マルチポート固有空間法

玉木 徹† 天野 敏之††

† 広島大学大学院工学研究科情報工学専攻 〒 739–8527 広島県東広島市鏡山 1–4–1
†† 名古屋工業大学大学院おもひ領域 〒 466–8555 名古屋市昭和区御器所町
E-mail: †tamaki@hiroshima-u.ac.jp, ††amano@nitech.ac.jp

あらまし 本稿では、多様体の教師付き問題としての姿勢パラメータ推定手法である「マルチポート固有空間法」[1], [2] について議論する。これは欠損画素の輝度値を推定して画像を補間する BPLP [3], [4] を基にしており、群の回帰問題を空間への投影という線形演算で行うものである。まずマルチポート固有空間法の内容を説明し、その主要部分は連立方程式による最小ノルム推定であることを示す。またその方程式による空間への投影がどのようなものかを説明し、学習とサンプル数の影響について述べる。

キーワード パラメトリック固有空間法, マルチポート固有空間法, 多様体学習, 教師付き学習, 回帰, 固有空間, 線形写像, EbC

Multi-port Eigenspace Method

Toru TAMAKI† and Toshiyuki AMANO††

† Graduate School of Engineering, Hiroshima University
1–4–1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima-shi, Hiroshima, 739–8527, Japan
†† Omohi College, Graduate School of Engineering Nagoya Institute of Technology
Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya 466-8555 Japan
E-mail: †tamaki@hiroshima-u.ac.jp, ††amano@nitech.ac.jp

Abstract In this paper, we discuss on Multi-port Eigenspace Method [1], [2], an supervised manifold learning of pose parameters. This method is based on BPLP [3], [4], a method of intensity interpolation, and operates a linear mapping of projection to a subspace as a regression to a group. First we describe the method, and show that the important part of it is a least norm solution of a system of equations. Then we illustrate the projection by the system, and the effect of the number of learning samples.

Key words Parametric Eigenspace Method, Multiport Eigenspace Method, Manifold learning, supervised learning, regression, Eigenspace, linear mapping, EbC

1. はじめに

画像に写る物体の姿勢パラメータ推定はコンピュータビジョンの重要な問題として多くの研究がなされている。その多くは既知形状の剛体を仮定し、運動や投影の解析的モデルを採用して最適化問題を解くものである。それに対して村瀬ら [5], [6] のパラメトリック固有空間法は、形状や投影を仮定せず、連続的に変化するパラメータ列とそれに付随する画像系列を学習セットとし、その画像列が固有空間中に描く軌跡（多様体）を認識に用いる、いわばパターン認識的姿勢推定問題を提起した。

多様体を描く非線形性の強い画像列のようなデータを扱う手法は、現在二つある。一つは非線形主成分分析 (kernel PCA, kPCA) [7], [8] などのカーネルトリックを利用した手法である。もう一つは、多様体を低次元に展開する多様体学習 (manifold learning) [9] である。前者は直感的な主成分方向が得られないのに対して、後者は主観的に意味のありそうな低次元の軸を見つけることができるとされている。どちらも主な目的は教師なしのデータ解析である。

パラメトリック固有空間法が扱うのは教師付き問題や回帰である。しかし、カーネルトリックを用いたものには SVM 回帰 [10] などの回帰手法が提案されているのに対し、多様体学習で教師付き問題を扱っているものはほとんどない。多様体学習の火付け役となった LLE(Locally Linear Embedding) [11] や Isomap [12] は、もともと主成分分析 (PCA, Principal Component Analysis) や多次元尺度構成法 (MDS, Multidimensional Scaling) が非線形データに対処できない問題に対して提案さ

れた教師なし学習である。その後も Hessian Eigenmap [13], Laplacian eigenmap [14] などが出現しているが、やはり非線形データである多様体を扱う教師なし学習法である。

本稿で議論する内容は、パラメトリック固有空間法と同様に、多様体を扱う教師付き問題としての姿勢パラメータ推定手法「マルチポート固有空間法」である。これは欠損画素の輝度値を推定して画像を補間する BPLP(Back Projection for Lost Pixels) [3], [4] を基に、2000 年に天野が提案 [1] し、その後 EbC(Estimation-by-Completion) 法 [2] として整理された。この手法（以下本手法）は次のような性質を持つ。

まず、数直線への回帰ではなく、群の元への回帰問題を扱うことである。通常の回帰問題は

$$y = f(x), \boldsymbol{x} \in R^N, y \in R$$

という形式である。しかし姿勢パラメータは、1 軸回転なら S^1（3 次元の回転であれば $SO(3)$）で表される回転群への回帰であり、

$$y = f(x), \boldsymbol{x} \in C \hookrightarrow R^N, y \in S^1$$

という形式になる。ここで C は R^N に埋め込まれた多様体であり、$\hookrightarrow$ は埋め込みを表す。多様体と群の対応を見つけ出す手法には、Gong ら [15] によって提案された APD (Anchor Points Diffusion) がある。しかし APD は semi-supervised の多様体学習であり、推定された対応関係では位相が保存されないため、回帰問題を扱うには不向きである。

次に、空間への投影という線形計算で推定できることである。一般に部分空間を用いた認識では、未知サンプルを部分空間に投影するため、線形計算というメリットがある。しかし、パラメトリック固有空間法のパラメータ推定にはスプライン曲線との最近傍探索が必要になってしまう。また多様体学習の多くは、学習サンプルによる多様体を表現するための手法であり、未知サンプルが与えられた場合には基本的には再計算を行わなければならない。最近になって、再計算をせず逐次的に学習した多様体を更新する手法 [16], [17] も提案されてはいるが、更新の必要がない未知サンプル識別ということは考慮されていない。未知サンプルと学習された多様体の関係を指摘した He ら [18] は、線形計算を用いた教師なし多様体学習である NPE (Neighborbood Preserving Embedding) を提案しているが、回帰問題を扱うものではない。本手法は部分空間への投影を用いた線形計算で回帰問題を扱うものである。

図 1 に、1 軸回転の場合の本手法の概念図を示す。この場合推定パラメータは回転角度 φ の 1 パラメータだけであり、これはある 2 次元平面上の単位円周 S^1 上の点で表されるとみなすことができる。本手法は、画像列がなす多様体 C から S^1 への線形写像を求めるものである。

