

TARTU ÜLIKOOL
Füüsika Instituut
Füüsikalise optika labor

FÜÜSIKA ERIALA – BAKALAUREUSETÖÖ (6 EAP)

Arvutuslik kummituskuva videoprojektori kuvasuhtega

Autor:
Joonas ARIVA

Juhendaja:
Andreas VALDMANN, PhD



Mai 2019

Arvutuslik kummituskuva videoprojektori kuvasuhtega

Arvutuslik kummituskuva on kujutamismeetod, milles valgustatakse objekti kindla struktuuriga valgusmustritega ning mõõdetakse objektilt peegeldunud või objekti läbinud valguse intensiivust. Nii koostatakse pilt objektist, kusjuures valgusmustrite vähima algemendi suurus määrab ära pildi lahtuse. Parim signaali-müra suhe saavutatakse kui mustrid moodustavad ortogonaalse baasi (nt. Hadamard'i baas). Seega kasutatakse mustrite loomiseks tihti Hadamard'i maatrikseid. Lihtsaim viis Hadamard'i maatrikseid luua on kasutada Sylvesteri konstruktsiooni, millega saab koostatada maatrikseid järguga 2^n , kus n on positiivne täisarv. Sellest tulenevalt peab ka pildi kõrgus ja laius pikslites olema määratud kahe astmetega, mille tõttu kujutatakse kummituskuvaga kuvasuhetele 1:1, 2:1 ja 4:1. See ei ole aga optimaalne, sest videoprojektorid (millega valgusmustreid objektile kujutatakse) on tavaliselt kuvasuhtega 16:9 või 4:3. Käesolevas töös kombineeritakse Sylvesteri konstruktsiooni Ionini rekursiivse konstruktsiooniga, et koostada Hadamard'i maatrikseid, mis oleksid sobilikud kujutamaks suhtele 16:9. Seejärel uuritakse selliste valgusmustrite mõju koostatud pildile läbi arvutisimulatsioonide ning eksperimentide.

Märksõnad: Kummituskuva, Hadamard'i maatriksid, üksikpikseldetektor
CERCS: P200 — Elektromagnetism, optika, akustika

Computational ghost imaging using the native aspect ratio of a digital light projector

Computational ghost imaging is an imaging technique, where output image is obtained by illuminating object with structured light patterns and measuring transmitted or reflected light for each pattern. The resolution of the image is defined by the resolution of the patterns. Best signal-to-noise ratio is achieved if the patterns form an orthogonal basis (for example Hadamard basis). Often Hadamard matrices are used to make the patterns. The easiest method to create those matrices is to use the Sylvester construction, which gives Hadamard matrices of order 2^n , where n is a positive integer. This limits picture's height and length in pixels also to powers of two which leads to aspect ratios of 1:1, 2:1 and 4:1. This is not optimal, because these ratios don't align with projector's (which are used to illuminate the object) standard projector image ratios of 16:9 or 4:3 . In

this thesis, Sylvester construction is combined with a recursive design by Ionin, to create Hadamard matrices that suit for imaging in aspect ratio of 16:9. The nuances of those new matrices are studied with computer simulations and experiments are carried out to compare this new 16:9 imaging with 1:1 imaging.

Keywords: Ghost imaging, Hadamard matrices, single-pixel imaging

CERCS: P200 — Electromagnetism, optics, acoustics

Sisukord

Sissejuhatus	1
1 Teoreetilised alused	3
1.1 Kummituskuva	3
1.2 Hadamard'i matriksid	7
2 Arvutused ja simulatsioonid	13
2.1 16:9 suhtele valgusmuustrite koostamine	13
2.2 Kummituskuva simulatsioonide meetodid	13
2.3 Simulatsioonide tulemused	17
3 Eksperimendid	25
3.1 Eksperimentide meetodid	25
3.2 Ekseperimentide tulemused	29
4 Kokkuvõte	31
Kirjandus	33
Lihtlitsents	35

Sissejuhatus

Tavalise kaameraga pilti tehes luuakse digitaalne kujutis tänu tuhandetele fototundlikele detektoritele, mis on paigutatud üksteise kõrvale ridadesse. Tuleb välja, et ruumilist lahutust on võimalik saavutada ka vaid ühe detektoriga, kui uuritavat objekti valgustada korduvalt erinevate valgusallikate kombinatsioonidega (struktureeritud valgustamine). Sellist meetodit kirjeldati esmakordselt aastal 1995 ning hiljem hakati seda nimetama kummituskuvaks kuna eraldiseisvana detektor objekti „ei näe“

Kummituskuva on kujutamismeetod, mis on viimased 15 aastat leidnud optika valdkonnas palju kõlapinda oma kiire arengu ja põnevate rakenduste tõttu. Sinna alla kuuluvad näiteks 3D kujutamine [1], läbi turbulentsse atmosfääri kujutamine [2] ja kujutamine korraga nii nähtavas kui ka infrapunase spektris [3].

Kummituskuval on mitmeid erinevaid liike, mida eristatakse selle järgi, kuidas täpselt objekti valgustatakse. Peamiselt liigitatakse need järgmiselt: kvantkummituskuva, klassikaline kummituskuva ja arvutuslik kummituskuva. Bakalaureusetöö selgitab kõigi kolme tööpõhimõtteid, kuid praktiline osa keskendub vaid arvutuslikule kummituskuvale.

Arvutusliku kummituskuvaga kujutades valgustatakse korraga vaid valitud osi objektist ning mõõdetakse, kui intensiivne on sel juhul objektilt tagasipeegeldunud valgus. Ühte sellist kindla struktuuriga valgustamist nimetatakse valgusmustriks ning selle vähima algelemendi suurus määrab ära loodud pildi lahutuse. Selleks, et kuvada objektile valgusmustrit, on mugav kasutada projektorit. Et oleks võimalik koostada pilti objektist, on vaja seda valgustada paljude valgusmustritega. Mõõtmiste arvu suhtes on optimaalseim kasutada võimalikult varieeritud valgusmustreid (puudub mõte mõõta peegeldunud valgust samasuguste valgusmustrite korral). Valgusmustrite ühtlase jaotuse tagamiseks koostatakse neid tihti Hadamard'i maatriksite järgi, kuna nende maatriksite read ja veerud on omavahel ortogonaalsed [4].

Hadamard'i maatriksi järgust sõltub, missuguse kuvasuhtega mustreid on võimalik tekitada. Kuvasuhe näitab suhet pildi laiuse ja kõrguse vahel. Kuna iga järguga Hadamard'i maatrikseid ei leidu, hakkab see piirama võimalikke kuvasuhteid, milles saame objekti

kujutada. Sellest tulenevalt kujutatakse arvutuslikus kummituskavas peamiselt suhtele 1:1 ja 2:1, mis aga ei ole tänapäeva videoprojektorite standardiks.

Bakalaureusetöö eesmärgiks on kombineerida kahte Hadamard'i maatriksite koostamise meetodit, et luua Hadamard'i maatrikseid, mis oleksid sobivad kujutamaks suhtele 16:9. Niiviisi saab objekti valgustamisel ära kasutada tervet projektori vaatevälja ning seega on võimalik kujutada suuremat ala. Autorile teadaolevalt ei ole keegi enne sellises kuvasuhtes arvutusliku kummituskuvaga kujutanud, kasutades selleks Hadamard'i maatriksite põhjal loodud valgusmustreid.

Teoreetiliste aluste peatükis antakse lugejale ülevaade kummituskuvast ning Hadamard'i maatriksitest. Järgnevas peatükis kirjeldatakse uute valgusmustrite loomist, läbiviidud arvutisimulatsioone ja töö käigus tuletatud valemeid. Töö kolmandas osas on ära toodud arvutusliku kummituskuva ekperimentide tulemused, milles võrreldakse 16:9 ja 1:1 suhetega valgusmustritega kujutamist. Viimases peatükis võetakse kogu töö lühidalt kokku.

1 Teoreetilised alused

1.1 Kummituskuva

Algselt oli kummituskuva kujutamismeetod, mis seisnes kahe fotodetektoriga mõõdetud signaali korreleerimises, millest vaid ühte detektorisse jõudnud valgus on langenud uuritava objektile. See meetod võeti kasutusele 1995. aastal, kui tehti esimene footonite kvantpõimitusel põhinev kummituskuva eksperiment [5].

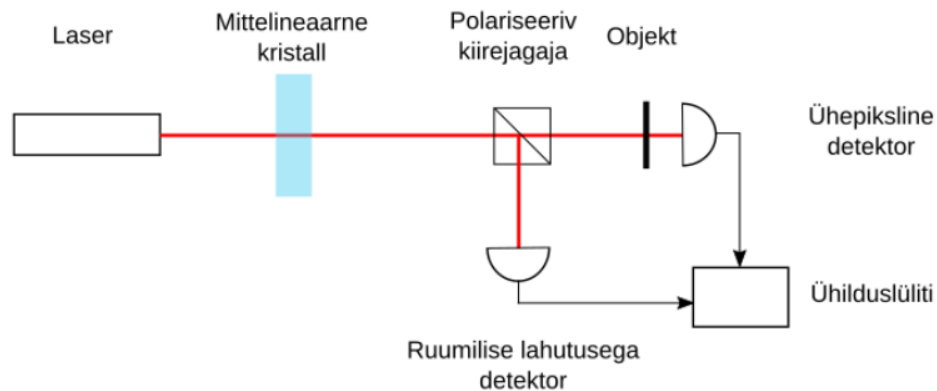
Esialgu arvati, et kummituskuva ongi vaid kvantefekt, kuid nüüdseks on tõestatud, et kummituskuva põhimõtteid saab kasutada ka pseudosoojusliku valgusega [6]. Sellist kujutamist nimetatakse klassikaliseks kummituskuvaks. 2008 lihtsustati kummituskuva meetodit veelgi, kui näidati, et kasutades objekti struktureeritud valgustamist, piisab pildisatamiseks vaid ühest fotodetektorist [7]. Sellist meetodit nimetatakse arvutuslikuks kummituskuvaks.

Järgnevalt antakse ülevaade kõigist kolmest kummituskuva meetodist.

Kvantkummituskuva

Kvantkummituskuvaga kujutatakse tavaliselt uuritava objekti läbilaskvusfunktsiooni $T(x, y)$. See iseloomustab objektile langenud valguse ja seda läbinud valguse intensiivsuste suhet (x, y määravad punkti objekti tasandil). Lihtsamaiks uuritavaks objektiks on binaarne mask ($T(x, y)$ on 1 või 0).

Kvantkummituskuvaga kujutamine põhineb mittelineaarse optika efektil, mida nimetatakse valguse spontaanseks parameetriliseks allamuundumiseks. Laserkiir juhitakse läbi mittelineaarse kristalli, mis muundab footonid kaheks madalama energiaga footoniks. Selliselt tekkinud footonite paarid on omavahel põimitud. Footonite põimitus tähendab, et nende lainefunktsioonid on korreleeritud. Edasi langeb laserkiir polariseerivale kiirejagajale, mis jaotab kiire kaheks nii, et omavahel põimitud footonid suunatakse eri kiirtesse (joonis 1.1). Nimetame neid kiiri signaalikiireks ja laisklejakiireks.



JOONIS 1.1: Kvantkummituskuva lihtsustatud skeem

Signaalkiir langeb uuritavale objektile, läbib seda ning jõuab üksikpikselidektorile (s.o ühe piksliga detektor, millel pole ruumilist lahutust). Laisklejakiir langeb otse ruumilise lahutusega fotodetektorile.

