durante el intervalo. Esto implica que fisura se ha cerrado o abierto durante el mismo. En este caso, se descarta la solución provisorio y se define un nuevo incremento de tiempo dado por

$$\Delta t^{(p)} = \frac{\Delta t}{m}, \quad (20)$$

siendo m un número entero mayor que uno. Con el nuevo incremento se realizan m cálculos de desplazamientos, cumplimentando el intervalo $t + \Delta t$. En el transcurso de estos m cálculos, se produce el cambio de signo del indicador Δu_{HK} , con el consecuente cambio de la matriz de rigidez según (16). Una vez completados los m cálculos, se continúa con el incremento original Δt .

El intervalo de tiempo en el que se produce el cambio en la rigidez es así m veces menor que el establecido originalmente, por lo que se reduce el error cometido debido al desbalance de esfuerzos. El costo computacional de esta estrategia es levemente mayor que la resolución de un problema puramente lineal y permite evadir un cálculo iterativo para estimar los desplazamientos. Así se evitan posibles problemas de convergencia o costosos cálculos de la matriz de rigidez tangente.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

6.1 Introducción

Se evalúa la precisión del modelo unidimensional y se realiza un estudio de las características vibratorias de una viga de pared delgada cantiléver de sección transversal U, con presencia de una fisura batiente en una de sus alas. El material considerado es isótropo: acero al carbono, cuyas propiedades son $E = 210$ GPa, $G = 80.76$ GPa, $\nu = 0.3$ y $\rho = 7830$ kg/m³. Se considera un amortiguamiento igual al 2% del crítico. Las dimensiones de la viga en cuestión son: $h = 0.2$ m, $b = 0.1$ m, $e = 0.01$ m y $L = 2$ m, siendo respectivamente h , b y e , la altura de la sección, su base y su espesor. Para esta configuración se calcula, a partir de resolver el problema establecido en (11), una longitud equivalente normalizada de elemento dañado $L/L_C = 43$. Se emplean en la discretización un total de 30 elementos EDCIC2N.

La condición de carga contemplada en el estudio corresponde a un esfuerzo de corte variable en el tiempo, cuya expresión es $Q_y = A_f \text{sen}(\varpi_f t)$, donde A_f y ϖ_f son respectivamente la amplitud de carga y la frecuencia de excitación forzada. La carga se aplica en el extremo libre de la viga cantiléver, como se esquematiza en la [Figura 3](#).

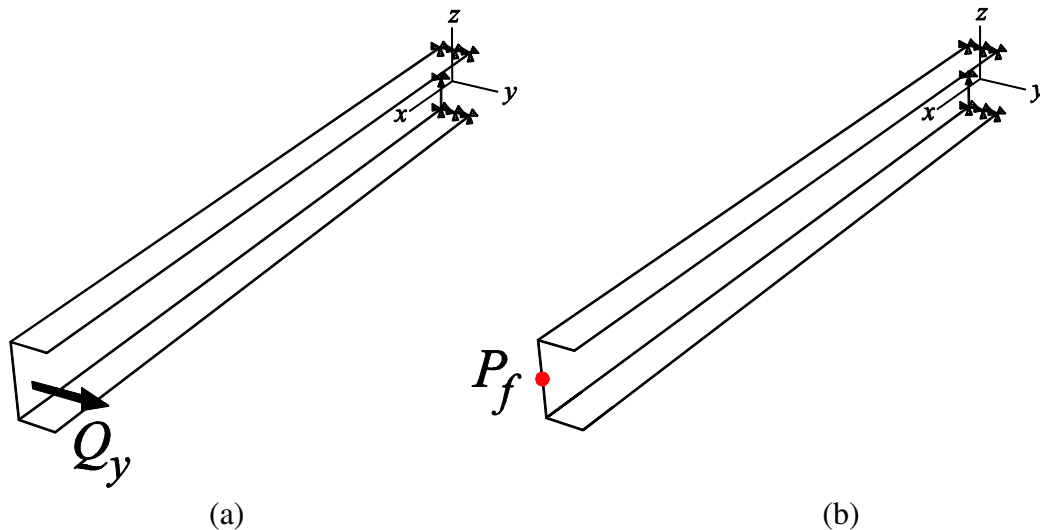


Figura 3: (a) Configuración de carga empleada en el análisis de vibración forzada y (b) ubicación del punto P_f , de coordenadas $(L, -b^2/(2b+h), 0)$, donde se consideran las mediciones de las magnitudes dinámicas.

Se analizan desplazamientos y velocidades asociadas al punto testigo P_f , ubicado en el extremo libre y en el punto medio del alma de la sección, como se muestra en la [Figura 3](#).

En lo que respecta a la integración de la ecuación de movimiento, se utiliza en general un incremento de tiempo dado por

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\lambda_0 \varpi_f}, \quad (21)$$

donde λ_0 indica la cantidad de intervalos que se considerarán en un período de carga. Esta definición asegura que siempre haya una razonable cantidad de cálculos por período.

6.2 Resultados en el dominio del tiempo. Validación del modelo unidimensional

Se evalúa la capacidad del modelo unidimensional para reproducir el comportamiento vibratorio forzado de vigas de pared delgada con presencia de una fisura batiente. Para ello, se realiza una validación mediante comparaciones con mediciones de desplazamientos en el tiempo simuladas numéricamente. Estas simulaciones se obtienen a partir de un modelo tridimensional de elementos cáscara programado en el código comercial ABAQUS 6.7® (Un mayor detalle sobre este modelo se puede obtener en el Apéndice A-1).

En las gráficas de las [Figuras 4-6](#) se muestra la historia temporal de desplazamientos del punto P_f para la viga en cuestión, conteniendo una fisura batiente. La [Figura 4](#) ejemplifica el comportamiento del modelo unidimensional en la predicción de respuestas asociadas a bajas frecuencias de excitación. Son representados con precisión tanto los desplazamientos en la dirección de aplicación de la carga (u_y), como también los desplazamientos transversales (u_z) y axiales (u_x).

El caso de las [Figuras 5a](#) y [6a](#) corresponde a una excitación cercana al valor de la primera frecuencia natural del sistema, donde los desplazamientos alcanzan amplitudes moderadamente grandes (del orden de 1/10 la longitud de la viga) debido a la elevada carga

aplicada. En casos como este, y aunque el modelo unidimensional se define a partir de la hipótesis de pequeños desplazamientos, se muestra que aún puede predecirse con aceptable precisión el desplazamiento asociado a la dirección de aplicación de la carga, en este caso u_y . No ocurre lo mismo con los desplazamientos transversales u_z , para los cuales el modelo unidimensional arroja resultados erróneos.