本稿ではマルチポート固有空間法について議論するものであり、[2] の補遺にあたるものである。以下 2 節ではマルチポート固有空間法を説明し、3 節では本手法の主要部分は連立方程式による最小ノルム推定であることを示す。4 節では図 1 で示したような平面への投影がどのようなものかを説明し、5 節では学習のサンプル数の影響について述べる。

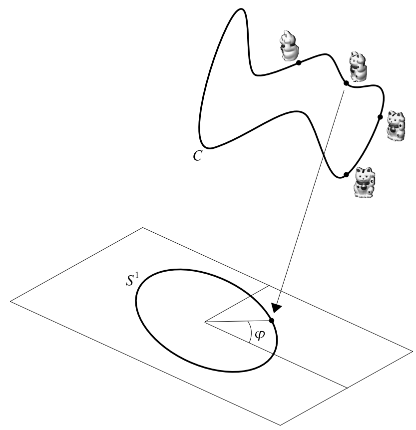

図 1　1 パラメータの場合のマルチポート固有空間法の概念図

2. 手法の概要

ここではマルチポート固有空間法の概要について述べることにする。

2.1 問題設定

ある n^{in} 次元入力ベクトル $\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}$ が、それに付随するパラメータ φ とともに与えられたとき、そのパラメータを表す n^{out} 次元出力ベクトル $\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}$ を考える。ここで $\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}$ は角度 $\varphi \in S^1 = [0, 2\pi)$ の方向から撮影された学習画像であり、座標 $i (i = 1, \ldots, n^{\mathrm{in}})$ の輝度値を $\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}[i]$ とするベクトルである。また $\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}$ は角度 φ の位相を持つ正弦波(注1) であり、以下の式で表される。

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}[i] = K \sin(\omega i - \varphi) + \mathrm{offset} \tag{1}$$

ここで $i = 1, \ldots, n^{\mathrm{out}}$ である。

この $\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}$ を $\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}$ に対するトラック情報と呼ぶ。$\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}$ と $\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}$ を対にして固有空間を生成し、$\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}$ のみからトラック情報である $\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}$ を BPLP により推定（復元）することがマルチポート固有空間法である。

2.2 固有空間の学習

次に学習について説明する。入力ベクトル $\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}$ とトラック情報 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}$ を対にしたベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}} \end{pmatrix} \tag{2}$$

を一つの n 次元学習ベクトル $(n = n^{\mathrm{in}} + n^{\mathrm{out}})$ として考え、M 個の学習ベクトル $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_M\}$ から固有空間 E を生成する（詳細は省略）。

この固有空間 E の第 i 固有ベクトルを $\boldsymbol{e}_i (i = 1, 2, \ldots, M)$ とすると、学習ベクトルと同様に

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^{\mathrm{in}}{}_i \\ \boldsymbol{e}^{\mathrm{out}}{}_i \end{pmatrix} \tag{3}$$

と分解できる。

(注1)：周波数は $\omega = \frac{k}{n^{\mathrm{out}}}\pi$ とし、通常は $k = 2$ つまり出力ベクトルの長さが波長になるものを用いるが、$k = 1$ などでもよい。

ここで固有空間 E を表す以下の $n \times M'$ 行列 E （ここで $M' \leqq M$）を考える。

$$E = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \ldots\ \boldsymbol{e}_{M'}) \tag{4}$$

すると、同様に

$$E = \begin{pmatrix} E^{\mathrm{in}} \\ E^{\mathrm{out}} \end{pmatrix} \tag{5}$$

と分解できる。ここで、E^{in} は $n^{\mathrm{in}} \times M'$ 行列、E^{out} は $n^{\mathrm{out}} \times M'$ 行列である。

2.3 パラメータの推定

新たな未知データ $\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}$ が与えられると、BPLP より

$$\boldsymbol{x}^* = E(E^T \Sigma^{\mathrm{in}} E)^{-1} E^T \Sigma^{\mathrm{in}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

によって復元データ $\boldsymbol{x}^*$ が得られる。ここで

$$\Sigma^{\mathrm{in}} = \begin{pmatrix} I_{n^{\mathrm{in}}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

は $n \times n$ 行列であり、$I_{n^{\mathrm{in}}}$ は n^{in} 次元の単位行列である。

ここで式 (6) を以下のように変形する。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^* &= E(E^T \Sigma^{\mathrm{in}} E)^{-1} E^T \Sigma^{\mathrm{in}} (\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} 0) & (8)\\
&= E(E^T \Sigma^{\mathrm{in}} \Sigma^{\mathrm{in}} E)^{-1} {E^{\mathrm{in}}}^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} & (9)\\
&= E(E^T {\Sigma^{\mathrm{in}}}^T \Sigma^{\mathrm{in}} E)^{-1} {E^{\mathrm{in}}}^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} & (10)\\
&= E((\Sigma^{\mathrm{in}} E)^T (\Sigma^{\mathrm{in}} E))^{-1} {E^{\mathrm{in}}}^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} & (11)\\
&= E \begin{pmatrix} E^{\mathrm{in}} \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E^{\mathrm{in}} \\ 0 \end{pmatrix}^{-1} {E^{\mathrm{in}}}^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} & (12)\\
&= E({E^{\mathrm{in}}}^T E^{\mathrm{in}})^{-1} {E^{\mathrm{in}}}^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} & (13)
\end{aligned}$$

さらに、$\boldsymbol{x}^*$ のうちトラック情報部分を抽出する $n \times n$ 行列

$$\Sigma^{\mathrm{out}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n^{\mathrm{out}}} \end{pmatrix} \tag{14}$$

を定義する。すると、

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}*} \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}*} \end{pmatrix} \tag{15}$$

と分解できるので、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}*} &= \Sigma^{\mathrm{out}} \boldsymbol{x}^* & (16)\\
&= \Sigma^{\mathrm{out}} E({E^{\mathrm{in}}}^T E^{\mathrm{in}})^{-1} {E^{\mathrm{in}}}^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} & (17)\\
&= (\Sigma^{\mathrm{out}} E)({E^{\mathrm{in}}}^T E^{\mathrm{in}})^{-1} {E^{\mathrm{in}}}^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} & (18)\\
&= E^{\mathrm{out}}({E^{\mathrm{in}}}^T E^{\mathrm{in}})^{-1} {E^{\mathrm{in}}}^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} & (19)
\end{aligned}$$

