

Pràctica per millorar la comprensió del concepte de caiguda lliure dels cossos, en presència de la força de fregament, mitjançant un paracaigudes

Demonstration to improve the understanding of the concept of free fall of bodies, in the presence of the force of friction, through a parachute

José Moncho Fenollar (jfenoll2@xtec.cat) IES Institut Ribot i Serra, Sabadell.

Quan es resolen problemes físics relacionats amb la caiguda lliure, sovint es demana que s'ignori la resistència de l'aire i que s'assumeixi que l'acceleració és constant. En aquest treball, es presenta un experiment per a estudiar la caiguda dels cossos (quan els efectes del fregament amb l'aire són significatius i utilitzant un paracaigudes de joguina) i es compara amb la velocitat de caiguda lliure, sense quasi fregament. Així, un estudi detallat del problema de la caiguda lliure amb forces de fricció, pot contribuir a que els estudiants de batxillerat millorin el coneixement de la mecànica Newtoniana.

Paraules clau: massa, pes, gravetat, caiguda lliure, fricció, paracaigudisme.

When solving physics problems related to free fall, one is often asked to ignore the resistance of air and to assume acceleration is constant. This article presents an experiment to study the fall of bodies (when the effects of air friction are significant and using a toy parachute) and comparing it with the speed of free fall with very little friction. In this way, a detailed study of the problem of free fall taking into account friction forces can help high school students to improve their knowledge of Newtonian mechanics.

Key words: mass, weight, gravity, free fall, friction, parachuting.

INTRODUCCIÓ

Tots hem observat, en moltes ocasions, la caiguda d'un cos sobre la superfície de la Terra, però potser no ens hem parat a pensar com ha caigut: la velocitat amb que arriba a terra, el temps que ha trigat en arribar-hi, la influència de l'alçada des d'on se'l deixa caure, la forma del cos, del material, de si fa vent, etc. (Serra et al., 2009). Podem reflexionar, però, sobre aquesta situació. Així doncs, va ser Galileu, el qual -després de molts experiments- va afirmar: "tots els cossos cauen amb moviment uniformement accelerat, independentment de la seva massa i de la seva forma, i amb la mateixa acceleració" (l'acceleració de la gravetat de la Terra, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$).

A la vida real, aquesta afirmació no sempre és certa. Per exemple, quan deixem caure en el mateix moment, des d'una certa altura, un martell i una ploma, veurem que no arriben al terra en el mateix moment ni a la mateixa velocitat. A causa dels efectes del fregament amb l'aire, caurà el martell i després la ploma. Així doncs, perquè l'afirmació de Galileu sigui certa, caldrà fer algunes aproximacions (Serra et al., 2009): Primer, considerem negligibles els efectes de fregament a l'aire; segon, l'acceleració de la gravetat la considerarem constant. Encara que variï lleugerament d'uns punts als altres de la superfície terrestre (és a dir, disminueixi en augmentar la distància al centre de la Terra), les altures a les quals farem referència són molt petites en

comparació amb el radi de la Terra i és per això que podem fer aquesta consideració.

En conclusió, el temps que triguen a caure diferents cossos en caiguda lliure és diferent en funció de la seva forma. D'acord amb les lleis de Newton, un objecte accelerarà si les forces que actuen sobre ell no estan equilibrades. Així doncs, un objecte que cau, inicialment, guanya velocitat. En guanyar velocitat, anirà augmentant la força de resistència de l'aire, que no és més que el resultat de les col·lisions amb les molècules de l'aire que pateix qualsevol objecte que es desplaça a través d'una capa d'aire. Com més gran sigui el nombre de molècules amb que topa, major és la resistència. Conseqüentment, la resistència de l'aire dependrà de la velocitat de l'objecte que cau i de la seva superfície (la seva forma). L'objecte continuarà accelerant fins que la força de resistència de l'aire sigui prou gran com per compensar la força de gravetat (veure figura 2). En aquest moment, l'objecte seguirà caient però ho farà amb velocitat constant (velocitat límit, v_l).