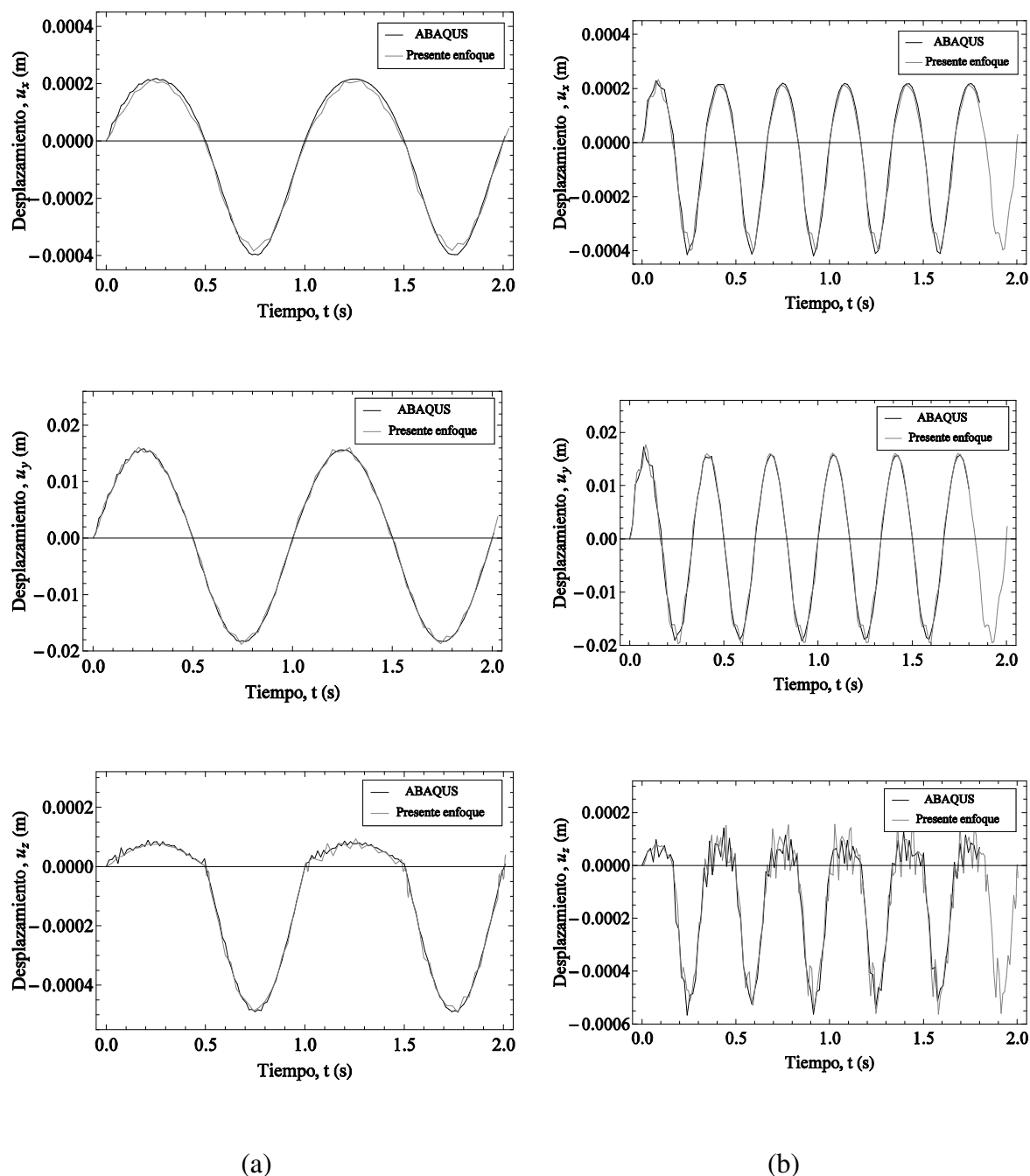


Figura 4: Desplazamientos u_x , u_y y u_z del punto P_f versus el tiempo. Carga: $Q_y(x=L) = 5000 \text{ N sen}(\varpi_f t)$. Daño: Fisura batiente; $\xi/L = 0.1$; $alb = 0.5$. Caso (a) $\varpi_f = 6.28 \text{ s}^{-1}$ (1 Hz), $\Delta t = 2.86 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ ($\lambda_0 = 35$), $m = 10$. Caso (b) $\varpi_f = 18.85 \text{ s}^{-1}$ (3 Hz), $\Delta t = 9.52 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ ($\lambda_0 = 35$), $m = 10$.

El caso de las Figuras 5b y 6b está asociado a una frecuencia de excitación por encima de la frecuencia fundamental. El modelo unidimensional presenta un buen acuerdo también en este caso, tanto para la respuesta estacionaria como para la transitoria.

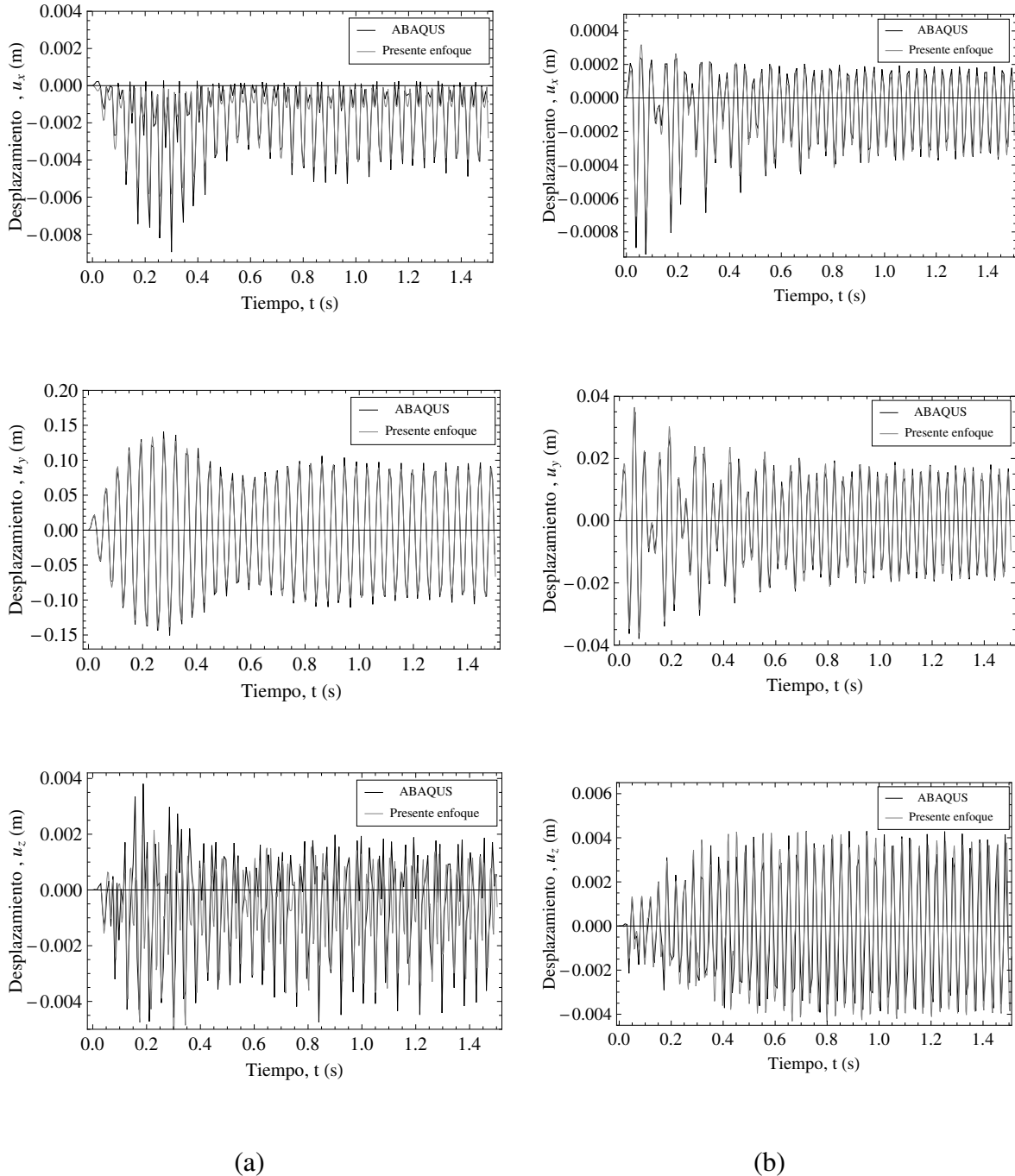


Figura 5: Desplazamientos u_x , u_y y u_z del punto P_f versus el tiempo. Carga: $Q_y(x=L) = 5000 \text{ N sen}(\varpi_f t)$. Daño: Fisura batiente; $\xi/L = 0.1$; $ab = 0.5$. Caso (a) $\varpi_f = 150.80 \text{ s}^{-1}$ (24 Hz), $\Delta t = 1.19 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ ($\lambda_0 = 35$), $m = 10$. Caso (b) $\varpi_f = 188.50 \text{ s}^{-1}$ (30 Hz), $\Delta t = 9.52 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ ($\lambda_0 = 35$), $m = 10$.