とトラック情報の推定値 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}*}$ が得られる。

2.4 位相の推定

トラック情報の推定値ベクトル

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}*} = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}*}[0], \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}*}[1], \ldots, \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}*}[n^{\mathrm{out}} - 1])^T \tag{20}$$

が得られたとき、次のスカラー量 S, C を定義する。

$$S = \sum_{i=0}^{n^{\mathrm{out}}-1} \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}*}[i] \sin i\omega \tag{21}$$

$$C = \sum_{i=0}^{n^{\mathrm{out}}-1} \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}*}[i] \cos i\omega \tag{22}$$

すると、位相 φ は次式で求めることができる。

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{C}{S}\right) \tag{23}$$

詳細は付録 1. 節を参照。

2.5 内積による位相推定

前項で示した方法は、一旦 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}$ を推定してから A, B を計算するものであった。ここでは、$\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}$ から直接 A, B を計算する方法を示す。

まずベクトル

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s} &= (\sin 0, \sin\omega, \sin 2\omega, \ldots, \sin((n^{\mathrm{out}} - 1)\omega))^T & (24)\\
\boldsymbol{c} &= (\cos 0, \cos\omega, \cos 2\omega, \ldots, \cos((n^{\mathrm{out}} - 1)\omega))^T & (25)
\end{aligned}$$

を定義する。すると、式 (21),(22) を変形して

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^{n^{\mathrm{out}}-1} \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}*}[i] \sin i\omega & (26)\\
&= \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}*} & (27)\\
&= \boldsymbol{s}^T E^{\mathrm{out}} ({E^{\mathrm{in}}}^T E^{\mathrm{in}})^{-1} {E^{\mathrm{in}}}^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} & (28)\\
&= \boldsymbol{s}'^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} & (29)
\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{s}'^T = \boldsymbol{s}^T E^{\mathrm{out}} ({E^{\mathrm{in}}}^T E^{\mathrm{in}})^{-1} {E^{\mathrm{in}}}^T$ とする。同様に

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{i=0}^{n^{\mathrm{out}}-1} \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}*}[i] \cos i\omega & (30)\\
&= \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}*} & (31)\\
&= \boldsymbol{c}^T E^{\mathrm{out}} ({E^{\mathrm{in}}}^T E^{\mathrm{in}})^{-1} {E^{\mathrm{in}}}^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} & (32)\\
&= \boldsymbol{c}'^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} & (33)
\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{c}'^T = \boldsymbol{c}^T E^{\mathrm{out}} ({E^{\mathrm{in}}}^T E^{\mathrm{in}})^{-1} {E^{\mathrm{in}}}^T$ とする。

$\boldsymbol{s}', \boldsymbol{c}'$ はともに n^{in} 次元のベクトルであり、入力された未知データ $\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}$ と $\boldsymbol{s}', \boldsymbol{c}'$ の内積をとることで S, C が計算できることになる。$\boldsymbol{s}', \boldsymbol{c}'$ は未知データに依存せず、固有空間を求めた時点であらかじめ計算しておけるので、未知の入力 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}$ が変わっても内積だけで計算が可能である。

2.6 複数パラメータの推定

上記のように、角度 φ だけでなく位置 x, y などの他のパラメータも同時に推定するためには、それらに対応するトラック情報を付加する。

つまり

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}} \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{out2}} \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{out3}} \end{pmatrix} \tag{34}$$

として学習し、推定はそれぞれのパラメータで別々に行う。導出の詳細と実際の推定実験結果は [2] を参照。

このように、一つのパラメータ (single port) だけでなく、複数のパラメータ (multi-port) を推定するため、マルチポート固有空間法と呼ぶ。

3. 連立方程式の最小ノルム推定について

式 (19) は線型方程式であり、

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}*} = A\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} \tag{35}$$

と書き直すことができる。つまり、この行列 A を推定すればよいことになる。ここでは、連立方程式の A を推定することが式 (19) と等価であることを（条件付で）示す。つまり本手法は、

$$Z^{\mathrm{out}} = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}{}_1, \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}{}_2, \ldots, \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}{}_M] \tag{36}$$

$$Z^{\mathrm{in}} = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_1, \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_2, \ldots, \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_M] \tag{37}$$

を与えて、

$$Z^{\mathrm{out}} = AZ^{\mathrm{in}}, \quad A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n^{\mathrm{out}}}]^T \tag{38}$$

を満たす $n^{\mathrm{out}} \times n^{\mathrm{in}}$ の行列 A を求めることと同じである。ここで各 $\boldsymbol{a}_j$ は n^{in} 次元の列ベクトルである。

まず列ベクトルを並べた行列 Z^{out} の行を取り

$$Z^{\mathrm{out}} \equiv [\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{out}}, \boldsymbol{z}_2^{\mathrm{out}}, \ldots, \boldsymbol{z}_{n^{\mathrm{out}}}^{\mathrm{out}}]^T \tag{39}$$

とする。すると式 (38) の j 行目は

$$\boldsymbol{z}_j^{\mathrm{out}T} = \boldsymbol{a}_j^T Z^{\mathrm{in}} \tag{40}$$

$$\boldsymbol{z}_j^{\mathrm{out}} = Z^{\mathrm{in}T}\boldsymbol{a}_j \tag{41}$$

となる。ここで最小ノルム型一般逆行列を用いると

$$\boldsymbol{a}_j = Z^{\mathrm{in}}(Z^{\mathrm{in}T}Z^{\mathrm{in}})^{-1}\boldsymbol{z}_j^{\mathrm{out}} \tag{42}$$

と表せる。したがって、

$$[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots] = Z^{\mathrm{in}}(Z^{\mathrm{in}T}Z^{\mathrm{in}})^{-1}[\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{out}}\ \boldsymbol{z}_2^{\mathrm{out}}\ \cdots] \tag{43}$$

$$A^T = Z^{\mathrm{in}}(Z^{\mathrm{in}T}Z^{\mathrm{in}})^{-1}Z^{\mathrm{out}T} \tag{44}$$

$$A = Z^{\mathrm{out}}(Z^{\mathrm{in}T}Z^{\mathrm{in}})^{-T}Z^{\mathrm{in}T} \tag{45}$$

