ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 37-2 (2019), 85-106
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2603
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Una experiencia de investigación-acción para la enseñanza de la proporcionalidad compuesta

An action research experience to teach compound proportional situations

Sergio Martínez-Juste, José M. Muñoz-Escolano
Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza. Zaragoza, España.
sergiomj@unizar.es, jmescola@unizar.es

Antonio M. Oller-Marcén
Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza - IUMA. Zaragoza, España.
oller@unizar.es

RESUMEN • En este trabajo describimos y analizamos los resultados de una experiencia de enseñanza de la proporcionalidad compuesta llevada a cabo con alumnos de 1.º y 2.º de secundaria bajo el paradigma de la investigación-acción. La propuesta de enseñanza está elaborada a partir del análisis de los objetos didácticos y los problemas de la enseñanza tradicional. La experimentación se llevó a cabo durante cuatro cursos académicos, en los que se realizaron dos ciclos de investigación-acción. La amplia muestra de trabajo, con unos 120 alumnos involucrados en cada ciclo, y la variedad de instrumentos de recogida de información utilizados durante la fase de acción permiten la obtención de conclusiones sólidas sobre la viabilidad y los puntos fuertes, así como sobre los aspectos mejorables de la propuesta.

PALABRAS CLAVE: Proporcionalidad compuesta; Investigación-Acción; Razonamiento proporcional; Secundaria; Diseño de tareas.

ABSTRACT • In this paper, we describe and analyze the results of an Action-Research teaching experience concerning compound proportional situations, which involved students in 7th and 8th grades. The teaching proposal is developed according to the analysis of didactic objects and the problems of the traditional teaching practice. This piece of research had been carried out over four academic years. Two cycles of Action-Research were completed during this period. The wide sample, with about 120 students involved in each cycle, and the variety of information collection tools used during the action phase, allow us to reach strong conclusions on the feasibility, strengths and improvable aspects of the teaching proposal.

KEYWORDS: Compound proportion; Action-Research; Proportional reasoning; Secondary education; Task design.

Recepción: febrero 2018 • Aceptación: febrero 2019 • Publicación: junio 2019

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2019). Una experiencia de investigación-acción para la enseñanza de la proporcionalidad compuesta. *Enseñanza de las ciencias, 37*(2), 85-106.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2603

INTRODUCCIÓN

La importancia de las situaciones de proporcionalidad se ve reflejada en la atención que los investigadores en educación matemática le han dedicado. El llamado «razonamiento proporcional» es un concepto fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares (Lesh, Post y Behr, 1988), presente en los currículos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) de las diferentes leyes educativas españolas.

Aunque el currículo actual hace referencia de forma genérica a problemas en los que intervienen magnitudes proporcionales, existe una gran variedad de problemas y situaciones asociados a la proporcionalidad. Uno de los contenidos sobre proporcionalidad tradicionalmente introducidos a los escolares en la etapa secundaria es el de proporcionalidad compuesta (PC). La PC se corresponde con una de las tres estructuras multiplicativas señaladas por Vergnaud (1983) y ha recibido históricamente atención en textos didácticos (Guacaneme, 2002; Oller-Marcén, 2012). En la actualidad, su presencia se justifica en parte por sus aplicaciones: producción o consumo en un marco de trabajo cooperativo, costes económicos o temporales de una actividad, situaciones que involucran magnitudes de la Física y situaciones económicas que involucran interés simple (Martínez-Juste, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2015b).

La presencia de un tópico en libros de texto y su tratamiento determinan en gran medida los procesos de enseñanza tradicionales (Schubring, 1987). Shield y Dole (2013), al estudiar el tratamiento dado a la proporcionalidad en libros de texto, determinan que estos se centran en la enseñanza de técnicas diferentes para cada tipo de problemas sin conectarlos ni analizar las estructuras subyacentes. Para la PC, Martínez-Juste, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2014; 2015b) y Martínez-Juste, Muñoz-Escolano, Oller-Marcén y Ortega (2017) ponen en relieve el escaso interés de los libros de texto españoles por los aspectos conceptuales, el predominio de los problemas de valor perdido sobre otros tipos de problemas y la aplicación acrítica y automática de algoritmos para resolverlos. Fenómenos similares se producen en el tratamiento dado en vídeos didácticos on-line (Beltrán-Pellicer, Giacomone y Burgos, 2018).

La investigación en educación matemática ha realizado diferentes propuestas para abordar la enseñanza de la proporcionalidad, como las de los trabajos de Ben-Chaim, Keret e Ilany (2012) o Lamon (2012). Sin embargo, estos autores no focalizan su atención en las situaciones de PC.

Por todo ello, planteamos como objetivo del trabajo la mejora de la enseñanza de la PC a través del diseño e implementación de una propuesta de enseñanza centrada en los aspectos conceptuales de la PC y que se aleje de las técnicas algorítmicas de resolución imperantes en la enseñanza tradicional. La metodología de investigación elegida es la investigación-acción (I-A), debido, por una parte, al carácter del problema abordado y, por otra, al doble papel de uno de los autores como profesor e investigador. Más en concreto, nuestro trabajo se enmarca en la línea del diseño y desarrollo curricular, señalada por Romera (2014) como mayoritaria entre los trabajos que siguen esta metodología en Didáctica de las Ciencias.

MARCO TEÓRICO

Cramer y Post (1993) realizan un estudio de las situaciones problemáticas asociadas a la proporcionalidad simple (PS) presentando una clasificación de problemas (valor perdido, comparación numérica, predicción cualitativa y comparación cualitativa) y señalan que los estudiantes deben ser capaces de aplicar diversas estrategias de resolución para desarrollar el razonamiento proporcional. Además, sugieren fomentar las estrategias más intuitivas para los estudiantes (razón unitaria y factor de cambio), frente a otras más algorítmicas. Además, el contexto y la estructura numérica de los problemas son factores que inciden en la dificultad de las tareas y en la estrategia de resolución utilizada por los estudiantes (Steinthorsdottir, 2006).

Lamon (1993a; 1993b) estudia la influencia de la estructura semántica de los problemas en las estrategias de resolución y emplea una clasificación de estrategias correctas, similar a la de Cramer y Post (1993), a la que añade otra (*building-up*) en la que el estudiante combina razonamientos de tipo multiplicativo y aditivo. Además, Lamon (1993a) incluye una clasificación de estrategias incorrectas o no indicativas de razonamiento proporcional.

Fernández y Llinares (2012) caracterizan perfiles de razonamiento proporcional en estudiantes de diversas edades cuando resuelven problemas de valor perdido. Constatan que los alumnos de primaria tienden a razonar de forma aditiva, sean proporcionales o no las situaciones, mientras que en secundaria se invierte esta tendencia.

Valverde y Castro (2009) estudian la resolución de problemas de comparación cuantitativa en PS de maestros en formación. Además de la estrategia del cálculo y la comparación de las constantes de proporcionalidad, identifican el método de suposición de igualdad de proporciones, que consiste en reinterpretar el problema para resolverlo mediante una estrategia de valor perdido.

El tratamiento de las situaciones de PC en la investigación aparece generalmente integrado en estudios más generales centrados en la PS (Arican, 2018; Bosch, 1994; Carretero, 1989; Levain y Vergnaud, 1995; López y Figueras, 1999).

Bosch (1994) estudia el tratamiento de la PC en textos antiguos e identifica técnicas de resolución (método de las proporciones, reducción a la unidad, reducción de la regla de tres compuesta a la simple y método de causas y efectos). Además, indica que la posibilidad de dotar de significado al producto o al cociente de magnitudes influye en el éxito y en la estrategia. En este sentido, Levain y Vergnaud (1995, p. 66), tras estudiar las estructuras obtenidas mediante productos de magnitudes, argumentan que «el coeficiente de proporcionalidad constante es, por supuesto, una propiedad esencial, que debe ser conocida por los estudiantes, a pesar de las dificultades para el análisis dimensional». Estas dificultades se entrelazan con la complejidad de los procesos matemáticos que dotan de significado al producto de magnitudes (Freudenthal, 1973). Arican (2018) señala el potencial de los problemas de valor perdido de PC para la formación del profesorado de secundaria, ya que los profesores en formación suelen emplear métodos de resolución no escolares o algorítmicos en estas tareas, lo que evidencia el grado de razonamiento proporcional que poseen.

A partir de los trabajos anteriores, Martínez-Juste *et al.* (2017) proponen una generalización de la clasificación de Cramer y Post (1993) para problemas de PC en la que se tienen en cuenta las diferentes estructuras funcionales de este tipo de situaciones. En una situación de PC de tres magnitudes, A, B y C, estas se relacionan mediante una relación funcional del tipo $(A\times B)/C=k$ o $A\times B\times C=k$, siendo k constante. Así, un problema de valor perdido consiste en calcular el valor que le corresponde a una de las magnitudes, conocidos los dos valores de las otras magnitudes relacionados con el valor que se quiere calcular, y conocida una terna completa de valores relacionados. Así, los problemas de valor perdido pueden clasificarse atendiendo a la relación entre la magnitud con un valor desconocido y el resto de magnitudes. Aparecen así problemas de tipo «directa-directa» (D-D), «directa-inversa» (D-I) o «inversa-inversa» (I-I). Por otro lado, en un problema de comparación tenemos dos situaciones de PC con la misma estructura funcional y las mismas magnitudes involucradas, pero el valor de la constante de proporcionalidad es distinto en cada situación. El propósito del problema es comparar ambas constantes.