Mõlemad detektorid on omavahel ühendatud ühilduslülitusega, mis kontrollib seda, kas leidub footoneid, mis langesid mõlemale detektorile samaaegselt. See tähendaks, et need footonid moodustasid ühe põimitud paari. Nii saame analüüsis kõrvale jätta footonite paare, mille signaalkiire footon detektorini ei jõudnud (see neeldus objektis). Muidugi võib süsteem eksida ja mõõtemääramatusest tuleneva kokkusattumusega võivad detektoritele samaaegselt langeda juhuslikud footonid. Seega peab arvestama, et tulemusse jääb sisse eksperimentaalne viga.

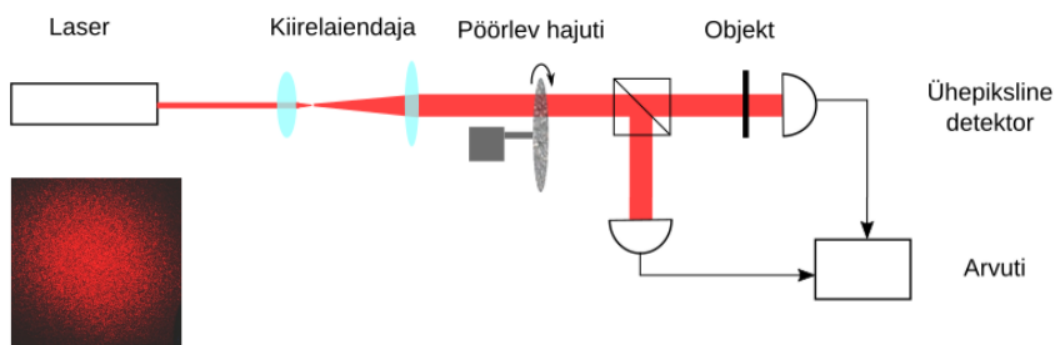
Kui mõõta ära ruumilise lahutusega detektorile jõudnud põimitud footonite jaotus (need footonid, mille paariline samuti registreeriti) kui detektori tasapinna koordinaatide funktsioon, siis tulemuseks ongi objekti läbilaskvusfunktsioon. Seejuures on huvitav, et pildile annab ruumilise lahutuse laisklejakiir, mis objektiga kordagi kokku ei puutu. Nimetus „kummituskuva“ tuleb sellest, et ühepikslise detektor, mis mõõdab, tegelikult objekti „ei näe“.

Klassikaline kummituskuva

Klassikalises kummituskavas valgustatakse uuritavat objekti valgusmuustritega. Mõõtes valgusmuustrit enne objektile langemist ning peale objekti läbimist saame infot selle kohta, kuidas objekt on valgusmuustrit mõjutanud. Et koostada objektist pilt, on vaja teha mõõtmisi paljude erinevate valgusmuustritega. Laseriga saadakse valgusmuustrid, kui selle kiir suunata läbi hajuti. Vaadeldes hajutatud kiirtekimpu näeme tekkinud juhuslikku

interferentsi (joonis 1.2). Sellist valgussäbru nimetatakse speklimustriks. Kuna juhuslik interfereerumine on omane soojuslikele valgusallikatele, siis kutsutakse hajutatud laserivalgust pseudosojuslikuks.

Klassikalises katseskeemis (joonis 1.2) kasutatakse laserit, mille laiendatud kiirtekimp juhatakse läbi pöörleva hajuti, et tekitada ajas muutuvaid speklimustreid [6]. Seejärel jaotatakse valgus kiirejagajaga kaheks: signaalkiireks ja võrdluskiireks. Signaalkiir läbib uuritavat objekti ja langeb objekti taga asuvale detektorile, millel ei ole ruumilist lahutust (nt. üksikpiksel-detektor). Võrdluskiir juhatakse otse ruumilise lahutusega detektorisse.



JOONIS 1.2: Klassikalise kummituskuva lihtsustatud skeem. Vasakul all on näide speklimustrist.

Sellise katseskeemi puhul on signaali intensiivsus määratud seosega

$$S = \int \int T(x, y) I_v(x, y) dx dy , \quad (1.1)$$

kus S on üksikpiksel-detektoriga mõõdetud signaal, $T(x, y)$ on objekti läbilaskvusfunktsioon ja $I_v(x, y)$ iseloomustab detektorile langenud võrdluskiire ruumilist jaotust. Integreerimine toimub üle kogu valgusmusteri pinna. $T(x, y)$ omab väärtusi nulli ja ühe vahel vastavalt pealelangeva ja väljuva valguse intensiivsuse suhtele.

Paneme tähele, et nii S kui ka $I_v(x, y)$ sõltuvad speklimustrist, mis omakorda sõltub hajutaja hetkeasendist. Mida rohkem mõõtmisi teeme erinevate speklimustritega, seda kvaliteetsema pildi $T(x, y)$ saame koostada.

Korreleerides mõõdetud signaalkiire intensiivsust võrdluskiire ruumilise intensiivsuse jaotusega, saame kätte objekti läbilaskvusfunktsiooni, mis on ekvivalentne pildiga objektist.

Selleks kasutame algoritmi [8]

$$T(x, y) = \langle (S - \langle S \rangle)(I_v(x, y) - \langle I_v(x, y) \rangle) \rangle, \quad (1.2)$$

kus $\langle \dots \rangle$ tähistab keskmistamist üle kõigi tulemuste. Algoritmi eesmärgiks on kaaluda kõik võrdlusintensiivsuste pildid $I_v(x, y)$ läbi vastava objekti läbinud intensiivsusega S ning tulemus normeerida.

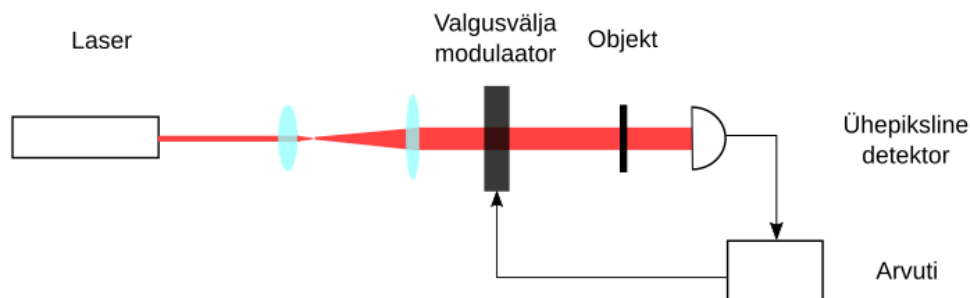
Kuigi enamus allikaid klassikalise kummituskuva kohta käsitleb objekti kujutamist tema läbilaskvusfunktsiooni $T(x, y)$ kaudu, siis samuti on võimalik kujutada mõõtes hoopis objektilt peegeldunud valgust. See pakub praktilisemaid väljundeid kummituskuvale ning samuti avab võimaluse 3D piltide loomiseks, kui mõõta peale peegeldunud valguse ka footonite lennuaega.[1]

Arvutuslik kummituskuva

Kummituskuva mõõtmisi on võimalik lihtsustada, kui kõik valgusmustrid ise mingi kindla algoritmiga luua. Sellisel juhul kaob ära valguskiire jagamise ja võrdluskiire kasutamise vajadus. Üks viis kindlate mustrite tegemiseks on juhtida laiendatud laserkiir läbi valgusvälja modulaatori. Iga modulaatori pinnaelemendi kohta saab läbiva valguse amplituudi või faasi muuta. Esimesena kasutati mustrite loomiseks faasimodulaatorit, millega kujutati objektile speklimustrid, mille kuju sai välja arvutada, kui oli teada objekti kaugus modulaatorist ning modulaatori elementile rakendatav faas (faasimask) (joonis 1.3) [7]. Lihtsamaks viisiks mustreid luua on laseri ja faasimodulaatori asemel kasutada elementi, mis sisaldaks endas amplituudimodulaatorit ja läätse, nagu näiteks videoprojektorit. Projektoriga saab otse objektile struktureeritud valgusmustreid näidata kasutamata selleks speklimustreid. Kuna võrdluskiir oligi vaid (spekli)mustrinfo saamiseks, siis projektor muudab selle üleliigseks. Edasi saab mõõta kas objekti läbinud valgust või objektilt peegeldunud valgust. Ette antud mustriga valgusvälja tekitamise puhul ongi tegemist arvutusliku kummituskuvaga.

Matemaatiliselt kujutatatakse valgusmustreid maatriksitena, kus ühele mustri pikslile vastab üks maatriksi komponent. Tavaliselt on mustrimaatriksi komponentideks vaid ühed ja nullid, kus üks vastab valgustatud pikslile ja null pimedale pikslile.

Pildi koostamiseks vajalik mõõtmiste arv sõltub mustrite valikust. Parima tulemuse (kõige vähem mõõtmisi, et ideaalsetes tingimustes perfektne pilt objektist koostada) annab



JOONIS 1.3: Arvutusliku kummitusküva lihtsustatud skeem

mustrite komplekt, mis moodustab ortogonaalse baasi [4]. Mustrimaatriksite ortogonaalsus tähendab, et iga kahe mustrimaatriksi A ja B vahel peab olema täidetud tingimus:

$$\sum_{i,j} A_{ij}B_{ij} = 0. \quad (1.3)$$

Selline tingimus tagab, et mustrite jaotus oleks ühtlane ja ei oleks liiga palju sarnaseid mustreid, mis annaksid meile objektilt täpselt samasuguse info. Levinud viis, kuidas mustrite ortogonaalsust kindlustada on koostada need Hadamard'i maatriksite põhjal.

Kuna bakalaureusetöö eksperimentaalses osas on objekti läbinud valguse asemel mõõdetud objektilt peegeldunud valgust, siis töö järgnevas osades asendatakse läbilaskvusfunktsioon $T(x, y)$ funktsiooniga $O(x, y)$, mis kirjeldab objektile langenud ja objektilt peegeldunud valguse intensiivsuste suhet. Valemid, millega objektist pilt rekonstrueerida, jäävad mõlema funktsiooni puhul samaks.

1.2 Hadamard'i maatriksid

Hadamard'i maatriks on ruutmaatriks, mille komponentideks on ühed ja miinus ühed ning kõik tema read (ja veerud) moodustavad ortogonaalse baasi. Siit järeldub Hadamard'i maatriksite omadus, et

$$HH^T = nI_n, \quad (1.4)$$

kus n on Hadamard'i maatriksi järk ja I_n on sama järku ühikmaatriks. Kõige väiksem Hadamard'i maatriks on teist järku:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Kõik ülejäänud leitud Hadamard'i maatriksid on $4n$ järku, kus n on positiivne täisarv. n^2 järku Hadamard'i maatrikseid saab koostada Sylvesteri konstruktsiooni järgi:

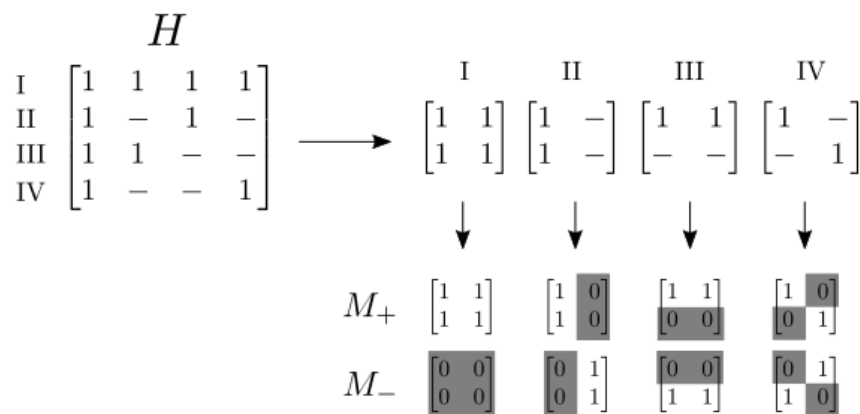
$$H_{n^2} = \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

kus $n = 2^m$ ja m on positiivne täisarv.