となる。

ここで

$$Z = \begin{bmatrix} Z^{\mathrm{in}} \\ Z^{\mathrm{out}} \end{bmatrix} \tag{46}$$

なる行列 Z を考える。これを特異値分解して

$$Z = EDV^T \tag{47}$$

とすると、式 (5) と同様に

$$E = \begin{pmatrix} E^{\mathrm{in}} \\ E^{\mathrm{out}} \end{pmatrix} \tag{48}$$

と書けるので、

$$Z^{\mathrm{in}} = E^{\mathrm{in}}DV^T \tag{49}$$

$$Z^{\mathrm{out}} = E^{\mathrm{out}}DV^T \tag{50}$$

となる。これを式 (45) へ代入すると、

$$\begin{aligned} A &= E^{\mathrm{out}}DV^T \\ &\quad \left((E^{\mathrm{in}}DV^T)^T E^{\mathrm{in}}DV^T\right)^{-T}(E^{\mathrm{in}}DV^T)^T & (51) \\ &= E^{\mathrm{out}}DV^T \\ &\quad \left((DV^T)^{-1}(E^{\mathrm{in}T}E^{\mathrm{in}})^{-1}(VD^T)^{-1}\right)^T VD^TE^{\mathrm{in}T} & (52) \\ &= E^{\mathrm{out}}DV^T \\ &\quad (V^TD)^{-T}(E^{\mathrm{in}T}E^{\mathrm{in}})^{-T}(D^TV)^{-T}VD^TE^{\mathrm{in}T} & (53) \\ &= E^{\mathrm{out}}(E^{\mathrm{in}T}E^{\mathrm{in}})^{-1}E^{\mathrm{in}T} & (54) \end{aligned}$$

したがって、これは式 (19) と同等であり、本手法は入力と出力のベクトルをノルム最小の線形関係で結びつけるものに等しい。ただし上記の議論では、$M = M' > n^{\mathrm{in}} > n^{\mathrm{out}}$、つまり次元削減がなくサンプル数が入力次元より大きいことを仮定している。

計算コストの比較は [2] を参照。

4. 平面への投影について

前節で示したように、本手法の主要部分は連立方程式であり、また付録に示すように、複素平面上（もっと一般に R^2 平面）の単位円への投影と見ることができる。ここでは、連立方程式とそのような投影との関係を、見通しをよくするために 1 軸回転の姿勢パラメータ推定に議論を絞り、本手法の単位円への写像がどのようなものかを説明する。

式 (38) より、入出力関係は

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}{}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i \\ \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n^{\mathrm{out}}}^T\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i \end{pmatrix} \tag{55}$$

である。ここで本手法では、トラック情報 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}{}_i$ は与えられたパラメータに対応する位相 φ_i をもつ周期 ω の正弦波であるので、以下のようなベクトルである。

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}{}_i = \Big(\sin(\omega - \varphi_i), \sin(2\omega - \varphi_i), \ldots,$$
$$\sin(j\omega - \varphi_i), \ldots, \sin(N\omega - \varphi_i)\Big)^T \tag{56}$$
$$= \left(\sin\left(\frac{1}{N}\pi - \varphi_i\right), \sin\left(\frac{2}{N}\pi - \varphi_i\right), \ldots,\right.$$
$$\left.\sin\left(\frac{j}{N}\pi - \varphi_i\right), \ldots, \sin\left(\frac{N}{N}\pi - \varphi_i\right)\right)^T \tag{57}$$

ただし情報トラックの長さ n^{out} が半周期分になるような周期 $\omega = \frac{\pi}{n^{\mathrm{out}}}$ を考え、見易さのため $N = n^{\mathrm{out}}$ とおく。

すると、式 (55) の j 行に注目すると

$$\boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i = \sin\left(\frac{j}{N}\pi - \varphi_i\right) \tag{58}$$

である。これは平面の方程式とみなすことができる。すなわち、法線が $\boldsymbol{a}_j$ で、原点からの距離が $\sin\left(\frac{j}{N}\pi - \varphi_i\right)$ である超平面が、点 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i$ を通る（もしくはその超平面上に $\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i$ が乗っている）ことを意味する。(注2)

同様に式 (55) のすべての行を考えると、法線がそれぞれ $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ である超平面がすべて点 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i$ を通り、それぞれの超平面の原点からの距離が $\sin\left(\frac{1}{N}\pi - \varphi_i\right), \ldots, \sin\left(\frac{N}{N}\pi - \varphi_i\right)$ である。

また出力の次元は入力の次元よりも小さい（$n^{\mathrm{in}} > n^{\mathrm{out}} = N$）ため、高々$\mathrm{rank}(A) = N$ である。1 軸回転の姿勢パラメータ推定の場合、出力は R^2 上の単位円と考えられるため、実際には $\mathrm{rank}(A) = 2$ である。つまり各法線ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ のうち 2 つが独立である。

4.1 $N = 2$ の場合

$N = 2$、つまり情報トラックのベクトルの要素が 2 の場合、以下のようになる。

$$\boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi_i\right) = \cos\varphi_i \tag{59}$$
$$\boldsymbol{a}_2^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i = \sin\left(\frac{2}{2}\pi - \varphi_i\right) = \sin\varphi_i \tag{60}$$

すなわち、行列 A によって点 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}$ は法線 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が張る平面に投影される（図 2 参照）。また原点からの距離が $\sin\varphi_i, \cos\varphi_i$ であるため、二つの平面は直交する（つまり $\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2$）。

4.2 $N > 2$ の場合

$N > 2$、つまり情報トラックのベクトルの要素が 2 より大きくても、1 軸回転のパラメータだけであれば、図 3 のようになる。つまり行列 A によって、点 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}$ は法線 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ が張る 2 次元平面（$\mathrm{rank}(A) = 2$）なので）に投影される。また $\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}$ を通る平面群は、原点からの距離が sin に従うため、それぞれ等角度 $\frac{\pi}{N}$ で交わる。

