広島大学　学部・附属学校共同研究機構研究紀要
〈第45号　2017.3〉

間接証明カリキュラムの開発に関する研究
―背理法の学習過程に注目して―

早田　透　　上ヶ谷　友佑　　袴田　綾斗　　岩知道　秀樹
影山　和也　　小山　正孝　　寺垣内　政一

１．間接証明を巡る現状

背理法を用いた証明，ならびに対偶を用いた証明（以下，総称して間接証明と呼ぶ）が我が国で指導されるようになって久しい。しかしながら，達成率が3割程度と言われている証明学習（国宗，1987，p.12）の中でも，直接証明よりも一層困難とされる（cf. Antonini & Mariotti，2008）間接証明が広く理解されているとは言い難いことが推定される。

こうしたことを鑑みれば，間接証明を指導する必要性が乏しいと言われるかもしれない。しかしながら間接証明それ自体は，論理について考える上で非常に教育上の価値が高い教材であると我々は考える。例えば，有名な直観主義者による背理法への批判(Beth & Piaget，1966)を鑑みると，その立場を認めるか否かはさておき，古典論理においては無批判かつ無制限に認められてきた背理法に，批判を受ける繊細な側面が認められることが解る。また，Antonini & Mariotti (2008)は証明のモデルを構築し，間接証明を分析することを通して，「証明したい命題の証明」と「対偶命題や矛盾する命題の証明」の間に，排中律や二重否定の除去といったメタ理論が必須であり，しかもそれらが（Fishbein (1987)の意味で）直観的に受け入れがたいことを間接証明特有の困難性として指摘している。

こうした点を学び，克服していくことは，間接証明の理解を越え，論理そのものへの理解が深まることが期待される。何故ならば，論理とは日常生活で我々が使用する思考の様式であり，それ故に批判的に扱う事が難しいものだからである。直観的に受け入れがたい間接証明について考えることは，論理そのものを考察の対象とし，論理を扱う能力を育むための一つの重要な契機として捉えられる。従って，知識に留まらず能力を育むための教育を模索している現在の数学教育学研究において，間接証明を通した学びを研究しなければならないのである。勿論，間接証明それ自体が数学的に極めて強力なツールであり，学ぶ事で子どもの世界が広がることは言うまでも無いであろう。

こうした狙いを達成しようと考えたとしても，我が国において，現行のカリキュラムを法的に規定する学習指導要領（解説を除く）において，間接証明は明示的な指導内容としては位置付けられていない（勿論，実際には指導されているが）。これに対して，例えば数学的帰納法は指導内容として明確に位置付けられている。こうした点から，間接証明に関するカリキュラムが必ずしも十分検討された上で策定されたものでは無いのではないかという疑義を抱かざるを得ない。また，その様なカリキュラムが間接証明を，子ども達にとってより難しいものにしてしまっている可能性さえ考えられる。

このため,本研究プロジェクト全体の目標は，子ども達が間接証明をよりよく理解し，その事を通して論理について理解が深まるようなカリキュラムを開発することである。このことを受けて，本研究では，まず子ども達がどの様にして間接証明（ただし，後述するように今回は背理法に限定した）を作り上げていくかを明らかにすることを目的とする。このことが明らかにならない限り，カリキュラムを構築することは出来ないからである。

この目的のため，我々は教授実験を通した子

Toru Hayata, Yusuke Uegatani, Ryoto Hakamata, Hideki Iwachido, Kazuya Kageyama, Masataka Koyama, Masakazu Teragaito: A study on curriculum development for indirect proof: understanding and constructing the process of proof by contradiction

どもの観察という方法を選択した。そのため，まず第2節において教授実験の具体的な方法であるアプリオリ分析の内，特に背理法の知識に関する分析を行った。第3節では，それらを元に授業を構築し，実際に教授実験を行い，第4節でその成果を検証する。