Martínez-Juste, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2015a), a partir de las resoluciones de problemas de estudiantes sin experiencia previa, proponen una clasificación de estrategias correctas e incorrectas para problemas de valor perdido en PC que generaliza la de Lamon (1993a; 1993b) y completa la de Bosch (1994). López y Figueras (1999) estudian las estrategias de resolución de problemas de comparación cualitativa, que incluye situaciones de PC, y remarcan la dificultad de categorizar las respuestas de los estudiantes.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Nuestro trabajo se enmarca en el paradigma de I-A. La idea de esta metodología, aplicada a la práctica educativa, es reflexionar sobre dicha práctica con la intención de mejorarla (McNiff, 1992). Además, se da la particularidad de que el investigador actúa también como profesor de aula, haciendo que se reduzca la división entre ambos roles.

La I-A se compone de cuatro fases: planificación, acción, observación y reflexión. En la primera se analiza el problema de investigación y se propone un plan de actuación que se lleva a cabo durante la llamada fase de acción. Durante esta fase el profesor-investigador recoge información sobre el proceso mediante diferentes instrumentos. Esta información se recopila, organiza y trata durante la fase de observación. Finalmente, en la fase de reflexión se analizan y valoran los datos para extraer conclusiones y tomar decisiones para mejorar el proceso. Las fases se suceden cíclicamente; así, las conclusiones obtenidas en la fase de reflexión de un ciclo sirven de punto de partida para planificar el siguiente (Elliot, 1990).

Pese a que el establecimiento de redes de I-A se ha demostrado útil para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje en otros países, la producción científica basada en la I-A dentro de la didáctica de las matemáticas y de las ciencias es baja en España (Romera, 2012, 2014). Pese a ello, encontramos experiencias de I-A en diferentes niveles educativos y sobre diversos temas de didáctica de las matemáticas (Climent y Carrillo, 2003; Escolano, 2007; Novo, Alsina, Marbán y Berciano, 2017; Oller-Marcén, 2012).

La experimentación en la que se basa este artículo se llevó a cabo durante cuatro cursos académicos, en los que se realizaron dos ciclos de I-A. Dentro de una propuesta curricular diseñada para desarrollar la proporcionalidad aritmética en 1.º y 2.º de ESO (Martínez-Juste, Muñoz-Escolano, Oller-Marcén y Pecharromán, 2014), la PC ocupó, en cada ciclo, una sesión de 50 minutos en 1.º de ESO y dos sesiones de 50 minutos en 2.º de ESO. Además, se dedicó parte de otras sesiones a la PC, para corregir tareas encomendadas, en las sesiones de repaso y en la prueba escrita.

Fig. 1. Estructura de la I-A e influencia entre ciclos.

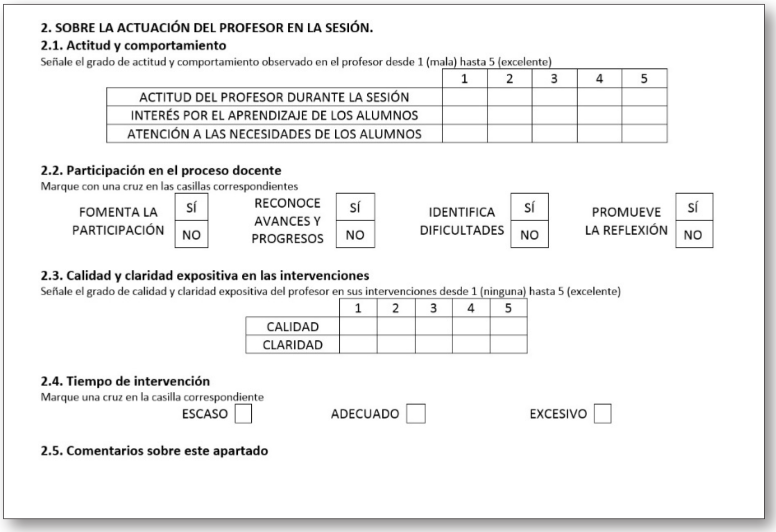
La fase de acción (véase figura 1) tuvo lugar en el IES Leonardo de Chabacier (Calatayud, Zaragoza). El primer ciclo se desarrolló durante los cursos 2013/2014 y 2014/2015 (para 1.º y 2.º de ESO respectivamente) y el segundo durante 2015/2016 y 2016/2017 (para 1.º y 2.º de ESO respectivamente). En la tabla 1 se recoge la información relativa a los tamaños muestrales. El mayor tamaño de la muestra en 1.º de ESO permitió que en el curso siguiente la mayor parte de los alumnos hubieran recibido instrucción según nuestra propuesta. En el primer ciclo, de los 20 alumnos de 2.º de ESO, 16 habían recibido la propuesta en 1.º, 3 eran alumnos repetidores de 2.º y 1 alumno provenía del grupo de control. En el segundo ciclo, de los 20 alumnos de 2.º de ESO, 19 habían recibido la propuesta en 1.º y 1 alumno provenía del grupo de control.

Tabla 1.
Muestra y grupo de control por curso y ciclo de I-A

		Muestra	*Grupo de control*
Primer ciclo	1.º de ESO	61	21
	2.º de ESO	20	19
Segundo ciclo	1.º de ESO	58	17
	2.º de ESO	20	20

Se establecieron dos mecanismos de control para el seguimiento exhaustivo de la implementación del diseño, de la actividad de los alumnos y de las actuaciones del profesor: el diario de clase y la grabación en vídeo de las sesiones. En el diario se registraba información sobre la ejecución de la sesión según lo planificado, la actitud y el desempeño de los alumnos y la valoración de la sesión y toma de decisiones, utilizando los indicadores de Escolano (2007) y Oller-Marcén (2012).

Por otra parte, se contactó con tres doctores en Didáctica de las Matemáticas ajenos a la investigación para que observaran las grabaciones en vídeo y completaran un protocolo de observación en el que informaban sobre cuatro aspectos: el tratamiento y la metodología de cada sesión, la actuación del profesor-investigador, la actuación de los alumnos y la interacción profesor-alumno. Para cada uno de estos aspectos se proporcionaban una serie de indicadores adaptados de Porres (2011). En la figura 2, se muestran los relativos a la actuación del profesor-investigador. Además, para efectuar su labor de manera informada, los observadores disponían de un dosier con información relativa al diseño curricular de las sesiones (objetivos, contenidos, esquema de sesión y tareas).


2. SOBRE LA ACTUACIÓN DEL PROFESOR EN LA SESIÓN.

2.1. Actitud y comportamiento

Señale el grado de actitud y comportamiento observado en el profesor desde 1 (mala) hasta 5 (excelente)

	1	2	3	4	5
ACTITUD DEL PROFESOR DURANTE LA SESIÓN					
INTERÉS POR EL APRENDIZAJE DE LOS ALUMNOS					
ATENCIÓN A LAS NECESIDADES DE LOS ALUMNOS					

2.2. Participación en el proceso docente

Marque con una cruz en las casillas correspondientes

FOMENTA LA PARTICIPACIÓN SÍ NO
RECONOCE AVANCES Y PROGRESOS SÍ NO
IDENTIFICA DIFICULTADES SÍ NO
PROMUEVE LA REFLEXIÓN SÍ NO

2.3. Calidad y claridad expositiva en las intervenciones

Señale el grado de calidad y claridad expositiva del profesor en sus intervenciones desde 1 (ninguna) hasta 5 (excelente)

	1	2	3	4	5
CALIDAD					
CLARIDAD					

2.4. Tiempo de intervención

Marque una cruz en la casilla correspondiente

ESCASO ADECUADO EXCESIVO

2.5. Comentarios sobre este apartado

Fig. 2. Indicadores del protocolo de observación relativos a la actuación del profesor.

Para analizar la actuación de los alumnos y la consecución de los objetivos de aprendizaje, se escanearon las producciones escritas de los alumnos (un total de 1122 producciones diferentes en PC). La resolución de las tareas se recogía antes de la institucionalización, para que la puesta en común no se viera reflejada en las producciones escritas. Asimismo, se escanearon las pruebas escritas tanto de los grupos de I-A como del grupo de control. Por otro lado, durante el segundo ciclo, se realizaron ocho entrevistas semiestructuradas (cuatro en cada curso) con alumnos del grupo de I-A con distintos niveles de rendimiento para aclarar aspectos que pudieran no quedar claros en las producciones escritas. Tres de los alumnos entrevistados coinciden en ambos cursos.