Hadamard'i maatriksid on nime saanud kuulsa prantsuse matemaatiku Jacques Hadamardi järgi.

Hadamard'i maatriksid arvutuslikus kummituskavas

Hadamard'i maatriksi ridade ortogonaalsuse omaduse tõttu on need arvutuslikus kummituskavas laialt levinud [4]. Selle omaduse kasutamiseks võetakse Hadamard'i maatriks ning iga tema reast moodustatakse üks mustrimaatriks (joonis 1.4). Seega, kui soovime mustreid suuruses $(N \times N)$, on selleks vaja Hadamard'i maatriksit järguga N^2 . Sellisest maatriksist saadakse järelikult N^2 -ist mustrist koosnev komplekt.



JOONIS 1.4: Valgusmustrite moodustamine

Näide Hadamard'i maatriksi ridade maatriksiteks muutmisest ning seejärel nende teisendamiseks sobivateks mustrimaatriksiteks. Joonisel tähistab „-“ miinus ühte.

Valgusmuster saab koosneda valgustatud ja valgustamata aladest. Neid tähistame maatriksites vastavalt ühtede ja nullidena. Järelikult on vaja teisendada Hadamard'i maatriksist koostatud mustrimaatrikseid, et neid saaks arvutuslikus kummituskavas kasutada.

Selleks kasutatakse eeskirja:

$$M_+ = \frac{M_{\pm} + 1}{2}, M_- = \frac{-M_{\pm} + 1}{2}, \quad (1.7)$$

kus M_{\pm} on Hadamard'i maatriksi reast koostatud maatriks. Indeks \pm viitab siin ja edaspidi maatriksile elementidega $+1$ ja -1 . Indeks $+$ või $-$ tähistab maatriksit elementidega $+1$ ja 0 . Samasugust viisi tähistatakse ka skalaare ja vektoreid, mis on vastavate maatriksitega seotud.

Eeskirjaga luuakse igast esialgsest mustrimaatriksist kaks maatriksit, mille komponentideks on ühed ja nullid ning on näha, et seal, kus esimesel maatriksil on ühed, on teisel nullid ja vastupidi. Selliseid maatrikseid on võimalik projektoriga kujutada ning pilt objektist on võimalik luua kasutades neist kas ühte komplekti mustreid (M_+ või M_-) või siis mõlemat komplekti mustreid (M_+ ja M_-). Kahe komplekti valgusmusteri kasutamist arvutuslikus kummituskuvast, kus üks komplekt on teise vastand, nimetatakse ka diferentsiaalseks arvutuslikuks kummituskuvaks [9] (mitte segi ajada diferentsiaalse klassikalise kummituskuvaga [8]). Diferentsiaalse kummituskuva puhul avaldub objektilt mõõdetud signaal siis järgnevalt:

$$M_{+ij}O^{ij} - M_{-ij}O^{ij} = S_+ - S_- = M_{\pm ij}O^{ij} = S_{\pm}, \quad (1.8)$$

kus M_+ ja M_- on valemiga (1.7) saadud mustrimaatriksid, S_+ ning S_- vastavate mustritega mõõdetud signaalid ja M_{\pm} on Hadamard'i maatriksi reast moodustatud maatriks. Kokku saame signaali, mis vastab olukorrale kus oleksime kasutanud valgusmusterina päris Hadamard'i maatriksi rida. Sisuliselt näitab valem (1.8) objekti kujutamist Hadamard'i baasis. Üldistades (1.8) üle kõigi mõõtmiste jõutakse objekti Hadamard'i teisenduseni:

$$HO = S_{\pm}, \quad (1.9)$$

mille puhul H on Hadamard'i maatriks, objekt O on kujutatud vektorina ja S on vektor mõõdetud signaalidest.

Lahendusmeetodid

Kui objektilt peegeldunud valguse intensiivsused on kõigi valgusmustrite jaoks mõõdetud, siis lahendusviise, kuidas mõõtmistulemustest pilt välja arvutada, on kaks: iteratiivne meetod ja võrrandsüsteemi lahendamine.

Iteratiivne meetod

Iteratiivse meetodi korral liidetakse kõik kasutatud mustrid kokku ning iga mustri panus summasse sõltub talle vastavast signaalist. Iteratiivse meetodi üldkuju on tuntud kui

$$O = \langle (S - \langle S \rangle)(M - \langle M \rangle) \rangle , \quad (1.10)$$

kus O on pilt uuritavast objektist, S tähistab signaalide intensiivsusi ja M tähistab valgusmustreid [10].

Saadud pildi lahusus on võrdne valgusmustrite lahutusega. Ideaalsel juhul, kus puudub müra, saaks täpse $N \times N$ pildi objektist N^2 mõõtmise korral. See tähendab, et valgusmustrite komplekti moodustamisel kasutatakse ära kõik ühe Hadamard'i maatriksi read. Selline üks komplekt mustreid (M_+ või M_-) ei moodusta küll enam eraldiseisvana ortogonaalset baasi, aga sellest hoolimata on baasivektorid (ehk mustrid) üksteisest sõltumatud ja võimaldavad objekti ühest väljaarvutamist.

Iteratiivse meetodi valem on põhimõtteliselt Hadamard'i pöördteisendus, mis on kohandatud kujule, kus Hadamard'i maatriksi asemel kasutatakse reaalselt kuvatavaid valgusmustreid. Hadamard'i pöördteisendus ise on järgmine:

$$H^{-1} \cdot \left| \begin{array}{l} HO = S_{\pm} \end{array} \right.$$

$$H^{-1}HO = H^{-1}S_{\pm} , \quad H^{-1} = \frac{1}{n}H \quad (1.11)$$

$$\longrightarrow O = \frac{1}{n}HS_{\pm} ,$$

kus n on Hadamard'i maatriksi järk ja H^{-1} leitakse seosest (1.4).

Võrrandsüsteemi lahendamine

Teine võimalus pildi koostamiseks on lahendada lineaarvõrrandsüsteem objekti O suhtes:

$$MO = S , \quad (1.12)$$

kus M ja S on vektorid, mille elementideks on vastavalt valgusmuustrid ja saadud signaalid. Suuremate lahutuste korral muutub võrrandsüsteemiga pildi konstrueerimine arvutuslikult väga mahukaks ning eelistatud on kasutada iteratiivset meetodit.

Meetodid Hadamard'i maatriksite koostamiseks

Üheks huvitavaimaks probleemiks Hadamard'i maatriksite juures on nende koostamine. Hadamard'i hüpotees väidab, et leidub Hadamard'i maatriks järguga $4k$ iga k kohta, kus k on positiivne täisarv [11]. Seda hüpoteesi ei ole siiani rangelt tõestatud, aga seni on see väga kindlalt paika pidanud.

Esimeseks meetodiks Hadamard'i maatriksite koostamiseks oli aastal 1876 James Joseph Sylvesteri poolt välja pakutud konstruktsioon, mis võimaldas väga lihtsalt koostada Hadamard'i maatrikseid järguga 2, 4, 8, 16, 32, jne [12]. 1893 aastal leidis Hadamard viisi koostada Hadamard'i maatrikseid ka järkudega 12 ja 20 [13]. Järgmiseks avastas Paley 1933. aastal lõplikel väljadel põhineva konstruktsiooni, millega sai koostada maatrikseid järguga $2(q+1)$, kus q on algarv, mis on kongruentne 1-ga mooduli 4 järgi (1 ja q annavad 4-ga jagades samasuguse jäägi) [14].

Erinevaid Hadamard'i maatriksite konstruktsioone saab omavahel kombineerida kuna tensorikorrutis kahe Hadamard'i maatriksi vahel annab tulemuseks samuti Hadamard'i maatriksi. Näiteks väikseim $4k$ järguga Hadamard'i maatriks, mida ei saa koostada kombineerides Sylvesteri ja Paley meetodit on 92. Viise, kuidas Hadamard'i maatrikseid luua on aastatega aina juurde tulnud, aga üldiselt on need meetodid läinud palju spetsifilisemaks ning tehniliselt aina keerulisemaks. 2005 avaldas Kharghanin et al. artikli Hadamard'i maatriksi järguga 428 koostamisest ning sellest saati on väikseim Hadamard'i hüpoteesile vastav maatriks, mida pole koostatud, järguga 668 [15]. Peale selle maatriksi on veel 12 teist järku alla 2000, mis on seni konstrueerimata [16].

Järgnevalt tuuakse välja Hadamard'i maatriksite koostamise meetodid, mida kasutati bakalaureusetöös, et kujutada kummituskuvaga suhtele 16:9.

Üldistatud Sylvesteri konstruktsioon

Üldistatuna on Sylvesteri konstruktsioon kujul

$$H_{2^k} = \begin{bmatrix} H_{2^{k-1}} & H_{2^{k-1}} \\ H_{2^{k-1}} & -H_{2^{k-1}} \end{bmatrix} = H_2 \otimes H_{2^{k-1}}, \quad (1.13)$$

kus k on positiivne ühest suurem täisarv, H on Hadamard'i maatriks ning \otimes tähistab tensorkorrutist. Seega saab selle meetodiga koostada Hadamard'i maatrikseid, mille järk on kahe aste.

4 · 3ⁿ meetod

Ionin ja Kharaghani näitasid aastal 2003 ilmunud teadustöös, kuidas rekursiooni kasutades on võimalik koostada Hadamard'i maatrikseid järguga $4 \cdot 3^n$ iga täisarvu $n \geq 0$ kohta [17].

Olgu

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & - & 1 \\ 1 & 0 & - \\ - & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & - & 1 \\ 1 & 1 & 0 & - \\ 1 & - & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

kus $-$ tähistab -1 -te. Olgu A_n ja B_n defineeritud rekursiivselt iga $n \geq 0$ korral kui

$$A_n = B_{n-1} \otimes I, \quad B_n = A_{n-1} \otimes J + B_{n-1} \otimes Q, \quad (1.15)$$

kus I tähistab kolmandat järku ühikmaatriksit ja J kolmandat järku maatriksit, mille kõik komponendid on ühed. Siis

$$H_n = A_n + B_n, \quad H'_n = A_n - B_n, \quad (1.16)$$

kus H_n ja H'_n on mõlemad $4 \cdot 3^n$ järku Hadamard'i maatriksid.