2. アプリオリ分析

子どもに対する教授実験を実施する際には，幾つかの方法が考えられる。今回，我々が採る方法論がアプリオリ分析（Artigue, 1992）である。アプリオリ分析とは，数学の教授対象となる知識を中心に，理論的な分析を行うことで，学習者が知識を構成する（であろう）過程を明らかにする分析手法である。従って，アプリオリ分析の結果，成功すると見込まれる授業が設計されるのである。もしアプリオリ分析の結果構築された学習がうまくいかなかったならば，その理論的基盤に何らかの課題が認められる。それは理論自体の誤りかもしれないし，何らかの要素を考慮に入れてなかったためかもしれない。こうした課題を明らかにし，次なる発展へと繋げていく分析をアポステリオリ分析という。アポステリオリ分析を通して，理論の正当性あるいは限界が示される。換言すれば，アプリオリ分析という手法は，構築された理論に基づき，その理論の質を向上させたり，妥当性を示したりするための手法である（実際に，こうした手法による理論の精緻化による成果は，例えば Brousseu, Brousseau, & Warfield (2014) などに掲載されている)。このため，本研究の目的に適していると考えられる。

さて，この際，数学的な知識を分析するためには幾つかの方法があるが,「間接証明」という用語は，個々の研究者（数学者を含む）や書籍において，その使い方が必ずしも一貫していない（Antonini & Mariotti,　2008)。そのため，間接証明全般の分析を実施することは困難である。そこで，本研究では暫定的に，背理法に限定して分析を実施する。

最初に，Dawkins & Karunakaran (2016)による指摘に我々は注目した。氏らは，間接証明に関わる先行研究が，個々の数学的内容の役割を軽視することを指摘している。このことを鑑みれば，我が国において背理法は，平方根の無理数性の証明と関係した形で導入されることが多い（ex. 高橋, 2011)。しかし，そもそも無理数性を認識することそれ事態が非常に困難である（真野, 2010)。従って，背理法で扱う数学的内容それ自体が，学習者の水準において比較的容易に扱うことができるものでなければならないと考えられる。

次に，我々は子ども達が背理法を作り上げようとするとき，そこでは何らかの必要性に迫られているはずである，ということに注目した。一般的にいって，数学学習の授業設計においてある知識が産み出される動機や必要性を明らかにするためには，数学史を参照することが有力である。何故ならば，ある知識が誰かによって発見・発明されたとき，その人物は当時の状況下で，何かの必要性に迫られて当該の知識を発見・発明した筈だからである。従って，そのような状況は授業設計における大きな指針となり得る（このことは，数学史通りに授業を実施するという意味ではない)。

しかしながら，数学史において背理法を誰が発明したかは定かではない。Aristotle の著作やユークリッド原論等々において定式化されていたことは確かである。だが，こうした人物は背理法を洗練させたり世に広めたりはしたかもしれないが，明らかに背理法の発明者ではない。その200～300年ほど前，Pythagoras 教団による伝承が有名だが，例えそれが本当に起きたことだったとしても，背理法を発明した哀れな教団員が何を考えていたかを具体的に示す資料は，管見の限り知られていない。

そこで，我々は哀れな教団員の思考を次の様にトレースした。彼は，最初から矛盾を導いて$\sqrt{2}$は無理数であるという命題を証明しようと試みていたはずがない。そうではなく，万物は数であること，即ち$\sqrt{2}$は有理数であることを示す為に躍起になり，試行錯誤をくり返していたはずである。従って，彼は自然に「$\sqrt{2}$は有理数である」という命題の仮定を推論に持ち込んで試行錯誤をくり返したと考えられる。そもそも，無理数自体を知らなかったのであろうから，このことは不可避であろう。生じてしまう矛盾への気付きは偶発的であったと考えられる。そのとき，彼は何を考えたのであろうか？彼の狙いは，$\sqrt{2}$は有理数であることを示すことである。従って,「何故矛盾したのか？」と考え，矛盾の原因を特定し，それを取り除こうと努めたと考えるのが自然である。しかし，後世の我々が知っ

