学位論文要旨

The values of the generalized matrix functions of 3×3 matrices
（3×3 行列の一般化行列関数の値）

氏　名　　田端　亮

一般化行列関数 $\overline{d}_{\chi}^{G}$ とは, n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の部分群 G とその表現の指標 χ によって定まる, $n \times n$ 正方行列上の関数であり, 行列式 (determinant, det で表す) や恒久式 (permanent, per で表す) を一般化したものである．以下, 行列 A は半正値エルミート行列とする．Schur [5] の不等式によれば, 一般化行列関数の中で行列式が最小である．一方で, Lieb [3] の permanental dominance 予想は恒久式が最大であることを主張し, 未解決であるが, 正しいと信じられている予想である．

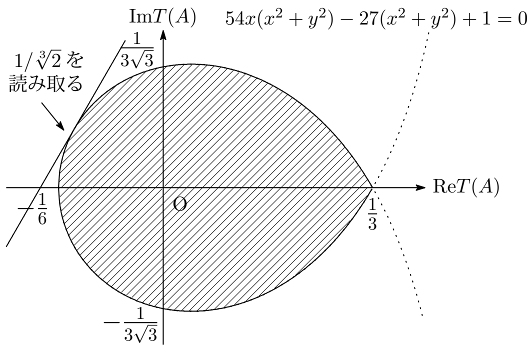
G が n 次対称群, χ が既約指標の場合の一般化行列関数を immanant という．対称群の既約表現とヤング図形は 1 対 1 に対応することから, χ をヤング図形 λ で表すこともある．permanental dominance 予想は, immanant に限ると, Pate らの結果により $n \leq 13$ まで正しいことが知られている ([4]) が, 対称群の真部分群に付随する一般化行列関数に関する考察はほとんどなされておらず, $n \geq 4$ で未解決, $n = 3$ の解決は報告のみであった ([2]).

半正値エルミート行列 A が $\operatorname{per} A = \det A$ が満たすとき, 全ての一般化行列関数の値が一致することが知られているので, $\det A < \operatorname{per} A$ の場合を考える．このとき, $\det A$ を 0, $\operatorname{per} A$ を 1 と正規化したものさしの上で, 各一般化行列関数のとりうる値を決定することによる Schur と Lieb の不等式の精密化を 3×3 の場合に完成したのが本論文である．

問題 G を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の部分群, χ を G の表現の指標とする．$\det A < \operatorname{per} A$ を満たす半正値エルミート行列 A に対し,

$$F_{\chi}^{G}(A) = \frac{\overline{d}_{\chi}^{G}(A) - \det A}{\operatorname{per} A - \det A}$$

と定義する．このとき, $F_{\chi}^{G}(A)$ の値域 $R(G, \chi)$ を決定せよ．



$R(G, \chi)$ は, $[0, \infty)$ 内の閉区間であり, permanental dominance 予想は, それが $[0, 1]$ に含まれるという予想である．

参考論文では, この問題に対する $n = 3$ のときの道具として, $\det A < \operatorname{per} A$ を満たす 3×3 半正値エルミート行列 A に対して T という関数を導入し, その値域を図のように完全に決定した．

G が $\mathfrak{S}_3, \mathfrak{A}_3$ もしくは $\{\mathrm{id}\}$, χ はその任意の指標の場合, この図から $R(G, \chi)$ を完全に読み取ることができる．特に $R(\mathfrak{A}_3, \omega)$ は図の領域の傾き $-\sqrt{3}$ の接線から, $R(\mathfrak{A}_3, \omega) = \left[0, 1/\sqrt[3]{2}\right]$ という結果が得られる．

本論文では, $n=3$ で残された場合, つまり G が $\mathfrak{S}_3$ の位数 2 の部分群 $\{(1),(12)\}$, χ はその自明指標 χ_+, 交代指標 χ_- の場合の $R(G,\chi)$ を考える．まず上記の関数 T をさらに一般化し, $\mathfrak{S}_3$ から G への制限によって位数が 1 に制限される (12) タイプの共役類に焦点をあてた形で, そのとりうる領域を決定することにより精密な不等式を与えた.

主定理 $G=\{(1),(12)\}$, χ_+, χ_- をそれぞれ G の自明指標, 交代指標とする．このとき, 次が成り立つ.

$$R(G,\chi_+)=\left[\frac{1}{3},1\right],\qquad R(G,\chi_-)=\left[0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

この定理により, 次のようにまとめることができる.

主結果 3 次対称群の全ての部分群 G とその既約指標 χ に対して, $R(G,\chi)$ を決定した.

任意の半正値エルミート行列はグラム行列 $(\langle v_i,v_j\rangle)_{1\le i,j\le n}$ で表すことにより, $\mathbb{C}^n$ 内のベクトルの配置 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ とみなすことができる．$R(\mathfrak{S}_3,\yng(2,1))$ の最大値を実現する行列は, 2 次元部分空間内に正三角形を描くような 3 本のベクトル配置に対応する．これを拡張する形で, $\mathfrak{S}_n$ のほとんどの既約指標 λ に対して (つまり, ほとんどの immanant $\overline{d}_\lambda$ に対して), $n-1$ 次元部分空間内に正 $n-1$ 単体を描くベクトル配置に対応する行列, すなわち, 対角成分が全て 1, 非対角成分が全て $-1/(n-1)$ であるような行列が, $R(\mathfrak{S}_n,\lambda)$ の最大値を与えるであろうという予想が, 数値実験により立てられた．それを信じると, $R(\mathfrak{S}_n,\lambda)$ の最大値は有理数で与えられる．一方, $R(G,\chi)$ の上限を正確に求めようとする中で, $1/\sqrt[3]{2}$ や $1/\sqrt{3}$ のような無理数が新たに観察されたことは, G が $\mathfrak{S}_n$ の真部分群の場合の状況が異なることを示唆する．それらの最大値を実現する, 複雑な行列のベクトル配置の意義を明らかにすることは今後の課題となる.

参考文献

[1] W. Barrett, H. Tracy Hall, R. Loewy, The cone of class function inequalities for the 4-by-4 positive semidefinite matrices, Proc. London Math. Soc. (3) 79 (1999) 107-130.

[2] G. D. James, Immanants, Linear and Multilinear Algebra 32 (1992) 197-210.

[3] E. H. Lieb, Proofs of some conjectures on permanents, J. Math. and Mech. 16 (1966) 127-134.

[4] T. H. Pate, Row appending maps, Ψ functions, and immanant inequalities for Hermitian positive semi-definite matrices, Proc. London Math. Soc.(3) 76(2) (1998) 307-358.

[5] I. Schur, Über endliche Gruppen und Hermitische Formen, Math. Z. 1 (1918) 184-207.