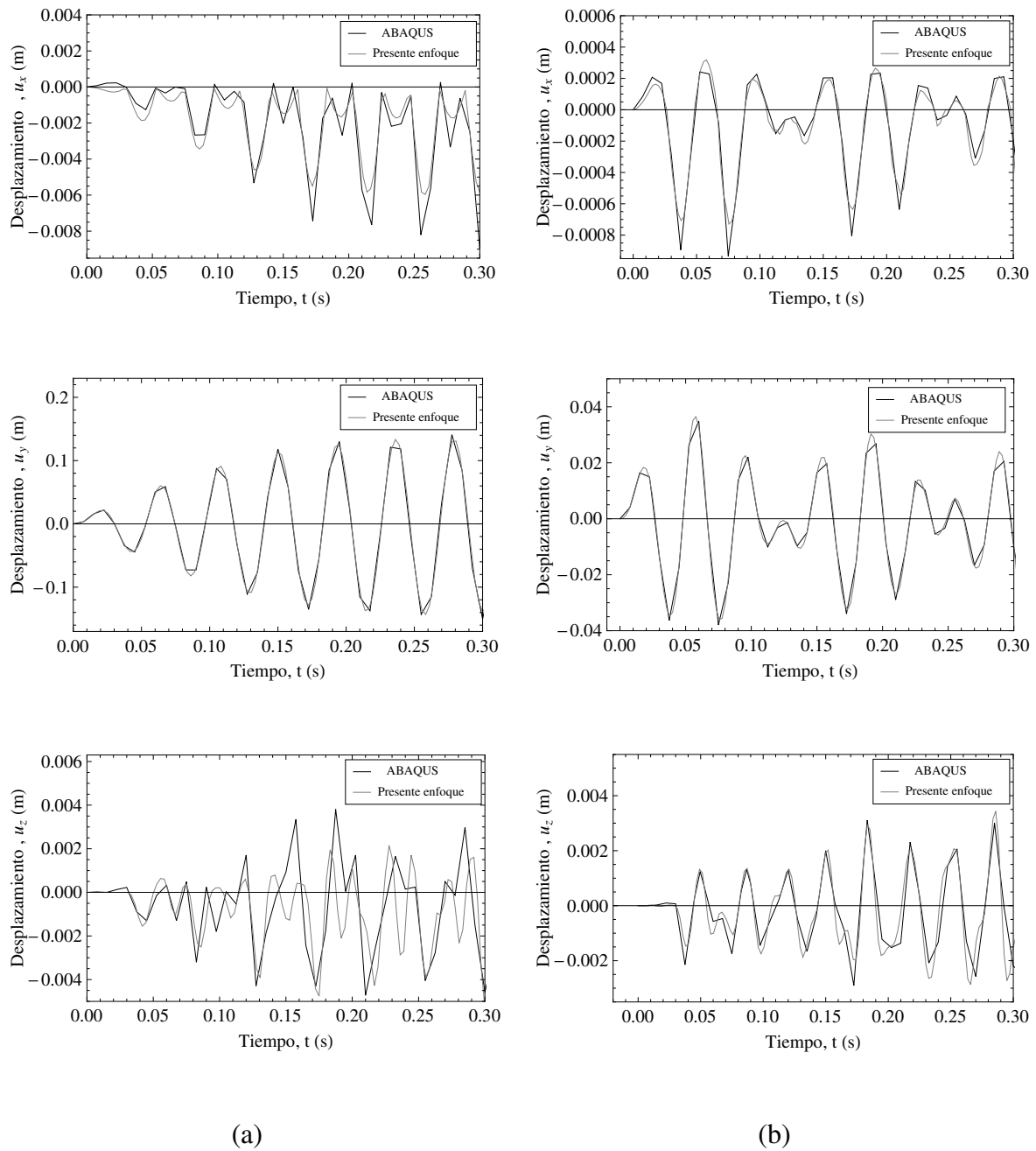


Figura 6: Desplazamientos u_x , u_y y u_z del punto P_f versus el tiempo. Carga: $Q_y(x=L) = 5000 \text{ N sen}(\varpi_f t)$. Daño: Fisura batiente; $\xi/L = 0.1$; $a/b = 0.5$. Caso (a) $\varpi_f = 150.80 \text{ s}^{-1}$ (24 Hz), $\Delta t = 1.19 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ ($\lambda_0 = 35$), $m = 10$. Caso (b) $\varpi_f = 188.50 \text{ s}^{-1}$ (30 Hz), $\Delta t = 9.52 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ ($\lambda_0 = 35$), $m = 10$.

Como se ha indicado en la sección 5.2, el problema se ha abordado mediante una adaptación del esquema de integración de [Newmark \(1959\)](#) para sistemas lineales. El error generado por el cambio brusco de la matriz de rigidez se reduce mediante la subdivisión de aquél intervalo de tiempo en el que se produce el cambio de estado de la fisura.

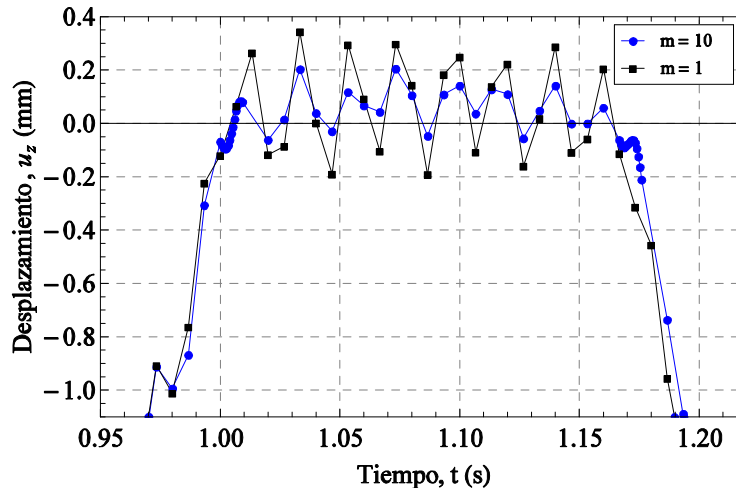


Figura 7: Disminución de las oscilaciones de la respuesta debido a la reducción del incremento de tiempo en la zona de cambio de estado de la fisura. Desplazamientos u_z del punto P_f versus el tiempo. Carga: $Q_y(x=L) = 5000 \text{ N sen}(\varpi_f t)$. Daño: Fisura batiente; $\xi/L = 0.25$; $a/b = 0.75$. Frecuencia de excitación: $\varpi_f = 18.85 \text{ s}^{-1}$ (3 Hz), $\Delta t = 6.67 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ ($\lambda_0 = 50$).

En la [Figura 7](#) se muestran dos soluciones para un mismo valor de Δt , pero con distintos valores del coeficiente m , que define la mencionada subdivisión temporal en las cercanías del cambio de rigidez. La comparación se realiza entre una solución con incremento fijo, $m = 1$, y otra con incremento reducido en un factor de $m = 10$. En la gráfica se observa que la reducción del incremento en la zona de cambio de estado de la fisura reduce las oscilaciones de la respuesta calculada. Este es un comportamiento que se produce en varios escenarios, aunque no en la totalidad de los mismos, obteniéndose en muchos casos buenos resultados también con incremento de tiempo fijo.

6.3 Resultados en el dominio de la frecuencia

La [Tabla 1](#) presenta las cuatro primeras resonancias para los siguientes casos: viga sin daño, viga con fisura batiente y viga con fisura abierta. Se observa que los valores de frecuencias asociados al caso de fisura batiente se ubican entre los asociados a los otros dos casos. Esta característica es general y ya ha sido observada por otros autores como [Shen y Chu \(1992\)](#) y [Cheng et al. \(1999\)](#) para el caso de estructuras de dinámica más simple como vigas Bernoulli-Euler. El mencionado efecto es una consecuencia lógica si se tiene en cuenta que la viga con fisura batiente se comporta parte del tiempo como una viga sin daño y el tiempo restante, como una viga con fisura abierta, lo que le daría una rigidez intermedia.

	1° Frecuencia	2° Frecuencia	3° Frecuencia	4° Frecuencia
Sin daño	23.35	30.63	74.72	131.19
Fisura batiente	22.13	30.52	72.14	130.81
Fisura abierta	21.07	30.21	71.35	129.08

Tabla 1: Comparación entre las frecuencias naturales de los siguientes escenarios del caso de estudio: viga sin daño, viga con fisura batiente y viga con fisura completamente abierta. $\xi/L = 0.25$; $a/b = 0.5$.

Por su parte, la **Figura 8** presenta una comparación entre curvas de amplitud estacionaria versus frecuencia de excitación forzada. Se muestra allí la respuesta obtenida considerando la presencia de una fisura batiente, en comparación con la respuesta asociada a una fisura completamente abierta o lineal. Se consideran en este ejemplo desplazamientos en la dirección de aplicación de la carga (desplazamientos u_y), y transversales a dicha dirección (desplazamientos u_z). La **Figura 9** presenta detalles ampliados de la gráfica de la **Figura 8b**.