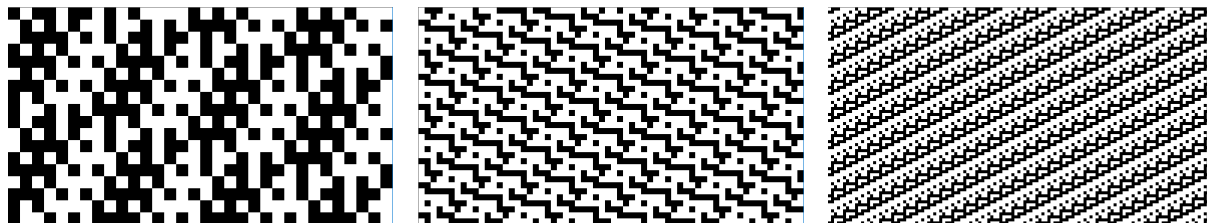
2 Arvutused ja simulatsioonid

2.1 16:9 suhtele valgusmustrite koostamine

Et koostada valgusmustreid suhtele 16:9, peab esiteks koostama Hadamard'i maatriksi, mille järk oleks $16x \cdot 9x$, kus x on positiivne täisarv. Sellises järkus Hadamard'i maatriksi saab luua, kombineerides Sylvesteri konstruktsiooni Ionini $4 \cdot 3^n$ meetodiga, sest Hadamard'i maatriksite tensorikorrutis annab tulemuseks samuti Hadamard'i maatriksi. Nii saame luua maatrikseid järkuga $2^m \cdot 4 \cdot 3^n$. Seame selle vastavusse meid huvitava maatriksi järkuga:

$$\begin{aligned} 16 \cdot 9 \cdot x^2 &\Leftrightarrow 2^m \cdot 4 \cdot 3^n \mid : 4, \\ 4 \cdot 9 \cdot x^2 &\Leftrightarrow 2^m \cdot 3^n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nelja ja üheksat saab väljendada kahe ja kolme astmetena. Seega saame moodustada Hadamard'i maatrikseid järkuga $16 \cdot 9 \cdot x^2$ eeldusel, et x^2 avaldub kahe ja kolme astmete kaudu. Joonisel (2.1) on ära toodud näiteid loodud mustritest.



JOONIS 2.1: Näited koostatud valgusmustritest lahutustega 32x18, 64x36 ja 128x72

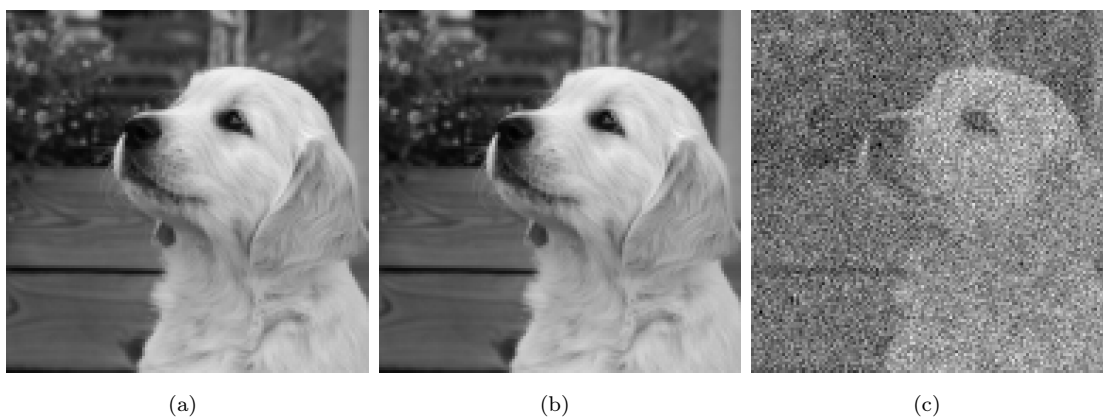
2.2 Kummituskuva simulatsioonide meetodid

Viise, kuidas Hadamard'i maatrikseid arvutuslikus kummituskuvas kasutada, on mitmeid. Et erinevaid meetodeid hea võrrelda oleks, kirjutati kummituskuva simulatsioon, millega on võimalik kvantitatiivselt määrata kujutatud pildi kvaliteeti (originaalpildi pikslite väärtused on teada). Motivatsioon simulatsiooni kasutada tuli ka asjaolust, et suuremate lahutusvõimete juures kestab eksperiment pikka aega. Selle peamiseks põhjuseks oli aeglane arvuti videoliides, mis piiras kiiremat valgusmustrite kuvamist objektile. Need

probleemid langevad aga simulatsiooni kasutades ära ja mõõtmised, mis laboris tehes võtaksid aega minuteid või tunde, saab arvutiga ära teha paari sekundiga.

Hadamard'i maatriksite eelis suvaliste mustrite ees

Lihtsaim viis Hadamard'i maatriksite kasutamiseks kummituskivas on koostada valgusmustrid Sylvesteri konstruktsiooni järgi. Sellised mustrid annavad palju parema tulemuse võrreldes suvaliselt koostatud mustritega (millel on samasugune valgustatud pikslite ja pimedate pikslite suhe). Kui mõõtmistel puudub müra, siis on N piksliga pilt võimalik perfektselt rekonstrueerida kasutades selleks Sylvesteri konstruktsiooniga loodud N -i valgusmustrit (joonis 2.2).



JOONIS 2.2: Sylvesteri konstruktsiooni ja suvalise konstruktsiooni võrdlus. (a) on originaalpilt mõõtmetes (128x128) pikslit, (b) on originaali rekonstruktsioon kasutades 128^2 Sylvesteri konstruktsiooniga loodud mustrit. (c) puhul on kasutatud sama palju suvalisi mustreid.

Simulatsioonid diferentsiaalse ja tavalise kummituskuvaga

Kuigi pildi saaks luua kasutades ainult nn. ühte komplekti mustreid, siis leidub ka põhjusi, miks võiks eelistada kahte komplekti mustreid [9]. See tähendab, et iga valgusmustrit kohta kuvatakse objektile järgnevalt kohe ka selle mustri vastandmuster ning mustriga saadud signaalist lahutatakse tema vastandmustriga saadud signaal. Nii on võimalik saavutada parem signaali-müra-suhe, sest kui müra kahe järjestikuse mõõtmise ajal oluliselt ei muutu, siis taandub see signaalide lahutamise käigus välja.

Diferentsiaalne kummituskuva tagab üldiselt küll parema kvaliteediga pildi, aga selle eest kulub selle meetodiga kaks korda rohkem aega (mõõtmisi on kaks korda rohkem).

Seega ei saa kindlalt öelda, et üks meetod teisest parem oleks. Et hinnata, kumba meetodit on mõistlikum kasutada, viidi läbi võrdlev simulatsioon tavalise kummituskuvaga (üks valgusmustrite komplekt) ja diferentsiaalse kummituskuvaga (kaks valgusmustrite komplekti). Uuriti, kui efektiivselt toimivad mõlemad meetodid nii juhusliku müra kui ka põhjuslikult muutuva müra korral.

Simulatsioonid viidi läbi nii Sylvesteri, Ionini kui ka nende kahe meetodi kombineerimisel loodud valgusmustritega. Sylvesteri konstruktsiooni puhul kujutati lahutuses 128x128 pikslit, Ionini puhul 54x54 pikslit ja nende kombinatsiooni puhul 128x72 pikslit. Sellised piltide lahutused tulenesid sobivate Hadamard'i maatriksite võimalikest suurustest ning arvutimälu mahust (8 GB RAM), mis pidi kõiki mustrimaatrikseid mälus hoidma. Näiteks puhta Sylvesteri konstruktsiooni puhul simuleeriti arvutuslikus kummituskavas 16384 valgusmustri kuvamist objektile ja diferentsiaalses kummituskavas 32768 mustri kuvamist.

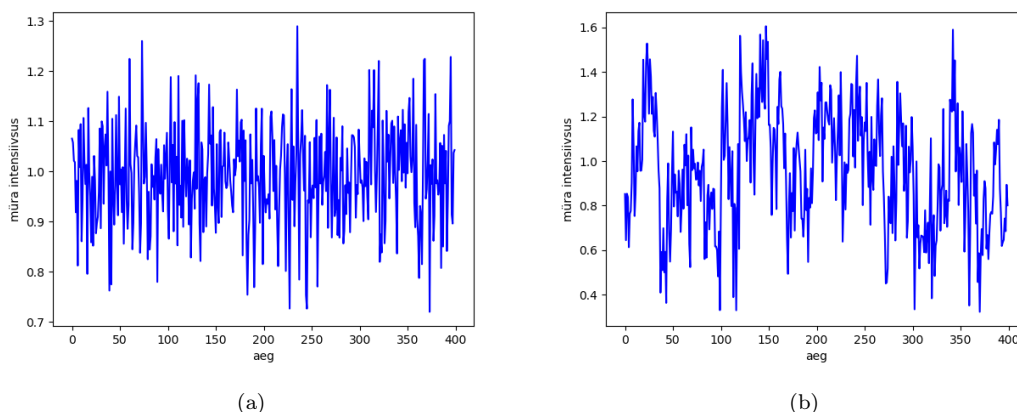
Müra simulatsioonides

Füüsikaliste mõõtmiste puhul lisandub mõõdetavale olulisele signaalile juurde tihti ka eksperimentaalne müra (ehk juhuslik signaal). Erinevaid mürasid liigitatakse selle järgi, kuidas nende energia jaotub üle sagedusriba. Käesolevas töös on uuritud, kuidas mõjutavad kummituskuva mõõtmisi valge ja roosa müra.

Valges müras jaotub müraenergia võrdselt üle terve sagedusriba ning seega selle spektraaltihedus on konstantne. Diskreetses aegesisuses väljendub valge müra üksteisest sõltumate väärtuste jadana, kus kõik väärtused on samasuguse tõenäosusjaotusega.

Roosa müra (tuntud ka kui $\frac{1}{f}$ müra) spektraaltihedus on pöördvõrdelises sõltuvuses sagedusega. See tähendab, et roosas müras on suurema energiaga madalasageduslikud komponendid ning seega muutub mürasignaali aeglasemalt kui valge müra puhul. Kuna roosa müra signaali väärtused sõltuvad eelnevatest väärtusest, siis võib arvata, et sellisel juhul annab diferentsiaalne kummituskuva palju parema tulemuse kui tavaline kummituskuva.

Simulatsioone tehti mitmete eri tugevustega müradega. Müra tugevust iseloomustavaks parameetrikaks valiti mürasignaali standardhälve. Esmapilgul võib loogilisemaks parameetrikaks paista mürasignaali keskmine väärtus, aga võttes arvesse valemit (1.10) on näha, et keskmine mürasignaali lahutatakse lõpptulemusest nagunii maha. Seega on segavaks faktoriks just müra varieeruvus, mitte aga müra keskmine väärtus.



JOONIS 2.3: Näide valgest (a) ja roosast (b) mürast ajaesituses.

Valge müra iseloomustamiseks sobib standardhälve suurepäraselt, kuna müra genereerimine sõltub otseselt etteantud standardhälbe väärtusest. Roosa müra genereeriti kasutades stohhastilist Voss-McCartney algoritmi [18], [19] ning müra tugevust reguleeriti müra amplituudi kordajaga.

