広島大学大学院教育学研究科紀要　第二部　第54号　2005　39－45

情報基礎教育のためのニュートン法を利用した数値計算アルゴリズムの理解

向 谷 博 明

(2005年9月19日受理)

Understanding of An Algorithm for Numerical Computation via Newton's Method for Basic Information Education

Hiroaki Mukaidani

In this paper, the understanding of an algorithm for numerical computation via Newton's method is investigated. In order to demonstrate the efficiency of Newton's method, an example of how to use them is given. After introducing the mathematical tool related to matrix algebra, the new iterative technique that is based on Newton's method for solving a set of the algebraic Riccati equation is applied. It is shown that the proposed algorithm guarantees the local quadratic convergence. A numerical example to show the validity of the Newton's method is given for the practical control problem.

Key Words : Newton's method, nonlinear matrix equation, numerical computation, modern control theory.
キーワード : ニュートン法, 非線形行列方程式, 数値計算, 現代制御理論.

1　はじめに

非線形方程式を解く方法の一つとして, ニュートン法が良く知られている [1]. ニュートン法は, 初期値が求める解の近傍に存在すれば, 局所二次収束が保証される. したがって, 収束速度は極めて速く, 非常に実用的なアルゴリズムであると考えられる. 一般に, 大学などの高等教育機関では, 数値計算法の講義の中でニュートン法がテーマとして良く扱われている. しかしながら, 一次や二次のような低次元の非線形方程式に重点が置かれており, 実務的な応用はほとんど扱われていないのが現状である.

工学, 特に制御工学においては, 制御則を決定する上で, 非線形行列方程式を解く場合が多く存在する. 特にリカッチ代数方程式と呼ばれる非線形行列方程式は, 現代制御理論において非常に重要な役割を演じている. これらの方程式を解く場合には, 通常, クラインマン型アルゴリズム [2], または実シュール解法 [3] が利用される. 特に, クラインマン型アルゴリズムはニュートン法であることが示されており, 初学者にとってもニュートン法を理解するうえで比較的取り組みやすい応用例であると思われる. しかしながら, ニュートン法によるアルゴリズムの導出には, 行列関数についてのかなり高等な知識を必要とする. 具体的には, クロネッカ積 [4], 行列の微分 [4] など, 一般的には学部の応用数学での基礎教育では扱われない数学的道具が必要となる. これら内容は, 一部の研究者レベルでしか必要ないように思われるが, 実は, これらの内容は, 実数から行列 (ベクトル) への自然な拡張であり, 学習者の興味を引く上でぜひとも学部教育のカリキュラムとして取り入れたい内容であると考えられる.

本論文では, 学部教育で行われる応用数学教育のカリキュラムの一つとして, 非線形行列方程式をとりあげる. 特に, 情報基礎教育と関連付け, ニュートン法を利用した数値計算アルゴリズムの理解を助ける教材の内容を与える. まず, ニュートン法の概要を説明するために, 簡単な非線形行列方程式 $X^3 = A$ をとりあげ, ニュートン法を導出する際に必要な行列関数の数学的基礎を導入する. これらの準備の下, 実際の制御問題である H_2/H_∞ 制御を主題として, 非線形行列方程式である連立型リカッチ方程式を解くためのニュートン法を導出する. ここで, 扱われる連立型リカッチ方程式は, 従来のクラインマン型アルゴリズム [2], または実シュール解法 [3] が利用できないことに注意されたい. 結果として, 提言されたアルゴリズムは, ニュートン法に基づいているため, 局部二次収束が保証される. その他の特徴として, 初期値近傍での解の唯一性及び解の構造を明らかにする. 最終的に, ニュートン法の有効性を示すために, 実務的な制御問題を題材とした数値例

が与えられる．

本論文では，以下の記号を利用する．$\mathcal{S}^T$ は行列 $\mathcal{S}$ の転置を表す．さらに，$I_n \in \mathbf{R}^{n\times n}$ は n 次の単位行列を表す．また，$\|\mathcal{S}\|$ は，実正方行列 $\mathcal{S} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ に対して，$\mathcal{S}^T\mathcal{S}$ の最大固有値の平方根　すなわち最大特異値 $\|\mathcal{S}\| \equiv [\lambda_{\max}\mathcal{S}^T\mathcal{S}]^{1/2}$ を表す．$\|\mathcal{F}(s)\|_\infty$ は，伝達関数行列 $\mathcal{F}(s) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ の H_∞ ノルム $\|\mathcal{F}(s)\|_\infty \equiv \sup_s[\lambda_{\max}(\mathcal{F}^T(s)\mathcal{F}(s)]^{1/2}$, $(s = j\omega,\ \omega \in \mathbf{R})$, $\|f(t)\|_2$ は，時間関数ベクトル $f(t) \in \mathbf{R}^n$ の $L_2[0,\ \infty]$ ノルム $\|f(t)\|_2 \equiv \left[\int_0^\infty f^T(t)f(t)dt\right]^{\frac{1}{2}}$, $(t \in \mathbf{R})$ をそれぞれあらわす．

