

VIBRACIONES NO LINEALES DE VIGAS DE PARED DELGADA PRECARGADAS CON FISURAS DE FATIGA

Víctor H. Cortínez^{a,b,c}, Franco Dottí^{a,b} y Florencia Reguera^{a,b,c}

^a*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional,
Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina,
vcortine@frbb.utn.edu.ar*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

^c*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina*

Palabras Clave: Vigas de pared delgada, Tensiones iniciales, Fatiga.

Resumen. Es posible detectar, de manera temprana, la aparición de daños en estructuras esbeltas a partir de la medición de sus características dinámicas. Por tal motivo resulta de gran interés el estudio teórico de las vibraciones de estructuras fisuradas. Recientemente se ha desarrollado un modelo dinámico para vigas de pared delgada que considera la presencia de fisuras de fatiga. En particular, se ha contemplado el efecto no lineal de apertura y cierre de la fisura que ha demostrado tener una influencia de gran importancia en su dinámica. En este trabajo se extiende tal modelo para contemplar la existencia de un estado de carga inicial. En particular, las correspondientes tensiones iniciales afectarán la dinámica de cierre y apertura de las fisuras. Se analiza tal influencia numéricamente a partir de un modelo de elementos finitos de la estructura mencionada.

1 INTRODUCCIÓN

La identificación temprana de daño en estructuras es un tema prioritario de investigación de los últimos años. Debido al ingente progreso informático, se ha desarrollado la disciplina denominada Monitoreo de la Integridad Estructural (MIE), la cual se apoya en técnicas de detección de daño basadas en modelos. Entre otros, los trabajos de [Friswell \(2007\)](#) y [Morassi y Vestroni \(2008\)](#) presentan una nutrida literatura introductoria al tema.

Si bien en la modelación de una fisura suele considerarse la hipótesis de que la misma se halla siempre abierta durante el movimiento (hipótesis de linealidad), lo cierto es que una fisura de fatiga es capaz de abrirse o cerrarse. Este efecto, denominado batimiento o *breathing*, da luz a una dinámica no lineal interesante y compleja. [Brandon \(1998\)](#) y [Kisa y Brandon \(2000\)](#) presentaron un resumen de las técnicas que pueden aplicarse en su modelación. Muchas de estas técnicas que se basan en considerar la rigidez de la estructura como constante a tramos, es decir, una rigidez bilineal ([Friswell, 2007](#)).

La gran mayoría de los modelos empleados en el MIH de sistemas estructurales esbeltos son unidimensionales del tipo viga. Estos modelos capturan la mayor parte de la dinámica del sistema, conservando la simplicidad. Así, son especialmente apropiados para la computación extensiva, que es la clave para la identificación de daño en tiempo real.

Existen en la literatura diversos trabajos científicos que estudian el comportamiento de fisuras de fatiga en vigas Bernoulli-Euler ([Shen y Chu, 1992](#); [Kisa y Brandon, 2000](#); [Andreus et al., 2007](#); [Caddemi et al., 2010](#)) y, en menor medida, en vigas Timoshenko ([Krawczuk, 1994](#); [Brandon y Abraham, 1995](#); [Torabi y Nafar Dastgerdi, 2012](#)). Aún con su amplio uso en ingeniería estructural, poco se ha investigado en el tema en lo que respecta a vigas de pared delgada ([Dotti y Cortínez, 2013](#); [Cortínez y Dotti, 2012](#)).

Varios estudios han abordado la influencia de un estado inicial estático de tensiones en la dinámica de vigas de pared delgada sin daño ([Vlasov, 1961](#); [Coulter y Miller, 1986](#); [Cortínez y Rossi, 1998](#); [Cortínez y Piovan, 2002](#); [Machado y Cortínez, 2007](#)). El propósito de este artículo es estudiar dichos efectos en vigas de pared delgada fisuradas por fatiga. Para ello, se emplea un elemento finito que extiende la formulación de vigas intactas de [Cortínez y Rossi \(1998\)](#). El efecto *breathing* se modela considerando una rigidez bilineal, empleando como indicador de cerramiento el desplazamiento axial relativo de los nodos del elemento dañado. La implementación se realiza numéricamente durante la integración de las ecuaciones de movimiento, adaptando a tal efecto el esquema de Newmark para sistemas lineales. Excitando con una carga sinusoidal y empleando la carga estática inicial como parámetro, se obtienen historias de tiempo con el objeto de buscar cambios de naturaleza topológica en la vibración. Se concluye que la magnitud de las tensiones iniciales presentes influye en gran medida en la aparición de efectos no lineales derivados del fenómeno de batimiento.

2 MODELO VIGA

2.1 Viga de pared delgada con fisura

La [Figura 1](#) muestra una viga de pared delgada de sección abierta general, con una fisura en uno de sus bordes libres. Los puntos de la viga se refieren a un sistema de coordenadas cartesianas ($C: x, y, z$), cuyo origen C es en el centroide de la sección transversal de la viga sin daño. Se define el sistema intrínseco ($B: x, y, z$), ubicándose el punto B en la línea media de la pared seccional. Las coordenadas de los puntos en dicha línea media son $Y(s)$ y $Z(s)$.

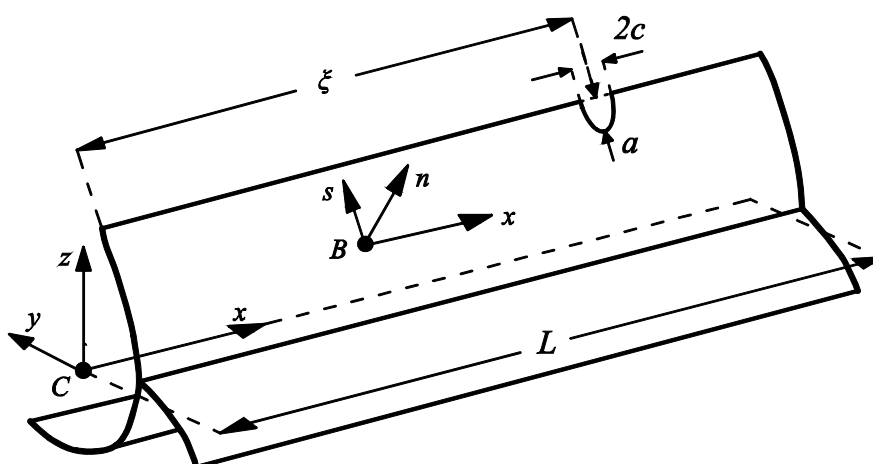


Figura 1: Viga de pared delgada genérica con una fisura modelada como un hueco elíptico ($c \rightarrow 0$).

La fisura, de profundidad a y ubicación $x = \xi$, es considerada como un hueco elíptico con la condición límite de que $c \rightarrow 0$ (Xie et al. 1998; Cortínez y Dotti, 2012). Consecuentemente, el borde de la fisura puede expresarse como

$$\tilde{a}(x) = a\sqrt{1 - (x - \xi)^2 c^{-2}}. \quad (1)$$

2.2 Cinemática general

Las coordenadas de un punto de la sección expresadas en el sistema (C: x, y, z) pueden relacionarse con las correspondientes coordenadas curvilíneas s y n mediante las expresiones

$$y(s, n) = Y - n \frac{dZ}{ds}, \quad z(s, n) = Z + n \frac{dY}{ds}. \quad (2)$$

Los desplazamientos de un punto genérico de la viga u_x, u_y y u_z se expresan de la siguiente manera (Cortínez y Rossi, 1998)

$$u_x = u - y\theta_z - z\theta_y - \omega\theta_x, \quad u_y = v - z\phi_x, \quad u_z = w + y\phi_x, \quad (3)$$

Los desplazamientos generalizados corresponden a: corrimientos u, v y w , dos rotaciones flexionales θ_z y θ_y , el giro torsional ϕ_x y la variable de alabeo θ_x . La función de alabeo ω de la sección está dada por $\omega = \omega_p(s) + \omega_s(s, n)$, donde ω_p y ω_s son el alabeo en el contorno y en el espesor respectivamente (Cortínez y Piovan, 2002).

Se consideran las siguientes componentes de primer y segundo orden del tensor de deformaciones de Green-Lagrange

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad \eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (4)$$

donde U, V y W son los desplazamientos en las direcciones x, s y n , respectivamente.

2.3 Formulación variacional

Considérese la expresión unidimensional de trabajos virtuales (Cortínez y Piovan, 2002)

$$L_S + L_S^0 + L_F + L_R + L_T = 0, \quad (5)$$

donde

$$\begin{aligned}
L_S &= \int_0^L \left[N \delta u' - M_y \delta \theta' - M_z \delta \theta'_z - B \delta \theta'_x + Q_y \delta (v' - \theta_z) + Q_z \delta (w' - \theta_y) + T_w \delta (\phi'_x - \theta_x) + T_{sv} \delta \phi'_x \right] dx, \\
L_S^0 &= \int_0^L \left[\frac{N^0}{2} \delta (u'^2 + w'^2 + v'^2) - M_y^0 \delta (u' \theta'_y + \phi'_x v') - M_z^0 \delta (u' \theta'_z - \phi'_x w') - B^0 \delta (u' \theta'_x) \right] dx, \\
L_F &= - \int_0^L \left[q_x \delta u - m_z \delta \theta_z - m_y \delta \theta_y - b \delta \theta_x + q_y \delta v + q_z \delta w + m_x \delta \phi_x \right] dx, \\
L_R &= \int_0^L \rho \left\{ \left[A \ddot{u} - S_z \ddot{\theta}_z - S_y \ddot{\theta}_y - S_\omega \ddot{\theta}_x \right] \delta u + \left[-S_z \ddot{u} + I_z \ddot{\theta}_z + I_{yz} \ddot{\theta}_y - I_{z\omega} \ddot{\theta}_x \right] \delta \theta_z \right. \\
&\quad + \left[-S_y \ddot{u} + I_{yz} \ddot{\theta}_z + I_y \ddot{\theta}_y + I_{y\omega} \ddot{\theta}_x \right] \delta \theta_y + \left[-S_\omega \ddot{u} + I_{z\omega} \ddot{\theta}_z + I_{y\omega} \ddot{\theta}_y + C_w \ddot{\theta}_x \right] \delta \theta_x \\
&\quad \left. + (A \ddot{v} - S_y \ddot{\phi}_x) \delta v + (A \ddot{w} + S_z \ddot{\phi}_x) \delta w + (I_y \ddot{\phi}_x + I_z \ddot{\phi}_x - S_y \ddot{v} + S_z \ddot{w}) \delta \phi_x \right\} dx, \\
L_T &= - \left[\bar{N} \delta u - \bar{M}_z \delta \theta_z - \bar{M}_y \delta \theta_y + \bar{B} \delta \theta_x + \bar{Q}_y \delta v + \bar{Q}_z \delta w + (\bar{T}_w + \bar{T}_{sv}) \delta \phi_x \right]_{x=0}^{x=L}.
\end{aligned} \tag{6}$$