Pildi kvaliteedi hindamine

Kummituskuvaga loodud pildi kvaliteedi hindamiseks on kasutatud selle ruutkeskmist viga (*Root Mean Square Error*) võrreldes originaalpildiga:

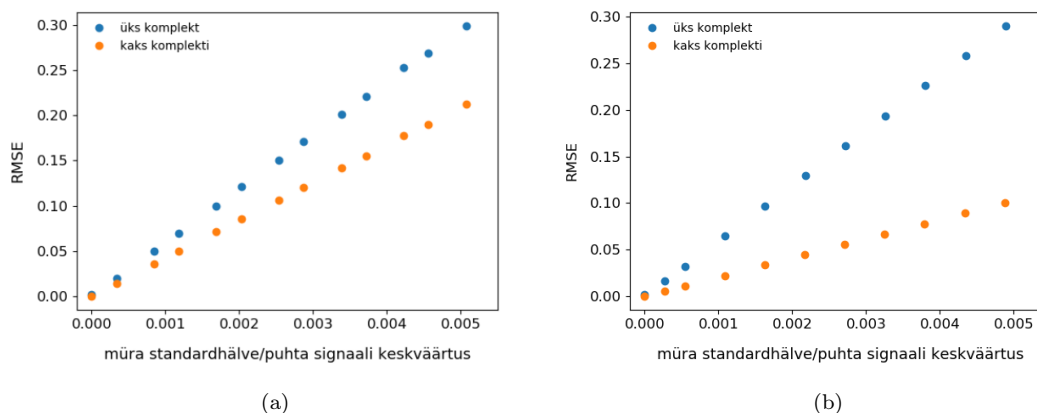
$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i,j}^{m,n} (O_r(i,j) - O_o(i,j))^2}{N}}, \quad (2.2)$$

kus $O_r(i,j)$ ja $O_o(i,j)$ tähistavad vastavalt originaalpildi ja kummituskuvaga taastatud pildi (i,j) piksli väärtusi, m ja n on piltide mõõtmed ning N on pikslite koguarv pildil. Pilt on vaid halltoonides ning selle pikslid võivad omada väärtusi 0-st 1-ni, kus 0 tähistab musta ning 1 valget pikslit. Suurem RMSE tähendab kehvema kvaliteediga pilti. Simulatsioonides suurendati müra tugevust kuni piltide RMSE tõiis umbes 0,25-ni. Edasistel simulatsioonidel ei olnud mõtet kuna suuremate vigade puhul ei ole võimalik piltidelt midagi peale müra näha.

Erinevate simulatsioonide ruutkeskmisi viga võrreldes tuleb kindlasti arvesse võtta ka pildi lahutust. Mida suurem see on, seda vähem hakkavad erinevate mustritega mõõdetud signaalid erinema ning seega seda rohkem hakkab müra pildi loomist häirima.

2.3 Simulatsioonide tulemused

Kummituskuva Sylvesteri konstruktsiooniga



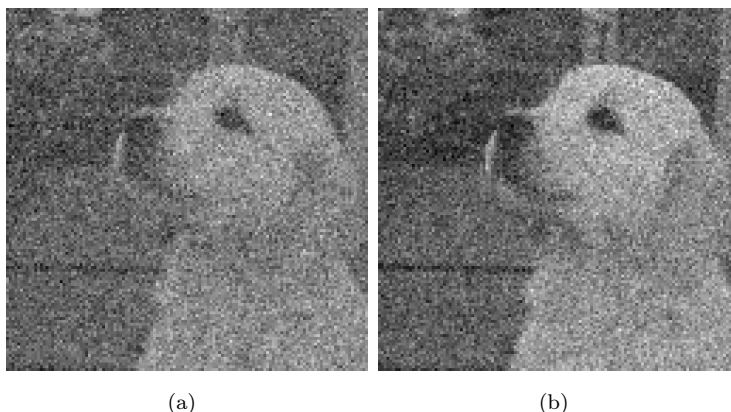
JOONIS 2.4: Simulatsiooni tulemused valge (a) ja roosa (b) müraga. Kujutatud on rekonstrueeritud piltide ruutkeskmise vea sõltuvust müra standardhälbest.

Ootuspäraselt jaotub valge müra piltidele ühtlaselt (joonis 2.5). Selge on, et diferentsiaalne kummituskuva annab parema tulemuse kui harilik kummituskuva, kuna mõõtmisi tehakse kaks korda rohkem – tulemustest ilmneb aga, et valge müra puhul on kahe meetodi erinevus võrdlemisi väike (joonis 2.4(a)). Seega optimaalseima pildi kvaliteedi ja kuluva aja suhte saavutamiseks juhusliku müra puhul tasub kasutada hariliku kummituskuva.

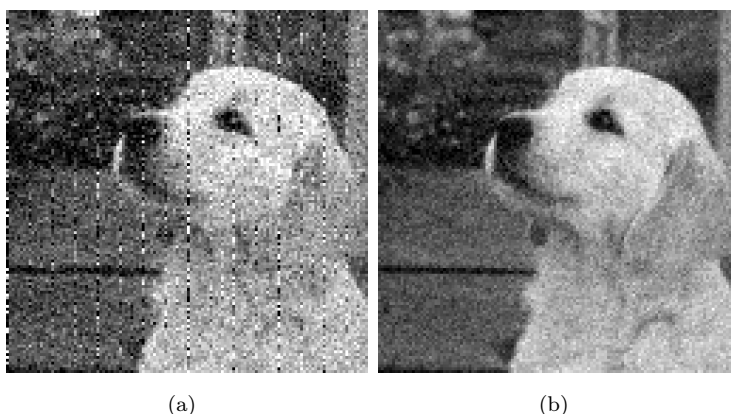
Roosa müra puhul saavutatakse diferentsiaalse kummituskuvaga palju parem tulemus (joonis 2.6). Ühe komplekti puhul on pildile tekkinud teistest eristuvad piksliveerud, mis muudavad pildi kontrasti kehvemaks. Selliste veergude päritolu tuleb tõenäoliselt asjaolust, et roosa müra genereerimise algoritm ei ole perfektne ning seal on mõni sageduskomponent tugevamalt esindatud kui ta peaks olema.

Esimese piksli probleem

Kui kasutada mõõtmisel diferentsiaalset kummituskuva, annavad iteratiivne lahendusmeetod ja võrrandsüsteemi lahendamine täpselt sama tulemuse. Tuleb aga välja, et kui kasutada vaid ühte komplekti mustreid, siis hakkavad kahe meetodiga saadud tulemused erinema. Nimelt, iteratiivset meetodit kasutades, ei ole võimalik enam välja arvutada pildi esimese piksli väärtust (joonis 2.7). See tuleneb Sylvesteri konstruktsiooni eripärasest: iga niiviisi koostatud Hadamard'i matriksi esimene veerg koosneb ainult ühtedest. Kuna



JOONIS 2.5: Näited piltidest, mis on saadud valge müra simulatsioonidega. (a) on tehtud hariliku kummituskuvaga ($RMSE = 0,2$) ning (b) diferentsiaalse kummituskuvaga ($RMSE = 0.14$). Mõlema pildi koostamisel on kasutatud sama tugevat müra.



JOONIS 2.6: Näited piltidest, mis on saadud roosa müra simulatsioonidega. (a) on tehtud hariliku kummituskuvaga ($RMSE = 0,16$) ning (b) diferentsiaalse kummituskuvaga ($RMSE = 0,05$). Mõlema pildi koostamisel on kasutatud sama tugevat müra.

igast matriksi reast luuakse üks valgusmuster, siis järelkult on iga valgusmusteri esimene element alati üks. Iteratiivse meetodi puhul lahutatakse igast mustrist maha komplekti keskmine muster (1.10). Kui iga mustri esimene element ja keskmine element on samad, jääbki esimese piksli väärtuseks null. Järelkult on vaja iteratiivse lahendusmeetodi valemite veidi muuta, et see ka ühe valgusmusteri komplektiga õige tulemuse annaks.

Probleemi lahendamiseks on esiteks hea uurida iteratiivset lahendusmeetodit Hadamard'i matriksite teisenduste kontekstis. Objekti mõõtes kujutatakse see vastavasse valgusmusterite baasi. Uuritava meetodi korral oleks selleks Hadamard'i baas, kus baasivektoreiks on



JOONIS 2.7: Pildi esimene piksel tuleb alati must, kui kasutada mõõtmisel Sylvesteri konstruktsiooniga koostatud ühte valgusmustrite komplekti ja iteratiivset lahendusmeetodit.

Hadamard'i maatriksi read. Pärast mõõtmist taastatakse pilt siis Hadamard'i pöördteisendusega (1.4). Valgusmustriga mõõdetud signaal ei vasta aga täpselt signaalile, mis oleks mõõdetud, kui oleks võimalik kujutada objektile Hadamard'i maatriksi rida (väärtustega -1 ja 1):

$$M_{\pm} = \frac{M_{\pm} + 1}{2} = \frac{1}{2}(M_{\pm} + 1),$$

$$S = M_{\pm i,j} O^{i,j} = \frac{1}{2} M_{\pm i,j} O^{i,j} + \frac{1}{2} J_{i,j} O^{i,j},$$

kus J tähistab maatriksit, mille kõik elemendid on ühed ning $J_{i,j} O^{i,j}$ ei tähistata midagi muud kui kokku summeeritud objekti „pikslite“ väärtusi. Nimetame seda edaspidi objekti summaks ning tähistame lihtsuse mõttes O_{Σ} .

On näha, et igas signaalis on peale olulise info ka pool objekti summast. Täpse pildi koostamiseks oleks oluline see lisesignaal mõõtmistulemustest maha lahutada. Objekti summat saame hinnata läbi mõõdetud signaalide. Sylvesteri konstruktsiooni korral on kõigi mustrite puhul peale esimese valgustatud pool objektist ning seega $2\langle S \rangle = O_{\Sigma}$. Saame koostada uue iteratiivse valemi Sylvesteri konstruktsiooni jaoks:

$$O = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (2S_k - 2\langle S \rangle) M_{\pm k} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N (S_k - \langle S \rangle) M_{\pm k} \quad (2.3)$$

Saadud valem annab jällegi identse tulemuse võrrandsüsteemi lahendamisega. Näeme, et võrreldes üldise iteratiivse lahendusmeetodi valemiga on $(M_k - \langle M \rangle)$ välja vahetatud $M_{\pm k}$ -ga (1.10). Kahjuks ei lahenda valem probleemi täielikult. Kui mõõtmisel esineb müra, siis esimese piksli väärtus hälbib ikkagi rohkem oma tõelisest väärtusest, kuna selle mõõtmine on esindatud kõigis mustrites.

Esimese piksli probleemi üldisem põhjus seisneb asjaolus, et Sylvesteri konstruktsiooniga koostatud Hadamard'i matriksid ei ole regulaarsed, st. rea ja veeru elementide summa ei ole konstantne (esimeses reas/veerus on summaks matriksi järk, ning kõigis teistes ridades/veergudes on summaks null).

Kummituskuva Ionini konstruktsiooniga

Ionini $4 \cdot 3^n$ meetodiga koostatud Hadamard'i matriksid on regulaarsed, juhul kui n on paarisarv ning sellisel juhul ei teki probleemi, et müra koguneks mingisse kindlasse pikslisse. Niiviisi loodud Hadamard'i matriksid on küll regulaarsed, kuid nende ridade summad ei ole nullid, vaid on alati positiivsed.

Ka Ionini konstruktsiooni jaoks saab leida täpsema iteratiivse lahendusvalemi, aga selle konstruktsiooni puhul ei ole täpse valemi kasutamine nii kriitiline, kuna Hadamard'i matriks on seekord regulaarne ja seega otsesid hälbeid pildis ei teki. Kuna täpse valemi kasutamine annab jälle identse tulemuse võrrandsüsteemi lahendamisega on siin selle tuletuskäik siiski ära toodud.

Et leida täpset lahendusvalemit Ionini konstruktsiooni jaoks on jälle vaja avaldada O_Σ läbi mõõdetud signaalide. Ionini meetodiga koostatud Hadamard'i rea summa on \sqrt{N} , kus N on matriksi järk. Seetõttu ei saa objekti keskväärtust esitada enam kahekordse keskmise signaalina. Tänu mustrimatriksite regulaarsuse kehtib seos

$$\langle S \rangle = \langle \langle M_+ \rangle \rangle_{i,j} O_\Sigma \rightarrow O_\Sigma = \frac{\langle S \rangle}{\langle \langle M_+ \rangle \rangle_{i,j}} . \quad (2.4)$$

Eelnevat tähistust arvesse võttes tuleb tähele panna, et

$$\langle S \rangle = \frac{\sum_{k=1}^N S_k}{N} , \quad \langle \langle M_+ \rangle \rangle_{i,j} = \frac{\sum_{i,j=1}^N \sum_{k=1}^N M_{+k,i,j}}{N \cdot N} , \quad O_\Sigma = \sum_{i,j=1}^N O_{i,j} ,$$

kus i ja j viitavad matriksi elemendile, k aga matriksile või skalaarile endale.