Las producciones de los alumnos se analizan cuantitativa y cualitativamente. En el análisis cuantitativo se establece un sistema de categorías en dos niveles. El primero es común a todos los problemas y en él únicamente se clasifican las respuestas según su corrección. El segundo es específico del tipo de problema y tiene en cuenta el método de resolución empleado.

Para el nivel común, se han considerado las siguientes categorías: N (no entregado), B (ejercicio en blanco), I (respuesta incorrecta) y C (respuesta correcta).

En los problemas de valor perdido (véase tabla 2) se adaptan las categorías de estrategias correctas e incorrectas para PS y PC de Lamon (1993a; 1993b) y Bosch (1994), previamente utilizadas por Martínez-Juste *et al*. (2015a), a las que se ha añadido la categoría VP4 ante la previsible falta de argumentación de algunos alumnos y la sutil diferencia existente entre considerar el resultado de una operación entre magnitudes como la cantidad de una magnitud que se corresponde con una unidad de la otra, y considerar el resultado como la cantidad correspondiente a una nueva magnitud intensiva.

Tabla 2.
Categorías para el análisis de los métodos de resolución de problemas de valor perdido de PC

Código	*Estrategia*	*Código*	*Estrategia*
VP0	Sin razonamiento	VP6	Proporciones
VP1	Construcción de patrones	VP7	Uso de una fórmula
VP2	Amalgamación de magnitudes	VP8	Operaciones sin sentido
VP3	Paso a paso pasando por la unidad	VP9	Razonamientos aditivos erróneos
VP4	Se mezclan las estrategias correspondientes a VP2 y VP3	VP10	Trabajo con las magnitudes independientes por separado
VP5	Paso a paso sin pasar por la unidad	VP11	Omisión de una de las magnitudes independientes

A partir de las estrategias correctas de resolución para problemas de comparación en PS señaladas por Cramer y Post (1993) y Valverde y Castro (2009), y las estrategias incorrectas de resolución descritas por Lamon (1993a) y Fernández y Llinares (2012), se establece un sistema de categorías para el análisis de los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de PC (véase tabla 3).

Tabla 3.
Categorías de análisis para los métodos de resolución de problemas de comparación

Código	*Estrategia*	*Código*	*Estrategia*
C0	Sin razonamiento	C4	Operaciones sin sentido
C1	Cálculo de las constantes de proporcionalidad mediante amalgamación	C5	Razonamientos aditivos erróneos
C2	Cálculo de las constantes de proporcionalidad mediante otros procedimientos	C6	Omisión de alguna magnitud
C3	Se resuelve un problema de valor perdido		

Las categorías VP1 a VP7 y C1 a C3 corresponden a estrategias potencialmente correctas (aunque puedan corresponder a respuestas incorrectas debido a una mala aplicación del método), mientras que las categorías VP8 a VP11 y C4 a C6 corresponden a estrategias incorrectas.

Finalmente, para los problemas de comparación cualitativa, dada la diversidad de argumentaciones y la complejidad de clasificarlas (López y Figueras, 1999), se optó por realizar el análisis cuantitativo general y un análisis cualitativo de las respuestas.

DESARROLLO DEL PRIMER CICLO DE INVESTIGACIÓN-ACCIÓN

Fase de planificación

Desde un punto de vista conceptual, la propuesta se basa en considerar la relación entre parejas de magnitudes involucradas, estudiando la posibilidad de dotar de significado al producto o al cociente de la pareja de magnitudes considerada.

Además, se amplía la tipología de problemas de PC que tradicionalmente se presentan a los alumnos, trabajando no solo problemas de valor perdido, sino también de comparación cuantitativa y cualitativa.

En las situaciones de PC entre tres o más magnitudes siempre es posible aplicar técnicas para la PS detectando las relaciones que unen cada pareja de magnitudes. Una posibilidad es «amalgamar» todas las magnitudes menos una, creando una nueva magnitud mediante cocientes y productos de magnitudes, de forma que podamos traducir la situación de PC a una de PS.

Para los problemas de valor perdido en PS, proponemos la resolución en dos etapas multiplicativas recurriendo a los conceptos de razón y de constante de proporcionalidad (Oller-Marcén, 2012). Los problemas de comparación cuantitativa se abordarán mediante la obtención de la constante de proporcionalidad de la situación considerada obtenida a partir de un proceso de amalgamación y construcción de la razón o constante de proporcionalidad inversa final mediante el procedimiento explicado anteriormente. Este modo de abordar los problemas de proporcionalidad enfatiza aspectos conceptuales como la covariación, el pensamiento relativo o las operaciones entre magnitudes, sobre los meramente algorítmicos.

En las sesiones de clase predominan el trabajo autónomo de los alumnos y las puestas en común de los resultados. Las intervenciones del profesor-investigador se reducen a resolver las dudas durante el trabajo, dirigir los debates y pequeños momentos de institucionalización. Las actividades que dirigen el trabajo autónomo de los alumnos son de tres tipos: situaciones introductorias (SI), actividades para trabajar en parejas (TP) y actividades individuales que se realizan fuera del horario lectivo (TC). Durante las SI los alumnos abordan situaciones problemáticas sin haber recibido institucionalización previa al respecto. A partir de las ideas que surgen de la SI se institucionaliza la estrategia de amalgamación y se refuerzan y afianzan los contenidos mediante la realización de actividades de aula y tareas para casa. Al final de la propuesta se realizan actividades de repaso (RE) y una prueba escrita individual (PE).

Todos los problemas introducidos tienen un contexto realista (Díaz y Poblete, 2001). Además, los datos y la constante de proporcionalidad suelen ser enteros para favorecer el trabajo entre las diferentes magnitudes y la interpretación de las cantidades obtenidas a partir de las relaciones multiplicativas como cantidades de una nueva magnitud (Steinthorsdottir, 2006).

En la tabla 4 se presenta la tipología de los problemas propuestos a los alumnos a lo largo de la propuesta.[1]

1. La codificación de las actividades indica, en primer lugar, el ciclo y el curso en el que se realizó, y el tipo de actividad durante la que se realizaron.

Tabla 4.
Tipología de las tareas planteadas durante la propuesta

	Propuesta en 1.º de ESO	*Propuesta en 2.º de ESO*
Valor perdido D-D	1.1.SI, 1.1.TP1, 1.1.TP4, 1.1.TC1, 1.1.R1, 1.1.PE1	1.2.SI, 1.2.TC1, 1.2.PE1
Valor perdido D-I		1.2.TC2
Valor perdido I-I		1.2.TP1, 1.2.TP6
Valor perdido D-D-I		1.2.TP5
Valor perdido I-I-I		1.2.R1
Comparación cuantitativa $(A\times B)/C$	1.1.TP2, 1.1.TC2	1.2.TP2, 1.2.TP4
Comparación cuantitativa $A\times B\times C$		1.2.TC3, 1.2.PE3
Comparación cualitativa		1.2.TP3
Sin relación proporcional	1.1.TP3, 1.1.PE2	1.2.PE2

Para la propuesta en 1.º de ESO, se dedica a la PC una sesión exclusiva y parte de la sesión de repaso y de la prueba escrita. La estructura funcional de todos los problemas es un cociente del tipo $(A\times B)/C$. En los problemas de valor perdido se colocó la variable dependiente en la magnitud C para obtener problemas de tipo D-D, pues la secuencia para 1.º de ESO no aborda la proporcionalidad inversa. Los problemas se secuencian según la dificultad para dotar de significado al producto $A\times B$, siguiendo una secuencia similar a la planteada por Martínez-Juste *et al.* (2015a).

En 2.º de ESO se dedican dos sesiones completas a la PC, parte de la sesión de repaso y una actividad en la prueba escrita. La tipología de problemas se amplía, incluyendo incluso problemas con 4 magnitudes.

Fases de acción y observación

La fase acción se ajustó a la planificación inicial con dos excepciones. Por falta de tiempo no se entregaron los problemas 1.1.TP3 y 1.1.TP4 y no se analizó la información relativa al problema 1.2.R1 al no estar presente el profesor-investigador durante la sesión.

Tras la acción se analizaron los datos recogidos. A continuación, mostramos el análisis de las producciones de los alumnos y en la fase de reflexión incorporaremos las conclusiones que se extraen del resto de fuentes. El análisis cuantitativo de las categorías comunes para los problemas trabajados en este primer ciclo puede consultarse en las tablas 5 y 6.