En (6) se definen los esfuerzos viga generalizados: esfuerzo axial N , momentos flectores M_y y M_z , bimomento B , esfuerzos de corte Q_y y Q_z , torque de Vlasov T_w y torque de Saint-Venant T_{sv} . Dichos esfuerzos tienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
N &= \int_S N_{xx} ds, \quad M_y = \int_S \left(N_{xx} Z + M_{xx} \frac{dY}{ds} \right) ds, \quad M_z = \int_S \left(N_{xx} Y - M_{xx} \frac{dZ}{ds} \right) ds, \\
B &= \int_S (N_{xx} \omega_p - M_{xx} \ell) ds, \quad Q_y = \int_S \left(N_{xs} \frac{dY}{ds} - N_{xn} \frac{dZ}{ds} \right) ds, \quad Q_z = \int_S \left(N_{xs} \frac{dZ}{ds} + N_{xn} \frac{dY}{ds} \right) ds, \tag{7} \\
T_w &= \int_S [N_{xs} (r - \psi) + M_{xs} + N_{xn} \ell] ds, \quad T_{sv} = \int_S (N_{xs} \psi - 2M_{xs}) ds,
\end{aligned}$$

siendo $r = -Z dY/ds + Y dZ/ds$ y $\ell = Y dY/ds + Z dZ/ds$. El hecho de emplear la componente no lineal de deformación de la Ec. (4) permite considerar los esfuerzos viga iniciales que presentan aporte al modo I de mecánica de fracturas. Estos esfuerzos corresponden a

$$\begin{aligned}
N^0 &= \int_S N_{xx}^0 ds, \quad M_y^0 = \int_S \left(N_{xx}^0 Z + M_{xx}^0 \frac{dY}{ds} \right) ds, \quad M_z^0 = \int_S \left(N_{xx}^0 Y - M_{xx}^0 \frac{dZ}{ds} \right) ds, \\
B^0 &= \int_S (N_{xx}^0 \omega_p - M_{xx}^0 \ell) ds.
\end{aligned} \tag{8}$$

A su vez, en (7) y (8) se definen las resultantes de tensión en el espesor como

$$\begin{aligned}
N_{xx} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} dn, \quad M_{xx} = \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{xx} n) dn, \quad N_{xs} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xs} dn, \\
M_{xs} &= \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{xs} n) dn, \quad N_{xn} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xn} dn, \quad N_{xx}^0 = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx}^0 dn, \quad M_{xx}^0 = \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{xx}^0 n) dn,
\end{aligned} \tag{9}$$

donde t es el espesor de la pared seccional. La viga también puede estar sometida a esfuerzos externos aplicados en sus extremos dados por \bar{N} , \bar{M}_y , \bar{M}_z , \bar{B} , \bar{Q}_y , \bar{Q}_z , \bar{T}_w y \bar{T}_{sv} , los cuáles pueden definirse a partir de (7).

2.4 Ley constitutiva

La ecuación constitutiva empleada corresponde a (Dotti, 2012)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J} \mathbf{\Lambda}, \tag{10}$$

donde \mathbf{Q} es el vector de esfuerzos viga generalizados, \mathbf{J} es la matriz constitutiva de esfuerzos y Δ el vector de deformaciones generalizadas. Estas magnitudes están dadas por

$$\mathbf{Q} = \{N, M_y, M_z, B, Q_y, Q_z, T_w, T_{sv}\}^T, \tag{11}$$

$$\Delta = \{u', -\theta_y', -\theta_z', -\theta_x', v' - \theta_z, w' - \theta_y, \phi_x' - \theta_x, \phi_x'\}^T, \tag{12}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} EA & ES_y & ES_z & ES_\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & EI_y & EI_{yz} & EI_{y\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & EI_z & EI_{z\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & EC_w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & I_{55} & 0 & I_{57} & 0 \\ & & & & & I_{66} & I_{67} & 0 \\ \text{sim} & & & & & & I_{77} & 0 \\ & & & & & & & GI_{sv} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

En \mathbf{J} se ha definido la constante de torsión de Saint-Venant I_{sv} , las magnitudes seccionales

$$\begin{aligned} A &= t \int_S ds, \quad S_y = t \int_S Z ds, \quad S_z = t \int_S Y ds, \quad S_\omega = t \int_S \omega_p ds, \quad I_y = t \int_S Z^2 ds, \quad I_z = t \int_S Y^2 ds, \\ I_{yz} &= t \int_S YZ ds, \quad I_{y\omega} = t \int_S Z \omega_p ds, \quad I_{z\omega} = t \int_S Y \omega_p ds, \quad C_w = t \int_S \omega_p^2 ds, \end{aligned} \tag{14}$$

y los coeficientes de corte (Cortínez y Rossi, 1998; Cortínez y Piovan, 2002), dados por

$$\begin{aligned} I_{55} &= t \int_S \left[\left(\frac{dY}{dS} \right)^2 + \left(\frac{dZ}{dS} \right)^2 \right] ds, \quad I_{66} = t \int_S \left[\left(\frac{dY}{dS} \right)^2 + \left(\frac{dZ}{dS} \right)^2 \right] ds, \quad I_{77} = t \int_S r^2 ds, \\ I_{57} &= t \int_S \left[r \left(\frac{dY}{dS} \right)^2 \right] ds, \quad I_{67} = t \int_S \left[r \left(\frac{dZ}{dS} \right)^2 \right] ds. \end{aligned} \tag{15}$$

S es el perímetro de la sección transversal; S puede ser S_0 , constante, si se hace referencia a la sección intacta, o $S_{\tilde{a}}$, dependiente de x , si la sección transversal contiene la fisura elíptica.

2.5 Tasa de liberación de energía asociada a la apertura de la fisura

La energía de deformación asociada a la viga de la Figura 1 puede expresarse como

$$U = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\xi-c} \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_0^{-1} \mathbf{Q} dx + \int_{\xi-c}^{\xi+c} \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_{\tilde{a}}^{-1} \mathbf{Q} dx + \int_{\xi+c}^L \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_0^{-1} \mathbf{Q} dx \right), \tag{16}$$

donde $\mathbf{J}_{\tilde{a}}$ y \mathbf{J}_0 son las matrices constitutivas de la sección con fisura e intacta, respectivamente. Notar que $\mathbf{J}_{\tilde{a}}$ depende de x a través de (1). Luego, despreciando las pequeñas alteraciones generadas en los esfuerzos viga debido a la presencia de la fisura, la (16) puede reformularse para dar

$$U = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\xi-c} \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_0^{-1} \mathbf{Q} dx + c \mathbf{Q}^T \Big|_{x=\xi} \int_{-1}^1 \mathbf{J}_{\lambda}^{-1} d\lambda \mathbf{Q} \Big|_{x=\xi} + \int_{\xi+c}^L \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_0^{-1} \mathbf{Q} dx \right), \tag{17}$$

donde se ha definido una variable adicional de integración $\lambda = (x - \xi)/c$.

Por el teorema de Clapeyron, el trabajo de las fuerzas externas es $V = 2 U$. La energía potencial es $\Pi = U - V$, por lo tanto $\Pi = -U$. Así, la tasa de liberación de energía asociada a la apertura de la fisura (Xie et al. 1998; Cortínez y Dotti, 2012) puede expresarse como

$$G^* = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial c} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c} \left(\int_0^{\xi-c} \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_0^{-1} \mathbf{Q} dx + \int_{\xi+c}^L \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_0^{-1} \mathbf{Q} dx \right) + \mathbf{Q}^T \Big|_{x=\xi} \int_0^1 \mathbf{J}_\lambda^{-1} d\lambda \mathbf{Q} \Big|_{x=\xi}. \quad (18)$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, la expresión anterior puede escribirse como

$$G^* = \mathbf{Q}^T \Big|_{x=\xi} \left(\int_0^1 \mathbf{J}_\lambda^{-1} d\lambda - \mathbf{J}_0^{-1} \right) \mathbf{Q} \Big|_{x=\xi}. \quad (19)$$