問題提示

a,b を有理数であるとする。$a+b\sqrt{2}=0$ となる式を考えよう。この式を満たす a,b は何だろう？

（有理数について確認する）

本時の課題

a,b を有理数であるとする。$a+b\sqrt{2}=0$ となるとき，$a=b=0$ 以外の a,b を求めよ。

（ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは既知とする）

期待される活動C

いくつかの値を代入して，成り立つものがなさそうであることを推測する。

$3-2\sqrt{2}=0$，$6=-4\sqrt{2}$ など

支援1：ただ見付けられないだけではないか？

支援2：絶対に無い，ということを説明できるか？

期待される活動B−1

$a=-b\sqrt{2}$ で右辺が無理数，左辺が有理数となっておかしいことに気付く。

支援1：$-b\sqrt{2}$ は無理数と言い切れるか？

支援2：$\sqrt{2}$ が無理数であることを上手く使えないか？

期待される活動B−2

$-\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}$ で右辺が無理数，左辺が有理数となっておかしいことに気付く。

支援1：おかしさを利用して，うまく説明できるか？

支援2：何故おかしくなったか説明できるか？

支援3：どこからおかしくなったか説明できるか？

期待される活動A

題意を満たす b が0以外にあると仮定すると活動Bで示したおかしさが現れることに気付き，仮定がおかしいから $a=b=0$ 以外の a,b がないことを示す。

支援1：なぜ「$a=b=0$ 以外の a,b がない」と言えるだろうか？

支援2：どの様な説明の仕方になっているだろうか？

板書する用語：矛盾，間接証明，背理法

図１：設計された学習指導案

ているように，その努力が実らず，最終的に，矛盾の原因が「$\sqrt{2}$は有理数である」と仮定したことにあると気付いてしまい，その結果を受け入れざるを得ないところまで追い込まれたのではないだろうか。その様に考えなければ，彼の運命は説明が付かないであろう。

上記の様な考えを元に，我々は，子どもが何かの命題を探求する内に，自然と実は偽である命題を仮定し，その妥当性を示そうとするプロセスが重要であると考えた。そこで矛盾が生じ，その矛盾と向き合うことで，自らの仮定が誤りであることに気づき，真である命題の認識に到ると考えた。

こうした背理法という知識の分析に基づき，我々は実際に子ども達に対して授業を設計し，実施することにした。

3．実践された授業

我々は，2節で示した知識の分析に基づいて，図1のような指導案で示される学習を設計した。問題場面としてはa,bを有理数としたときに，$a+b\sqrt{2}$=0を満たすa,bが，$a=b=0$以外に無いことを示す場面である。まず，この問題の典型的な証明を以下に記す。

> $\mathrm{b}\neq0$と仮定する。与式より$\sqrt{2}=-\frac{a}{b}$。
>
> 左辺が無理数，右辺が有理数と矛盾する。
> 従って仮定が誤りなので$\mathrm{b}=0$である。
> よって，与式に$\mathrm{b}=0$を代入すると$a=0$。

我々がこの問題を選択した理由は，前述したように,生徒が背理法(や背理法に繋がるアーギュメント）を産み出すための必然性を与えることにある。また，無理数を扱ってはいるものの，本時においては既約の有理数を分母・分子に持たない,という表面的な点のみを取り扱うため，生徒達への負担は少ないと我々は考えた。

さて，本問題においては，$a=b=0$以外のa,bが無いという推測は，いくつかの値を代入することで容易に推測され得る[自力解決 C]。しかしながら，すべての有理数に対してそのことを調べるのは不可能であり，またその様な時には証明が必要とされることを生徒達は学習済みである。このため，「$a=b=0$以外のa,bが無いはずだ」という探求に取り組む事が期待される。