OBJECTIUS

- Observar la resistència de l'aire sobre la caiguda del paracaigudes;
- Determinar com la velocitat límit (v_l) d'un cos que cau és afectada per la resistència de l'aire i la massa;
- Comprendre quina conseqüència té, als diferents moviments, la consideració de forces dissipatives;
- Estudiar la caiguda lliure considerant la força de fregament de l'aire (forces externes) aplicant les lleis de Newton;

MATERIAL

- Un paracaigudes de joguina que es pot adquirir a qualsevol tenda de joguines;
- Un cronòmetre;
- Un metre flexible o regla;
- Una balança;

FONAMENT TEÒRIC

Caiguda lliure abans de l'obertura del paracaigudes

Quan un paracaigudista es llança des de l'avió (suposant que la seva caiguda és lliure) el pes és l'única força que actua sobre ell (veure figura 1) i l'acceleració és constant (Moviment Rectilini Uniformement Accelerat,

MRUA). L'empenta de l'aire es considera menyspreable, ja que la densitat de l'aire és molt menor que la del cos. D'altra banda, considerem que el fregament del paracaigudista amb l'aire és petit. Així, les equacions de moviment de la caiguda lliure (Serra et al., 2009) seran:

$$v = v_o - g(t - t_o) \quad (1)$$

$$y = y_o + v_o (t - t_o) - \frac{1}{2} g(t - t_o)^2 \quad (2)$$

El signe negatiu per a l'acceleració g s'explica en termes del sentit cap a on actua la gravetat; prenent com a referència el punt més baix de la trajectòria (com ara terra) i distàncies positives en la direcció positiva de l'ordenada, és a dir cap a l'eix y positiu, la gravetat com una quantitat vectorial és una magnitud que sempre apunta cap avall, buscant el centre de la Terra sent això la raó del per què es fan servir valors negatius en les equacions.

on:

v_o : La velocitat inicial del cos. La seva unitat en el Sistema Internacional (S.I.) és el metre (m/s).

v : La velocitat final del cos en metre/segon (m/s).

t_o : Període inicial de temps durant el qual es produeix el moviment en segon (s).

t : Període de temps durant el qual es produeix el moviment en segon (s).

y_o : L'altura inicial des de la qual es deixa caure el cos. Es tracta d'una mesura de longitud i, per tant, es mesura en metres.

y : La posició final del cos en metres (m).

g : El valor de l'acceleració de la gravetat que, en la superfície terrestre és pot considerar igual a 9.8 m/s^2 .



Figura 1. Forces sobre el paracaigudes plegat: el pes (mg)

Caiguda lliure quan s'ha obert el paracaigudes



Figura 2. Forces sobre el paracaigudista caient: el pes (mg) i la força de fregament (F_r).

Quan obrim el paracaigudes, el paracaigudista està sotmès a l'acció del seu pes (mg) i d'una força de fregament (F_r) proporcional al quadrat de la velocitat (v) (veure figura 2).

$$ma = p + F_r \quad (3)$$

$$ma = -mg + kv^2 \quad (4)$$

on k és la constant de proporcionalitat (Coral-Campaña J.A., 2103):

$$k = \frac{\rho A \delta}{2} \quad (5)$$

on:

- ρ és la densitat de l'aire. Tot i que la densitat de l'aire varia amb l'altura, en aquest càlcul aproximat, s'utilitzarà el seu valor al nivell del mar de 1.29kg/m3.
- A és l'àrea de la secció transversal frontal exposada a l'aire.

- δ és un coeficient que depèn de la forma de l'objecte. Com el paracaigudista és menys aerodinàmic que una esfera ($\delta=0.4$), però més aerodinàmic que un disc circular ($\delta=1.2$), prenem per al coeficient de forma la mitjana dels valors donats per a aquestes dues formes, és a dir, $\delta=0.8$ (Coral-Campaña, 2103).