3 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

3.1 Elemento finito de viga de pared delgada con fisura

El elemento finito con una fisura de la Figura 2 consta de dos nodos N_1 y N_2 y siete grados de libertad por nodo (Cortínez y Rossi, 1998). Su matriz de rigidez se obtiene siguiendo el razonamiento de Darpe et al. (2004) para el caso de rotores. El elemento, de longitud L_C , se carga con fuerzas axiales P_1 y P_8 , y de corte P_2 , P_4 y P_9 , momentos flectores P_3 , P_6 , P_{12} y P_{13} , torques P_6 y P_{13} , y bimomentos P_7 y P_{14} . Por el teorema de Castigliano

$$\mathbf{w}^{(1)} = \frac{\partial (U_0 + U_C)}{\partial \mathbf{p}^{(1)}}, \quad (20)$$

donde U_0 y U_C son respectivamente las energías de deformación del elemento sin fisura y debida a la presencia de la fisura. En (20), los vectores de desplazamientos nodales $\mathbf{w}^{(1)}$ y fuerzas nodales $\mathbf{p}^{(1)}$ del nodo N_1 se han definido como

$$\mathbf{w}^{(1)} = \{u^{(1)}, v^{(1)}, \theta_z^{(1)}, w^{(1)}, \theta_y^{(1)}, \phi_x^{(1)}, \theta_x^{(1)}\}^T, \quad \mathbf{p}^{(1)} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}^T. \quad (21)$$

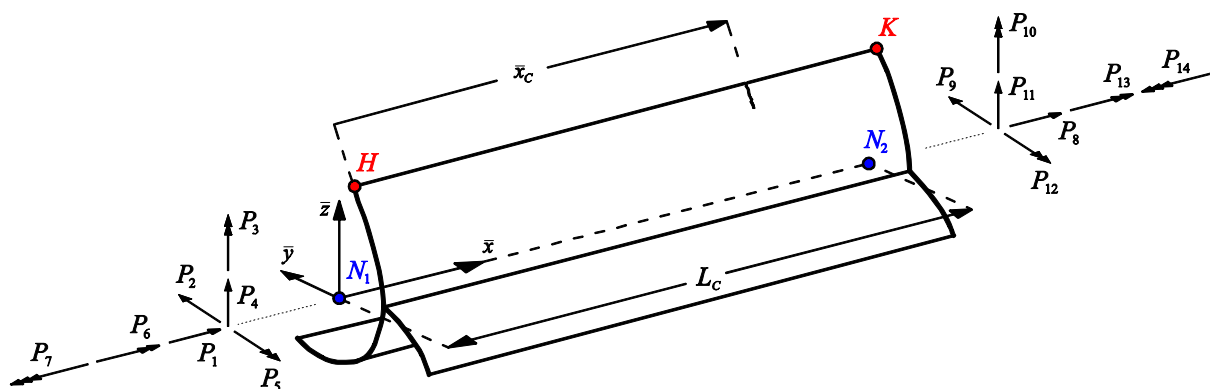


Figura 2: Elemento viga con fisura, con sus cargas aplicadas y sistema local de coordenadas.

Las fuerzas nodales pueden obtenerse en términos de los esfuerzos generalizados como

$$\begin{aligned} N &= P_1, & Q_y &= P_2, & M_z &= P_3 - \bar{x}_C P_2, & Q_z &= P_4, \\ M_y &= P_5 - \bar{x}_C P_4, & T_{sv} &= P_{6a}, & T_w &= P_{6b}, & B &= P_7 - \bar{x}_C P_{6b}, \end{aligned} \quad (22)$$

donde $P_6 = P_{6a} + P_{6b}$ ya que el torque total está dado por $M_x = T_{sv} + T_w$ (Vlasov, 1969).

La energía U_C se obtiene mediante conceptos de la mecánica de fracturas (Broek, 1984), considerando la relación $J = \pi G^*$ junto con la Ec. (19). Así

$$U_C = \int_0^a J da = \pi \int_0^a G^* da = \pi \mathbf{Q}^T \Big|_{x=\xi} \left(\int_0^1 \mathbf{J}_\lambda^{-1} d\lambda da - a \mathbf{J}_0^{-1} \right) \mathbf{Q} \Big|_{x=\xi}. \quad (23)$$

Ahora, empleando las Ecs. (26-28), y teniendo en cuenta que U_0 está dada por

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^{L_C} \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_0^{-1} \mathbf{Q} dx, \quad (24)$$

el vector de desplazamientos nodales se expresa en términos del de fuerzas nodales como

$$\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{F}_C^{(e)} \mathbf{p}^{(1)}, \quad (25)$$

donde $\mathbf{F}_C^{(e)}$ es la matriz de flexibilidad del elemento con fisura. Dado que debe cumplirse el equilibrio estático en el elemento, la matriz de rigidez del elemento es

$$\mathbf{K}_C^{(e)} = \mathbf{T}^T \left(\mathbf{F}_C^{(e)} \right)^{-1} \mathbf{T}, \quad (26)$$

donde se ha definido una matriz de transformación \mathbf{T} como

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & L_C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & L_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & L_C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Para emplear apropiadamente la matriz de rigidez $\mathbf{K}_C^{(e)}$ en el ensamblaje convencional de elementos finitos deben condensarse las columnas y filas asociadas a P_{6a} y P_{6b} .

3.2 Efecto de batimiento o *breathing*

En términos de elementos finitos, la presencia de una fisura batiente produce una matriz rigidez global variable en el tiempo. Así como se ha tratado en modelos previos (Friswell, 2007), el efecto *breathing* se simula con un esquema de rigidez bilineal: la matriz rigidez global de la viga con fisura batiente (\mathbf{K}_B) se obtiene intercambiando convenientemente las matrices de la viga intacta (\mathbf{K}_0) y de la viga con fisura abierta (\mathbf{K}_C). Esto es

$$\mathbf{K}_B = \begin{cases} \mathbf{K}_0 & \text{si } {}^t \Delta u_{HK} < 0 \\ \mathbf{K}_C & \text{si } {}^t \Delta u_{HK} \geq 0 \end{cases}. \quad (28)$$

El indicador ${}^t \Delta u_{HK}$ es la diferencia entre los desplazamientos axiales de los puntos H y K indicados en la Figura 2 (el superíndice t indica dependencia del tiempo). Así

$${}^t \Delta u_{HK} = \left({}^t u_x + u_x^0 \right) \Big|_H^K, \quad (29)$$

siendo ${}^t u_x$ y u_x^0 los desplazamientos axiales dinámicos y estáticos iniciales respectivamente, los cuales se obtienen evaluando el campo de desplazamientos (3).

El modelo bilineal presentado en (28) preserva las propiedades de dos sistemas lineales: viga con fisura completamente abierta y viga intacta. Esta forma de considerar el *breathing* es fácilmente adaptable a un esquema de elementos finitos y captura la fuente principal de no linealidad de una fisura de fatiga a un bajo costo computacional.

3.3 Ecuación de movimiento de elementos finitos

La respuesta dinámica se obtiene resolviendo la expresión general de elementos finitos

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{W}} + (\mathbf{K}_B + \mathbf{K}_G) \mathbf{W} = \mathbf{P}, \quad (30)$$

lo cual se realiza mediante una adaptación del método de Newmark para sistemas lineales, determinando \mathbf{K}_B para cada paso de tiempo según el criterio establecido en (28). En (30) se han definido además las siguientes magnitudes: \mathbf{W} , $\dot{\mathbf{W}}$, y $\ddot{\mathbf{W}}$ son los vector globales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones nodales, respectivamente; \mathbf{P} es el vector global de cargas nodales y \mathbf{M} , la matriz global de masa. La matriz la de amortiguamiento \mathbf{D} se obtiene considerando el esquema de amortiguamiento proporcional de Rayleigh.

Para considerar en la respuesta dinámica el efecto de un estado de tensiones iniciales, se realiza un cálculo estático previo para obtener la matriz de rigidez geométrica, \mathbf{K}_G . Para ello, se debe hallar el vector de desplazamientos nodales iniciales \mathbf{W}^0 del siguiente sistema

$$\mathbf{K}^0 \mathbf{W}^0 = \mathbf{P}^0, \quad (31)$$

donde \mathbf{K}^0 es la matriz global de rigidez elástica inicial y \mathbf{P}^0 es el vector global de fuerzas estáticas iniciales. Luego, conociendo los desplazamientos iniciales se pueden determinar las deformaciones y reemplazando éstas en la expresión de trabajos virtuales discretizada se obtiene la matriz de rigidez geométrica (Piovan y Cortínez, 2007).

Si no existe carga externa \mathbf{P} y se impone a la ecuación (30) un movimiento armónico de la forma $\mathbf{W} = \mathbf{W}^* \cos(\varpi_n t)$, se obtiene la siguiente expresión particular

$$(\mathbf{K}_B + \mathbf{K}_G - \varpi_n^2 \mathbf{M}) \mathbf{W}^* = \mathbf{0}, \quad (32)$$

que permite el cálculo de las frecuencias naturales de vibración ϖ_n .

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1 Generalidades

Se estudia numéricamente la influencia de las tensiones iniciales en la dinámica de una viga de pared delgada con una fisura de fatiga. Se considera una viga U como la que se muestra en la Figura 3, con dimensiones $h = 0.2$ m, $b = 0.1$ m, $t = 0.01$ m y $L = 2$ m. Salvo donde se indique, la condición de borde empleada es empotrada-libre. El material de la viga es acero al carbono, con las siguientes propiedades: módulo de elasticidad $E = 210$ GPa, módulo de corte $G = 80.76$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ y densidad $\rho = 7830$ kg/m³. Se considera un amortiguamiento de Rayleigh del 2% del crítico.

La fisura se ubica en el ala superior (Figura 3a), lo que resulta en un acoplamiento flexo-torsional del movimiento. En el análisis de vibración forzada, la ubicación y profundidad normalizadas de la fisura se fijan respectivamente en $\xi/L = 0.1$ y $a/b = 0.5$. Para el estudio de vibración natural se considera la misma ubicación, pero se emplean varias profundidades de fisura. Al estudiarse respuestas temporales cortas, se asume que no hay propagación de fisura.