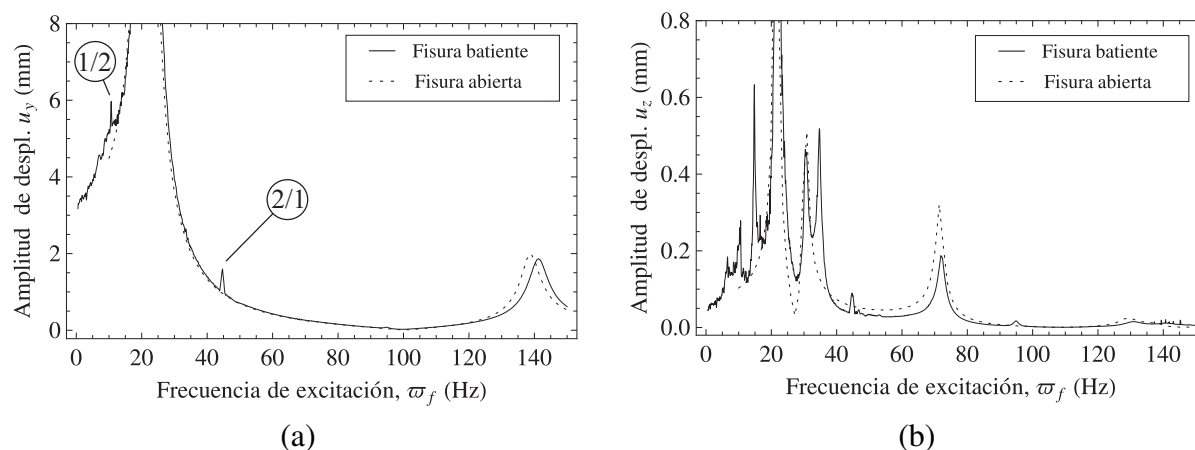


Figura 8: Amplitudes de desplazamiento del punto P_f versus frecuencia de excitación forzada: (a) u_y y (b) u_z . Carga: $Q_y(x=L) = 1000 \text{ N sen}(\omega_f t)$. Fisura: $\xi/L = 0.25$; $a/b = 0.5$.

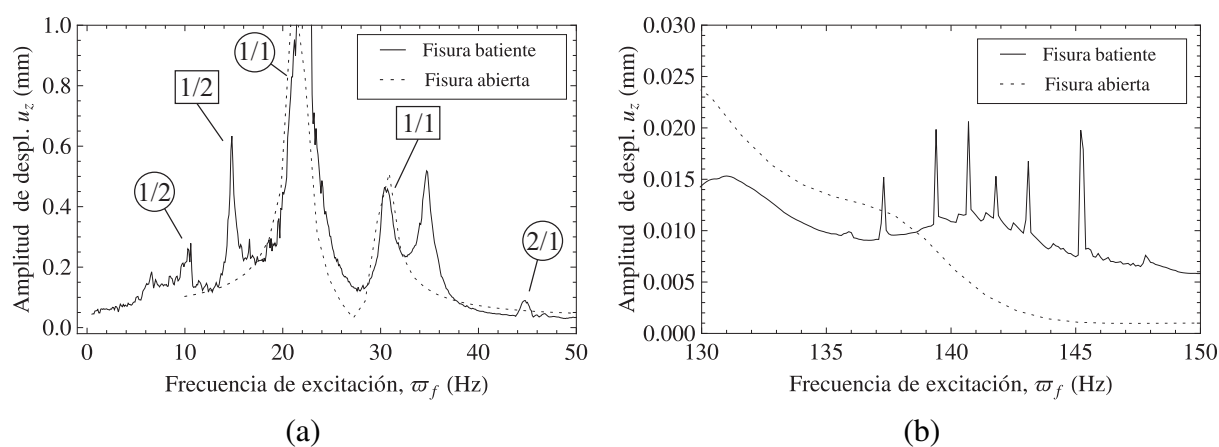


Figura 9: Amplitudes de desplazamiento u_z del punto P_f versus frecuencia de excitación forzada. (Detalles de la Figura 8). Carga: $Q_y(x=L) = 1000 \text{ N sen}(\omega_f t)$. Fisura: $\xi/L = 0.25$; $a/b = 0.5$.

Se observa que mientras las curvas del caso correspondiente a la fisura abierta son suaves, las asociadas a la fisura batiente presentan intermitencias y picos adicionales de respuesta entre las resonancias (marcadas estas últimas como 1/1). Estos picos son resonancias armónicas que indican la naturaleza no lineal de la respuesta y han sido observados en trabajos previos, tanto experimentales como computacionales, para vigas de sección maciza (Ismail et al., 1990; Sundermeyer y Weaver, 1995; Ruotolo et al., 1996; Cheng et al., 1999; Sinha y Friswell, 2002). En la **Figura 8a** se indican los picos de amplitudes correspondientes a los regímenes sub-armónico de orden 1/2 y súper-armónico de orden 2/1 de la frecuencia fundamental, cuyo modo en el estado base es flexional con movimiento en el plano x - y únicamente (siendo una carga Q_y , si no hay fisura son nulos los desplazamientos u_z).

Para el caso de los desplazamientos transversales (u_z), en la gráfica de la **Figura 9a** se

pueden observar algunos armónicos asociados a la frecuencia fundamental, indicados con un círculo, y a la segunda frecuencia natural (flexo-torsional en el estado base), indicados con un recuadro. El pico que no se halla indicado corresponde al régimen sub-armónico 1/2 de la tercera frecuencia natural (torso-flexional).

La Figura 9b muestra en detalle una curiosa respuesta en las cercanías de la cuarta frecuencia natural, que se asocia al segundo modo flexional (en el estado base, sobre el plano x - y únicamente). Esta gráfica es únicamente ilustrativa de las diferencias cualitativas entre los resultados obtenidos para escenarios de fisura lineal y batiente en dicha zona.

6.4 Resultados en el plano de fase velocidad-desplazamiento

En las Figuras 10 y 11 se presentan resultados en el plano de fase para dos frecuencias distintas de excitación externa. En ambas figuras, cada gráfica compara las respuestas vibratorias estacionarias de una viga con fisura batiente (curvas azules) y abierta (curvas rojas). Se observa claramente en ambos ejemplos cómo el efecto de cerramiento de fisura produce deformaciones en los ciclos estacionarios de respuesta, con respecto al caso de fisura abierta. Con fisura abierta, dichos ciclos se presentan siempre simétricos en torno a los ejes coordenados del plano de fase; mientras que en el caso de fisura batiente, se presentan asimetrías con respecto a los ejes, características de sistemas vibratorios no lineales.

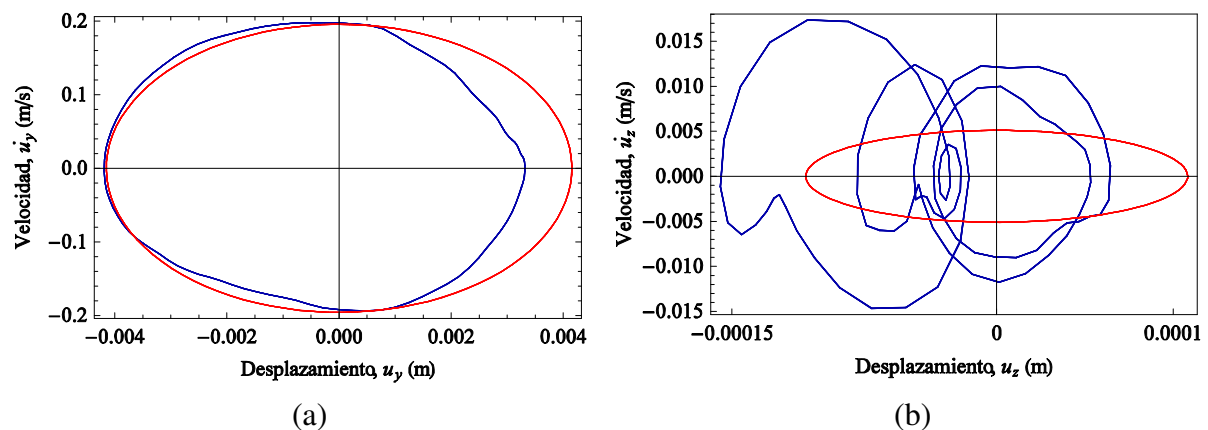


Figura 10: Planos de fase para los desplazamientos (a) u_y y (b) u_z . Carga: $Q_y(x=L) = 1000 \text{ N sen}(\varpi_f t)$. Frecuencia de excitación: $\varpi_f = 47.12 \text{ s}^{-1}$ (7.5 Hz). Daño: Fisura batiente (—) y completamente abierta (—); $\xi/L = 0.1$; $a/b = 0.5$.