4.3 内積をとった場合

2.5 節において、出力トラック情報ベクトルと $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{c}$ との内積について述べた。これは $N > 2$ の場合に出力を S, C の 2 要素にする操作であるが、前項と同様に解釈することができる。

まず $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{c}$ を以下のようにとる。

(注2)：距離が負になる場合には、法線ベクトルが逆を向くと考えればよい。

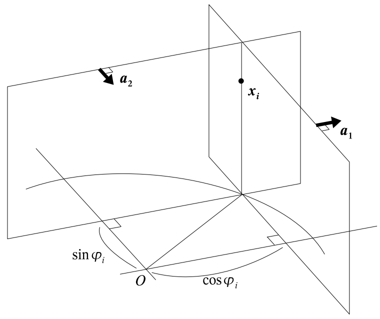

図 2　$N = 2$ の場合

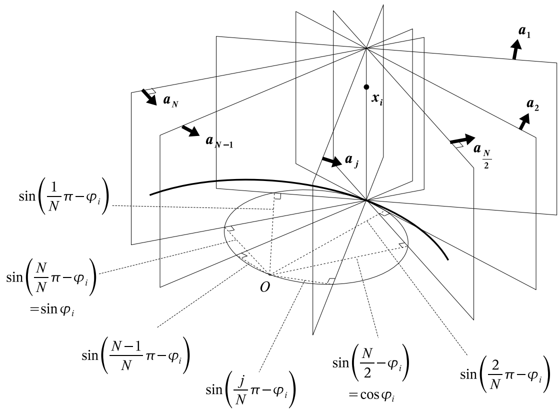

図 3　$N > 2$ の場合

$$\boldsymbol{s} = \left(\sin\frac{1}{N}\pi,\ \sin\frac{2}{N}\pi,\ \ldots,\ \sin\frac{N}{N}\pi\right)^T \tag{61}$$
$$\boldsymbol{c} = \left(\cos\frac{1}{N}\pi,\ \cos\frac{2}{N}\pi,\ \ldots,\ \cos\frac{N}{N}\pi\right)^T \tag{62}$$

これを式 (55) の両辺にかける。$\boldsymbol{s}$ の場合、まず左辺は

$$\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}{}_i = \sum_j^N \sin\frac{j}{N}\pi\ \sin\left(\frac{j}{N}\pi - \varphi_i\right) \tag{63}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_j^N \left\{\cos\left(\frac{2j}{N}\pi - \varphi_i\right) - \cos\varphi_i\right\} \tag{64}$$
$$= -\frac{N}{2}\cos\varphi_i \tag{65}$$

となり、右辺は

$$\boldsymbol{s}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i \\ \boldsymbol{a}_2^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n^{\mathrm{out}}}^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i \end{pmatrix} = \sum_j^N \left\{\sin\frac{j}{N}\pi(\boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i)\right\} \tag{66}$$
$$= \left(\sum_j^N \sin\frac{j}{N}\pi \boldsymbol{a}_j^T\right)\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i \tag{67}$$

したがって、

$$\left(\sum_{j}^{N} \sin\frac{j}{N}\pi\ \boldsymbol{a}_j^T\right)\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i = -\frac{N}{2}\cos\varphi_i \tag{68}$$

となる。これは、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ の sin による重み付け和を法線とし、原点からの距離が $\frac{N}{2}\cos\varphi_i$ である平面が点 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}$ を通ることを意味する。

$\boldsymbol{c}$ の場合も同様にすると、

$$\left(\sum_{j}^{N} \cos\frac{j}{N}\pi\ \boldsymbol{a}_j^T\right)\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i = -\frac{N}{2}\sin\varphi_i \tag{69}$$

が得られる。

式 (68) と式 (69) のうち、重み付け法線部分をそれぞれ $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ とおいてこれらの式を書き直すと、以下の式が得られる。

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} = \sin\varphi_i, \quad \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} = \cos\varphi_i \tag{70}$$

これは $N = 2$ の場合における式 (59)、式 (60) と同じ形式である。

つまり、$N > 2$ の場合であっても、$\boldsymbol{s}, \boldsymbol{c}$ との内積をとることによって $N = 2$ と同様の平面への投影を得ている。

5. サンプル数と線形写像の学習について

前節までで、本手法の主要部分は線形連立方程式の最小ノルム推定であり、推定されたその線形写像が画像列がなす多様体上の点を 2 次元平面上の単位円に写像することを説明した。ここでは、実際にそのような写像が得られるのかどうかを、次元とサンプル数の点から説明する。

本手法の入出力を関係づける式 (38) は

$$[\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}{}_M] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n^{\mathrm{out}}}^T \end{pmatrix} [\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_1, \ldots, \boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_M] \tag{71}$$

であるが、一部分だけに注目すると

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}{}_i = \boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}}{}_i \tag{72}$$

である。ここで未知数は n^{in} 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ なので、式が n^{in} あれば一意に決まる。しかし $i = 1, \ldots, M$ なので、$M < n^{\mathrm{in}}$ ならば式 (71) を満たす無数の解が存在する。

つまり、学習サンプル数 M が、入力画像の次元 n^{in} よりも小さい場合、学習セットを完全に記述する行列 A が存在し、この行列により学習画像の多様体上のサンプル点は厳密に 2 次元平面上の単位円に投影される。

学習サンプル数 M が、入力画像の次元 n^{in} よりも大きい場合、学習画像は厳密には 2 次元平面上の単位円周上には写像されず、その付近に（最小二乗の意味で）投影される。

[2] の実験に用いている COIL-20 [19] は、画像サイズが $n^{\mathrm{in}} = 128 \times 128$ であり、サンプル数は $M = 72$ 枚なので、十分に上記の条件を満たしている。しかし、学習画像は単位円に厳密に投影できてはいるが、学習セットにない未知サンプルを投影した場合に単位円周上に乗るという保証はない。ただしある条件が満たされる場合には、単位円周上に乗り未知サンプルの推定が行われる（ [2] 参照)。