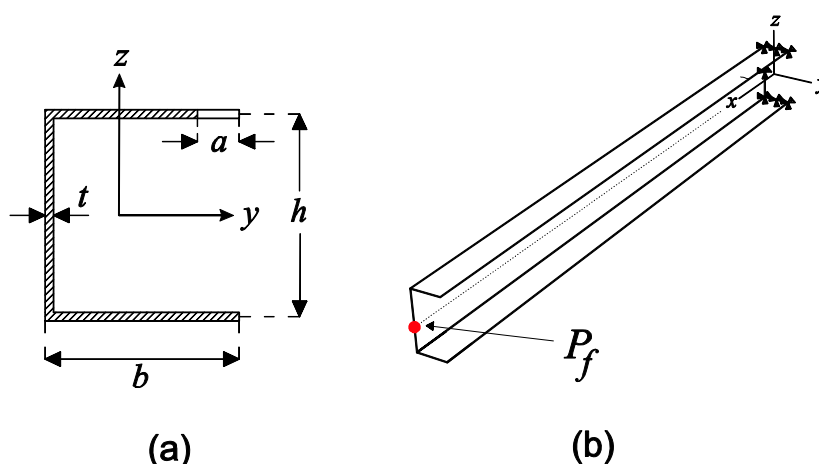


Figura 3: (a) Sección transversal estudiada con su correspondiente disposición de fisura. (b) Ubicación del punto $P_f = \{L, -b^2/(2(b+h)), 0\}$ donde se miden desplazamientos en el análisis de vibración forzada.

4.2 Nota sobre la validación del modelo viga

El modelo unidimensional utilizado en este trabajo ha sido validado en trabajos previos de los autores. Cortínez y Dotti (2012) validaron los resultados de historias temporales del modelo viga considerando fisura batiente mediante comparación con un modelo tridimensional de elementos finitos tipo cáscara, programado en ABAQUS, donde el *breathing* se trató como un problema de contacto. Por su parte, para el caso de viga intacta pero considerando tensiones iniciales, el presente modelo había sido validado previamente por Cortínez y Rossi (1998) y por Cortínez y Piovan (2002) mediante comparación con resultados experimentales de la literatura y también con modelos de elementos finitos de mayor jerarquía.

4.3 Efecto de la carga estática inicial sobre las frecuencias naturales bilineales

Se ha establecido en investigaciones previas que una viga con daño de fatiga se comporta de manera similar a un oscilador bilineal (Teich et al., 1989), por lo que sus frecuencias de resonancia se pueden obtener de forma aproximada mediante la siguiente expresión

$$\varpi_B = 2\varpi_0\varpi_C / (\varpi_0 + \varpi_C), \quad (33)$$

donde ϖ_B se conoce la frecuencia natural bilineal y ϖ_0 y ϖ_C son respectivamente las frecuencias naturales de los sub-modelos “viga con fisura abierta” y “viga intacta” (Sundermeyer y Weaver, 1995; Brandon, 1998; Friswell, 2007).

La precarga afecta la rigidez global del sistema, por lo que es de esperar que afecten también a las frecuencias de resonancia. La Figura 4 ilustra esta influencia en el valor de la primera frecuencia bilineal. Para distintas profundidades de fisura, las gráficas muestran la diferencia porcentual entre la frecuencia bilineal de la viga con fisura y la frecuencia natural de la viga intacta *versus* el parámetro de carga inicial. El hecho de observar la primera frecuencia, con el agregado de esta visualización de los resultados, permite estudiar la aptitud de las frecuencias de resonancia como indicadores de daño: la primera frecuencia es generalmente la más significativa en la identificación, y la diferencia porcentual con el caso intacto es proporcional a la aptitud del indicador en cuestión.

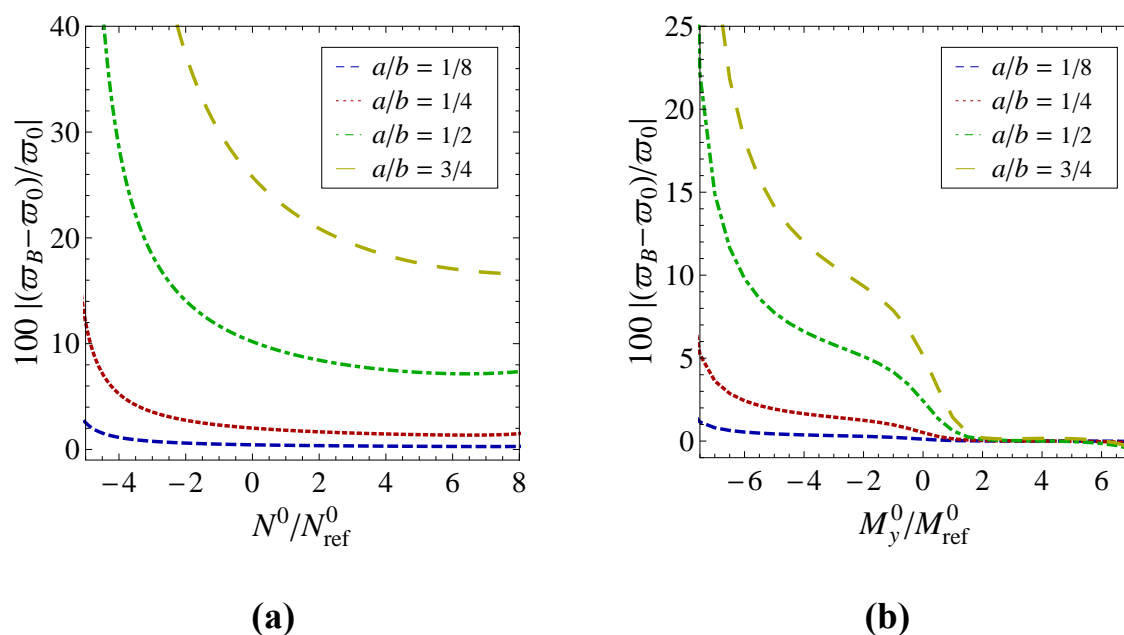


Figura 4: Diferencia porcentual entre la frecuencia bilineal de la viga con fisura y la frecuencia natural de la viga intacta vs. el parámetro de carga inicial para: (a) carga inicial axial N^0 ($N_{\text{ref}}^0 = 10^5 \text{ N}$), viga cantiléver; y (b) carga inicial flexional M_y^0 ($M_{\text{ref}}^0 = 10^5 \text{ Nm}$), viga empotrada-apoyada.

En la gráfica de la [Figura 4a](#), la carga inicial es axial (N^0). Si N^0 es compresiva (adopta valores negativos), la aptitud de la primera frecuencia como indicador de daño mejora con respecto al caso sin tensiones iniciales ($N^0 = 0$), ya que aumenta la diferencia porcentual con respecto al caso de viga intacta. Si N^0 es tractiva, las diferencias porcentuales se reducen y en consecuencia empeora la capacidad de la frecuencia bilineal como indicador.

En la gráfica de la [Figura 4b](#), la carga inicial es flexional con respecto al eje y (M_y^0). Si el momento es negativo, el ala superior (donde se encuentra la fisura, ver [Figura 3](#)) se halla bajo compresión. En este caso, se observa que la aptitud de la primera frecuencia como indicador mejora con respecto al caso sin tensiones iniciales ($M_y^0 = 0$). Para valores positivos de M_y^0 , las diferencias porcentuales se reducen drásticamente: con escasa carga inicial, los valores de la frecuencia no registran la presencia de la fisura, y en consecuencia la capacidad de la frecuencia bilineal como indicador de daño se vuelve casi nula.

Para vigas de pared delgada, isótropas y compuestas, [Cortínez y Rossi \(1998\)](#) y [Cortínez y Piovan \(2002\)](#) mostraron que cargas axiales iniciales de compresión producen flexibilización mientras que cargas axiales iniciales de tracción producen rigidización. Aquí se comprueban estos resultados, y se concluye que si la zona donde se halla la fisura se somete a una carga inicial compresiva, la flexibilización es más que proporcional con respecto al aumento en la profundidad de fisura, mejorando la aptitud de las frecuencias naturales como indicador.

4.4 Efecto de la carga estática inicial sobre la respuesta forzada estacionaria

Se estudia la estabilidad topológica del sistema empleando como parámetro la magnitud de la precarga. Para el estado dinámico estacionario obtenido mediante la Ec. (30), se presentan gráficas de amplitud vs. precarga, y se construyen diagramas de bifurcación a partir de mapas de Poincaré. Dichos mapas son obtenidos descartando un tiempo de transitorio t_d y empleando la regla de muestreo $t_n = T_f + \tau_0$, según sugiere [Moon \(2004\)](#), siendo T_f el período de carga.