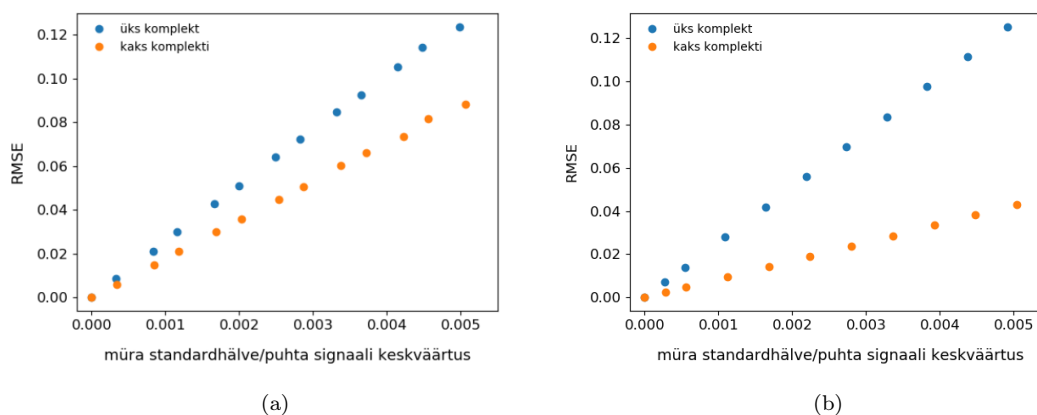
Arvutame välja $\langle \langle M_+ \rangle \rangle_{i,j}$. Kui Hadamard'i matriksi iga rea summaks on \sqrt{N} , siis iga sellest matriksist koostatud valgusmustriga on valgustatud $\frac{N}{2} + \frac{\sqrt{N}}{2}$ pikslit (nende pikslite väärtused on ühed). Järelikult

$$\langle \langle M \rangle \rangle_{i,j} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{N}}{2N} \rightarrow O_\Sigma = \frac{\langle S \rangle}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{N}}{2N}} . \quad (2.5)$$

Täpne iteratiivne valem Ionini meetodi jaoks tuleb siis

$$O = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(2S_k - \frac{\langle S \rangle}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{N}}{2N}} \right) M_{\pm k}. \quad (2.6)$$

Ionini meetodiga loodud maatriksitega viidi läbi sarnane simulatsioon nagu tehti Sylvesteri konstruktsiooni maatriksitega. Seekord oli mõõdetava pildi suurus 54x54 pikslit (Hadamard'i maatriks oli järgus $4 \cdot 3^6$). Nagu näha jooniselt 2.8, siis ootuspäraselt käituvad Ionini mustrid väga sarnaselt Sylvesteri omadele.

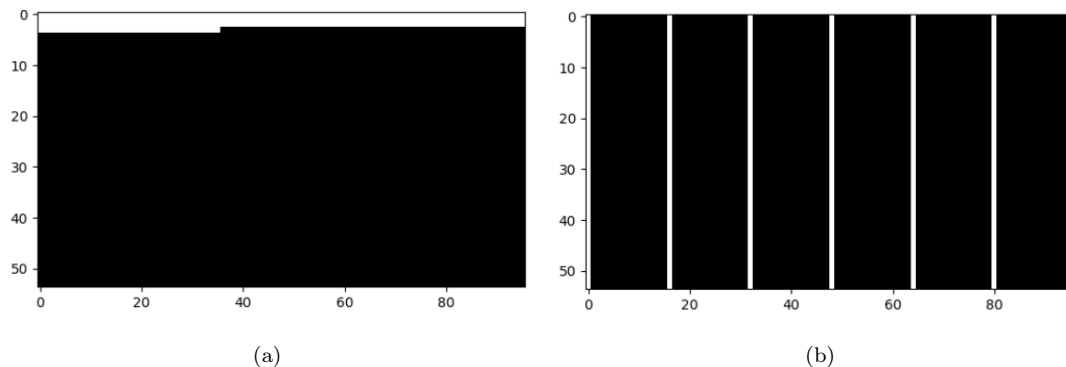


JOONIS 2.8: Simulatsiooni tulemused valge (a) ja roosa (b) müraga.

Sylvesteri ja Ionini konstruktsiooni kombinatsioon

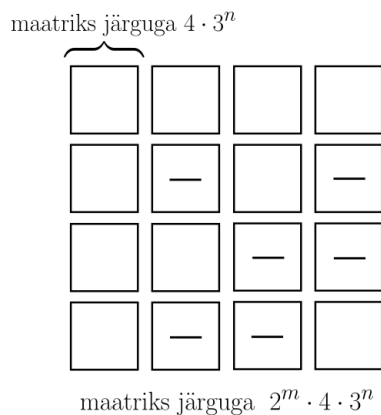
Nagu eespool näidatud (2.1), saab kombineerides Sylvesteri ja Ionini meetodit luua valgusmustreid kuvasuhtega 16:9. Selleks luuakse esiteks mõlema meetodiga eraldi Hadamard'i maatriks ning siis leitakse tensorikorrutis maatriksite vahel. Kui tensorikorrutatakse omavahel regulaarne ja mitteregulaarne maatriks, siis tulemuseks on mitteregulaarne maatriks. Nagu teada on, siis Hadamard'i maatriksi mitteregulaarsus põhjustab mõõtmistele probleeme, kui kasutada vaid ühte komplekti valgusmustreid.

Et uurida, kuidas maatriksi mitteregulaarsus tulemusi mõjutama hakkab, loodi mustri maatriksite komplekt ning see summeeriti üle kõigi maatriksite kokku üheks maatriksiks (joonis 2.9). Saadud maatriksi elemendid iseloomustavad, mitu korda kindlat piirkonda pildil mõõdetakse (või siis mitu korda kindel piksel on valgustatud). Kuna tulemus sõltub tensorikorrutise järjekorrast, siis korraldi katset nii, et maatriksid olid tensorikorrutatud teistpidi.



JOONIS 2.9: Üle kõikide mustrite summeeritud mustrikomplektid suuruses 96×54 .
 (a) koostamiseks on kasutatud tehet $H_{\text{SYL}} \otimes H_{\text{ION}}$ ning (b) koostamiseks tehet $H_{\text{ION}} \otimes H_{\text{SYL}}$.
 Tulemus jagati mustrite arvuga. Mustad pikslid on väärtusega 0.5 ja valged väärtusega 0.528.

Katsest on näha, et ühel puhul on kõige ülemised pikslite read suurema kaaluga (pikslid on valgustatud rohkem kui pooltel kordadel) ning teisel puhul moodustavad suurema kaaluga pikslid vertikaaljooned üle pildi. Mõlemal juhul on suurema kaaluga pikslite arv sama, mis on tensorikorrutise kasutatud H_{ION} järk. Järelikult on Sylvestri konstruktsiooni puhul esinenud esimese piksli probleem laienenud nüüd palju suuremale pildi osale.



JOONIS 2.10: Skeem $H_{\text{SYL}} \otimes H_{\text{ION}}$ maatriksi koostamisest

Üks ruut tähistab H_{ION} ning selle peal on kaks korda rakendatud Sylvesteri konstruktsiooni. Miinusega ruudud tähistavad maatrikiseid $-H_{\text{ION}}$. Näeme, et maatriksi $H_{\text{SYL}} \otimes H_{\text{ION}}$ esimese $4 \cdot 3^n$ rea summa ei ole null.

Suurte kaaludega pikslite asukohtasi arvestades, kasutati siinses töös maatriksite loomiseks varianti (a) joonisel 2.9. Et oma õigest väärtusest hälbinud piksleid parandada, kasutati Sylvesteri konstruktsiooni jaoks tuletatud iteratiivset valemit (2.3) selle vahega,

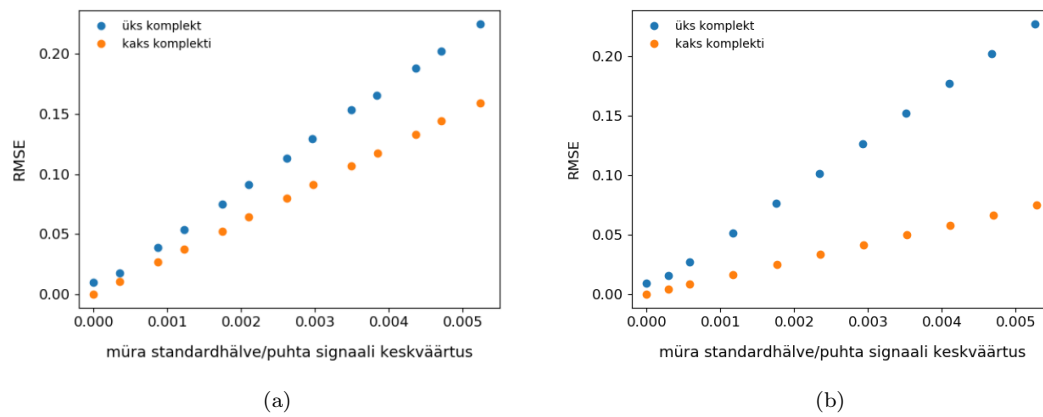
et seekord keskmistati $\langle S \rangle$ kõigi peale esimese $4 \cdot 3^n$ signaali. Kui Sylvesteri konstruktsiooniga koostatud Hadamard'i matriksi esimene rida/veerg on teistest erinev, siis nüüd on sama probleem kandunud üle tervele esimesele „reale/veerule“ Ionini matriksitele, mille peal on Sylvesteri konstruktsiooni kasutatud (joonis 2.10).

Nii üldise iteratiivse valemiga kui ka täpsema parandatud valemiga viidi läbi pildi lahendamise müravabas simulatsioonis (joonis 2.11). On näha, et parandatud valemiga tuleb kahe pildi osa vaheline kontrast parem, aga täielikult sellest vabaneda ei saa. Kui ka lisada simulatsioonidele müra juurde, siis hakkab see jälle vigast osa rohkem häirima.



JOONIS 2.11: (a) on üldise iteratiivse meetodiga saadud pilt ning (b) on saadud parandatud valemiga. Piltide mõõtmed on 96x54 pikslit.

Viimaseks uuriti, kuidas müra lisamine mõõtmisi mõjutab (joonis 2.12). Simulatsioon viidi läbi pildi peal mõõtmetega 144x72. Kuna nii Sylvesteri kui Ionini mustrid käitusid müra suhtes sarnaselt, siis oli oodata, et nende kombinatsioonil loodud mustrid ei erine oma käitumiselt, mida ka simulatsioon kinnitab. Ainukeseks silmapaistvaks erinevuseks on ühe valgusmusteri komplektiga loodud piltides vea esinemine isegi müra puudumisel (nagu eespool juba mainitud).



JOONIS 2.12: Simulatsiooni tulemused valge (a) ja roosa (b) müraga.