Tabla 5.
Resultados porcentuales de las tareas
de 1.º de ESO del primer ciclo en las categorías generales

	1.1.SI	1.1.TP1	1.1.TP2	1.1.TC1	1.1.TC2	1.1.R1	1.1.PE1	1.1.PE2
N				43,1	43,1			
B	12,9	6,5	6,5	10,8	12,3	35,5	15,4	6,2
I	32,3	9,7	25,8	7,7	12,3	6,5	18,5	26,2
C	54,8	83,9	67,7	38,5	32,3	58,1	66,2	67,7

Tabla 6.
Resultados porcentuales de las tareas de 2.º de ESO del primer ciclo en las categorías generales

	1.2. SI	1.2. TP1	1.2. TP2	1.2. TC1	1.2. TC2	1.2. TC3	1.2. TP3	1.2. TP4	1.2. TP5	1.2. TP6	1.2. PE1	1.2.P E2	1.2. PE3
N				15	15	15					10	10	10
B		10	20	5	20				10	10	5		10
I	10	20	10	15	15	10	60		40	10	10	30	20
C	90	70	70	65	50	75	40	100	50	80	75	60	60

Durante 1.º de ESO el porcentaje de alumnos que no realizaron las tareas de casa (1.1.TC1 y 1.1.TC2) fue alto. Este porcentaje se redujo considerablemente en 2.º de ESO (1.2.TC1). Si solo tenemos en cuenta los alumnos que entregaron cada ejercicio, vemos que la mayoría de los problemas tienen una tasa de éxito superior al 65 %. Solo el problema 1.2.TP3 (único de comparación cualitativa de PC) tiene menor porcentaje de respuestas correctas que incorrectas.

Para el siguiente nivel de análisis, no se tienen en cuenta las producciones correspondientes a las categorías N y B (no entregados y en blanco).

En la tabla 7 se recogen los porcentajes de aparición de cada una de las estrategias consideradas para los problemas de valor perdido.

Tabla 7.
Aparición de los métodos de resolución en problemas de valor perdido en el primer ciclo

	1.1. SI	1.1. TP1	1.1. TC1	1.1. R1	1.1. PE1	1.2. SI	1.2. TP1	1.2. TC1	1.2. TC2	1.2. TP5	1.2. TP6	1.2. PE1
VP0			1,5	3,2		10			5			
VP2	32,8	77,4	4,6	54,8	50,8	80	50	55	15	80	10	60
VP3	25,8	6,5	30,8	6,5	12,3		10	5	25		70	15
VP4	12,9	3,2	1,5		3,1		10	5				5
VP6								5	5			
VP8	16,1	6,5	6,2		15,4	10	20	10	5	10	10	
VP11			1,5		3,1				10			5

El porcentaje de respuestas que usan algún procedimiento potencialmente correcto (VP2, VP3, VP4 y VP6) es mayoritario (generalmente superior al 70 %), siendo anecdótica la aparición de VP4 y VP6. Solo un alumno de 2.º de ESO realizó dos problemas usando el método de proporciones. Los métodos más utilizados son VP2, método institucionalizado, y VP3, cuya presencia es significativa en algunos problemas. En la figura 3, mostramos un ejemplo de cada uno.

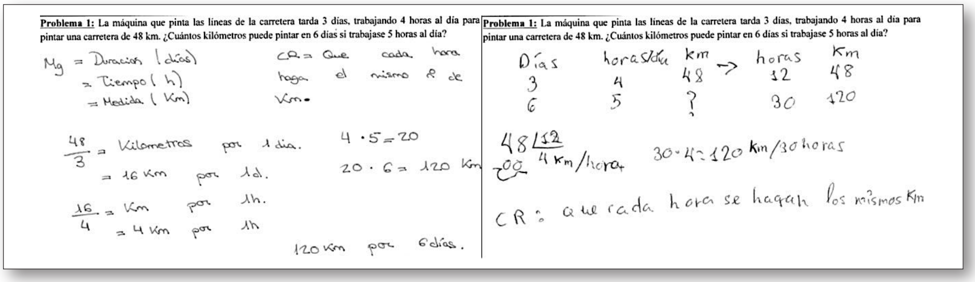


Fig. 3. Método VP3, paso a paso pasando por la unidad, (i) y VP2, amalgamación, (d) para resolver 1.1.TP1.

En cuanto a las estrategias erróneas solo encontramos las correspondientes a VP8 y VP11, con un claro predominio de la primera. En la figura 4, se muestra un ejemplo que ilustra esta última categoría.

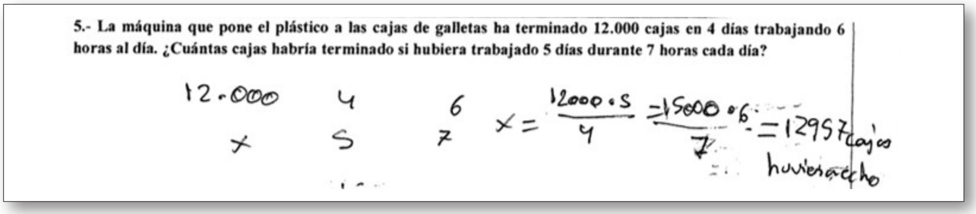


Fig. 4. Omisión de una magnitud, VP11, y uso de una fórmula, VP7, para la resolución de 1.2.PE1.

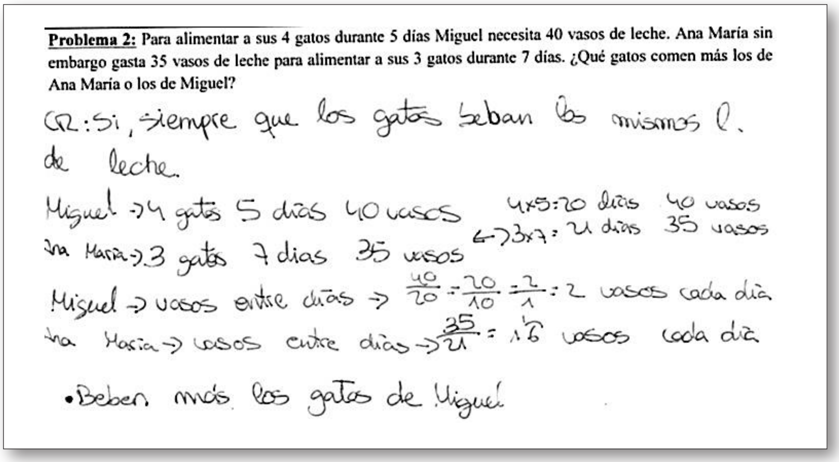
En la tabla 8 se recogen los porcentajes de aparición de cada una de las estrategias consideradas para los problemas de comparación cuantitativa.

Tabla 8.
Aparición de los métodos de resolución
en problemas de comparación en el primer ciclo

	1.1.TP2	1.1.TC2	1.2.TP2	1.2.TC3	1.2.TP4	1.2.PE3
C0	6,5	1,5		5		
C1	29,0	6,2	5	30	40	80
C2	48,4	29,2	75	40	60	
C4	6,5	1,5		10		
C6	3,2	6,2				

Volvemos a constatar el amplio uso de estrategias potencialmente correctas. En todos los casos se resuelve calculando las constantes de proporcionalidad y comparándolas, bien sea amalgamando previamente o no (C1, C2).

La estrategia de amalgamación (VP2) aparece de forma clara en muchas producciones, especialmente cuando las magnitudes amalgamadas son inversamente proporcionales y, por tanto, la nueva magnitud se obtiene como producto de las dos originales. En la figura 5 puede verse un ejemplo típico de amalgamación por producto.


Problema 2: Para alimentar a sus 4 gatos durante 5 días Miguel necesita 40 vasos de leche. Ana María sin embargo gasta 35 vasos de leche para alimentar a sus 3 gatos durante 7 días. ¿Qué gatos comen más los de Ana María o los de Miguel?

CR: Si, siempre que los gatos beban los mismos l. de leche.

Miguel → 4 gatos 5 días 40 vasos 4x5=20 días 40 vasos

Ana María → 3 gatos 7 dias 35 vasos 3x7= 21 días 35 vasos

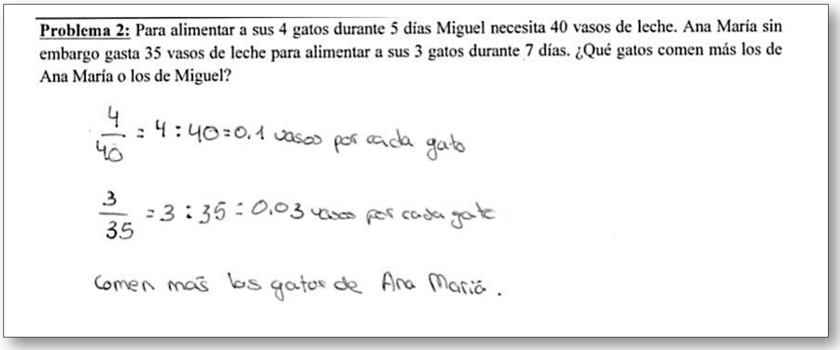
Miguel → vasos entre días → $\frac{40}{20} = \frac{20}{10} = \frac{2}{1} = 2$ vasos cada día

Ana María → vasos entre días → $\frac{35}{21} = 1'6$ vasos cada día

• Beben más los gatos de Miguel

Fig. 5. Ejemplo de estrategia VP2, amalgamación, en la resolución de 1.1.TP2.