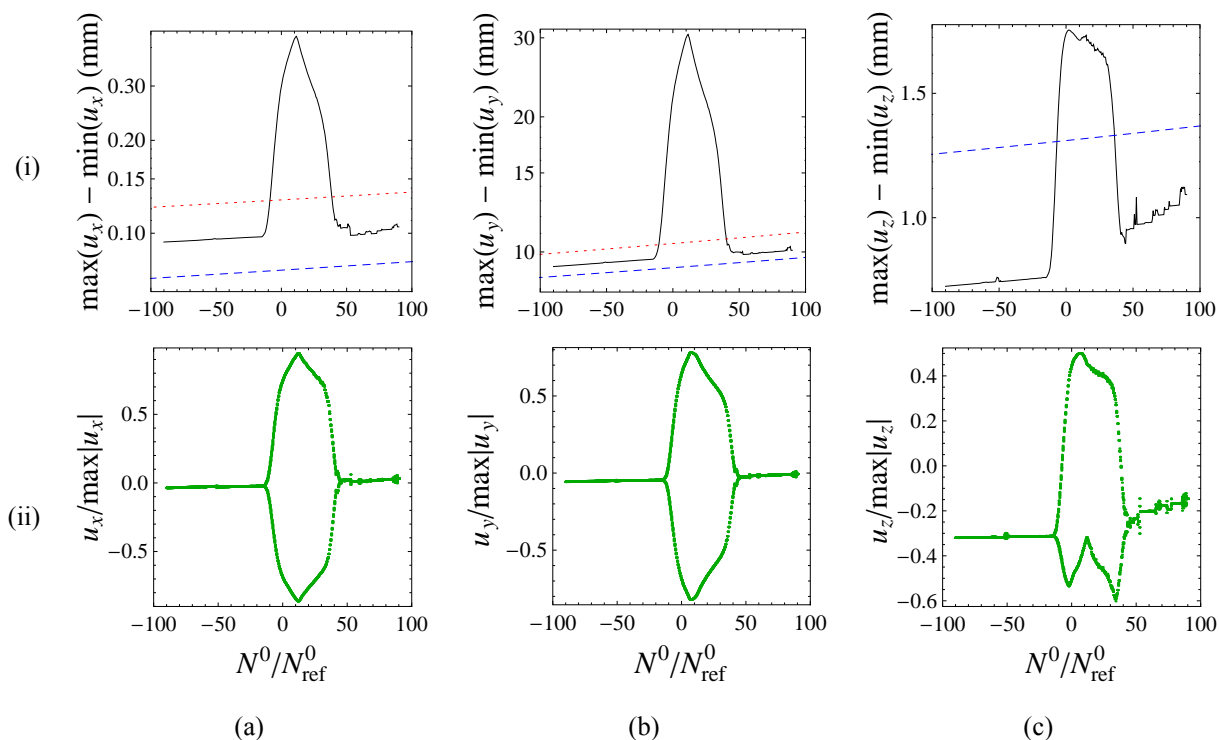


Figura 5: (i) Amplitud de desplazamiento vs. carga inicial. (ii) Diagrama de bifurcaciones. (a) u_x , $\tau_0 = 0.5 T_f$ (b) u_y , $\tau_0 = 0.5 T_f$. (c) u_z , $\tau_0 = 0$. $t_d = 2.9$ s. $N_{ref}^0 = 10^3$ kN. Carga dinámica: $Q_y(L) = 5000$ N $\sin(\omega_f t)$. Frecuencia de excitación: $\omega_f = 277.59$ s $^{-1}$ (44.18 Hz, el doble de la primera frecuencia natural bilineal del caso sin carga inicial). Referencias: (-) fisura batiente; (- -) fisura abierta; (- · -) viga intacta.

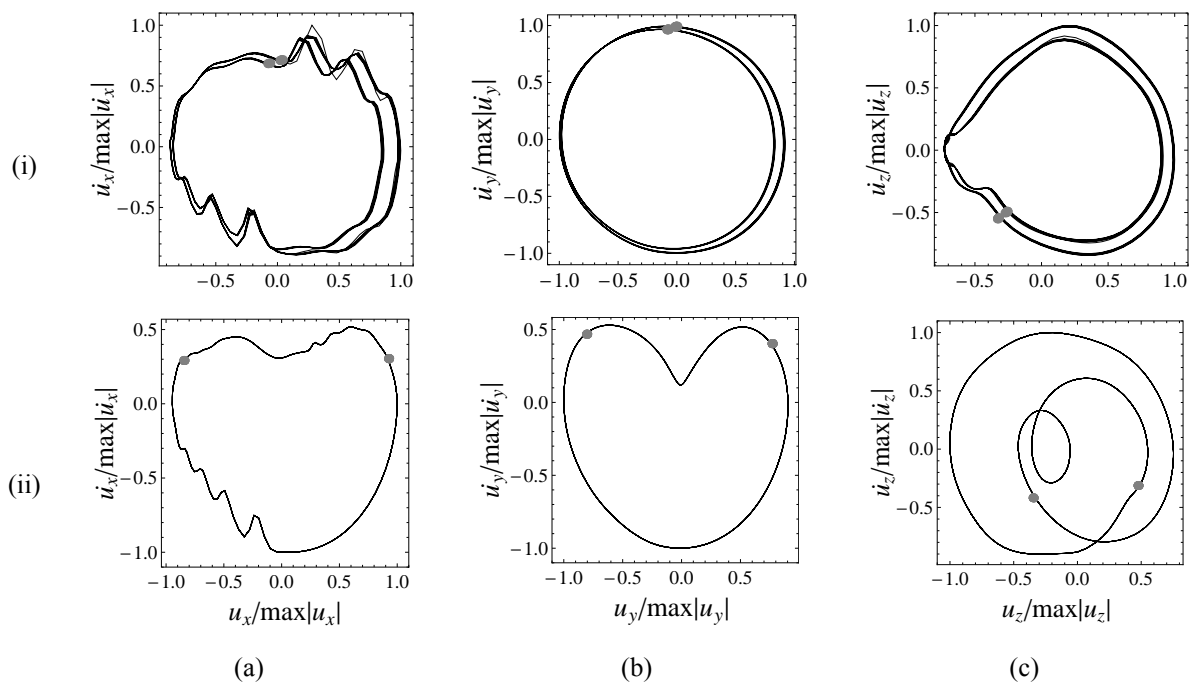


Figura 6: Orbits y mapas de Poincaré asociados a la Figura 5. (i) $N^0 = -12$ kN y (ii) $N^0 = 10$ kN. (a) u_x , (b) u_y y (c) u_z .

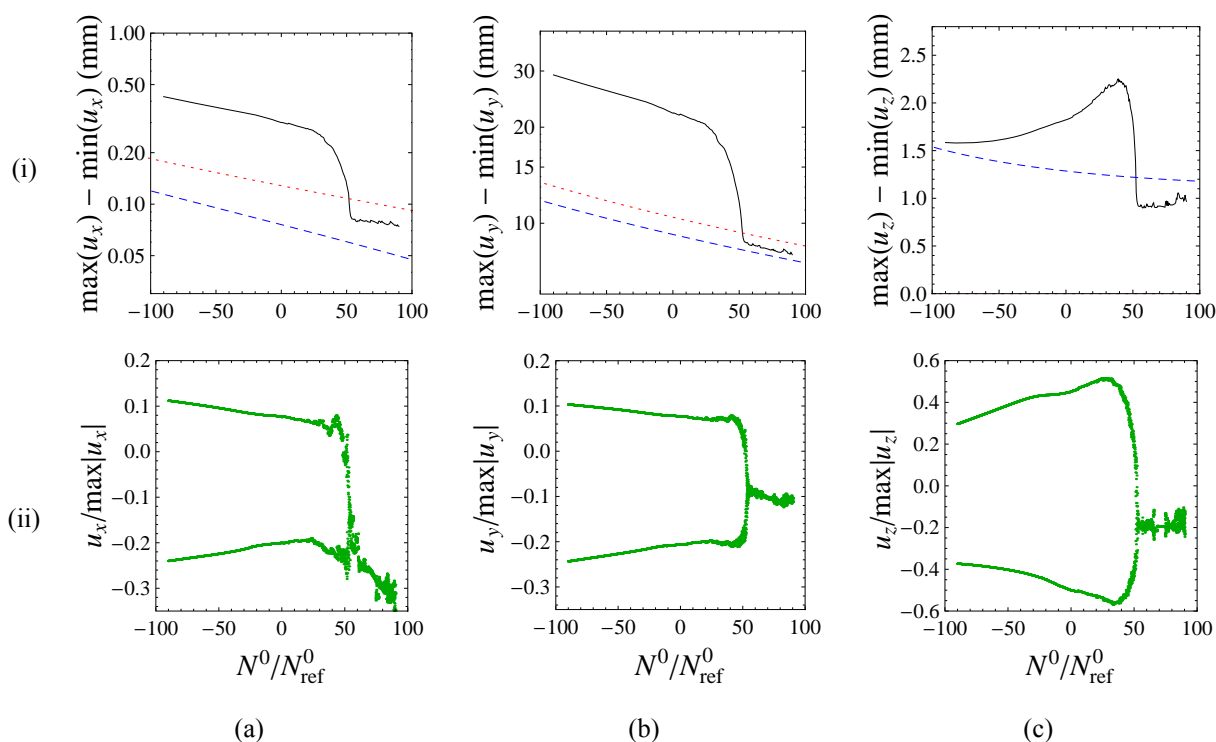


Figura 7: (i) Amplitud de desplazamiento vs. carga inicial. (ii) Diagrama de bifurcaciones. (a) u_x . (b) u_y . (c) u_z . $t_d = 2.8$ s, $\tau_0 = 0$. $N_{ref}^0 = 10^3$ kN. Carga dinámica: $Q_y(L) = 5000$ N $\sin(\varpi_f t)$. Frecuencia de excitación: El doble de la primera frecuencia natural bilineal. Referencias: (—) fisura batiente; (---) fisura abierta; (···) viga intacta.