2　非線形行列方程式 $X^3 = A$ を解くためのニュートン法

以下の非線形行列方程式を考える．

$$X^3 = A \tag{1}$$

ここで，$X \in \mathbf{R}^{n\times n}$ は未知の n 次正方行列，$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ は与えられた n 次正方行列である．さらに，問題を簡単にするために，X, A はともに実数を要素に持つ行列であると仮定する．

2.1　解析解

非線形行列方程式 (1) の性質を考察するため，$n = 2$, $A = I_2$ と設定し，解析解を求める．

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{2}$$

としたとき，ケーリ・ハミルトンの定理より以下の恒等式が成立する．

$$X^2 - sX + tI_2 = 0 \tag{3}$$

ただし，$s = a + d$, $t = ad - bc$ である．

一方，以下の恒等式が成立する．

$$X^3 = (X + sI_2)(X^2 - sX + tI_2) + (s^2 - t)X - stI_2 \tag{4}$$

したがって，(3) が成立することを利用して，

$$(s^2 - t)X - stI_2 = I_2 \tag{5}$$

が成立する．

i.　$s^2 - t = 0$ のとき

$-stI_2 = I_2$ から $st = -1$ となる．したがって，$s^3 + 1 = 0$ より s が実数であることに注意すれば $s = -1$, $t = 1$ となる．

ii.　$s^2 - t \neq 0$ のとき

$$X = \frac{st + 1}{s^2 - t}I_2 = kI_2 \tag{6}$$

に注意して，$X^3 = I_2$ に代入すれば $(k^3 - 1)I_2 = 0 \Leftrightarrow k^3 - 1 = 0$ が得らる．ここで，k が実数であることに注意すれば $k = 1$, すなわち $X = I_2$ が得られる．

最終的に，非線形行列方程式 (1) を満足する X は，

解 i. $a + d = -1$, $ad - bc = 1$ を満足する全ての X

解 ii. $X = I_2$

となる．以上の考察より，解が無数に存在することが分かる．この例題に見られるように，$n = 2$ では解析解を求めることが可能であるが，一般の n に対しては，ほぼ不可能に近い．そこで，数値計算による求解が必要となる．そこで，本論文ではニュートン法による求解を試みる．

2.2　数学的準備

非線形行列方程式を扱う上で必要な公式を紹介する [4].

- vec$\mathcal{S}$ は，行列 $\mathcal{S}$ の列ベクトル化を表す．すなわち，

$$\mathrm{vec}\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix},\ s_k = \begin{bmatrix} s_{1k} \\ s_{2k} \\ \vdots \\ s_{nk} \end{bmatrix} \tag{7}$$

で定義される．

- U_{lm} は行列 $\mathcal{S} \in \mathbf{R}^{l\times m}$ に対して $U_{lm}\mathrm{vec}\mathcal{S} = \mathrm{vec}\mathcal{S}^T$ を満足する置換行列を表す．例として，

$$\begin{aligned} U_{nn} & \\ := & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \\ & + \cdots \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

$$U_{nn} \in \mathbf{R}^{n^2\times n^2}$$

$$U_{nn} = U_{nn}^T,\ U_{nn}U_{nn}^T = U_{nn}U_{nn} = I_{n^2}$$

$$(\mathcal{A}^T \otimes I_n)U_{nn} = U_{nn}(I_n \otimes \mathcal{A}^T)$$

- $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ は行列 $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ のクロネッカ積を表す．すなわち，

$$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} \otimes \mathcal{T}$$

$$= \begin{bmatrix} s_{11}\mathcal{T} & s_{12}\mathcal{T} & \cdots & s_{1n}\mathcal{T} \\ s_{21}\mathcal{T} & s_{22}\mathcal{T} & \cdots & s_{2n}\mathcal{T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1}\mathcal{T} & s_{n2}\mathcal{T} & \cdots & s_{nn}\mathcal{T} \end{bmatrix} \tag{8}$$

で定義される.

