学位論文要旨

Existence and Construction of Balanced Incomplete Block Designs with Pairwise Additivity
(組加法性をもつ釣合い型不完備ブロック計画の存在性と構成法)

氏名　　松原　和樹

組合せデザイン論はある種の正則性をもつデザインの存在性，構成法および数え上げを主に扱う．また，組合せデザインの 1 つの主要概念である釣合い型不完備ブロック計画（以下，BIB デザインと呼ぶ）は，Fisher らにより農場実験において統計的視点から導入された．これまで，様々な性質を持った BIB デザインの研究がなされおり，松原ら (2006) は組加法性という性質を組合せ論的視点から導入した．組加法性をもつ BIB デザイン集合の存在性，構成法およびその応用が本論文の主題である．

点集合 V $(|V| = v)$ とその k-部分集合族 $\mathcal{B}$ $(|\mathcal{B}| = b)$ との順序対 $(V, \mathcal{B})$ に対して，(i) 任意の点はちょうど r 個のブロックに生起し，(ii) 任意の 2 点はちょうど λ 個のブロックに同時に生起するとき，この順序対を BIB デザインと呼び，BIBD(v, b, r, k, λ) と表す．ただし，ブロックとは $\mathcal{B}$ の元であり，k をブロックサイズ，λ を会合数と呼ぶ．また，同じパラメータをもつ ℓ 個の BIBD(v, b, r, k, λ) について，その生起行列 $\boldsymbol{N}_1, \dots, \boldsymbol{N}_\ell$ が次の条件をみたすとき，組加法性をもつ BIB デザイン集合と呼び，ℓ PAB(v, k, λ) と表す．

(条件) 任意の異なる $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$ に対して，$\boldsymbol{N}_i + \boldsymbol{N}_j$ もまた BIBD$(v, b, 2r, 2k, \lambda^*)$ の生起行列となっている．

本論文では，組加法性をもつ BIB デザイン集合が存在するときのパラメータ間の関係を考察し，組加法性をもつ BIB デザイン集合の様々な構成法を与え，それらの存在性について議論する．

第 1 章では，本論文で扱う様々な組合せ構造を紹介し，それらの諸性質について述べる．特に組加法性をもつ BIB デザイン集合が存在するための必要条件を示し，いくつかの例を提示する．また，他の組合せ構造の存在性についてもいくつかの知られている結果を紹介する．いずれも後の章で組加法性をもつ BIB デザイン集合の構成に用いられる重要な結果である．

第 2 章では，組加法性をもつ BIB デザイン集合の構成法を直接的構成法，再帰的構成法および他の組合せ構造からの構成法に分けて，松原ら (2006)，松原・景山 (2013b, 2014b) および澤ら (2007) の結果を扱う．直接的構成法では，有限体の原始根等を用いた方法を与え，いくつかの系列の存在性を示す．また，再帰的構成法では，ℓ PAB(v, k, λ) および ℓ PAB(v', k, λ) から ℓ PAB(vv', k, λ) を構成する方法を述べる．他の組合せ構造からの構成法では，Pairwise Balanced Designs，Nested BIB Designs および Self-Orthogonal Latin Squares を用いた方法を述べる．

第 3 章では，ℓ PAB$(v, k, 1)$ の存在性について松原・景山 (2013b, 2014a, 2014b) の結果を述べる．PAB(v, k, λ) が存在するための必要条件から，会合数が 1 のとき，ブロックサイズは $k = 2$ または 3 となり，ここでは 2 PAB$(v, 2, 1)$ および 3 PAB$(v, 2, 1)$

については完全な存在定理を示し，$2\ \mathrm{PAB}(v,3,1)$ については部分的な存在性に関する結果を紹介する．最後に一般的な $\ell\ \mathrm{PAB}(v,k,\lambda)$ についての考察を述べる．