Existen escenarios para los que las respuestas son considerablemente distintas entre sí, como es el caso de la Figura 11. En general, estos casos se asocian a condiciones de resonancia armónica. El ejemplo mencionado corresponde al súper-armónico de orden 3/1 de la segunda frecuencia natural (primera flexo-torsional). La evolución en el tiempo de los casos de la Figura 11a se muestra en la Figura 12. Se observa que, una vez superado el estado transitorio, la curva correspondiente al caso de fisura batiente se establece en una complicada forma periódica, generando una respuesta muy diferente a la asociada al caso lineal, incluso con amplitudes bastante mayores.

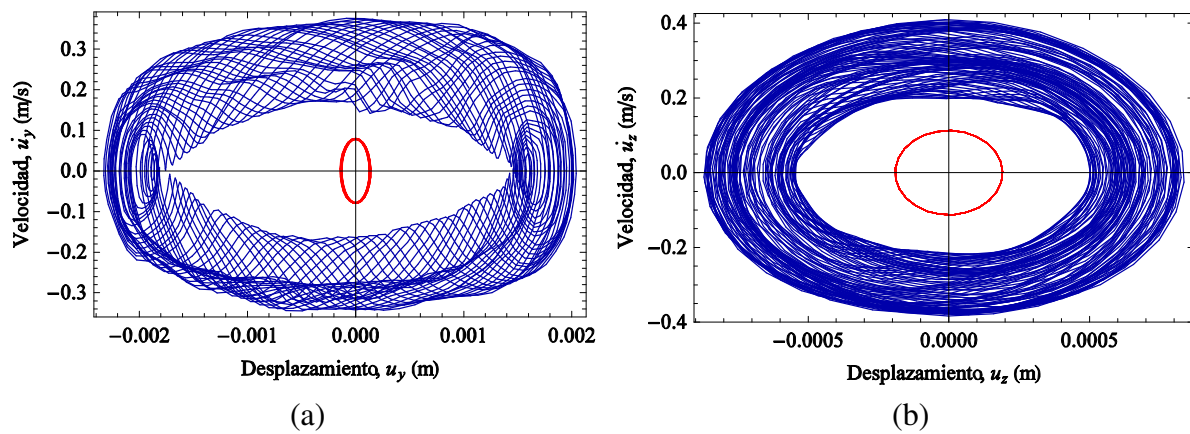


Figura 11: Planos de fase para los desplazamientos (a) u_y y (b) u_z . Carga: $Q_y(x=L) = 5000 \text{ N sen}(\varpi_f t)$. Frecuencia de excitación: $\varpi_f = 587.48 \text{ s}^{-1}$ (93.5 Hz). Daño: Fisura batiente (-) y completamente abierta (- -); $\xi/L = 0.1$; $a/b = 0.5$.

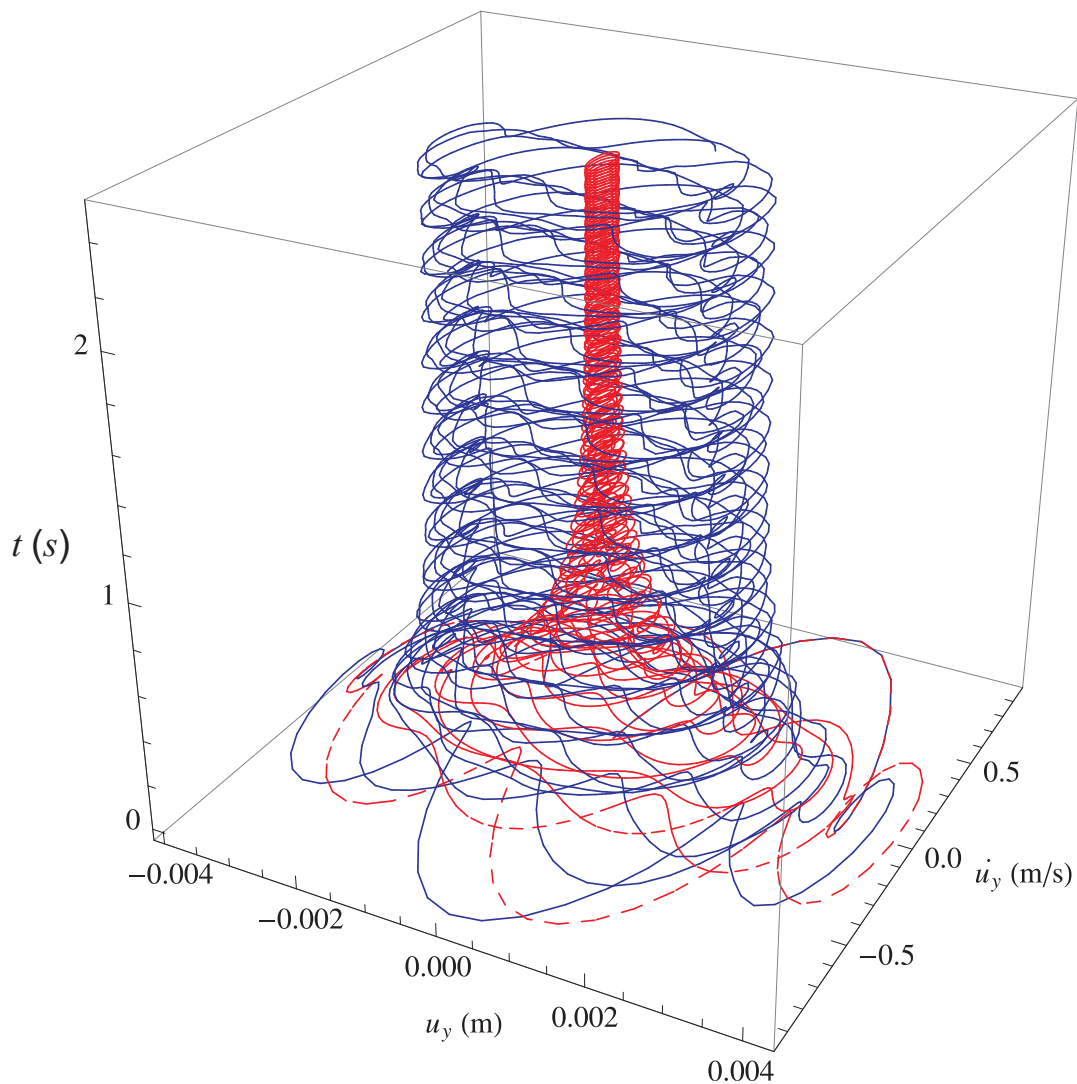


Figura 12: Curva integral asociada al desplazamiento u_y . Carga: $Q_y(x=L) = 5000 \text{ N sen}(\varpi_f t)$. Frecuencia de excitación: $\varpi_f = 587.48 \text{ s}^{-1}$ (93.5 Hz). Daño: Fisura batiente (-) y completamente abierta (- -); $\xi/L = 0.1$; $a/b = 0.5$.