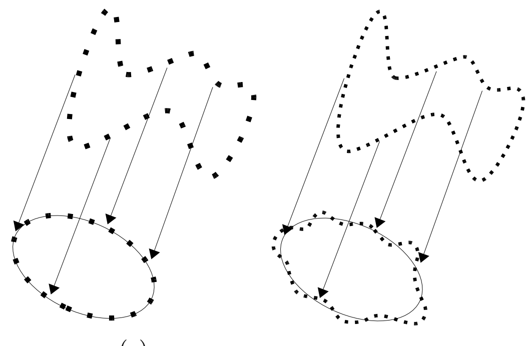

図 4　サンプル数と学習される投影の関係。(a) $M < n^{\mathrm{in}}$ の場合。(b) $M > n^{\mathrm{in}}$ の場合。

6. おわりに

本稿では、線形写像によって多様体の教師付き学習をおこなうマルチポート固有空間法について議論した。

本稿での内容をまとめると、以下のようになる。

- マルチポート固有空間法は学習時の入出力ベクトルを連結して固有空間による学習を行い（2. 2 節)、BPLP により推定を行う（2. 3 節）ものである。出力ベクトルが冗長であっても、ベクトルの内積により冗長さを除いている（2. 5 節)。
- 本手法の処理は、学習時の入出力を線形写像で関係付けた連立方程式の最小ノルム解推定に等しい（3. 節)。
- 1 軸回転パラメータの場合、付属する出力ベクトル（情報トラック）を正弦波として定義しているため、線形写像によって入力ベクトルは平面上の単位円周 S^1 上に投影される（4. 節)。
- 学習サンプル数 M が入力画像の次元 n^{in} よりも小さい場合、線形写像 A は無数に存在し、学習時の入力ベクトルは単位円への投影は厳密にされる（5. 節)。

本手法は、画像補間のための手法である BPLP [4] から出発している。つまり、欠損画素の輝度値推定を出力ベクトルによるパラメータ推定に置き換えたものである。これが学習の入出力ベクトルを連結するということと同じになっている。学習の入出力ベクトルを連結するというアイデアは素朴なものであり、Active Appearance Model [20] や Eigen-points [21] などにも同様のものが見られる。DCCA (Dynamic Coupled component Analysis) [22] を提案した Torre らは、このようにして関係付られた場合には一方から他方の推定は最適なものではないと指摘している [22]。しかし、3. 節で述べたように、この考え方は（次元を削減しなければ）連立方程式による推定と同じであり、この意味では最適な推定になっていると思われる。逆に、出口ら [23]〜[25] は入出力を線形写像で結び付けており、こちらも同様に素朴な考え方である。

次元を削減した場合にはどうなるだろうか。出口ら [24], [25] は入出力を線形写像で直接関連付けた場合の学習能力とパラメトリック固有空間法に対して、本節と同様の議論を行っている。それによると、固有空間による次元削減が汎化性能を向上させているとされているが、本手法における学習の汎化性能も同様に議論することができると思われる。また学習サンプル数と入

力の次元についても、本稿と同じ議論がなされており [24], [25]、学習サンプル数が入力の次元より小さい場合には（当然ながら）無数の解が存在することを指摘している。

また [2] でも述べているが、式 (13) と式 (19) より、

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}*} = E^{\mathrm{in}}({E^{\mathrm{in}}}^T E^{\mathrm{in}})^{-1}{E^{\mathrm{in}}}^T\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} \equiv E^{\mathrm{in}}\boldsymbol{\gamma} \qquad (73)$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}*} = E^{\mathrm{out}}({E^{\mathrm{in}}}^T E^{\mathrm{in}})^{-1}{E^{\mathrm{in}}}^T\boldsymbol{x}^{\mathrm{in}} \equiv E^{\mathrm{out}}\boldsymbol{\gamma} \qquad (74)$$

である。つまり入力の最良近似係数 $\boldsymbol{\gamma}$ を用いて、出力を近似していることになる。この考え方は Vetter らの Linear class [26] に見られる。彼らは 3 次元ベクトルに対して剛体変換を行っても不変であることを利用しているものであるが、細井ら [27] は 2 次元の固有画像に対して同様の処理を行っている。このままの形では、係数をそのまま用いるという考え方の有効性が見えにくいが、本稿で示したように、「入力の最良近似係数を出力の近似に用いる＝入出力を線形で結びつける＝入出力ベクトルを連結して固有空間を作成する」という形で見通せると思われる。

最後に、画像もしくはベクトルの一部分（入力）から他の部分（出力）を推定するという本手法の考え方は、もっと一般的に扱えるということを指摘しておく。Iwamura ら [28] は文字検出のために部分画像中の基点から特徴点への投票を行っている。投票と連立方程式は異なる処理ではあるが、どちらも入出力を関係付ける写像とみなすことで、共通した問題を解くことができるかもしれない。

謝　　辞

有益なコメントや議論をしていただいた新潟大学自然科学系情報理工学系列 山田寛喜氏、九州大学大学院システム情報科学研究院 内田誠一氏、広島大学大学院理学研究科数学専攻 田丸博士氏に感謝致します。

文　　献

[1] 天野敏之：マルチポート固有空間法による物体の位置・姿勢検出 — 数枚の画像相関からのパラメータ推定法の提案 —, 名古屋工業大学電気情報工学科佐藤研究室 内部資料 (2000.6.27).

[2] 天野敏之, 玉木徹：Estimation-by-Completion: 3 次元物体の線形姿勢推定手法, *MIRU2006* (2006), in print.

[3] 天野敏之, 井口征士：固有空間照合法を用いた BPLP による画像補間, *MIRU2000*, Vol. 1, pp. 217–222 (2000).

[4] 天野敏之, 佐藤幸男：固有空間法を用いた BPLP による画像補間, 電子情報通信学会論文誌 D-II, Vol. J85-D-II, No. 3, pp. 457–465 (2002), http://search.ieice.org/bin/summary.php?id=j85-d2_3_457&category=D&year=2002&lang=J&abst=.

[5] 村瀬洋, シュリーナイヤー：2 次元照合による 3 次元物体認識－パラメトリック固有空間法－, 電子情報通信学会論文誌 DII, Vol. J77-D2, No. 11, pp. 2179–2187 (1994), http://search.ieice.org/bin/summary.php?id=j77-d2_11_2179&category=D&year=1994&lang=J&abst=.

[6] Murase, H. and Nayar, S. K.: Visual learning and recognition of 3-D objects from appearance, *IJCV*, Vol. 14, No. 1, pp. 5–24 (1995), http://dx.doi.org/10.1007/BF01421486.