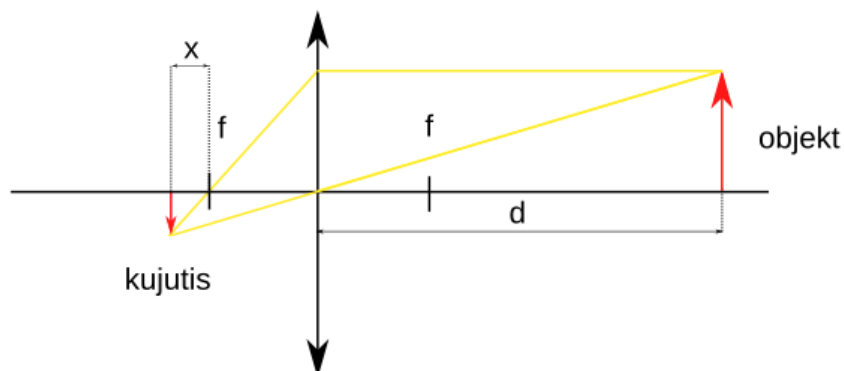
3 Eksperimendid

3.1 Eksperimentide meetodid

Eksperimendi eesmärgiks oli katsedada loodud 16:9 suhtega valgusmustreid arvutuslikus kummituskuvaga ja võrrelda saadud tulemusi harilike 1:1 suhtega valgusmustrite omadega. Esimeses katses kasutati mõõtmiseks kaamerat ning teises katses üksikpikslidetektorit. Mõlema katse korral viidi läbi mõõtmised nii tavalise arvutusliku kummituskuvaga kui ka diferentsiaalse kummituskuvaga.

Sobiva ühepikslise detektori valimine

Üksikpiksli detektorid on oma pindalalt väikesed ja seega sellega kogutud signaal peegeldunud valgusest on nõrk. Signaali suurendamiseks oleks vaja kasutada kumerlääts, mis koondaks peegeldunud valgust detektorile (joonis 3.1). Jooniselt on näha, et kujutise ja



JOONIS 3.1: Objektist luuakse kumerläätselga kujutis detektori pinnale. Kollasega on kujutatud kahte olulist kiirt kujutise moodustamiseks. Lääts asub objektist sama kaugel kui projektor.

objekti vahele tekib sarnaste kolmnurkade paar ning kehtib seos

$$\frac{h_{obj}}{h_{kujutis}} = \frac{d}{f+x} \xrightarrow{x \approx 0} \frac{d}{f}$$

$$\rightarrow f = \frac{h_{kujju} \cdot d}{h_{obj}},$$

kus h_{obj} ja h_{kujju} on objekti ja kujutise kõrgused, d on objekti kaugus läätses, x kujutise kaugus läätses fokaaltasandist ja f läätses fookuskaugus. Suhe $\frac{d}{h_{obj}}$ on ära määratud projektori vaateväljaga. Kasutatud projektori puhul on suhe $\frac{d}{h_{obj}}$ vertikaalsihis ≈ 2 ja horisontaalsihis $\approx 1,2$. Saame seosed

$$\text{vertikaalsiht: } h_{kujju} = \frac{f}{2},$$

$$\text{horisontaalsiht: } h_{kujju} = \frac{f}{1,2}.$$

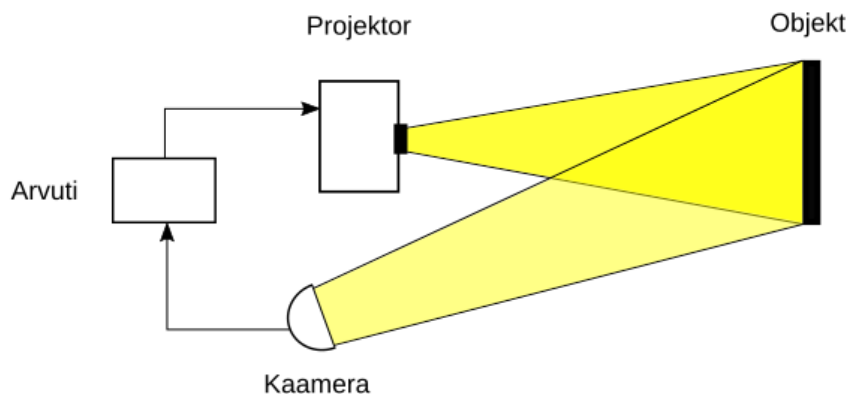
Minimaalne detektori pindala sõltub kujutise suurusel, mis omakorda sõltub läätses fookuskaugusest. Kasutades väikse fookuskaugusega läätses tekib väiksem kujutis ja vaja läheb väiksemat detektorit. Üldjuhul on väiksemad detektorid kiiremad ja odavamad. Samas on optiliselt tugevad läätsed tüüpiliselt väiksema diameetriga ja seega koguvad need vähem valgust detektorile.

Kõike seda arvesse võttes valiti tööks videoobjektiiv fookuskaugusega $f = 8$ mm ja Thorlabsi üksikpikslidetektor FDS1010 pindalaga $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$. Tekitatud kujutis on siis mõõtmetega $6,7 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$ ja mahub tervenisti detektorile ära.

Katse kaameraga

Esimeseks katseks lihtsustati harilikku arvutuslikku kummituskuvat skeemi ja kasutati üksikpikslidetektori asemel CCD kaamerat ELP-USB8MP02G-SFV (joonis 3.2). Kaamera mõõdetud pikslite väärtused summeeriti kokku üheks arvuks nagu oleks tegemist ühe pikslise detektoriga. Selline lähenemine võimaldas katsetada eksperimendi töökindlust ja tagas hiljem keerukama katse sujuvama kulgemise.

Mustrite kuvamiseks kasutati Texas Instruments LightCrafter Display 3010 EVM videoprojektorit. Kaamera seati projektori kõrvale vaateväljaga objektile, mis asetati poole meetri kaugusele. Objektiks valiti mustvalge pilt, et katset veelgi lihtsustada (joonis 3.3). Peale iga valgusmusteri kuvamist jäädvustas kaamera kaadri objektist. Värviline kaader muudeti mustvalgeks ning kõikide piksilite väärtused liideti kokku. Saadud arv iseloomustas tagasipeegeldunud valguse intensiivsust konkreetse valgusmusteri puhul. Peale kogu komplekti valgusmusterite kuvamist objektile koostati objektist kujutis kas üldise iteratiivse lahendusmeetodi valemi (1.10) abil või siis selle modifitseeritud kuju abil (2.3).



JOONIS 3.2: Katseskeem kaameraga



JOONIS 3.3: Pilt mõõdetud objektist (prinditud välja A3 suuruses paberile).

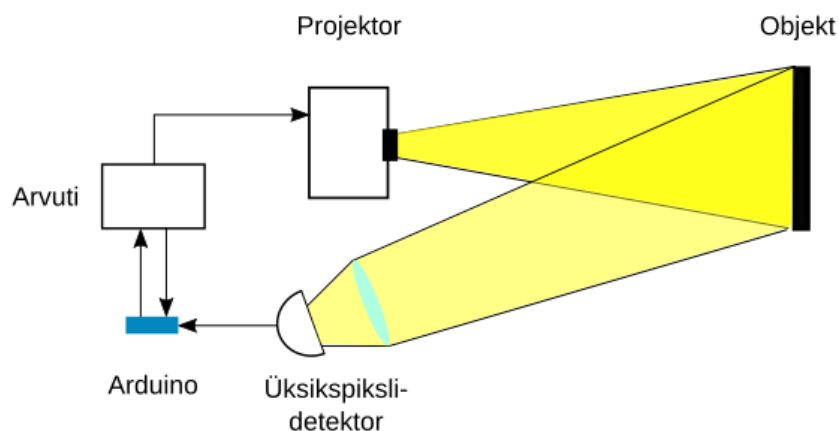
Võimalikult kvaliteetsete piltide saavutamiseks korrati katset erinevate parameetritega. Peamisteks parameetriteks, mille muutmist uuriti, kujunesid mõõtmiste kiirus ja pildi lahutus.

Mõõtmiskiirust sai muuta, kuna projektor ei vahetanud mustreid oma maksimum töösa-
gedusel. See tulenes asjaolust, et programmiga projektori ja kaamera tööd koordineerides
oli vajadus mõõtmistsüklit tehnikult pikendada, et kindlustada, et mõõtmishetkeks oleks
kuvatud õige valgusmuster.

Katse ühepikslise detektoriga

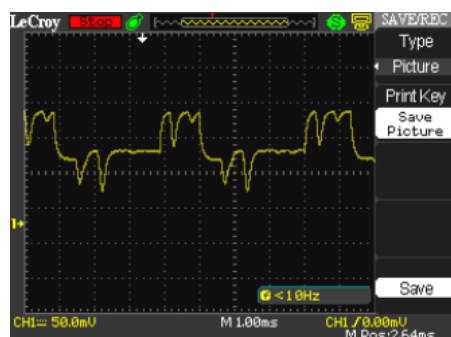
Teiseks katseks asendati kaamera ühepikslise detektoriga (joonis 3.4). Detektori ette kinni-
tati objektiiv, mis suurendas mõõdetud signaali tugevust. Detektori fotovoolust tekkinud
pinget, mis on lineaarses sõltuvuses diodile langenud valguse intensiivsusega, mõõdeti

Arduino Nanoga. Peale iga valgusmusteri kuvamist saadeti arvutist Arduinole käsk mõõta detektori väljundpinget.



JOONIS 3.4: Katseskeem ühepikslise detektoriga

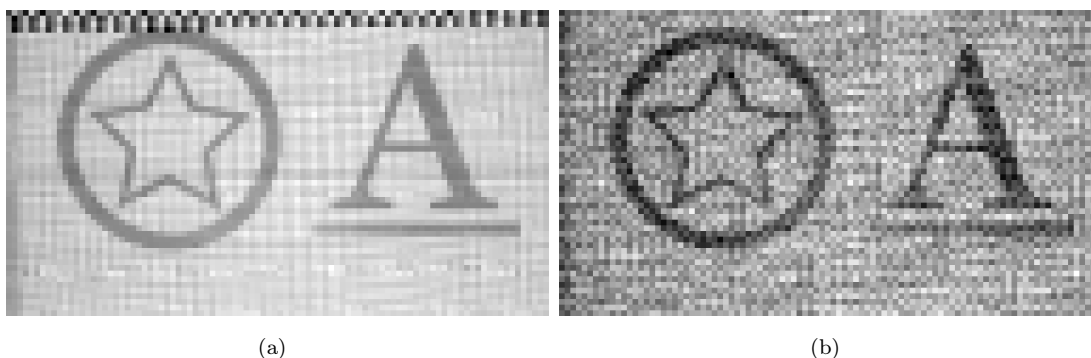
Üksikpiksli detektori kiiruse tõttu hakkasid mõõtmistel rolli mängima taustavalgustuse ja projektori töösagedused. Töö käigus ilmnnes, et isegi kui projektor kuvab ühte staatilist pilti, siis detektori väljundpinge kõigub kindla rütmiga (joonis 3.5). Signaalist, mille suurus sõltub mõõtmise ajahetkest on aga vähe kasu. Seega katsetati üle mitmete mõõtmiste keskmistamisega, et saavutada ajast sõltumatud signaalid. Leiti, et optimaalseim on keskmistada umbes üle 300 mõõtmise. Sellise Arduino mõõtmistsükli kestuseks mõõdeti 0,03 sekundit.



JOONIS 3.5: Ostsilloskoobiga mõõdetud üksikpiksli detektori väljundpinge kõikumine, kui projektor kujutas valget kaadrit.