第 4 章では松原・景山 (2014a) の結果を扱う．奇素数冪 k に対して，$k=2\lambda+1$ をみたすような組加法性をもつ BIB デザイン集合の存在性を考える．Wilson による Pairwise Balanced Design の漸近存在定理および有限体の原始根を用いた組加法性をもつ BIB デザイン集合の構成法を提示した後，それらを利用して，組加法性をもつ BIB デザイン集合についてもその漸近存在を証明する．つまり，与えられた ℓ, k に対して，ある値が存在し，その値より大きな v に対しては，$\ell\ \mathrm{PAB}(v,k,\lambda=(k-1)/2)$ が存在するための必要条件は必要十分条件となることを保証する結果である．

第 5 章では，$\ell=v/k$ をみたす組加法性をもつ BIB デザイン集合（以下，$\mathrm{AB}(v,k,\lambda)$ と表す）について，澤ら (2007) の結果を扱う．このとき，ℓ 個の生起行列は $\sum_{i=1}^{\ell}\boldsymbol{N}_i=\boldsymbol{J}_{v\times b}$ をみたす．ただし，$\boldsymbol{J}_{v\times b}$ は $v\times b$ 行列で成分がすべて 1 であるものである．$\ell\ \mathrm{PAB}(v,k,\lambda)$ が存在するとき，$\ell'<\ell$ に対して $\ell'\ \mathrm{PAB}(v,k,\lambda)$ が存在することがわかることから，与えられたパラメータ v,k,λ に対して，$\mathrm{AB}(v,k,\lambda)$ を構成することは最も難しい構成問題と言える．また，$\sum_{i=1}^{\ell}\boldsymbol{N}_i=\boldsymbol{J}_{v\times b}$ という性質を利用した再帰的構成法を与え，いくつかの系列を得る．最後に，比較的小さいパラメータの値に対して，存在が知られているもの，および未知のもののリストを提示する．

第 6 章では，松原・景山 (2013a) で考えられている組加法性をもつ巡回型 BIB デザイン集合（以下，$\ell\ \mathrm{PACB}(v,k,\lambda)$ と表す）を扱う．巡回型 BIB デザインは Difference Family や巡回型の他の組合せ構造と密接な関係があることはよく知られている．特に本論文において新たに定義される Special Array はそれ自身が 2 PACB デザイン集合の存在を保証しているだけではなく，再帰的構成法にも用いることができる組合せ構造であり，本章の結果において重要な役割を果たす．また，いくつかの系列を除いた $2\ \mathrm{PACB}(v,2,1)$ の存在性について言及する．最後に不存在性についても結果を述べる．

第 7 章では澤ら (2009) の結果を扱う．$\ell=v/k$ 個の生起行列に対して，$\sum_{i=1}^{\ell}\boldsymbol{N}_i=\boldsymbol{J}_{v\times b}$ をみたすもの（以下，分解問題の解と呼ぶ）を考える．分解問題の解が組加法性をもつとき，明らかに $\mathrm{AB}(v,k,\lambda)$ を構成することがわかる．また，分解可能 BIB デザインが存在するとき，同じパラメータで分解問題の解となる $\ell=v/k$ 個の生起行列が構成できることを示す．さらに，Skolem の構成法を用いて分解可能でない BIB デザインの生起行列で分解問題の解が構成できることを証明する．また，$\mathrm{AB}(v,k,\lambda)$ から分解問題の解が構成できることについても言及する．

第 8 章では，組加法性をもつ BIB デザイン集合の応用について松原・景山 (2013b) および澤ら (2007) の結果を述べる．組加法性の性質から，$\ell\ \mathrm{PAB}(v,k,\lambda)$ が存在するとき，いくつかの異なるブロックサイズをもつ BIB デザインが構成できることを示す．また，組加法性をもつ BIB デザイン集合から Multiply Nested BIB Design が得られることを示し，本論文で得られている $\ell\ \mathrm{PAB}(v,k,\lambda)$ の系列から得られるいくつかの Multiply Nested BIB Design の系列を提示する．

最後に未解決である問題および今後の考察の方向性について述べる．