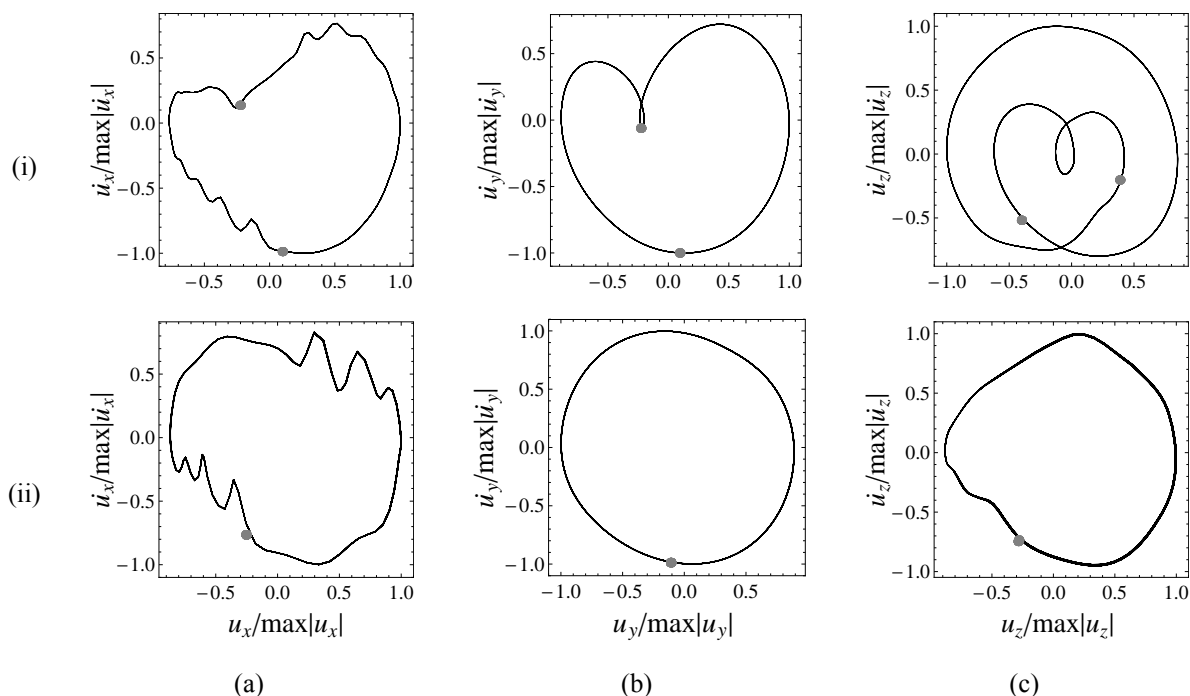


Figura 8: Orbitas y mapas de Poincaré asociados a la Figura 7. (i) $N^0 = -50$ kN y (ii) $N^0 = 80$ kN. (a) u_x , (b) u_y y (c) u_z .

Se considera una viga cantiléver, cargada en su extremo libre con una sollicitación sinusoidal de corte o axial según el caso estudiado, esto es $Q_y(L) = 5000$ N $\sin(\varpi_f t)$ ó $N(L) = 500$ kN $\sin(\varpi_f t)$, donde ϖ_f es la frecuencia de excitación.

La implementación del método de Newmark se basa en la indicada por Bathe (1996), aunque evaluando en cada paso de tiempo la expresión (29) para obtener la matriz de rigidez global \mathbf{K}_B . La robustez de este procedimiento numérico es chequeada en cada análisis. Se emplean 35 elementos y 120 cálculos por período de carga con el objeto de obtener resultados muy precisos en el plano de fase y en el diagrama de bifurcación. Se estudian desplazamientos y velocidades del punto P_f , definido en la Figura 3b.

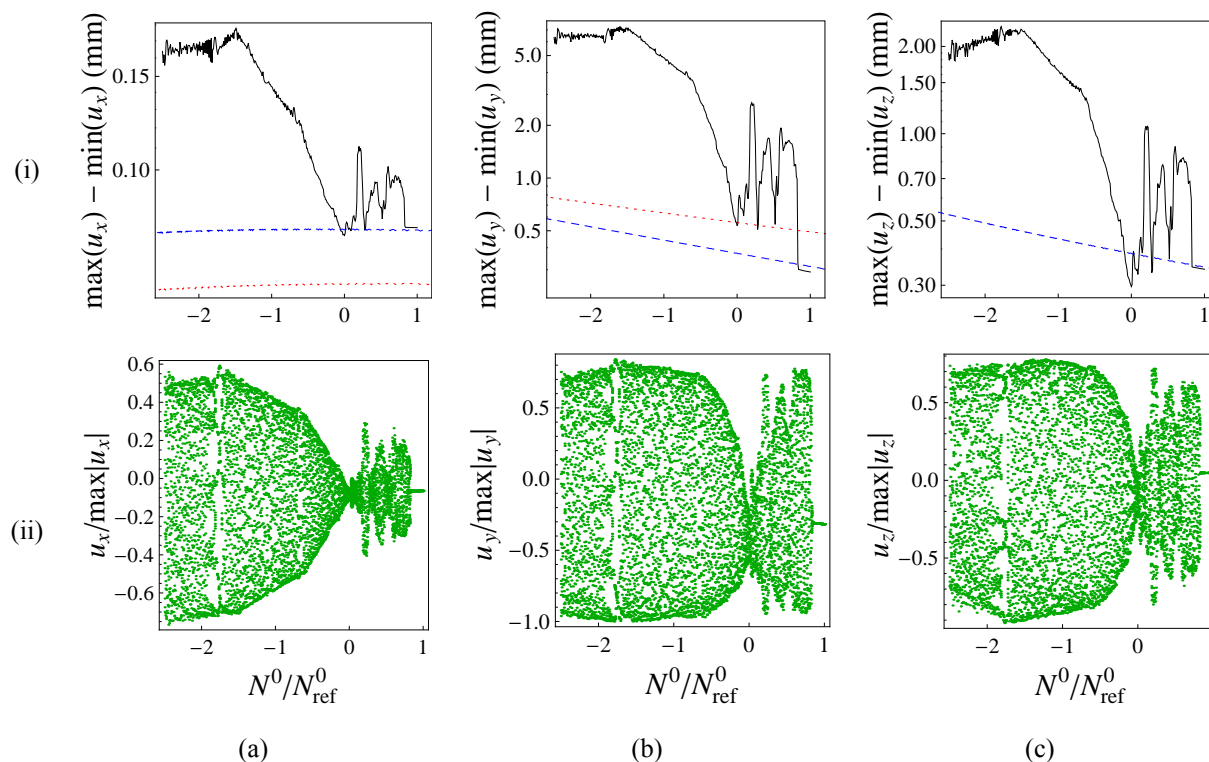


Figura 9: (i) Amplitud de desplazamiento vs. carga inicial. (ii) Diagrama de bifurcaciones. (a) u_x . (b) u_y . (c) u_z . $t_d = 3.9$ s (aproximadamente), $\tau_0 = 0$. $N_{ref}^0 = 10^5$ kN. Carga dinámica: $Q_y(L) = 5000$ N $\sin(\omega_f t)$. Frecuencia de excitación: El triple de la segunda frecuencia natural bilinear. Referencias: (-) fisura batiente; (- -) fisura abierta; (· · ·) viga intacta.

En trabajos anteriores se ha demostrado que la respuesta forzada de una viga de pared delgada fisurada puede presentar importantes diferencias si se considera o no el efecto *breathing* (Dotti, 2012; Dotti y Cortínez, 2013). Dada su naturaleza bilinear, la fisura batiente se comporta en parte como una fisura abierta y en parte como si no existiese fisura. Así, la rigidez de la viga con fisura batiente es intermedia entre las rigideces de la viga intacta y con fisura abierta. En consecuencia, es lógico pensar que la respuesta dinámica de la viga con fisura bilinear será también intermedia entre el caso de viga sin daño y el caso de fisura lineal. Y al ser menor la variación de los indicadores dinámicos (frecuencias, desplazamientos, modos) con respecto al caso intacto, se puede concluir que la identificación de los parámetros de daño se tornará más complicada con una fisura batiente que con una fisura abierta.

El razonamiento anterior es válido en un amplio rango del espectro de frecuencias de excitación, salvo para algunas frecuencias particulares donde se manifiestan las características no lineales debidas al *breathing*. Estas frecuencias particulares corresponden a las resonancias armónicas (Moon, 2004), las cuáles son una característica común de los sistemas no lineales. Siguiendo la idea de que la viga con fisura batiente es similar a un oscilador bilinear, se analiza a continuación cómo influyen las precargas en las respuestas forzadas obtenidas al excitar con múltiplos de las frecuencias naturales bilineales calculadas con la Ec. (33).