En cuanto a las estrategias incorrectas, no aparecen razonamientos aditivos erróneos (C5) y sí lo hacen, esporádicamente, las operaciones sin sentido (C4) y la omisión de alguna magnitud (C6). Además, generalmente, la aparición de una estrategia errónea para un problema de PC viene seguida de algún fallo o estrategia errónea para la PS (figura 6).


Problema 2: Para alimentar a sus 4 gatos durante 5 días Miguel necesita 40 vasos de leche. Ana María sin embargo gasta 35 vasos de leche para alimentar a sus 3 gatos durante 7 días. ¿Qué gatos comen más los de Ana María o los de Miguel?

$\frac{4}{40} = 4 : 40 = 0.1$ vasos por cada gato

$\frac{3}{35} = 3 : 35 = 0.03$ vasos por cada gato

Comen más los gatos de Ana María.

Fig. 6. Omisión de una magnitud, C6, e interpretación errónea de la razón en la resolución de 1.1.TP2.

Los problemas de comparación cualitativa se abordaron mayoritariamente en las sesiones de PS debido a su complejidad en el caso de la PC. De forma exploratoria se diseñó el problema 1.2.TP3, en el que las relaciones cualitativas dadas hacían imposible determinar una respuesta con los datos disponibles. Los resultados arrojan un 40 % de respuestas correctas. Únicamente un 10 % de los alumnos (una pareja) argumentaron correctamente su respuesta, aunque aparecen muchas respuestas difícilmente clasificables. Por ejemplo, de la respuesta «No puede resolverse sin datos» no puede inferirse si el alumno comprende que las relaciones aportadas son insuficientes para dar una respuesta o si piensa que un problema sin datos no puede resolverse.

También los problemas en los que se presentaban magnitudes sin relación de proporcionalidad se trabajaron principalmente en las sesiones de PS. En el primer ciclo se diseñó el problema 1.1.TP3 (no repartido) y el problema 1.1.PE2, que coincide con 1.2.PE2. En 1.1.PE1 el 68 % de los alumnos respondieron de forma correcta, frente a un 26 % de respuestas incorrectas. Los alumnos que, además de responder correctamente, dieron argumentos correctos suponen el 43 %. Estos porcentajes fueron muy similares en 2.º de ESO en 1.2.PE2.

Fase de reflexión

A partir de los datos de la fase de observación, la información de los diarios de clase y de los observadores externos y la comparación con el grupo de control, se extraen conclusiones para mejorar la propuesta en el siguiente ciclo.

Reflexiones relativas al diseño de la propuesta:

- La cantidad de problemas y su secuenciación debe revisarse en 1.º de ESO. El enunciado de la situación introductoria 1.1.SI genera problemas de interpretación en muchos alumnos y el número de problemas que se deben trabajar durante la sesión es excesivo.
- La estructura numérica de los problemas no genera dificultades para el trabajo sin calculadora. Cabría replantearse la estructura numérica de 1.1.TC2 ya que provoca una complejidad operativa que distrae de los objetivos didácticos del problema (una de las constantes de proporcionalidad tiene expresión decimal periódica).
- El diseño para 2.º de ESO es adecuado.

Reflexiones relativas a la metodología y a la labor del profesor-investigador:

- La motivación e implicación de los alumnos con la metodología de trabajo es buena. Las distracciones que pueden causar algunos aspectos de esta se diluyen a lo largo de las sesiones.
- Según los observadores externos el profesor-investigador tiene intervenciones adecuadas, precisas y concisas. Sin embargo, sería conveniente aumentar el tiempo y esfuerzo dedicado a la institucionalización de las situaciones de PC y se debe aumentar la participación de los alumnos en el proceso de institucionalización con un reparto equitativo de sus intervenciones.

Reflexiones relativas al desempeño de los alumnos:

- La introducción de la PC no supone un gran obstáculo a los alumnos que relacionan los nuevos problemas de forma natural con lo aprendido anteriormente. Las tasas de éxito tanto en 1.º como en 2.º de ESO son generalmente altas.
- A pesar de la tasa de éxito, se detecta una menor preocupación (en comparación con la PS) por la argumentación y la caracterización de las relaciones proporcionales, debida quizás a la mayor complejidad de las situaciones compuestas.
- Las técnicas institucionalizadas para la resolución de problemas de PS dotan a los alumnos de mecanismos para abordar los problemas de PC de forma natural sin necesidad de recurrir a técnicas específicas. La aparición de técnicas algorítmicas es anecdótica y suele aparecer en las tareas para casa.
- La aparición de la estrategia de amalgamación parece estar más influida por la estructura funcional y la posición de la variable dependiente (en los problemas de valor perdido) que por la interpretación de la magnitud resultante. Los alumnos superan la dificultad de dar significado al producto de magnitudes tras la instrucción, pero tienen dificultades a la hora de interpretar un cociente de magnitudes como una nueva magnitud variable.
- Las situaciones de comparación cualitativa suponen una gran dificultad. Probablemente, el hecho de que la respuesta a la situación concreta planteada sea que no puede realizarse la comparación con la información proporcionada influye en la elevada tasa de fracaso y dificulta la clasificación de las respuestas.

Reflexiones relativas al funcionamiento de la propuesta:

- La propuesta es exitosa, abriendo el abanico de problemas que los estudiantes son capaces de resolver sin disminuir la tasa de éxito en los problemas comunes. Además, los alumnos que la han recibido elaboran respuestas más argumentadas que los del grupo de control y dotan de significado a las operaciones que realizan.

DESARROLLO DEL SEGUNDO CICLO DE INVESTIGACIÓN-ACCIÓN

Fase de planificación

Como se observó en la fase de reflexión anterior, el diseño para el primer ciclo se valoró positivamente, por lo que para este segundo ciclo se mantuvo la estructura general proponiendo mejoras para las debilidades observadas.

En cuanto a la labor del profesor-investigador se proponen las siguientes mejoras:

– Ampliar la duración de los debates con el grupo clase y repartir de forma más equilibrada los tiempos de intervención. Para ello el profesor-investigador realizará preguntas dirigidas a alumnos concretos con mayor frecuencia intentando evitar las preguntas generales al grupo.
– Hacer énfasis en la necesidad de argumentar las respuestas y caracterizar las relaciones de proporcionalidad existentes detectando las condiciones de regularidad necesarias en cada problema.

En cuanto al diseño y secuenciación de las actividades se realizan los siguientes cambios:

– Se reorganizan los problemas de la primera sesión en 1.º de ESO. Se propone como situación introductoria, 2.1.SI el anterior 1.1.TP1 cuyo enunciado no generaba problemas de interpretación. La anterior situación introductoria se propone como primer ejercicio tras la institucionalización, 2.1.TP1.
– Se elimina el problema 1.1.TP3 que no dio tiempo a repartir en el primer ciclo.
– El problema 1.1.TP4 se incluye en la primera ficha de la sesión tras la institucionalización (en este ciclo recibe el código 2.1.TP3).
– Se cambia la estructura numérica de 1.1.TC2 (ahora 2.1.TC2) para que la constante de proporcionalidad sea entera.
– Se reelabora el enunciado del problema de comparación cualitativa con 3 magnitudes 1.2.TP3 (ahora 2.2.TP3) para que haya respuesta concreta.

Fases de acción y observación

La fase de acción se llevó a cabo según la planificación inicial. Tras esta fase se realizó el análisis de las producciones de los alumnos. El análisis cuantitativo de las categorías comunes para todos los problemas trabajados en el segundo ciclo se puede ver en las tablas 9 y 10, donde se presentan, respectivamente, los resultados para las 4 categorías generales en 1.º y en 2º de ESO.

Tabla 9.
Resultados porcentuales de las tareas de 1.º de ESO del segundo ciclo en las categorías generales

	2.1.SI	2.1.TP1	2.1.TP2	2.1.TP3	2.1.TC1	2.1.TC2	2.1.R1	2.1.PE1	2.1.PE2
N	3,6	3,6	3,6	3,6	27,6	27,6	0	1,7	1,7
B	21,4	32,1	32,1	57,1	13,8	15,5	32,1	31	12,1
I	28,6	21,4	25	10,7	12,1	12,1	21,4	25,9	27,6
C	46,4	42,9	39,3	28,6	37,9	36,2	46,4	41,4	58,7

Tabla 10.
Resultados porcentuales de las tareas de 2.º de ESO del segundo ciclo en las categorías generales

	2.2. SI	2.2. TP1	2.2. TP2	2.2. TC1	2.2. TC2	2.2. TC3	2.2. TP3	2.2. TP4	2.2. TP5	2.2. TP6	2.2. R1	2.2. PE1	2.2. PE2	2.2. PE3
N				20	20	20								
B			10	20	20	20			10	20	10	15	0	5
I	20	10	20	10	25	5			30	40	40	25	5	20
C	80	90	70	50	35	55	100	100	60	40	50	60	95	75

El porcentaje de alumnos que no entregan las tareas se redujo respecto al primer ciclo. Sin embargo, en 1.º de ESO aumenta mucho el porcentaje de alumnos que entregan los ejercicios en blanco o con producciones sin sentido. Esto se debe a que un grupo de unos 12 alumnos, que representa el 20 % del total, solo realizó algunas tareas de manera esporádica durante la propuesta (y durante el resto del curso). Descontado este efecto, los resultados en ambos ciclos son similares para 1.º de ESO.