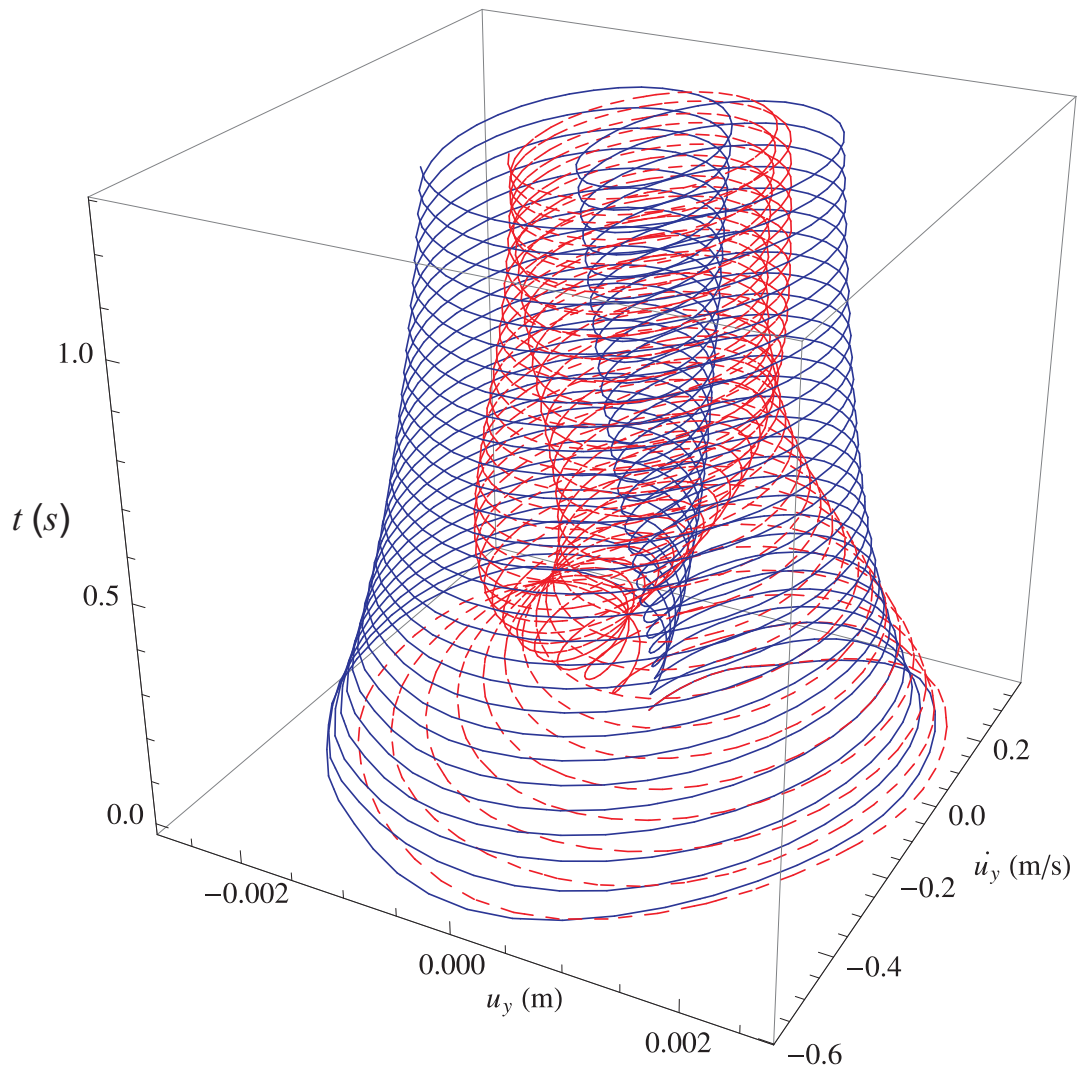


Figura 13: Curva integral asociada al desplazamiento u_y . Carga: $Q_y(x=L) = 1000 \text{ N sen}(\varpi_f t)$. Frecuencia de excitación: $\varpi_f = 280.73 \text{ s}^{-1}$ (44.68 Hz). Daño: Fisura batiente (—) y completamente abierta (- -); $\xi/L = 0.1$; $a/b = 0.5$.

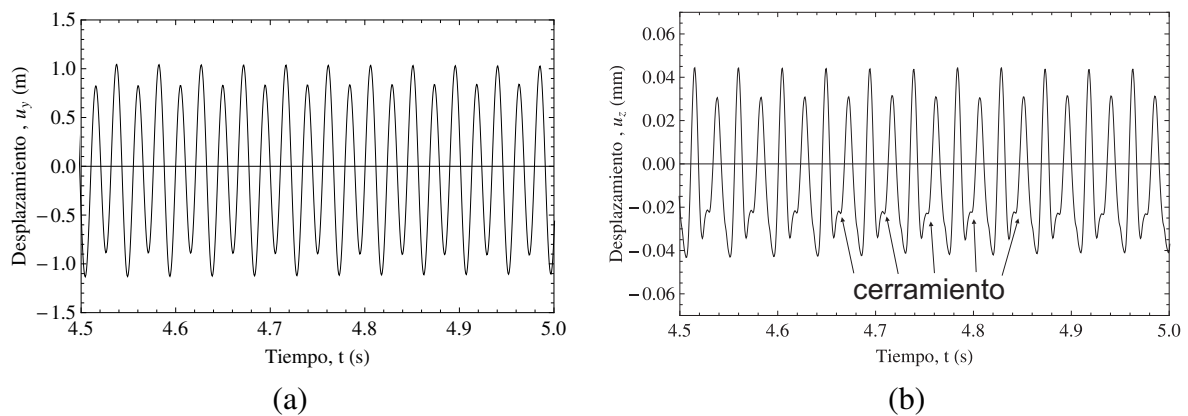


Figura 14: Desplazamientos del punto P_f versus el tiempo: (a) u_y y (b) u_z . Carga: $Q_y(x=L) = 1000 \text{ N sen}(\varpi_f t)$. Frecuencia de excitación: $\varpi_f = 280.73 \text{ s}^{-1}$ (44.68 Hz). Daño: Fisura batiente; $\xi/L = 0.1$; $a/b = 0.5$.

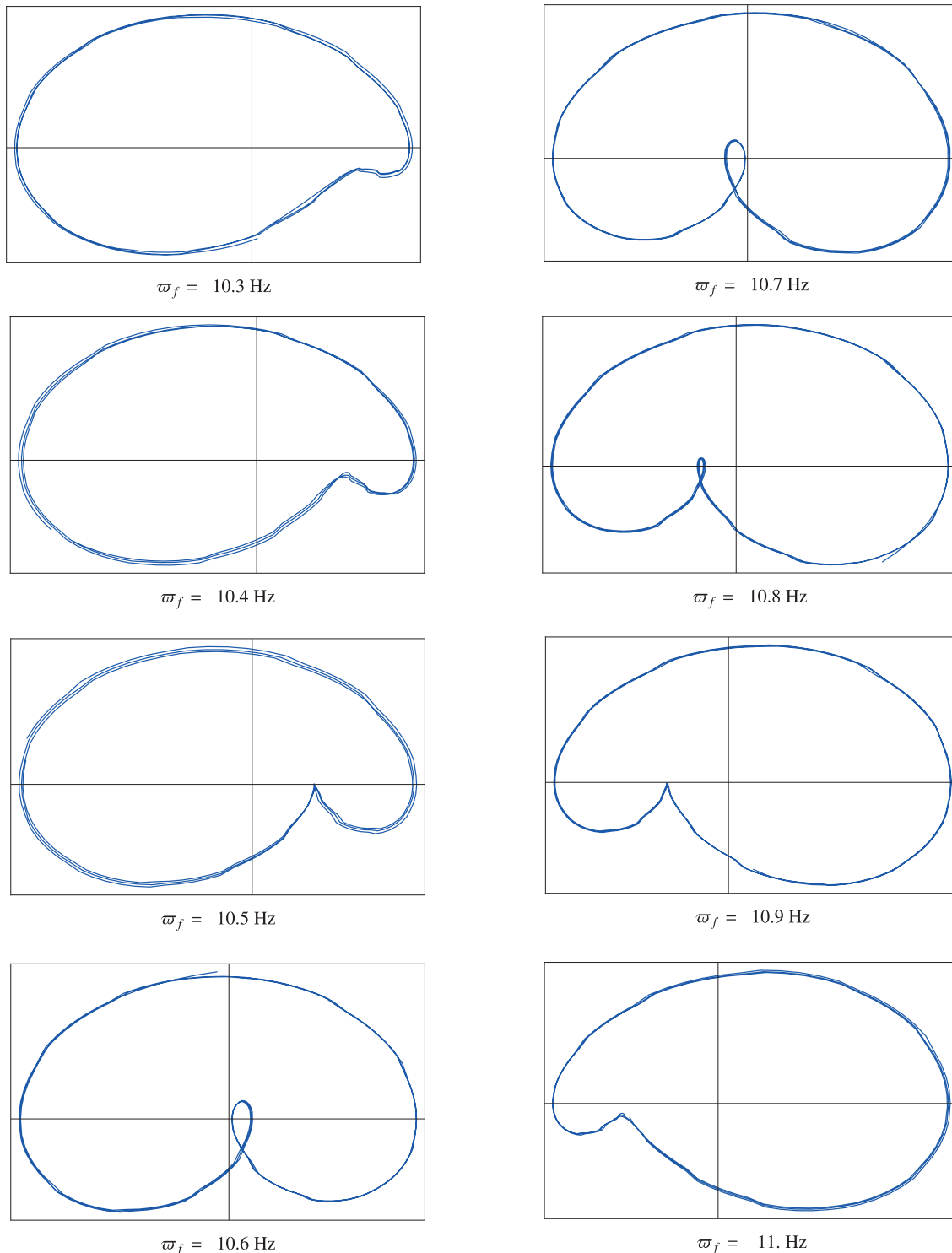


Figura 15: Doblamiento de período para el armónico 1/2 de la frecuencia fundamental (Desplazamiento u_y).