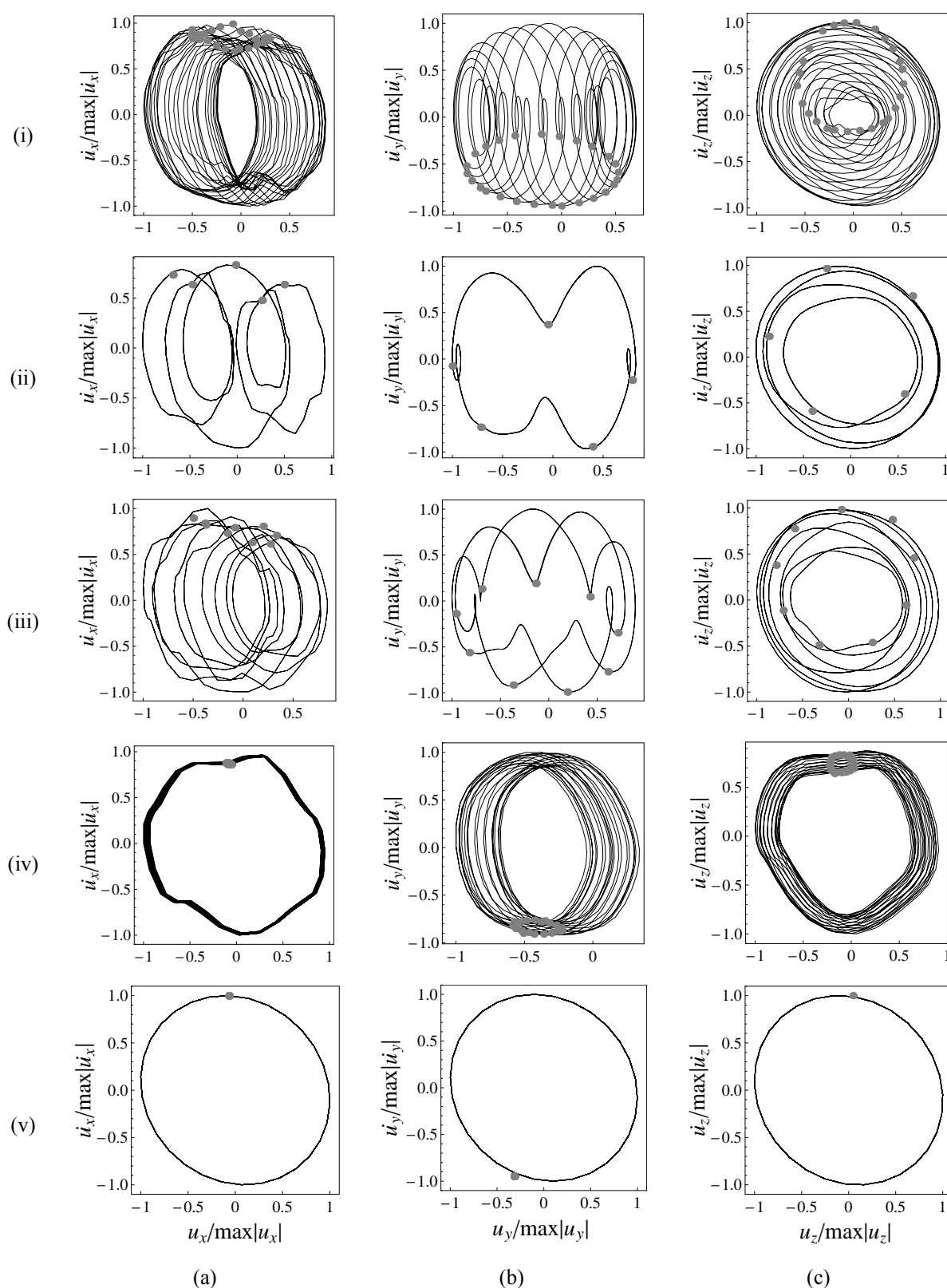


Figura 10: Orbitas y mapas de Poincaré asociados a la Figura 9. (i) $N^0 = -280$ kN, (ii) $N^0 = -181$ kN, (iii) $N^0 = -66$ kN, (iv) $N^0 = -3$ kN y (v) $N^0 = 95$ kN. (a) u_x , (b) u_y y (c) u_z .

En el primer caso de estudio (Figuras 5 y 6) se considera una frecuencia de excitación de 44.18 Hz, correspondiente al doble de la primera frecuencia natural bilineal del caso sin carga inicial. Los diagramas de bifurcación de la Figura 5ii muestran que hay un doblamiento de

período en la zona del parámetro entre aproximadamente -12 kN y 45 kN. Esto indica que en este rango de carga inicial se activa el efecto *breathing*, excitándose el superarmónico $2/1$. La resonancia se hace notoria con el aumento de amplitudes que se muestra en la Figura 5i, donde se observa además que para los restantes valores del parámetro, la respuesta es intermedia entre los casos ‘fisura abierta’ y ‘viga intacta’. Las órbitas de la Figura 6i muestran el doblamiento de período incipiente para $N^0 = -12$ kN, mientras que en la Figura 6ii se captura de manera aproximada el valor de máxima separación de los dos puntos que constituyen el mapa de Poincaré ($N^0 = 10$ kN).

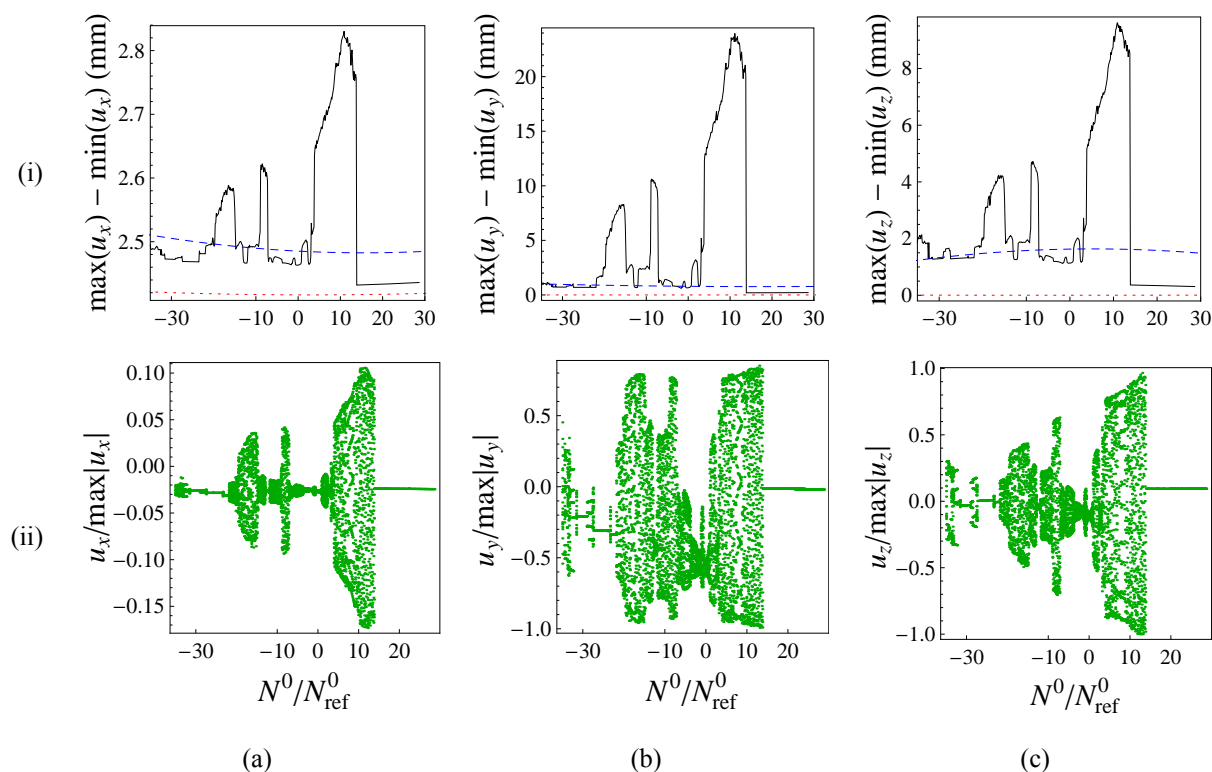


Figura 11: (i) Amplitud de desplazamiento vs. carga inicial. (ii) Diagrama de bifurcaciones. (a) u_x . (b) u_y . (c) u_z . $t_d = 4.0$ s (aproximadamente), $\tau_0 = 0$. $M_{ref}^0 = 10^3$ kNm. Carga dinámica: $N(L) = 500$ kN $\sin(\omega_f t)$. El triple de la segunda frecuencia natural bilineal. Referencias: (—) fisura batiente; (---) fisura abierta; (⋯) viga intacta.

Observemos ahora el caso de las Figuras 7 y 8. Aquí la frecuencia de excitación no es fija, sino que varía con el parámetro: la frecuencia corresponde al doble de la primera frecuencia bilineal, que se calcula para cada caso de carga. Si se hace una analogía con el ejemplo anterior (Figuras 5 y 6), es lógico pensar que el sistema se hallará siempre en resonancia superarmónica $2/1$, respondiendo con período 2. Pero los diagramas de bifurcación de la Figura 7ii indican que a partir de aproximadamente 50 kN de precarga, la respuesta pasa a período 1. Así, aunque la excitación es un múltiplo de una frecuencia bilineal, el *breathing* se desactiva y el sistema adopta un comportamiento lineal que se observa claramente en las gráficas de amplitudes de la Figura 7i. Esto muestra que, debido a la carga estática inicial, existen estados de carga para los que una viga con fisura batiente puede no comportarse como un oscilador bilineal como se sugiere habitualmente (Sundermeyer y Weaver, 1995; Friswell, 2007). La Figura 8i muestra órbitas de respuesta superarmónica $2/1$ y la Figura 8ii presenta para $N^0 = 80$ kN órbitas de período 1, en consecuencia con lo discutido anteriormente.

En las Figuras 9 y 10 el sistema se halla al borde del caos, presentando movimiento cuasi-periódico. En este caso la frecuencia de excitación también depende de N^0/N_{ref}^0 , siendo el

triple de la segunda frecuencia bilineal asociada. Según la Figura 9ii, se establece en aproximadamente 83 kN un umbral de precarga por encima del cual la respuesta pasa a ser lineal con la fisura siempre abierta. Esto se confirma en la Figura 9i (la curva negra de trazo continuo es muy cercana a la azul de trazo discontinuo para valores positivos de N^0). En la Figura 10 se identifican algunas de las respuestas obtenidas al variar el parámetro de carga estática inicial: cuasi-período (Figura 10i), período 5 (Figura 10ii), período 9 (Figura 10iii), nuevamente cuasi-período (Figura 10iv) y finalmente período 1 (Figura 10v).