Los resultados generales en 2.º de ESO también son similares a los del primer ciclo. Sin embargo, se aprecia una gran mejoría de los alumnos dentro del ciclo de I-A. Esta mejoría se constata comparando producciones de un mismo alumno en 1.º y 2.º de ESO para los ítems comunes. Puede verse un ejemplo en la figura 7; una alumna que dejó en blanco la respuesta en 1.º de ESO presenta una respuesta elaborada y argumentada en 2.º de ESO. La alumna da significado a las operaciones y establece correctamente una condición de regularidad para que el problema pueda considerarse de PC (el coste por persona y noche es constante).

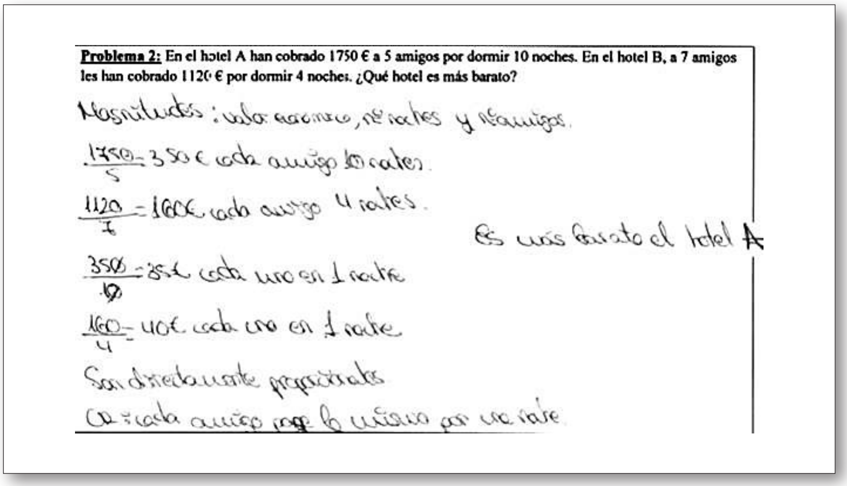


Fig. 7. Respuesta correcta a 2.2.TP4 de una alumna que había dejado en blanco el problema en 1.º de ESO.

En la tabla 11 se recogen los porcentajes de aparición de cada estrategia para los problemas de valor perdido.

Tabla 11.
Porcentaje de aparición de los métodos de resolución en problemas de valor perdido. Segundo ciclo

	2.1. SI	2.1. TP1	2.1. TP3	2.1. TC1	2.1. R1	2.1. PE1	2.2. SI	2.2. TP1	2.2. TC1	2.2. TC2	2.2. TP5	2.2. TP6	2.2. R1	2.2. PE1
VP0										5				
VP1						1,7								
VP2	39,3	21,4	17,9	17,2	50	34,5	60	60	25		70	40	20	50
VP3	17,9	25	14,3	19		10,3							10	30
VP4				1,7	7,1	10,3	20	40	20	25		30	50	
VP6									5	5				
VP7				1,7										
VP8	17,9	17,9	7,1	3,4	10,7	8,6	20		10	15				5
VP10				3,4										
VP11				3,4		1,7				10	20		10	

Al igual que en el primer ciclo, el método institucionalizado (amalgamación) se afianza conforme avanza la propuesta, siendo el método mayoritario en muchos de los problemas de 2.º de ESO. El uso de la amalgamación baja en problemas en los que la amalgamación natural involucra a la variable dependiente, como ocurre en 2.2.R1. A pesar de estas dificultades, los alumnos resuelven estas situaciones apoyándose en los conceptos de razón y de constante de proporcionalidad inversa, llevando a cabo métodos del tipo «paso a paso» (VP3-VP5).

Destaca la presencia en este 2.º ciclo de I-A de tres métodos de resolución que no habían aparecido anteriormente: «construcción de patrones», «proporciones» y «uso de una fórmula» (VP1, VP6 y VP7 respectivamente). En los dos últimos casos los métodos aparecen en las tareas para casa de un único alumno. Dentro de la categoría VP1 se ha incluido la respuesta a un problema en la prueba escrita de 1.º de ESO de uno de los alumnos que dejaban sistemáticamente en blanco los problemas (figura 8)

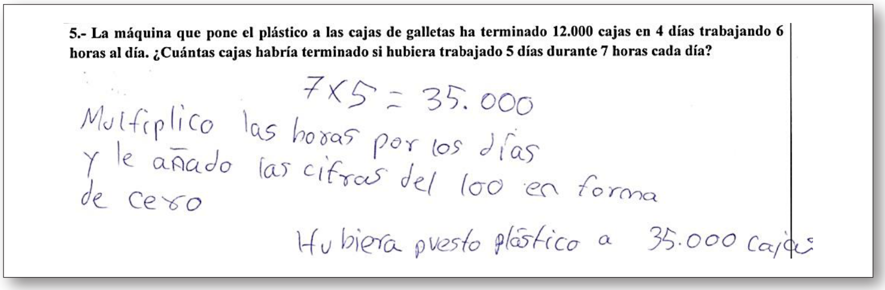


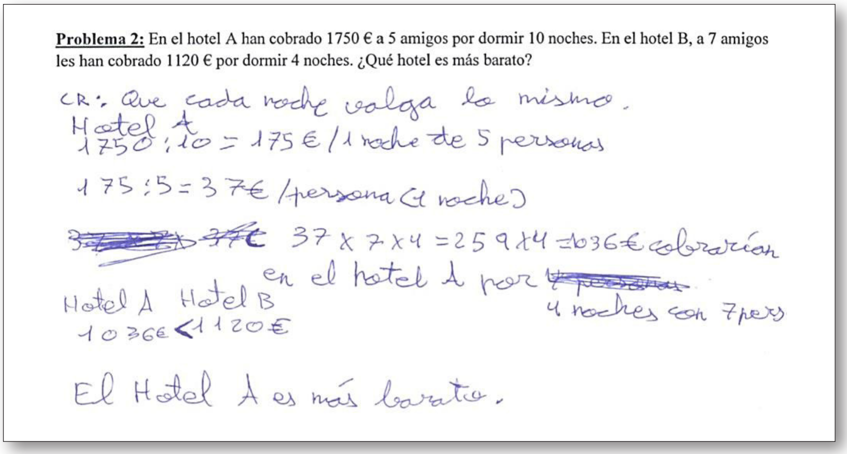
Fig. 8. Construcción de patrones (VP1) en un problema de la prueba escrita.

En los problemas de comparación cuantitativa (tabla 12) los alumnos se decantan mayoritariamente por el cálculo de la constante de proporcionalidad y, como ocurría en el primer ciclo, no siempre es distinguible si el alumno utiliza para ello previamente el método de amalgamación.

Tabla 12.
Porcentaje de aparición de los métodos
de resolución en problemas de comparación. Segundo ciclo

	2.1.TP2	2.1.TC2	2.2.TP2	2.2.TC3	2.2.TP4	2.2.PE3
C0		1,7		5		5
C1	14,3	10,3	50	15	20	45
C2	32,1	25,9	20	40	80	45
C3		3,4				
C4	14,3					
C6	3,6	6,9	20			

Aparece por primera vez el método C3 en dos producciones de 1.º de ESO de una tarea para casa. Una de ellas, contabilizada como correcta a pesar de su error aritmético, se puede observar en la figura 9.


Problema 2: En el hotel A han cobrado 1750 € a 5 amigos por dormir 10 noches. En el hotel B, a 7 amigos les han cobrado 1120 € por dormir 4 noches. ¿Qué hotel es más barato?

CR: Que cada noche valga lo mismo.
Hotel A
1750 : 10 = 175 € / 1 noche de 5 personas

175 : 5 = 37 € / persona (1 noche)

~~37~~ 37€ 37 x 7 x 4 = 259 x 4 = 1036 € cobrarían en el hotel A por ~~7 personas~~ 4 noches con 7 pers

Hotel A Hotel B
1036 € < 1120 €

El Hotel A es más barato.