証明しようと試みる過程で，様々な式変形を試すことは高等学校1年生なら十分想定され得る。その際，$\mathrm{b}\neq0$を暗黙的に仮定した上で導出される式$-\frac{a}{b}=\sqrt{2}$-$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}=\sqrt{2}$に隠れている「おかしさ＝矛盾」を見出す［自力解決 B−2］ことが期待される。この式が，探求の過程で自然に見出されると期待されることが，本問題場面が選ばれた最大の理由である。

このとき，そのおかしさが何故生じたのかを探求すると，その理由は両辺をbで割っていること。即ち$\mathrm{b}\neq0$を暗黙の内に仮定していることに着目することが出来る［自力解決 A］と我々は考えた。ただし，$b\sqrt{2}$が無理数であることを利用しようとする生徒が想定される［自力解決 B−1］が，このことは厳密には未習である。そのため，その様な生徒に対しては自力解決 B−2を促すこととした。

授業の練り上げにおいてはこうした活動を構造化し，証明したい命題の否定命題を仮定し，矛盾を導くと否定命題が偽であることがわかり，従って証明したい命題が証明されたことになるという背理法が方法として定式化できることを共有することを狙った。

実際の学習は，2016年9月に高等学校1年生を対象に，数学Ⅰの時間で実施された。対象となるクラスは，本研究の代表研究者が日頃より受け持つクラスであり，40名（男22名，女18名）の生徒が在籍している。尚，生徒達は対偶証明法を学習済みである。また，授業に際しては名前を書く欄と，書いたことを消さないようにという注意以外は白紙であるワークシートを配布しており，授業後にそれらを回収している。

問題提示の場面において，まず$a+b\sqrt{2}$=0を満たすa,bの内，1つが$a=b=0$であることを教室全体で共有した。その上で，条件を満たす他のa,bを探すことが本時の課題として共有された。この際，有理数・無理数という言葉の意味を確認し，$\sqrt{2}$が有理数を分母・分子とする分数にならないことを確かめた上で，生徒達は自力解決に取り組み始めた。

学習の自力解決過程において，すべての生徒が「$a=b=0$以外のa,bを探す事が困難である」ことに気付いた。しかしながら，なんとかして条件を満たすa,bを探そうとする生徒が殆どであった。下の図2は，その様な生徒の典型的な探索の跡である。

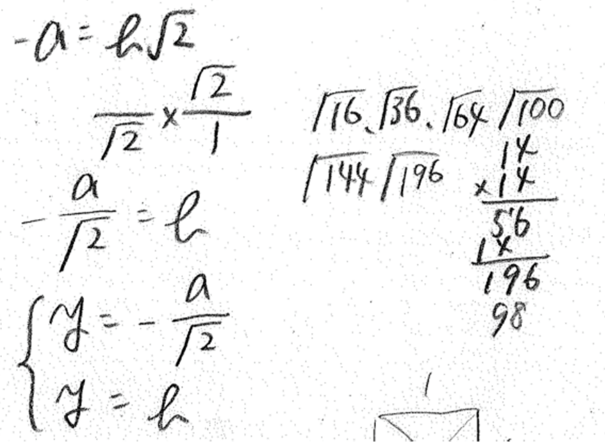

図2：条件を満たすa,b探求の様子

このことに想定よりもかなり多くの時間を費やした後，教師の支援もあり，期待される活動に取り組み始めた。その結果，何人かの生徒達が

式中で，左辺（右辺）が有理数に，右辺（左辺）が無理数になっていることに気付き始めた。例えば，下の図3は自力解決 B−1に該当する生徒である。10人に満たない生徒達ではあるが，彼等なりの方法で背理法（のような証明）を書くことで，$a=b=0$以外のa,bが無いことを示そうとしていた。こうしたおかしさに直面した生徒には（自力解決 B−2へ支援をしつつ），自力解決 A へと向かう支援を促した。しかしながら，最終的に学習者自らが自力解決Aに相当する活動を達成することは出来なかった。