3.2 Ekseperimentide tulemused

Pildi lahtusest sõltus mõõtmisaeg ja pildikvaliteet. Ühes komplektis mustrites on sama palju mustreid kui on kujutatavas pildis piksleid ning seega venivad suuremate lahutuste puhul mõõtmised väga pikaks. Üksikpiksli detektoriga mõõtes ilmnes, et suuremate lahutuste juures väheneb märgatavalt pildi kvaliteet, kuna müra oli võrreldes kaamera mõõtmistega palju suurem ja nagu eespool mainitud, siis lahutuse suurenedes hakkab müra rohkem pilti häirima. Kuna üksikpikseldetektoriga on objekti mõõtmine tehniliselt keerukam kui kaameraga, siis on suurem müra mõistetav (valgusmürale lisandub pinge mõõtmise määramatus, samuti on raskem üksikpikseldetektorit „fokuseerida“ objektile kui kaamerat). Nendel kaalutlustel kujutati üksikpikseldetektoriga väiksematel lahutustel kui kaameraga.

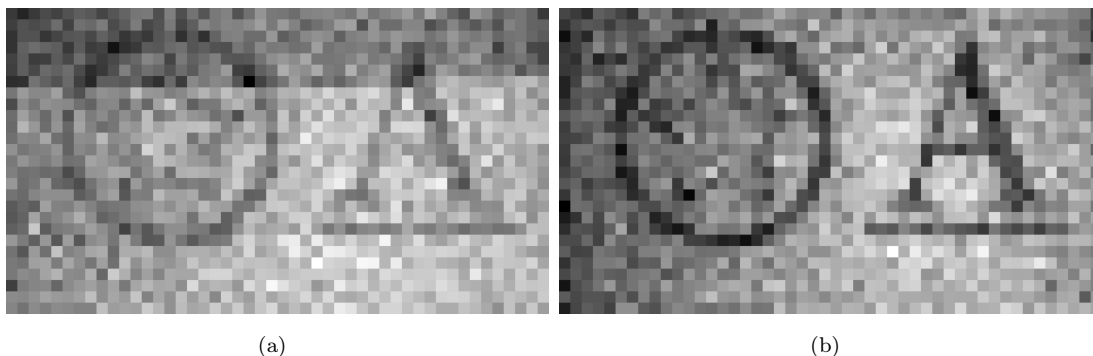


JOONIS 3.6: Kaameraga mõõdetud pildid

(a) on saadud ühe komplekti valgusmustritega ja (b) kahe komplektiga (diferentsiaalne kummituskuva). Piltide lahutuseks on 96x54 pikslit.

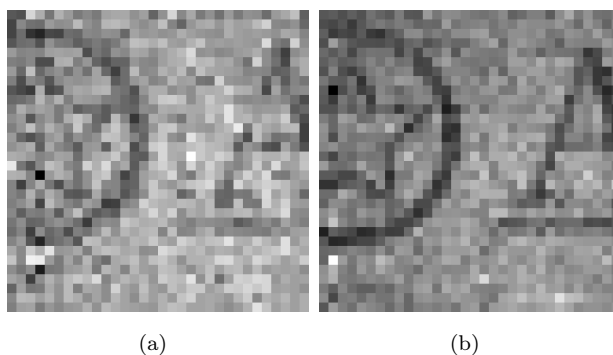
Kaameraga katsetest saadud piltidelt on näha, et headel tingimustel (kaamera oleks justkui ideaalne üksikpiksli-detektor) on väga edukalt võimalik kujutada suhetele 16:9 (joonis 3.6). Objekti detailid tulevad selgelt välja nii hariliku kui diferentsiaalse kummituskuva puhul. Hariliku kummituskuva puhul häirib pildi kontrasti ülevale äärele tekkinud riba, mis tuleneb kasutatud maatriksite mitteregulaarsusest. Häiritud pikslite arv on võrdne H_{ION} järguga. Kui defekti ei esineks, siis võiks julgelt väita, et sellistes tingimustes on harilik kummituskuva täiesti piisav. Teoreetiliselt peaks olema võimalik saavutada üksikpiksli-detektoriga sama head pildid kui kaameraga.

Jooniselt 3.7 on näha, et üksikpiksli-detektor piltide puhul on kvaliteet palju halvem: tähte ringi sees on vaevu näha. Kuigi diferentsiaalse kummituskuvaga koostatud pilt näeb



JOONIS 3.7: Ühepikslise detektoriga mõõdetud pildid.

(a) on saadud ühe komplekti valgusmuustritega ja (b) kahe komplektiga. Piltide lahutuseks on 48x27 pikslit.



JOONIS 3.8: Võrdluseks üksikpikslidetektoriga saadud pildid suhtega 1:1.

(a) on saadud ühe komplekti valgusmuustritega ja (b) kahe komplektiga. Piltide lahutuseks on 32x32 pikslit.

parem välja, siis tõenäoliselt ei oleks ka selles katses kahel pildil suuremat kvaliteedi vahet kui mitteregulaarsuse defekt hariliku kummituskuva pildi kontrasti ei häiriks. Ühepikslise detektori katses on defekt täpselt selline nagu simulatsioonid ennustasid: teistsuguse kaaluga pikslitele on justkui juurde lisatud müra taust. Seega võib arvata, et kummalised vertikaalsed piksliveerud, mis esinesid kaameraga tehtud pildil on põhjustatud kaamerast endast.

Katsed näitasid, et kuigi 16:9 suhtele kujutamisel on omad probleemid, on see igati võimalik ning saadud pildid on oma kvaliteedilt võrreldavad puhta Sylvesteri konstruktsiooniga saadud piltidega. 16:9 kujutamise probleemidest saaks vabaneda, kui leida Sylvesteri konstruktsioonile piisavalt universaalne asendusmeetod, millega saaks luua regulaarseid Hadamard'i maatrikseid, mille järgu ühtedeks algteguriteks oleksid kahed.

4 Kokkuvõte

Käesoleva töö eesmärgiks oli kombineerida kahte Hadamard'i maatriksite koostamise meetodit, et luua maatriksid, mida saaks arvutuslikus kummituskavas kasutada kujutamaks suhtele 16:9. Selline meetod avab võimaluse kasutada ära terve projektori vaateväli objekti valgustamisel ning autorile teadaolevalt ei ole sellist lähenemist keegi kasutanud.

Bakalaureusetöö referatiivses osas kirjeldati kummituskuva tööpõhimõtteid ja Hadamard'i maatrikseid ning nende olulisust arvutuslikus kummituskavas. Töö originaalses osas kirjutati simulatsiooniprogramm, millega võrreldi harilikku ja diferentsiaalset arvutusliku kummituskuva kasutades Sylvesteri ja Ionini meetodil (ning nende kombinatsioonil) loodud Hadamard'i maatrikseid. Samuti uuriti erinevaid probleeme, mis tekkisid kasutatud Hadamard'i maatriksite meetodite tõttu ning pakuti neile välja lahendused. Töö eksperimentaalses osas koostati arvutusliku kummituskuva katseskeem ning viidi läbi mõõtmised, milles katsetati loodud maatrikseid, mis võimaldasid kujutada suhtele 16:9.

Katsest leidsid kinnitust probleemid, mis simulatsioonide käigus ilmusid ning mida täielikult lahendada ei suudetud. Üldjoontes aga ilmnes, et 16:9 kujutamine annab võrdväärset häd tulemusi 1:1 suhtele kujutamiseega.

Töö autor soovib tänada suurepärase juhendamise eest Andreas Valdmanni, kes oli alati valmis kannatlikult vastama lõpututele küsimustele ning jagama asjakohaseid näpunäiteid. Suur tänu kuulub ka Jan Bogdanovile, kes aitas katsete tegemise juures lahendada kõikvõimalikke tehnilisi küsimusi ning kes hoidis laboris moraali kõrgel oma positiivse ellusuhtumisega. Tänu sõnad kuuluvad ka kolleegidele Sandhra-Mirella Valdmale ja Jürgen Luusile, kes muutsid laboris veedetud aja huvitavamaks ning kellest oli töö tegemisel palju abi. Kõik need inimesed on autorile suureks eeskujuks olnud.

Kirjandus

- [1] Ming-Jie Sun, Matthew P Edgar, Graham M Gibson, Baoqing Sun, Neal Radwell, Robert Lamb, and Miles J Padgett. Single-pixel three-dimensional imaging with time-based depth resolution. *Nature communications*, 7:12010, 2016.
- [2] Jing Cheng. Ghost imaging through turbulent atmosphere. *Optics express*, 17(10):7916–7921, 2009.
- [3] Matthew P Edgar, Graham M Gibson, Richard W Bowman, Baoqing Sun, Neal Radwell, Kevin J Mitchell, Stephen Welsh, and Miles J Padgett. Simultaneous real-time visible and infrared video with single-pixel detectors. *Scientific reports*, 5:10669, 2015.
- [4] Martin Harwit. *Hadamard transform optics*. Elsevier, 2012.
- [5] TB Pittman, YH Shih, DV Strelakov, and AV Sergienko. Optical imaging by means of two-photon quantum entanglement. *Physical Review A*, 52(5):R3429, 1995.
- [6] Alejandra Valencia, Giuliano Scarcelli, Milena D’Angelo, and Yanhua Shih. Two-photon imaging with thermal light. *Physical review letters*, 94(6):063601, 2005.
- [7] Jeffrey H Shapiro. Computational ghost imaging. *Physical Review A*, 78(6):061802, 2008.
- [8] F Ferri, D Magatti, LA Lugiato, and A Gatti. Differential ghost imaging. *Physical review letters*, 104(25):253603, 2010.
- [9] Baoqing Sun, Matt Edgar, Richard Bowman, Liberty Vittert, Stephen Welsh, Adrian Bowman, and Miles Padgett. Differential computational ghost imaging. In *Computational Optical Sensing and Imaging*, pages CTu1C–4. Optical Society of America, 2013.
- [10] Stephen Welsh, Matthew P Edgar, Richard Bowman, Phillip Jonathan, Baoqing Sun, and Miles J Padgett. Fast full-color computational imaging with single-pixel detectors. *Optics express*, 21(20):23068–23074, 2013.

-
- [11] A Hedayat, Walter Dennis Wallis, et al. Hadamard matrices and their applications. *The Annals of Statistics*, 6(6):1184–1238, 1978.
- [12] James Joseph Sylvester. Lx. thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous signsuccessions, and tessellated pavements in two or more colours, with applications to newton’s rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 34(232):461–475, 1867.
- [13] Jacques Hadamard. Resolution d’une question relative aux determinants. *Bull. des sciences math.*, 2:240–246, 1893.
- [14] Raymond EAC Paley. On orthogonal matrices. *Journal of Mathematics and Physics*, 12(1-4):311–320, 1933.
- [15] Hadi Kharaghani and Behruz Tayfeh-Rezaie. A hadamard matrix of order 428. *Journal of Combinatorial Designs*, 13(6):435–440, 2005.
- [16] Dragomir Ž Đoković. Hadamard matrices of order 764 exist. *Combinatorica*, 28(4):487–489, 2008.
- [17] Yury J Ionin and Hadi Kharaghani. A recursive construction for new symmetric designs. *Designs, Codes and Cryptography*, 35(3):303–310, 2005.
- [18] Allen Downey. Generating pink noise. <https://www.dsprelated.com/showarticle/908.php>.
- [19] Richard F Voss and John Clarke. ”1/f noise”in music: Music from 1/f noise. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 63(1):258–263, 1978.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Joonas Ariva,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Arvutuslik kummituskuva videoprojektori kuvasuhtega,

mille juhendaja on Andreas Valdmann, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. olen teadlik, et punktis 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Joonas Ariva,

Tartu, 31. mai 2019. a.