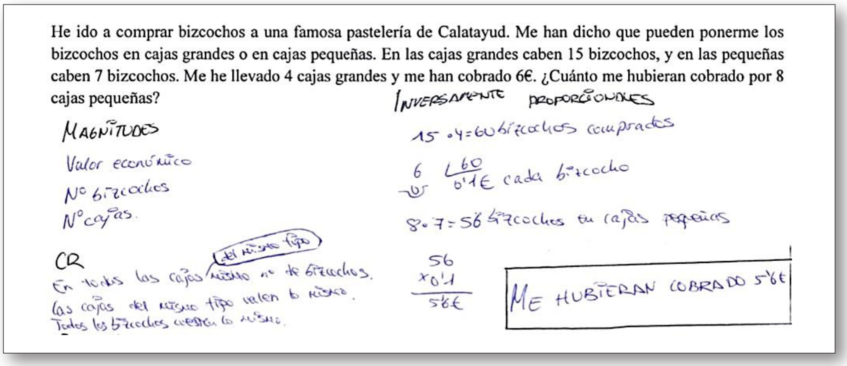
Fig. 9. Método C3 para resolver un problema de comparación.

Tras la reelaboración del enunciado, todas las producciones de este ciclo para el problema de comparación cualitativa 2.2.TP3 fueron correctas. Además, el 50 % exponen de forma razonada su elección.

En cuanto a los problemas sin relación de proporcionalidad (2.1.PE2 y 2.2.PE2), los resultados experimentaron una fuerte mejora desde 1.º a 2.º de ESO. El 58,7 % de los alumnos dieron una respuesta correcta para 2.1.PE2 y solo la mitad de ellos la argumentaron adecuadamente. Sin embargo, el mismo problema en 2.º de ESO obtuvo una tasa de éxito del 95 %, con un 70 % de respuestas bien justificadas.

Este mayor interés para argumentar las respuestas es constante en este segundo ciclo, especialmente durante 2.º de ESO. Dos ejemplos de la mejora en la argumentación e interpretación de las operaciones se observan en las figuras 9 y 10.

En la figura 10 la alumna explicita el significado de cada operación parcial y establece condiciones de regularidad necesarias para que se pueda suponer la relación de PC: «En todas las cajas del mismo tipo, mismo número de bizcochos. Las cajas del mismo tipo valen lo mismo. Todos los bizcochos valen lo mismo».



He ido a comprar bizcochos a una famosa pastelería de Calatayud. Me han dicho que pueden ponerme los bizcochos en cajas grandes o en cajas pequeñas. En las cajas grandes caben 15 bizcochos, y en las pequeñas caben 7 bizcochos. Me he llevado 4 cajas grandes y me han cobrado 6€. ¿Cuánto me hubieran cobrado por 8 cajas pequeñas?

INVERSAMENTE PROPORCIONALES

MAGNITUDES
Valor económico
Nº bizcochos
Nº cajas.

15 · 4 = 60 bizcochos comprados
6 ⌊60
0'1€ cada bizcocho
8 · 7 = 56 bizcochos en cajas pequeñas

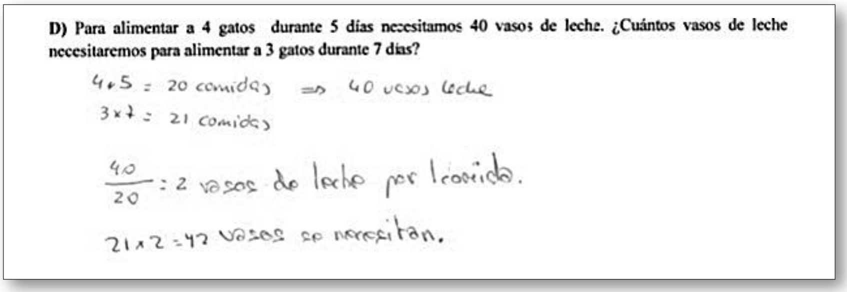
56
×0'1
5'6€

ME HUBIERAN COBRADO 5'6€

CR
En todas las cajas (del mismo tipo) mismo nº de bizcochos.
Las cajas del mismo tipo valen lo mismo.
Todos los bizcochos cuestan lo mismo.

Fig. 10. Respuesta para 2.2.SI.

En la figura 11 se observa cómo el alumno propone una amalgamación por producto de dos magnitudes, «número de gatos x tiempo en días», que interpreta como «número de comidas».



D) Para alimentar a 4 gatos durante 5 días necesitamos 40 vasos de leche. ¿Cuántos vasos de leche necesitaremos para alimentar a 3 gatos durante 7 días?

4·5 = 20 comidas ⇒ 40 vasos leche
3×7 = 21 comidas

$\frac{40}{20}$ = 2 vasos de leche por 1 comida.

21×2 = 42 vasos se necesitan.

Fig. 11. Respuesta para 2.1.TC1.

Fase de reflexión

Teniendo en cuenta los datos de la fase de observación, la información extraída de los diarios de clase, de los observadores externos, la comparación con el grupo de control y la información extraída de las entrevistas semiestructuradas se presentan las siguientes observaciones a este segundo ciclo.

Reflexiones relativas al diseño de la propuesta:

- La cantidad de problemas sigue siendo alta para la sesión de 1.º de ESO. Sin embargo, un porcentaje elevado de alumnos resuelve todos los problemas, por lo que parece interesante mantener el número de problemas para dar respuesta a los distintos ritmos dentro del aula.
- A partir de la tasa de éxito de los problemas 2.1.TP1, 2.1.TP2 y 2.1.TP3, sus correspondientes en el primer ciclo y la información recogida en el diario de clase, cabe replantearse el orden en el que se presentan dichos problemas. El problema 2.1.TP1 (anterior situación introductoria) sigue generando problemas de interpretación que impiden que los alumnos aborden convenientemente el resto de problemas.
- El resto del diseño ha sido adecuado.

Reflexiones relativas a la metodología y la labor del profesor-investigador:

- Los observadores externos remarcan que el ejercicio del profesor-investigador ha sido conveniente, por lo que se han llevado a cabo las propuestas de mejora hechas tras el primer ciclo.

Reflexiones relativas al desempeño de los alumnos:

– Se ha constatado un avance significativo en los resultados entre 1.º y 2.º de ESO dentro del ciclo. Este avance no se debe solo a que muchos de los alumnos absentistas u objetores no promocionaron a 2.º curso. El estudio de casos particulares corrobora la mejora de los resultados de diferentes alumnos.
– Se observa una mayor preocupación, especialmente en 2.º de ESO, por justificar y argumentar adecuadamente las respuestas. Los alumnos dan significado a las operaciones entre magnitudes y establecen condiciones de regularidad para justificar la relación de PC.
– La institucionalización de estrategias concretas no parece provocar cambios en la elección del método de resolución en problemas posteriores. Los alumnos aplican los conocimientos adquiridos sobre PS para resolver problemas de PC sin dificultad. La elección del método de resolución la determina, en mayor medida, la estructura funcional y, en el caso de los problemas de valor perdido, la posición de la variable dependiente.

Reflexiones relativas al funcionamiento de la propuesta:

– Se mantienen los buenos resultados en comparación con el grupo de control en cuanto al número de situaciones problemáticas que son capaces de abordar los alumnos y el nivel argumental de sus respuestas.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Tras la realización de dos ciclos de I-A que abarcan los dos primeros cursos de secundaria a lo largo de cuatro cursos académicos, se ha constatado la viabilidad de la propuesta diseñada para la enseñanza de la PC, que se distingue de otras propuestas de enseñanza tradicionales.

En los libros de texto, la PC se suele presentar en un curso posterior a la introducción de la PS. Además, los aspectos conceptuales asociados a la PC no siempre están presentes o no se relacionan con los asociados a la PS (Martínez-Juste *et al.*, 2014, 2015b). Nuestra propuesta evita esto último, permitiendo un tratamiento integrado y conjunto de la proporcionalidad (Levain y Vergnaud, 1996).

Al comienzo de la propuesta, los alumnos abordan las situaciones de PC disponiendo solo de las herramientas propias de la PS: razón, manipulación de magnitudes, constantes de proporcionalidad. En este sentido, Arican (2018) señala la importancia de desarrollar estrategias que pongan de manifiesto el reconocimiento de las razones externas y las relaciones producto entre magnitudes proporcionales para fomentar el razonamiento proporcional mediante la PC. Sobre la base de estas ideas, nuestros estudiantes son capaces de abordar con éxito las tareas propuestas, incluso las que suelen ser más complejas, como las de comparación cualitativa (López y Figueras, 1999).

Las producciones de los estudiantes en cada tarea son ricas en cuanto a variedad de razonamientos, técnicas y estrategias que se emplean en la resolución. A partir de las primeras producciones, se institucionaliza el método de amalgamación de magnitudes, pero surgen de manera natural otros métodos que también son indicio de un razonamiento proporcional avanzado (Lesh, Post y Behr, 1988).