Quan el paracaigudista, en caiguda lliure, obre el paracaigudes, redueix bruscament la seva velocitat fins a aconseguir una velocitat límit constant v_l , que s'obté quan el pes és igual a la força de fregament, és a dir, quan l'acceleració (a) és zero. Igualant a zero l'equació (4) s'obté:

$$-mg + kv^2 = 0 \quad (6)$$

És a dir, a mesura que el cos cau, s'incrementa la velocitat, la força de fregament creix fins que s'iguali al pes. El cos es mou amb velocitat constant anomenada velocitat límit v_l . El valor de la velocitat límit és independent de la velocitat inicial del paracaigudista en el moment d'obrir el paracaigudes. Així, resolent l'equació (6) obtenim la v_l com:

$$v_l = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad (7)$$

Finalment, l'equació del moviment de la velocitat final, quan s'ha obert el paracaigudes, la podem escriure de la següent forma (Coral-Campaña J.A., 2013):

$$v^2 = v_l^2 + (v_o^2 - v_l^2) e^{\left[\frac{-2g}{v_l^2} (y_o - y) \right]} \quad (8)$$

on:

- v_o : La velocitat inicial del cos. La seva unitat en el Sistema Internacional (S.I.) és el metre/segon (m/s).
- v : La velocitat final del cos en metre/segon (m/s).
- v_l : La velocitat límit del cos segons l'equació (7) en metre/segon (m/s).
- y : La posició final del cos en metre (m).
- y_o : L'altura inicial des de la qual es deixa caure el cos. Es tracta d'una mesura de longitud i , per tant, es mesura en metres.
- g : El valor de l'acceleració de la gravetat que, a la superfície terrestre és pot considerar igual a 9.8 m/s².



PROCEDIMENT EXPERIMENTAL

Com influeix la forma en la caiguda d' un cos?

Quan es deixa anar qualsevol objecte des d'una certa altura, cau. Però, tots els cossos cauen igual? Hi ha un seguit de lleis que compleixen tots els cossos quan cauen, o cadascun ho fa de manera diferent?

Per sortir de dubtes, plantejem un experiència senzilla, utilitzant un paracaigudes de joguina, on puguem estudiar la relació que hi ha entre la forma del cos i el temps de caiguda d'un **paracaigudes plegat** (figura 1) i **desplegat** (figura 2) en una atmosfera uniforme i en presència de fregament.

1. Mesurem la massa del paracaigudes de joguina (veure figura 8) amb una balança i anotem el seu valor:

massa=_____

2. Amb un metre, mesurem el radi del paracaigudes (veure figura 7):

radi=_____

3. Muntem el dispositiu de mesura de temps de caiguda lliure, com es mostra a la figura 1. En primer lloc, agafem un cronòmetre i un metre flexible i ens situem a certa altura del terra. Com més gran sigui l'altura, millor podrem mesurar el temps. Deixem caure el paracaigudes plegat (figura 1) des de la mateixa altura, tres vegades diferents, i mesurem els temps de cada caiguda. Els anotem en una taula i després n'obtenim la mitjana:

altura des de la que s'ha deixat caure=_____

Temps 1	Temps 2	Temps 3	Temps mitjà

Figura 3. Taula de valors del temps de caiguda amb el paracaigudes plegat.

Després, amb les mesures dels temps, calculem els errors (Serra et al., 2009).

Efectuem una sèrie *n* de mesures i ordenem els valors obtinguts, des del més petit fins al més gran:

$$t_1, \dots, t_n \quad (9)$$

Calculem la mitjana aritmètica de les mesures:

$$t_m = \frac{\sum t_i}{n} \quad (10)$$

Calculem l'error particular del valor mesurat més petit i l'error particular del valor mesurat més gran, tot restant cada valor de la mitjana aritmètica (*t_m*) i agafant el valor absolut:

$$e_i = |t_i - t_m| \quad (11)$$

Prenem com a valor absolut (*e_a*) de mesura el valor màxim dels errors particulars (*e_i*) obtinguts al punt anterior:

$$e_a = \max \{e_i\} \quad (12)$$

Calculem l'error relatiu *e_r* (error en tant per cent):

$$e_r = \frac{e_a}{t_m} * 100 \quad (13)$$

El resultat de la massa serà:

$$t_m \pm e_a \text{ (unitat)}, \text{ o bé } t_m \text{ (unitat)} \pm e_r \quad (14)$$

4. Fem el mateix que al punt 3 però amb el paracaigudes desplegat (figura 2): altura des de la qual s'ha deixat caure=_____

Temps 1	Temps 2	Temps 3	Temps mitjà

Figura 4. Taula de valors del temps de caiguda amb el paracaigudes desplegat.