[7] Scholkopf, B., Smola, A. and Müller, K.-R.: Nonlinear Component Analysis as a Kernel Eigenvalue Problem, *Neural Computation*, Vol. 10, pp. 1299–1319 (1998), http://neco.mitpress.org/cgi/content/abstract/10/5/1299.

[8] 坂野鋭ー：パターン認識における主成分分析ー顔画像認識を例としてー, 統計数理, Vol. 49, No. 1, pp. 23–42 (2001), http://www.ism.ac.jp/editsec/toukei/pdf/49-1-023.pdf.

[9] Law, M.: Manifold Learning, online (accessed 2006.6.28), http://www.cse.msu.edu/~lawhiu/manifold/.

[10] Smola, A. J. and Schölkopf, B.: A Tutorial on Support Vector Regression, NeuroCOLT Technical Report NC-TR-98-030, Royal Holloway College, University of London, UK (1998), http://www.kernel-machines.org/papers/tr-30-1998.ps.gz.

[11] Roweis, S. T. and Saul, L. K.: Nonlinear Dimensionality Reduction by Locally Linear Embedding, *Science*, Vol. 290, No. 5500, pp. 2323–2326 (2000), http://www.sciencemag.org/cgi/content/abstract/290/5500/2323.

[12] Tenenbaum, J. B., Silva, de V. and Langford, J. C.: A Global Geometric Framework for Nonlinear Dimensionality Reduction, *Science*, Vol. 290, No. 5500, pp. 2319–2323 (2000), http://www.sciencemag.org/cgi/content/abstract/290/5500/2319.

[13] Donoho, D. L. and Grimes, C.: Hessian eigenmaps: Locally linear embedding techniques for high-dimensional data, *PNAS*, Vol. 100, No. 10, pp. 5591–5596 (2003), http://www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.1031596100.

[14] Belkin, M. and Niyogi, P.: Laplacian Eigenmaps for Dimensionality Reduction and Data Representation, *Neural Computation*, Vol. 15, No. 6, pp. 1373–1396 (2003), http://people.cs.uchicago.edu/~misha/paper1.pdf.

[15] Gong, H., Pan, C., Yang, Q., Lu, H. and Ma, S.: A Semi-Supervised Framework for Mapping Data to the Intrinsic Manifold, *ICCV2005*, Vol. 1, pp. 98–105 (2005), http://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/ICCV.2005.18.

[16] Kouropteva, O., Okun, O. and Pietikäinen, M.: Incremental locally linear embedding, *Pattern Recognition*, Vol. 38, No. 10, pp. 1764–1767 (2005), http://dx.doi.org/10.1016/j.patcog.2005.04.006.

[17] Law, M. H. C. and Jain, A. K.: Incremental Nonlinear Dimensionality Reduction by Manifold Learning, *PAMI*, Vol. 28, No. 3, pp. 377–391 (2006), http://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/TPAMI.2006.56.

[18] He, X., Cai, D., Yan, S. and Zhang, H.-J.: Neighborhood Preserving Embedding, *ICCV2005*, Vol. 2, pp. 1208–1213 (2005), http://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/ICCV.2005.167.

[19] Nene, S. A., Nayar, S. K. and Murase, H.: Columbia Object Image Library(COIL-20), Technical Report CUCS-005-96, Columbia University (1996), http://www1.cs.columbia.edu/CAVE/software/softlib/coil-20.php.

[20] Cootes, T. F., Edwards, G. J. and Taylor, C. J.: Active Appearance Models, *ECCV98*, Vol. 2, pp. 484–498 (1998), http://www.isbe.man.ac.uk/~bim/Models/eccv98_aam.pdf.

[21] Covell, M.: Eigen-points: Control-point Location using Principle Component Analyses, *FG96*, pp. 122–127 (1996), http://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/AFGR.1996.557253.

[22] Torre, la F. D. and Black, M. J.: Dynamic coupled component analysis, *CVPR2001*, Vol. 2, pp. 643–650 (2001), http://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/CVPR.2001.991024.

[23] Deguchi, K.: A Direct Interpretation of Dynamic Images with Camera and Object Motions for Vision Guided Robot Control, *IJCV*, Vol. 37, No. 1, pp. 7–20 (2000), http://dx.doi.org/10.1023/A:1008151528479.

[24] 出口光一郎, 岡谷貴之：固有空間法はなぜうまく働くか, 情報処理学会コンピュータビジョンとイメージメディア研究会, Vol. 2001, No. 66, pp. 1–8 (2001), http://fw8.bookpark.ne.jp/cm/ipsj/search.asp?flag=6&keyword=IPSJ-CVIM01128001&mode=PDF.

[25] Okatani, T. and Deguchi, K.: Yet Another Appearance-Based Method for Pose Estimation Based on a Linear Model, *MVA2000*, pp. 258–261 (2000).

[26] Vetter, T. and Poggio, T.: Linear Object Classes

and Image Synthesis From a Single Example Image, *PAMI*, Vol. 19, No. 7, pp. 733–742 (1997), http://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/34.598230.
[27] 細井辰弥, 栗田多喜夫, 名取研二：任意方向からの顔画像の認識のための多方向顔画像の主成分分析, 電子情報通信学会パターン認識・メディア理解研究会, Vol. PRMU2005-266, pp. 69–74 (2006).
[28] Iwamura, M., Negishi, K. and Aso, andHirotomo S. O.: Isolated Character Recognition by Searching Feature Points, *ICDAR2005*, pp. 1035–1039 (2005), http://www.m.cs.osakafu-u.ac.jp/publication_data/365.pdf.