Otra característica común de los sistemas no lineales que se manifiesta en el caso de fisura batiente es la presencia de doblamientos de período. Un ejemplo se muestra en la [Figura 13](#). Se trata de la excitación de la resonancia súper-armónica 2/1 de la frecuencia fundamental, estableciéndose la dinámica del desplazamiento u_y en un ciclo límite de doble período. Se aprecia la diferencia sustancial en cuanto a la respuesta lineal. En la gráfica de respuesta del desplazamiento u_z de la [Figura 14b](#) se pueden apreciar claramente las perturbaciones en la

historia temporal indicadores del evento de cerramiento de fisura, que se produce debido al cambio abrupto en la aceleración generado por el mismo. Este fenómeno fue estudiado experimentalmente por Prime y Shevitz (1996) para vigas Bernoulli-Euler construidas con policarbonatos. También se puede observar el doblamiento de período en las demás resonancias armónicas. El pasaje de período 1 a período 2 y luego nuevamente a período 1 al variar la frecuencia de excitación se muestra para el caso del armónico 1/2 de la frecuencia fundamental, en la Figura 15.

Los resultados presentados en esta sección se contraponen a las conclusiones obtenidas por Cheng et al. (1999) y Rytter (1993), para el caso de vigas Bernoulli-Euler, quienes no hallaron en el plano de fase diferencias de importancia entre los enfoques de fisura completamente abierta y fisura batiente.

7 CONCLUSIONES

En el presente artículo se ha estudiado el efecto de cerramiento parcial de fisura o *breathing* en vigas de pared delgada. Esta característica es propia de las fisuras generadas por fatiga, e implica que dicho daño se abre o cierra dependiendo del movimiento de la viga, con la consecuente generación de una respuesta no lineal. En la teoría presentada, se ha asumido que cuando la fisura se halla abierta, la matriz constitutiva de esfuerzos en la zona de la misma será igual a la obtenida para una fisura lineal o abierta. Por su parte, si la fisura se hallase cerrada, dicha matriz será igual a la correspondiente al estado base o sin daño. Para hacer efectivo el cumplimiento de este criterio de bi-linealidad, se definió un indicador de cerramiento variable en el tiempo. Este indicador corresponde a la diferencia entre los desplazamientos axiales de dos puntos ubicados sobre ambos bordes de una discontinuidad seccional equivalente a una fisura.

La precisión del modelo unidimensional se validó para una viga de pared delgada cantiléver con fisura batiente. Se empleó para ello un modelo tridimensional elementos cáscara programado en ABAQUS 6.7, cuyos resultados fueron cotejados con el modelo viga. Se realizaron comparaciones de desplazamientos de la historia temporal, en régimen transitorio y estacionario, obteniéndose resultados aceptables.

Se ha observado que los valores de frecuencias de resonancia asociados al caso de fisura batiente se ubican por debajo de los correspondientes a un caso sin daño, pero por encima de aquéllos asociados al caso de fisura completamente abierta o lineal. Considerando que un modelo con cerramiento es más representativo de una fisura de fatiga real, este efecto representa una dificultad adicional importante en la identificación de daño. Si ésta se realiza a partir de un modelo de fisura abierta empleando como indicadores las frecuencias naturales, se corre el riesgo de subestimar la severidad de la falla, algo trascendental en el caso en que la fisura pueda propagarse.

Los efectos no lineales asociados al cerramiento parcial de fisura fueron estudiados en el dominio de la frecuencia y en el plano de fase. Se evidenció que el comportamiento presenta diferencias sustanciales con respecto al caso de una fisura abierta, que desprecia los mencionados efectos no lineales. Esto tiene especial validez en las zonas del espectro en que se presentan las resonancias armónicas, la cuáles se producen para frecuencias de excitación iguales a múltiplos y sub-múltiplos de las frecuencias principales de resonancia. Estos armónicos, que se manifiestan como picos en la gráfica de amplitud-frecuencia, representan la 'firma no lineal' de la fisura batiente. Su mera presencia puede ser considerada como indicador de identificación de daño, al menos a Nivel 1. Se comprobó además en el plano de fase la asociación de las resonancias armónicas con doblamientos de períodos. En la historia temporal se evidencian también estos doblamientos como pequeñas perturbaciones, que son indicadores del evento de cerramiento de fisura.

8 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y del CONICET. El presente artículo forma parte del estudio de tesis doctoral realizado por Franco E. Dotti, bajo la dirección de Víctor H. Cortínez y Marcelo T. Piovan, en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.

APÉNDICE

A-1 Modelo tridimensional de elementos cáscara empleado en la validación

Con el objeto de validar los resultados del modelo unidimensional en el que se considera una fisura con cerramiento, se emplean cálculos de historia temporal de desplazamientos. El modelo empleado para la validación es uno tridimensional de elementos cáscara y es programado en el código comercial ABAQUS 6.7.

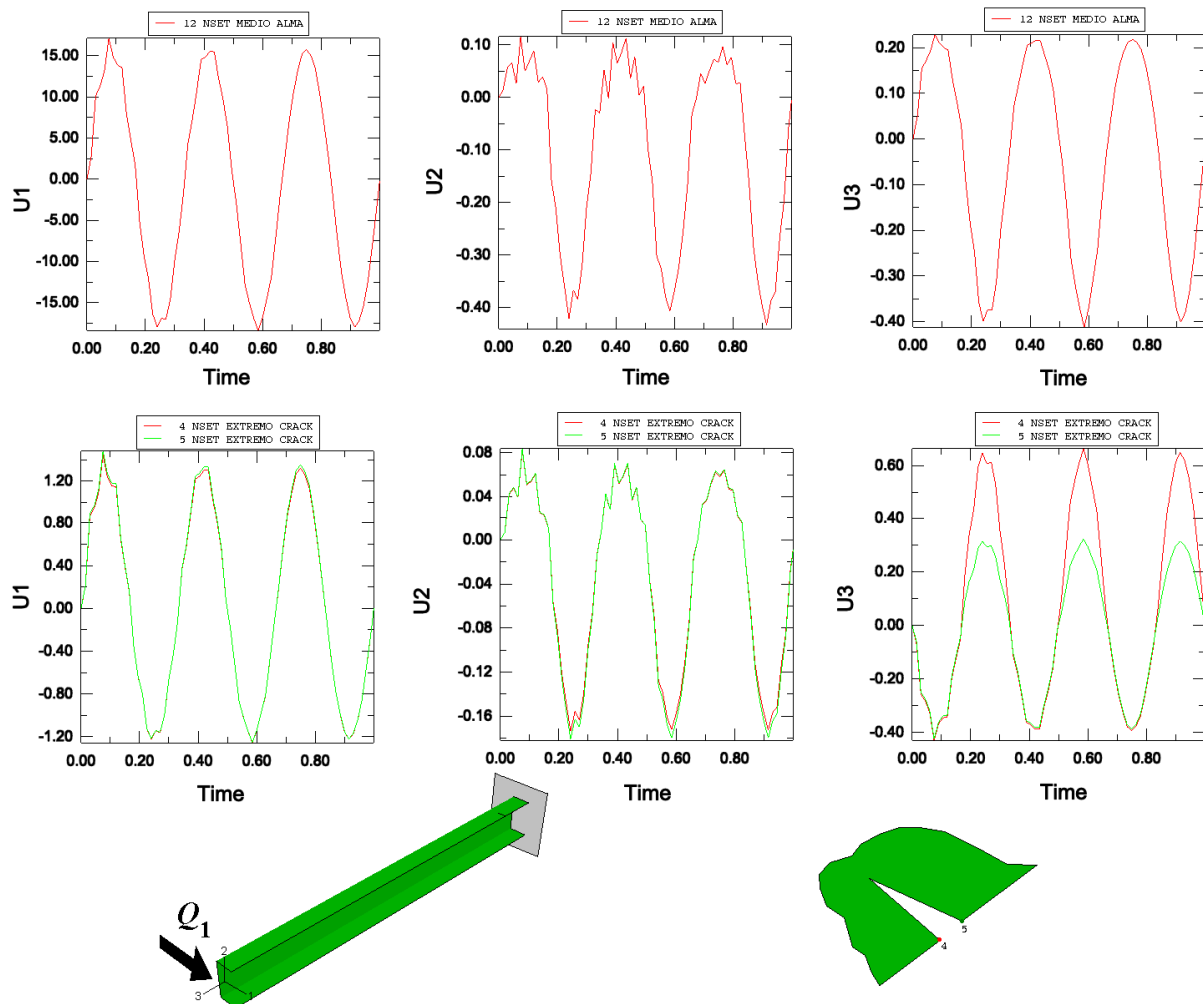


Figura 15: Ejemplo de los resultados de historia temporal de desplazamiento obtenidos mediante ABAQUS. Gráficas superiores: desplazamientos del punto P_j , ubicado en el extremo libre, en el punto medio del alma (definido en la Figura 3). Gráficas inferiores: desplazamientos de los extremos de la fisura. En el sistema cartesiano de ABAQUS, 1 corresponde a y , 2 a z y 3 a x .