5. Finalment, calculem la velocitat final del paracaigudes desplegat, quan arriba al terra, segons l'equació (8).

ANÀLISIS DELS RESULTATS

- Fer la gràfica de l'altura inicial en funció del temps de caiguda del paracaigudes plegat (figura 1). Què podem concloure sobre la influència de l'altura inicial en el temps de caiguda? Estableix el tipus de relació.
- Fer la gràfica de l'altura inicial en funció del temps de caiguda del paracaigudes desplegat (figura 2). Què podem concloure sobre la influència de l'altura inicial en el temps de caiguda? Estableix el tipus de relació.
- Fer la gràfica de la velocitat final en funció del temps de caiguda del paracaigudes plegat (equació (1)). Què podem concloure sobre la influència de l'altura inicial en la velocitat final? Estableix el tipus de relació.
- Fer la gràfica de la velocitat final d'arribada al terra en funció de l'altura del paracaigudes



desplegat (equació (8)). A quina conclusió s'arriba?

- Quina és la velocitat final quan arriba el paracaigudes plegat i desplegat al terra? Fer una representació gràfica comparant les dues velocitats en funció de l'altura. A quines conclusions s'arriba?

Podem afirmar que, si tenim en compte el fregament de l'aire amb el paracaigudes, el temps que tarda qualsevol cos a caure i la velocitat de caiguda dependrà de l'altura des de la qual cau, de la forma i de la massa.

Exemple d'explicació

Deixem caure el **paracaigudes plegat** (figura 1) des de la mateixa altura ($y_0=2m$), mesurem els temps de caiguda -tres vegades- i calculem el temps mitjà.

Temps 1	Temps 2	Temps 3	Temps mitjà
0.63 s	0.64 s	0.63 s	0.63 ± 0.01 s

Figura 5. Taula de valors del temps de caiguda amb el paracaigudes desplegat des d'una altura $y_0=2m$

Amb les mesures obtingudes, calculem l'error de la mesura:

- Calculem la mitjana aritmètica de les mesures:

$$t_m = \frac{\sum ti}{n} = \frac{0.63+0.63+0.64}{3} = 0.63 \text{ s}$$

- Calculem l'error particular del valor mesura més petit (e valor petit) i l'error particular del valor més gran (e valor gran), tot restant cada valor de la mitjana aritmètica (t_m) i agafant el valor absolut:

$$e_{valor\ gran} = |t_{valor\ gran} - t_m| = |0.64 - 0.63| = 0.01 \text{ s}$$

$$e_{valor\ petit} = |t_{valor\ petit} - t_m| = |0.63 - 0.63| = 0 \text{ s}$$

- Prenem com a valor absolut (e_a) de mesura el valor màxim dels errors particulars (e), obtinguts en el punt anterior:

$$e_a = \max\{e_i\} = 0.01 \text{ s}$$

- Calculem l'error relatiu (error en tant per cent):

$$e_r = \frac{e_a}{t_m} * 100 = \frac{0.01}{0.63} * 100 = 1.60 \%$$

Per tant, la mesura final serà:

$$0.63 \pm 0.01 \text{ s, o bé } 0.63 \text{ s} \pm 1.60 \%$$

Després, calculem la velocitat final v (equació (1)) quan arriba al terra. Quan es deixa caure el paracaigudes plegat, tenim:

- $v_0 = 0m/s$, deixem caure el paracaigudes
- $t_0 = 0s$
- $g = 9.8m/s$
- $t = 0.63s$
- $v =$ l'hem de determinar

$$v = v_0 - g(t - t_0) = 0 - 9.8 * (0.63 - 0) = - 6.17 \text{ m/s}$$

El signe negatiu indica que la velocitat final, com una quantitat vectorial, està dirigida cap avall quan arriba al terra.

Deixem caure el **paracaigudes desplegat** (figura 2) des de la mateixa altura ($y_0=2m$), mesurem els temps de caiguda -tres vegades- i calculem el temps mitjà amb el seu error.