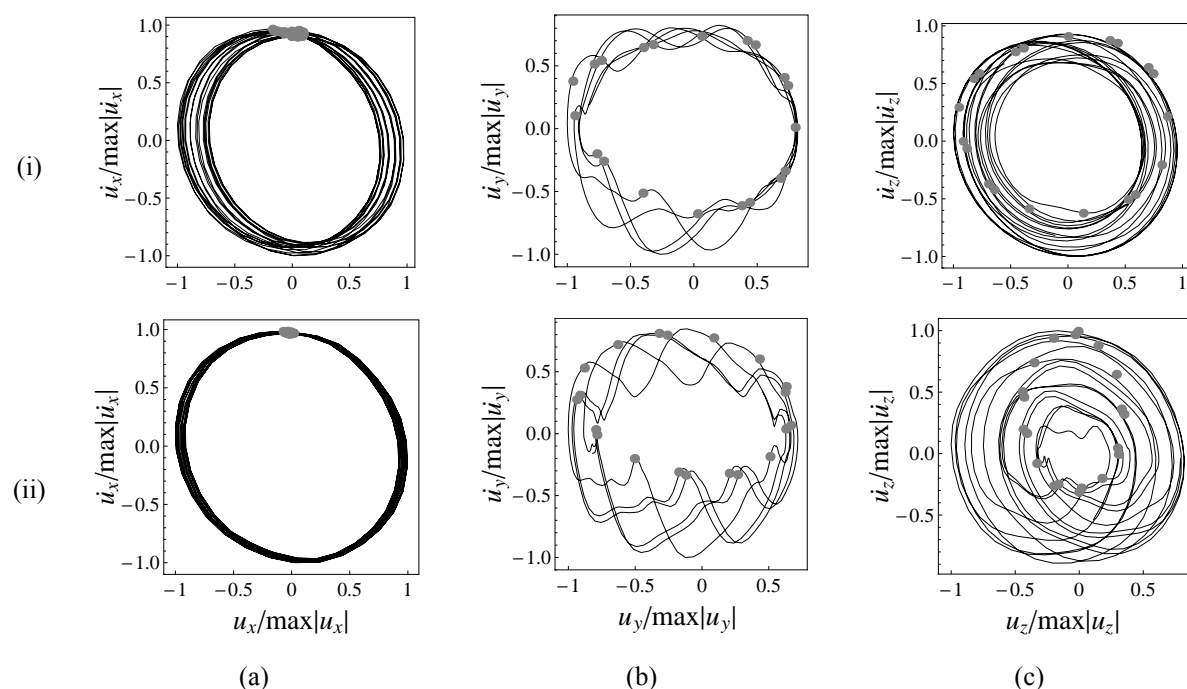


Figura 12: Orbitas y mapas de Poincaré asociados a la Figura 11. (i) $M_y^0 = 8.8 \text{ kNm}$ y (ii) $M_y^0 = -19.3 \text{ kNm}$. (a) u_x , (b) u_y y (c) u_z .

En las Figuras 11 y 12 se presenta la respuesta del sistema a una excitación sinusoidal axial, bajo un estado de carga inicial flexional M_y^0 . En la Figura 11ii se observa la existencia de un umbral de precarga (aproximadamente 14 kNm) por encima del cual el efecto *breathing* se desactiva, obteniéndose una respuesta lineal. Por debajo de dicho umbral, se evidencia el batimiento mediante una intrincada respuesta no lineal, que involucra movimientos cuasiperiódicos. La Figura 11i muestra que, físicamente, el fenómeno se observa de manera más evidente en las direcciones normales a la de aplicación de la carga dinámica: las variaciones en las amplitudes debidas al efecto no lineal son mucho mayores para los desplazamientos u_y y u_z que para u_x . La Figura 12 ilustra con ejemplos de órbitas con movimiento cuasi-periódico asociados a este caso de estudio.

5 CONCLUSIONES

Se ha estudiado la influencia de las cargas estáticas iniciales o precargas en la dinámica de vigas de pared delgada fisuradas por fatiga. En una primera parte se ha analizado el cambio en los valores de las frecuencias bilineales debido a la precarga. Es en estas frecuencias donde generalmente se considera que se produce la resonancia en vigas con fisura de fatiga. Se ha observado que si la zona donde se halla la fisura es sometida a una carga inicial compresiva, es mayor el cambio porcentual de la frecuencia bilineal fundamental con respecto a la primera frecuencia natural de la viga intacta, que si se aplican cargas tractivas en dicha zona. Además,

con cargas compresivas, la flexibilización de la estructura mostró ser más que proporcional con respecto al aumento en la profundidad de fisura, mejorando la aptitud de las frecuencias naturales como indicadores de daño.

Luego se ha estudiado la forma en que las cargas iniciales afectan la dinámica de cierre y apertura de una fisura. Para ello se ha obtenido la respuesta forzada estacionaria, parametrizando con la magnitud de la precarga. Dicha respuesta se visualiza mediante gráficas de amplitud vs. precarga, diagramas de bifurcación, órbitas y mapas de Poincaré. Se ha considerado como excitación, una frecuencia fija y múltiplos de las frecuencias bilineales correspondientes a cada estado de carga inicial.

Un resultado interesante constituye la evidencia de que el efecto *breathing* puede activarse o no dependiendo del valor del parámetro. Así, la fisura puede presentar batimiento o comportarse como una fisura abierta dependiendo de la magnitud de la carga inicial.

Al excitar con múltiplos de las frecuencias bilineales, se ha observado que, debido a la precarga, la fisura batiente puede no comportarse como un oscilador bilineal como se sugiere habitualmente. Esto se evidencia al obtener una respuesta lineal cuando se esperaría que la respuesta vibratoria sea en resonancia armónica, y por lo tanto no lineal.

El hecho de cuantificar las zonas de la respuesta no lineal de este tipo de sistemas es de gran importancia en el marco del Monitoreo de la Integridad Estructural. La dinámica no lineal derivada del *breathing* produce perturbaciones en la respuesta vibratoria, las cuáles son indicadores de alta sensibilidad para la identificación de fisuras (Tsyfansky y Beresnevich, 1998). Y se ha demostrado en este trabajo el papel preponderante que pueden jugar las cargas iniciales en esta respuesta no lineal.

Además de su aplicación natural en estructuras civiles, la presente investigación puede ser de utilidad en otros problemas interesantes de ingeniería, como el de detección de fisuras de fatiga en alas de aeronaves, donde el peso del ala constituye una carga inicial que puede influir en la activación del efecto *breathing* (Tsyfansky y Beresnevich, 2000).

6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido por el CONICET, la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.

REFERENCIAS

- Andreaus, U., Casini, P., y Vestroni, F., Non-linear dynamics of a cracked cantilever beam under harmonic excitation. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 42:566–575, 2007.
- Bathe, K.-J., *Finite element procedures*. Prentice Hall, 1996.
- Brandon, J.A., Some insights into the dynamics of defective structures. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 212(C):441–454, 1998.
- Brandon, J.A., y Abraham, O.N., Counter-intuitive quasi-periodic motion in the autonomous vibration of cracked Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 185(3):415–430, 1995.
- Broek, D., *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers, 1984.
- Caddemi, S., Calì, I., y Marletta, M., The non-linear dynamic response of the Euler–Bernoulli beam with an arbitrary number of switching cracks. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45:714–726, 2010.
- Cortínez, V.H., y Dotti, F.E., Efecto no lineal de cerramiento de fisura en vigas de pared delgada sometidas a vibraciones forzadas. *Mecánica Computacional*, 31:2231–2254, 2012.

- Cortínez, V.H., y Piovan, M.T., Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4):701–723, 2002.
- Cortínez, V.H., y Rossi, R.E., Dinámica de vigas de sección abierta de pared delgada deformables por corte sujetas a un estado inicial de tensiones. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 14(3):293–316, 1998.
- Coulter B., y Miller R., Vibration and buckling of beam-columns subjected to non-uniform axial loads. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23:1739–55, 1986.
- Darpe, A.K., Gupta, K., y Chawla, A., Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor, *Journal of Sound and Vibration*, 269:33-60, 2004.
- Dotti, F.E., *Identificación de daños en vigas de pared delgada isotropas y compuestas mediante el análisis de vibraciones*. Tesis Doctor en Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, 2012.
- Dotti, F.E., y Cortínez, V.H., Vibration of open thin-walled beams with a breathing crack. *Proceedings of the XV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, DINAME 2013*, 144 –148, 2013. Publicación electrónica.
- Friswell, M.I., Damage identification using inverse methods. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 365:393–410, 2007.
- Kisa, M, y Brandon J., The effects of closure of cracks on the dynamics of a cracked cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 238(1):1–18, 2000.
- Krawczuk, M., Coupled longitudinal and bending forced vibration of Timoshenko cantilever beam with a closing crack. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 32(2):463–482, 1994.
- Machado, S.P., y Cortínez, V.H., Free vibration of thin-walled composite beams with static initial stresses and deformations. *Engineering Structures*, 29:372–382, 2007.
- Moon, F.C., *Chaotic vibrations: An introduction for applied scientists and engineers*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2004.
- Morassi, A., y Vestroni, F., *Dynamic methods for damage detection in structures*. Springer Wien, 2008.
- Piovan, M.T., y Cortínez, V.H., Mechanics of thin-walled curved beams made of composite materials, allowing for shear deformability, *Thin-Walled Structures*, 45: 759–789, 2007.
- Shen, M.H., y Chu Y.C., Vibration of beams with a fatigue crack. *Computer & Structures*, 45(1):79–93, 1992.
- Sundermeyer, J. y Weaver, R., On crack identification by nonlinear vibration analysis. *Journal Sound and Vibration*, 183:857-872, 1995.
- Teich, M.C., Keilson, S.E. y Khanna, S.M., Models of nonlinear vibration. II Oscillator with bilinear stiffness. *Acta Otolaryngol*, 467:249-256, 1989.
- Torabi, K., y Nafar Dastgerdi, J., An analytical method for free vibration analysis of Timoshenko beam theory applied to cracked nanobeams using a nonlocal elasticity model. *Thin Solid Films*, 520:6595–6602, 2012.
- Tsyfansky, S.L., y Beresnevich V.I., Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring. *Journal of Sound and Vibration*, 213(1):159–168, 1998.
- Tsyfansky, S.L., y Beresnevich, V.I., Non-linear vibration method for detection of fatigue cracks in aircraft wings. *Journal of Sound and Vibration*, 236(1), 49–60, 2000.
- Vlasov, V., *Thin Walled Elastic Beams*, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1961.
- Xie, Y.J., Xu, H., y Li, P.N., Crack mouth energy-release rate and its application. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 29(3):195–203, 1998.