La fisura no lineal se modela como una entalla de boca muy pequeña, $5 \cdot 10^5$ veces menor que su profundidad. La condición de cerramiento periódico de fisura se plantea como un problema de contacto. Para la interacción de contacto normal, se emplea la relación *hard*

contact, que permite la transmisión total de presión cuando las superficies se hallan en contacto. Se permite la separación luego de establecido el contacto, que se producirá si la presión de contacto se reduce a cero. Para el comportamiento tangencial se considera la formulación de fricción *rough*, que impide el deslizamiento una vez que se ha producido el contacto; ésta se activa cuando las restricciones de penetración hacen lo propio, es decir, cuando los nodos de la superficie de contacto esclava intentan penetrar en la superficie maestra (ABAQUS Analysis Manual v6.7, Sección 29.3).

La historia temporal se obtiene mediante el procedimiento de análisis *DYNAMIC de ABAQUS/Explicit (ABAQUS Analysis Manual v6.7, Sección 6.3.3), que emplea para la integración temporal de las ecuaciones dinámicas de equilibrio el método explícito de diferencia central. Este es un procedimiento adecuado ya que permite definir condiciones de contacto de manera general. Se considera en el cálculo la posible ocurrencia de grandes desplazamientos (NLGEOM: On).

Se utilizan mallas de alrededor de 2000 elementos cuadriláteros S4R. Este es un elemento lineal de primer orden incluido en el programa (ABAQUS Theory Manual v6.7, Sección 3.6.5). Es un elemento multipropósito, ya que permite resolver problemas que son descritos adecuadamente tanto por la teoría clásica de placas de Kirchhoff como por la teoría de Mindlin. No presenta problemas de bloqueo transversal por corte ni de modos espurios asociados al efecto de *hourglass*.

El efecto de cerramiento de la fisura se observa claramente en el ejemplo de la Figura 15, correspondiente a un caso típico de respuesta temporal. En los momentos en que el contacto se produce, los desplazamientos axiales U3 de los nodos 4 y 5 (ubicados en los extremos de la fisura) son iguales y los mismos son diferentes en el caso en que los bordes de la fisura se separan. También se muestran los desplazamientos del punto P_f (definido anteriormente, en la Figura 3): los desplazamientos son menores en el caso en que la fisura se encuentra cerrada, especialmente el desplazamiento U2, transversal a la aplicación de la carga, que se vuelve casi nulo, como correspondería a una viga sin daño (debido a la forma de aplicación de la carga y a la simetría de la sección con respecto al eje coordenado 1).

REFERENCIAS

- ABAQUS Analysis Manual v6.7. © Dassault Systèmes, 2007.
 ABAQUS Theory Manual v6.7. © Dassault Systèmes, 2007.
 Abraham, O.N., y Brandon, J.A., Modeling of the opening and closure of a crack. *Journal of Vibration and Acoustics*, 117:370–377, 1995.
 Anderson, T.L., *Fracture mechanics fundamentals and applications*, CRC Press, 1994.
 Bathe, K.-J., *Finite element procedures*. Prentice Hall, 1996.
 Bovsunovsky, A.P., y Surace, C., Considerations regarding super-harmonic vibrations of a cracked beam and the variation in damping caused by the presence of the crack. *Journal of Sound and Vibration*, 288:865–886, 2005.
 Brandon, J.A., y Abraham, O.N., Counter-intuitive quasi-periodic motion in the autonomous vibration of cracked Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 185(3):415–430, 1995.
 Brandon, J.A., y Sudraud, C., An experimental investigation into the topological stability of a cracked cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4):555–569, 1998.
 Broek D., *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers, 1984.
 Changhe, L., Bernasconi, O., y Xenophontidis, N., A generalized approach to the dynamics of cracked shafts. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 111:257–267, 1989.
 Cheng, S.M., Wu, X.J., y Wallace, W., Vibrational response of a beam with a breathing crack.

- Journal of Sound and Vibration*, 225(1):201–208, 1999.
- Cortínez, V.H., y Dotti, F.E., Un modelo numérico para la dinámica de vigas de pared delgada fracturadas por fatiga: aplicación a la identificación de daños. *Mecánica Computacional*, 29:431–488, 2010.
- Cortínez, V.H., Dotti, F.E., y Piovan, M.T., Factor de intensidad de tensiones del modo I para vigas abiertas de pared delgada. *Mecánica Computacional*, 28:955–971, 2009.
- Cortínez, V.H., y Rossi, R.E., Dinámica de vigas de sección abierta de pared delgada deformables por corte sujetas a un estado inicial de tensiones. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 14(3):293–316, 1998.
- Cortínez, V.H., y Piovan, M.T., Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4):701–723, 2002.
- Dotti, F.E., *Identificación de daños en vigas de pared delgada isotropas y compuestas mediante el análisis de vibraciones*. Tesis de Doctor en Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, 2011.
- Dotti, F.E., Cortínez, V.H., y Piovan, M.T., Identification of damage in thin-walled curved beams by means of vibration analysis. *Proceedings of the XIV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*, DINAME 2011, 144–148, 2011a.
- Dotti, F.E., Cortínez, V.H., y Piovan, M.T. (2011b), Identificación de daño múltiple en vigas curvas de pared delgada mediante el análisis de vibraciones. *Mecánica Computacional*, 30:1107–1131, 2011b.
- Ibrahim, A., Ismail, A., y Martin H.R., Modeling of dynamics of continuous beam including nonlinear fatigue crack. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 2(2):76–82, 1987.
- Ismail, F., Ibrahim, A., y Martin H.R., Identification of fatigue cracks from vibration testing. *Journal of Sound and Vibration*, 140(2):305–317, 1990.
- Kisa, M., y Brandon J., The effects of closure of cracks on the dynamics of a cracked cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 238(1):1–18, 2000.
- Kollár, L.P., y Springer, G.S., *Mechanics of composite structures*. Cambridge University Press, 2003.
- Mazanoglu, K., y Sabuncu, M., Flexural vibration of non-uniform beams having double-edge breathing cracks. *Journal of Sound and Vibration*, 329:4181–4191, 2010.
- Newmark, N., A method of computation for structural dynamics. *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, 85:67–94, 1959.
- Oñate, E. (1992), *El Cálculo de estructuras con elementos finitos*, CIMNE, 1992.
- Patil, D.P., y Maiti, S.K., Detection of multiple cracks using frequency measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, 70:1553–1572, 2003.
- Piovan, M.T., *Estudio teórico y computacional sobre la mecánica de vigas curvas de materiales compuestos, con sección de paredes delgadas, considerando efectos no convencionales*. Tesis de Doctor en Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, 2003.
- Prime, M.B., y Shevitz, D.W. (1996), Linear and nonlinear methods for detecting cracks in beams. *Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 1437–1443, 1996.
- Rezaee, M., y Hassannejad, R., A new approach to free vibration analysis of a beam with a breathing crack based on mechanical energy balance method. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 24(2):185–194, 2011.
- Ruotolo, R., Surace, C., Crespo, P., y Storer, D., Harmonic analysis of the vibrations of a cantilevered beam with a closing crack. *Computers & Structures*, 61(6):1057–1074, 1996.
- Rytter, A., *Vibrational based inspection of civil engineering structures*. Tesis Doctoral, University of Aalborg, 1993.

- Shen, M.H., y Chu Y.C., Vibration of beams with a fatigue crack. *Computer & Structures*, 45(1):79–93, 1992.
- Sinha, J.K., y Friswell, M.I., Simulation of the dynamic response of a cracked beam. *Computers & Structures*, 80:1473–1476, 2002.
- Sundermeyer, J.N. y Weaver, R.L., On crack identification and characterization in beams by non-linear vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 183(5):857–871, 1995.
- Tsyfansky, S.L., y Beresnevich V.I., Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring. *Journal of Sound and Vibrations*, 213(1):159–168, 1998.
- Tsyfansky, S.L., y Beresnevich V.I., Non-linear vibration method for detection of fatigue cracks in aircraft wings. *Journal of Sound and Vibration*, 236(1):49–60, 2000.