Temps 1	Temps 2	Temps 3	Temps mitjà
0.32 s	0.31 s	0.32 s	0.32 ± 0.01 s

Figura 6. Taula de valors del temps de caiguda amb el paracaigudes desplegat des d'una altura $y_0=2m$

A continuació, calculem el conjunt de variables del paracaigudes desplegat:

- Àrea del paracaigudes (figura 7): $A = 0.14 \text{ m}^2$; Si mesurem el radi (r)= $21 \text{ cm} = 0.21m$, l'àrea del paracaigudes és:

$$A = \pi r^2 = \pi * (0.21)^2 = 0.14 \text{ m}^2$$



Figura 7. Mesura del radi de l'àrea de la secció transversal frontal exposada a l'aire del paracaigudes.

- Massa del paracaigudista (veure figura 8) amb una balança: $m = 21.7 \text{ g} = 0.0217 \text{ kg}$



Figura 8. Mesura de la massa del paracaigudista amb una balança.

Ara, calculem la velocitat final amb què arriba a terra, amb el paracaigudes desplegat (veure figura 2). Les dades per calcular la velocitat límit v_l són:

Densitat de l'aire $\rho = 1.29 \text{ kg/m}^3$
 Coeficient de forma $\delta = 0.8$
 Posició inicial $y_0 = 2 \text{ m}$

On la constant de proporcionalitat k és:

$$k = \frac{\rho A \delta}{2} = \frac{1.29 * 0.14 * 0.8}{2} = 0.07$$

i la velocitat límit, v_l :

$$v_l = \sqrt{\frac{mg}{k}} = \sqrt{\frac{0.0217 * 9.8}{0.07}} = 1.74 \text{ m/s}$$

La velocitat final del paracaigudista desplegat (equació (8)) en la posició final $y=0\text{m}$, quan arriba a terra, és:

$v_f = 1.74 \text{ m/s}$
 $v_0 = 0$, deixem caure el paracaigudes
 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

$y_0 = 2 \text{ m}$, alçada del paracaigudes
 $y = 0 \text{ m}$, és el nostre origen de referència

$$v^2 = v_f^2 + (v_0^2 - v_f^2) e^{\left[\frac{-2g}{v_f^2} (y_0 - y) \right]} =$$

$$(1.74)^2 + (0^2 - (1.74)^2) e^{\left[\frac{-2 * 9.8}{(1.74)^2} (2 - 0) \right]}$$

$$v = 1.74 \text{ m/s}$$

Segons el criteri de signes la $v=1.74\text{m/s}$ seria negativa, $v=-1.74\text{m/s}$, perquè el signe negatiu indica que la velocitat final està dirigida cap avall, quan arriba al terra.

Podem observar com la velocitat final del paracaigudes desplegat ($v=-1.74\text{m/s}$) és menor que la velocitat del paracaigudes plegat ($v=-6.17 \text{ m/s}$) quan arriba a terra.

CONSIDERACIONS FINALS

En aquest treball, hem presentat un experiment simple, susceptible de ser implementat als cursos de física de batxillerat i que permet estudiar la cinemàtica de caiguda d'un cos en l'aire quan el fregament no és menyspreable. Així doncs, aquest tema, que correspon a la caiguda lliure, es desenvolupa en un ambient experimental per desenvolupar -en l'estudiant de física de batxillerat- els conceptes i aplicacions de nocions com la gravetat, el pes, la massa i les forces que actuen sobre els cossos en caure en presència d'un camp gravitacional.

BIBLIOGRAFIA

- Coral-Campaña, J.A. (2103). Modelamiento Matemático en Deportes Extremos: Skydiving. *Revista Basicamente*, 12(1), 2-15
- Serra S., Armengol M., Mercadé J. (2009). *Física 1 Batxillerat*. Editorial Mc Graw Hill.

Nota: Per trobar més informació sobre el paracaigudes, es poden consultar les següents pàgines web:

<https://ca.wikipedia.org/wiki/Paracaigudes>
<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/paracaidista/paracaidista.html>