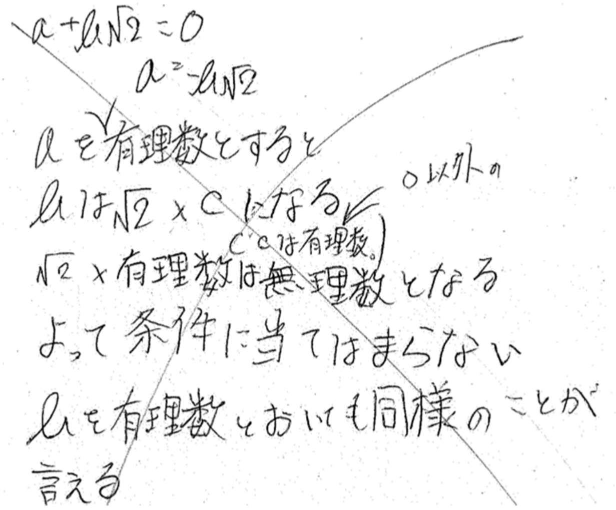
$a+b\sqrt{2}=0$
$a=-b\sqrt{2}$
aを有理数とすると
bは$\sqrt{2}\times c$になる ← 0以外の
(cは有理数)
$\sqrt{2}\times$有理数は無理数となる
よって条件に当てはまらない
bを有理数とおいても同様のことが
言える

図3：生徒なりの証明

図4：練り上げ直前の授業の風景

練り上げにおいては，$a=b=0$以外のa,bが無いであろうことを共有した上で，自力解決 B−1，B−2に該当する生徒から，彼等なりの背理法が提示された（図3は，B−1を提示した生徒のワークシートである）。その後，B−2の証明に対して，教師から「どこからおかしくなったと思う？」と全体に問いかけた上で，「式変形をするときにbで割っているが，両辺を割ってはいけないときはなかったか？」と示すことで，$b\neq 0$を仮定していることを共有した。その上で教師から矛盾，背理法といった用語を導入し，この時間を終えた。

4. 分析結果と課題

本時において，生徒達が自力解決 A へと到達出来なかった原因は，「$a=b=0$以外のa,bを探す」ことに学習の時間を費やした所為である。即ち，生徒の実態把握が十分ではなく，我々の予想に反して，「無いことを示そうとする」よりも，「見つからないけど，きっとあるだろう」という考えに生徒が傾いたことが指摘される。この点において，我々は分析を誤ったことになる。しかしながら，十分ではない時間の中であっても，「無いことを示そうとする」活動に取り組み始めた生徒達の中には，言語化出来ないまでも何らかのおかしさを感じ取っている生徒が認められ，先に述べたように，一部の生徒達は彼等なりの背理法（のような証明）を行おうとしていた。また，教師による僅かな後押しから「$b\neq 0$を仮定している」ことが矛盾の原因であると気付いていたため，時間を十分に取ることが出来たならば，生徒達が自力解決 A を達成出来た可能性があると考えられる。

以上の教授実験の結果とその分析から，我々は次のように結論付けた。

①：我々のアプリオリ分析による授業設計は，その基本的な方向性（自力解決 B-2までの過程に相当）において妥当であり，生徒なりの背理法を作り上げるプロセスが示された。

②：ただし，$b\neq 0$を仮定することが矛盾の原因である（自力解決 A に相当）ということに，生徒達は自力で気付くことは出来なかった。

③：少なくとも本実践は，計画通りの授業が実施されたが，「$a=b=0$以外のa,bが無いことを示そう」と生徒が考えるという想定が誤りであった。即ち，生徒の実態に関する分析は誤りであった。