Se han identificado diferentes estrategias (exitosas y erróneas) de resolución de problemas de comparación cuantitativa de PC. Si bien existen trabajos sobre la resolución de problemas de comparación cuantitativa en problemas de PS directa, no hemos encontrado estudios que aborden las estrategias de resolución dadas por los estudiantes ante este tipo de tareas para PC. Aparecen generalizaciones de las estrategias señaladas por Valverde y Castro (2009), basadas bien en el cálculo de la constante de proporcionalidad, bien en la manipulación de los datos para encontrar razones unitarias, así como estrategias para convertir el problema de comparación en uno de valor perdido y comparar la solución resultante con los datos del enunciado.

Por otro lado, no hemos encontrado estrategias erróneas de naturaleza aditiva. Estos resultados van en la línea de lo apuntado por Fernández y Llinares (2012) en cuanto a la ausencia de este tipo de respuestas en tareas de PS de estudiantes de secundaria.

Sería necesario indagar sobre la influencia de la estructura numérica de los problemas en los métodos de resolución en la línea de lo apuntado por Steinthorsdottir (2009) para PS. En concreto, estudiar el efecto que produciría el empleo de la calculadora por parte de los estudiantes. Estos aspectos se plantean como futuras líneas de trabajo debido al carácter cíclico y continuo del enfoque de investigación adoptado.

Finalmente, este trabajo pone en valor e ilustra el interés y la utilidad de la I-A para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y para que los propios profesores realicen una exploración crítica de su práctica (Romera, 2012), permitiendo conjugar la labor docente con la del investigador y relacionando teoría y práctica para generar conocimiento (Elliot, 1990).

AGRADECIMIENTOS

Financiado por el Gobierno de Aragón (Referencia Grupo S36_17D) y cofinanciado con Feder 2014-2020 «Construyendo Europa desde Aragón». La fase experimental se desarrolló dentro del proyecto de innovación «Nuevas tendencias para el aprendizaje de la proporcionalidad» del Gobierno de Aragón.

BIBLIOGRAFÍA

Arican, M. (2018). Preservice Middle and High School Mathematics Teachers' Strategies when Solving Proportion Problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*(2), 315-335.
https://doi.org/10.1007/s10763-016-9775-1

Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Burgos, M. (2018). Online educational videos according to specific didactics: the case of mathematics. *Cultura y Educación*, *30*(4), 633-662.
https://doi.org/10.1080/11356405.2018.1524651

Ben-Chaim, D., Keret, Y. y Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion.* Rotterdam: Sense Publishers.
https://doi.org/10.1007/978-94-6091-784-4_16

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática: El caso de la proporcionalidad*. (Tesis doctoral no publicada). Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Carretero, L. (1989). La adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de estructuras multiplicativas por el niño de 8 a 11 años. *Anuario de Psicología*, *3*(42), 85-101.

Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las ciencias*, *21*(3), 387-404.

Cramer, K. y Post, T. (1993). Connecting Research to Teaching Proportional Reasoning. *Mathematics Teacher*, *86*(5), 404-407.

Díaz, M. V. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*, *45*, 33-41.

Elliot, J. (1990). *La Investigación-Acción en Educación*. Madrid: Morata.

Escolano, R. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los modelos de medida y cociente*. (Tesis doctoral no publicada). Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(1), 129-142.
https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Guacaneme, E. A. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *Revista EMA*, *7*(1), 3-42.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Rombreg (Eds.), *Rational numbers. An integration of research* (pp. 131-156). Hillsdale, NJ: Lawrens Erlbaun Associates, Publishers.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*, 41-61.
https://doi.org/10.2307/749385

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for understanding*. Nueva York: Routledge.
https://doi.org/10.4324/9780203803165

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). Reston, va: nctm.

Levain, J. P. y Vergnaud, G. (1995). Proportionnalité simple, proportionnalité multiple. *Grand N*, *56*, 55-67.

López, G. y Figueras, O. (1999). Qualitative reasoning in problem solving related to ratio, proportion, and proportional variation concepts. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st meeting of the North American Chapter of the International Group for Psychology of mathematics Education* (Vol. 2, pp. 599-605). México: Cinvestav. Columbus, Ohio: eric.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 435-444). Salamanca: seiem.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2015a). Estrategias utilizadas por estudiantes de distintos niveles educativos ante problemas de proporcionalidad compuesta. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 351-359). Alicante: seiem.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2015b). Un estudio comparativo sobre la proporcionalidad compuesta en los libros de texto españoles de Educación Secundaria Obligatoria durante la logse-loe-lomce. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 95-115.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., Oller-Marcén, A. M. y Ortega, T. (2017). Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta en libros de texto de 2.º de eso. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *20*(1), 95-122.
https://doi.org/10.12802/relime.17.2014

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., Oller-Marcén, A. M. y Pecharromán, C. (2014). Una propuesta innovadora para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de eso. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León (Ed.), *Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 459-470). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

McNiff, J. (2013). *Action Research: principles and practice*. Nueva York: Routledge.
https://doi.org/10.4324/9780203112755

Novo, M. L., Alsina, Á., Marbán, J. M. y Berciano, A. (2017). Inteligencia conectiva para la educación matemática infantil. *Comunicar: Revista Científica de Comunicación y Educación*, *52*(25), 29-39.
https://doi.org/10.3916/c52-2017-03

Oller-Marcén, A. M. (2012). *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria*. (Tesis doctoral no publicada). Valladolid: Universidad de Valladolid.

Porres, M. (2011). *Integral definida, cálculo mental y nuevas tecnologías*. (Tesis doctoral no publicada). Valladolid: Universidad de Valladolid.

Romera, M. J. (2012). La investigación-acción en Didáctica de las Matemáticas: teoría y realizaciones. *Revista Investigación en la Escuela*, *78*, 69-80. https://doi.org/10.12795/IE.2012.i78.06

Romera, M. J. (2014). La investigación-acción en didáctica de las ciencias: perspectiva desde las revistas españolas de educación. *Enseñanza de las ciencias*, *1*(32), 221-239. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.529

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, *7*(3), 41-51.

Shield, M. y Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(2), 183-199. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9415-9

Steinthorsdottir, O. B. (2006). Proportional reasoning: Variable influencing of the problems difficulty level and one's use of problem solving strategies. En J. Novotná, H. Moraová, K. M. y N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 169-176). Praga: pme.

Valverde, A. G. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). Santander: seiem.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Nueva York: Academic Press.

An action research experience to teach compound proportional situations

Sergio Martínez-Juste, José M. Muñoz-Escolano
Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza. Zaragoza, España.
sergiomj@unizar.es, jmescola@unizar.es

Antonio M. Oller-Marcén
Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza - IUMA. Zaragoza, España.
oller@unizar.es

The so-called «proportional reasoning» is a fundamental concept in the teaching and learning of mathematics, present in the Secondary Education Spanish curricula in different education laws. Although the current curriculum generally refers to problems involving proportional magnitudes, there are a wide variety of problems and situations associated with proportionality. One of the traditional topics introduced to students during Secondary Education is that of compound proportionality (CP). Several research works show that the teaching of this topic usually relies on the application of algorithmic techniques. Thus, our main goal is to improve the teaching of CP by designing and implementing a teaching proposal focused on conceptual aspects and which introduces a wider variety of tasks related to CP.

In this paper, we describe and analyze the results of an Action-Research (A-R) teaching experience concerning compound proportional situations. The experiment lasted four academic years, in which two A-R cycles were carried out involving 169 students in the A-R groups and 77 students in the control groups. Within the frame of a wider curricular proposal designed to introduce arithmetic proportionality in grades 7 and 8 (12 to 14 years old), a fifty-minute and another two fifty-minute sessions were devoted, respectively, to CP. In addition, small parts of other sessions were also related to CP in order to correct homework and sit the final exam. In order to analyze the students' performance as well as the achievement of the learning goals, their written productions were scanned (for a total amount of 1122 items related to CP). The final tests of the A-R groups and the control group were also scanned. On the other hand, during the second A-R cycle, 8 semi-structured interviews were carried out (4 in each degree) with students with different performance levels from the A-R groups in order to clarify some aspects in their written productions. Student's answers were analyzed quantitatively and qualitatively. The quantitative analysis was carried out in two levels. The first one was common to all the problems and focused only on the correctness of the answer. The second one was problem-dependent and focused on the solving method.

After the two A-R cycles, we have been able to confirm the viability of the designed proposal. Our proposal makes integrated and joint treatment proportionality possible. Starting only from their knowledge about simple proportion, the students are capable of successfully solving the proposed CP tasks (even those which are usually more difficult for them, such as qualitative comparison tasks), showing a rich variety of reasoning, techniques and strategies. We have identified different strategies (correct and incorrect) in quantitative comparison tasks in CP, which generalize the ones pointed out in previous studies for the simple proportion case, while no additional strategies have been found.

Finally, this work illustrates the usefulness and interest of A-R to improve mathematics teaching and learning processes as well as to promote a critical reflection about the professional practice among teachers, thus leading to the combination of their roles as teachers and as researchers and to the fruitful relationship between theory and practice.