付　録

1. 位相推定の原理

ここでは、式 (21) と式 (22) で推定される位相 φ について考察する。

1.1 連続の場合

まず離散的な定式化から一旦離れて、連続的な定式化について見る。

まず式 (21) における $\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}$ を、要素の添字 i で表されるベクトルではなく、時間 t の関数

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}(t) = K\sin(\omega t - \varphi) + D \tag{A·1}$$

として考える。すると、

$$S = \int_0^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}(t)\sin\omega t\ dt \tag{A·2}$$

ここで $T = \frac{2\pi}{\omega}$ である。これを式変形すると、

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}(t)\sin\omega t\ dt && \text{(A·3)}\\
&= K\int_0^T \sin(\omega t-\varphi)\sin\omega t\ dt + D\int_0^T \sin\omega t\ dt && \text{(A·4)}\\
&= \frac{-K}{2}\int_0^T \cos(2\omega t-\varphi)\ dt + \frac{K}{2}\int_0^T \cos\varphi\ dt && \text{(A·5)}\\
&= \frac{-K}{2}\left[\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t-\varphi)\right]_0^T + \frac{K}{2}\cos\varphi\,[t]_0^T && \text{(A·6)}\\
&= \frac{-K}{4\omega}\{\sin(2\omega T-\varphi)\sin(-\varphi)\} + \frac{K}{2}T\cos\varphi && \text{(A·7)}\\
&= \frac{-K}{4\omega}\{\sin(4\pi-\varphi)\sin(-\varphi)\} + \frac{K\pi}{\omega}\cos\varphi && \text{(A·8)}\\
&= \frac{-K}{4\omega}\{\sin(-\varphi)\sin(-\varphi)\} + \frac{K\pi}{\omega}\cos\varphi && \text{(A·9)}\\
&= \frac{K\pi}{\omega}\cos\varphi && \text{(A·10)}
\end{aligned}$$

C についても同様に

$$\begin{aligned}
C &= \int_0^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}(t)\cos\omega t\ dt && \text{(A·11)}\\
&= K\int_0^T \sin(\omega t-\varphi)\cos\omega t\ dt \\
&\quad + D\int_0^T \cos\omega t\ dt && \text{(A·12)}\\
&= \frac{K}{2}\int_0^T \sin(2\omega t-\varphi)\ dt \\
&\quad + \frac{K}{2}\int_0^T \sin(-\varphi)t\ dt && \text{(A·13)}\\
&= \frac{K}{4\omega}\left[\cos(2\omega t-\varphi)\right] + \frac{K}{2}\sin\varphi\,[t]_0^T && \text{(A·14)}\\
&= \frac{K}{4\omega}\{\cos(4\pi-\varphi)-\cos(\varphi)\} + \frac{K\pi}{\omega}\sin\varphi && \text{(A·15)}\\
&= \frac{K}{4\omega}\{\cos(\varphi)-\cos(\varphi)\} + \frac{K\pi}{\omega}\sin\varphi && \text{(A·16)}\\
&= \frac{K\pi}{\omega}\sin\varphi && \text{(A·17)}
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{C}{S} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi \tag{A·18}$$

したがって

$$\tan^{-1}\left(\frac{C}{S}\right) = \varphi \tag{A·19}$$

以上のように、位相 φ が計算できることが分かる。

1.2 複素フーリエ変換

S, C は実数なので、複素数 $C + jS$ を考える。ここで j は虚数単位である。いま、正弦波の周波数を ω_0 とすると、

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}(t) = K\sin(\omega_0 t - \varphi) + D \tag{A·20}$$

である。前項の計算式を用いると、

$$\begin{aligned}
C + jS &= \int_0^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}(t)\cos\omega_0 t\ dt \\
&\quad + j\int_0^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}(t)\sin\omega_0 t\ dt && \text{(A·21)}\\
&= \int_0^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}(t)(\cos\omega_0 + j\sin\omega_0 t)\ dt && \text{(A·22)}\\
&= \int_0^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}(t)e^{-j\omega_0 t}\ dt && \text{(A·23)}
\end{aligned}$$

これは $\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}(t)$ のフーリエ変換に他ならない。ここで $x(t)$ のフーリエ変換を $\mathcal{F}[x(t)](\omega)$ とすると、

$$C + jS = \mathcal{F}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}(t)](\omega_0) \tag{A·24}$$

である。また $\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}$ は周波数を ω_0 しか持たないので、

$$\mathcal{F}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}(t)](\omega) = \begin{cases} C + jS, & \omega = \omega_0 \\ 0, & \omega \neq \omega_0 \end{cases} \tag{A·25}$$

となる。

以上より、位相 $\varphi = \angle(C + jS)$、つまり複素数 $C + jS$ の偏角で表されている。

1.3 離散フーリエ変換

複素フーリエ変換と同様に、離散フーリエ変換も以下のように考える。

$$S = \sum_{k=0}^{n^{\mathrm{out}}-1} \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}[k] \sin k\omega_0 \tag{A·26}$$

$$C = \sum_{k=0}^{n^{\mathrm{out}}-1} \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}[k] \cos k\omega_0 \tag{A·27}$$

より、

$$C + jS = \sum_{k=0}^{n^{\mathrm{out}}-1} \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}[k] \cos k\omega_0 + j \sum_{k=0}^{n^{\mathrm{out}}-1} \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}[k] \sin k\omega_0 \tag{A·28}$$

$$= \sum_{k=0}^{n^{\mathrm{out}}-1} \Big\{ \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}[k] \cos k\omega_0 + j\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}[k] \sin k\omega_0 \Big\} \tag{A·29}$$

$$= \sum_{k=0}^{n^{\mathrm{out}}-1} \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}[k] (\cos k\omega_0 + j \sin k\omega_0) \tag{A·30}$$

$$= \sum_{k=0}^{n^{\mathrm{out}}-1} \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}[k] e^{-jk\omega_0} \tag{A·31}$$

$$= \sum_{k=0}^{n^{\mathrm{out}}-1} \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}[k] e^{-j\frac{2\pi k n_0}{n^{\mathrm{out}}}} \tag{A·32}$$

ここで $\omega_0 = 2\pi \frac{n_0}{n^{\mathrm{out}}}$ とおいた。また $N = n^{\mathrm{out}}$, $x_k = \boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}[k]$ とおくと、

$$C + jS = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi k n_0}{N}} \tag{A·33}$$

これは x_k の離散フーリエ変換に他ならない。

ここで $x[i]$ の離散フーリエ変換を $\mathcal{F}[x[i]](n)$ とすると、

$$C + jS = \mathcal{F}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}[i]](n_0) \tag{A·34}$$

である。また $\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}$ は周波数を ω_0 しか持たないので、

$$\mathcal{F}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{out}}[i]](n) = \begin{cases} C + jS, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases} \tag{A·35}$$

となる。