④：②・③から，自力解決 A に相当する学習者は見出されなかったため，その点に関する知識の分析の妥当性は，今回判断することが出来なかった。

以上のことが解ったため，背理法という知識

それ自体に関する分析が相応の程度妥当であったと示されたのが本研究の成果である。

今後の課題として，生徒が「$a=b=0$以外のa,bが無いことを示そう」という活動に取り組めるような問題場面の検討をした上で，改めて教授実験を行う必要が認められる。例えば，もし本時の生徒のような実態の生徒に再び教授実験を実施するならば，問題提示において「$a+b\sqrt{2}=0$を満たすa,bをすべて挙げ，その他に無いことを示せ」，あるいは「$a+b\sqrt{2}=0$を満たすa,bが$a=b=0$以外にあるか？あるならば述べ，無いならば無いことを示せ」といった問い方にすることが考えられるだろう。これにより，背理法という知識の分析の妥当性（あるいは限界）を明確化する必要が認められる。また，その結果を受けてカリキュラムに反映させることで，本研究プロジェクト全体の目標を達成していく必要が認められる。加えて，本研究は質的な調査に依っているため，今回のことが他の全ての教室で遍く妥当であるかは不明である。このため，量的な調査によって成果の一般性を保証していく必要が認められる。

引用（参考）文献

1）Antonini, S., & Mariotti, M. A. (2008). Indirect proof: what is specific to this way of proving? *ZDM*, *40*(3), 401–412.

2）Artigue, M. (1992). Didactical engineering. In R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Research in Didactique of Mathematics: Selected papers* (pp. 41-65). Grenoble: La Pansée Sauvage.

3）Beth, E. W., & Piaget, J. (1966). *Mathematical epistemology and psychology*. Dordrecht, Holland: D. Reidel.

4）Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2014). *Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment*. Netherlands: Springer.

5）Dawkins, P. C., & Karunakaran, S. S. (2016). Why research on proof-oriented mathematical behavior should attend to the role of particular mathematical content. *The Journal of Mathematical Behavior*, *44*, 65–75

6）Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics. Dordrecht: Kluwer

7) 国宗進 (1987). 「「論証の意義」の理解に関する発達の研究」.『数学教育学論究』, 47・48, 3-23

8）高橋陽一郎. (2011). 『数学 I』. 啓林館.

9）真野 祐輔. (2010). 『算数・数学学習における概念変容に関する基礎的研究 :「数」領域の展開を中心に』 広島大学未刊行学位論文

要　　　約

間接証明カリキュラムの開発に関する研究
―背理法の学習過程に注目して―

本研究の目的は，間接証明に関するカリキュラムの開発である。その狙いは，十分に理解されていないと考えられる間接証明をよりよく学ぶと共に，学びの過程を通して論理を扱う能力を育むことである。本稿においては，その基礎として，間接証明を学ぶ過程を明らかにすることを目的とした。ただし，間接証明が何かという統一見解は見られないため，今回は背理法に限定して考察した。

目的のため，まず背理法に関する知識を分析し，特に数学史を参照しながら，背理法を構成することが期待される学習を設計した（アプリオリ分析）。高等学校1年生に授業を実施した結果，生徒の実態を十分想定出来ていなかったことから，学習自体は十分に成功しなかった。しかしながら，背理法に関する知識の分析それ自体については，かなりの部分が妥当であることは示された。本時の課題を元に，改善した学習を実施することで，知識の分析の妥当性や限界を明らかにし，カリキュラム開発に繋げることが今後の課題である。

A study on curriculum development for indirect proof:
understanding and constructing the process of proof by contradiction

The purpose of our study is to develop a curriculum of indirect proof. It aims to increase students' understanding about indirect proof, and to improve their ability to use logic. Furthermore, we aim to construct a process of indirect proof, as the base of the curriculum. However, as there is no consensus regarding the definition of indirect proof, we only consider proof by contradiction.

For this purpose, we designed a lesson in which students will probably be knowing indirect proof and then construct a process of the proof based on their conception (*a priori* analysis). We conducted the lesson in a10th grade mathematics class. However, the lesson was not as successful as expected because we overestimated the students' actual level of cognition. In contrast, most of our analysis of the knowledge is validated. Our future task is to design an improved lesson to deliver to students. We would also need to clarify the validation and limitations of our analysis.