- 行列の微分は以下で定義される.

$$\frac{\partial \mathrm{vec}\mathcal{AXB}}{\partial(\mathrm{vec}\mathcal{X})^T} = \mathcal{B}^T \otimes \mathcal{A} \tag{9}$$

応用として,

$$\frac{\partial \mathrm{vec}\mathcal{X}^T\mathcal{A}}{\partial(\mathrm{vec}\ \mathcal{X})^T} = (\mathcal{A}^T \otimes I_n)U_{nn}$$

$$\frac{\partial \mathrm{vec}\mathcal{A}^T\mathcal{X}}{\partial(\mathrm{vec}\ \mathcal{X})^T} = I_n \otimes \mathcal{A}^T$$

2.3 ニュートン法によるアルゴリズム

非線形行列方程式 (1) を解くためのニュートン法を導出する. 良く知られているように, 実数の一次元非線形方程式

$$f(x) = 0 \tag{10}$$

に対して, ニュートン法は以下によって定義される.

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \tag{11}$$

そこで, 非線形行列方程式に拡張するため, まず

$$F(X) := X^3 - A \tag{12}$$

としたときの微分を計算する.

$$\frac{\partial \mathrm{vec}F(X)}{\partial(\mathrm{vec}X)^T} = X^{2T} \otimes I_n + X^T \otimes X + I_n \otimes X^2 \tag{13}$$

以上より, 非線形行列方程式 (1) を解くためのニュートン法は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} &\mathrm{vec}X^{(n+1)} \\ &= \mathrm{vec}X^{(n)} - [X^{(n)T2} \otimes I_n + X^{(n)T} \otimes X + I_n \otimes X^{(n)2}]^{-1} \\ &\qquad \times \mathrm{vec}[X^{(n)3} - A] \end{aligned} \tag{14}$$

あるいは等価である (15) によって計算できる.

$$\begin{aligned} &\mathrm{vec}X^{(n+1)} \\ &= [X^{(n)2T} \otimes I_n + X^{(n)T} \otimes X + I_n \otimes X^{(n)2}]^{-1} \\ &\qquad \times \mathrm{vec}[2X^{(n)3} + A] \end{aligned} \tag{15}$$

ニュートン法は初期値によって収束しない. あるいは, 収束しても様々な解に収束することが良く知られている. この章で扱われた問題に対するニュートン法も, 初期値によって様々な解に収束することが予想される. 実際に, 後で示される数値例でこの事実が確認される.

ニュートン法は適切な初期値の下では, 局所二次収束することが証明されている [1]. そこで, 制御工学で扱われる具体的な問題を例にして, この性質を確認する.

3 H_2/H_∞ 制御問題 [5]

この章では, 制御工学で扱われる具体的な問題として H_2/H_∞ 制御問題 [5] を考える. まず, 制御目的及びそれらを達成する解を与える. 以下の線形時不変システムを考える [5].

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + D_1w(t) + Bu(t) \tag{16a}$$

$$z(t) = E_1x(t) + E_2u(t) \tag{16b}$$

$$y(t) = Cx(t) + D_2w(t) \tag{16c}$$

ここで, $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}^m$, $w(t) \in \mathbf{R}^p$ は, 線形時不変システム (16) で定義された状態ベクトル, 制御入力, 外乱をそれぞれ表す. また, $z(t) \in \mathbf{R}^q$ は制御量, $y(t) \in \mathbf{R}^r$ は出力とする. また, 各係数行列は適当な次元をもつと仮定する.

このとき, H_2/H_∞ 制御問題は以下のように与えられる.

【H_2/H_∞ 制御問題】 以下の三つの条件を満足する n 次元動的制御則

$$\dot{x}_c(t) = A_cx_c(t) + B_cy(t) \tag{17a}$$

$$u(t) = C_cx_c(t) \tag{17b}$$

を決定せよ. ただし, $x_c(t) \in \mathbf{R}^n$.

i. (16), (17) による閉ループ線形時不変システムが漸近安定である. すなわち, 以下の線形時不変システム (18) において, $\tilde{A}$ は漸近安定である.

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{D}w(t) \tag{18a}$$

$$z(t) = \tilde{E}\tilde{x}(t) \tag{18b}$$

ただし,

$$\tilde{x}(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix},\ \tilde{A} := \begin{bmatrix} A & BC_c \\ B_cC & A_c \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D} := \begin{bmatrix} D_1 \\ B_cD_2 \end{bmatrix},\ \tilde{E} := \begin{bmatrix} E_1 & E_2C_c \end{bmatrix}$$

ii. $w(t)$ から $z(t)$ までの閉ループ伝達関数 $\mathcal{G}(s)$ が以下の拘束条件を満足する.

$$\|\mathcal{G}(s)\|_\infty = \|\tilde{E}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{D}\|_\infty \le \gamma \tag{19}$$

ただし, γ はある与えられた正の定数である.

iii. 以下の評価関数 (20) を最小にする.

$$\begin{aligned} &J(A_c,\ B_c,\ C_c) \\ &:= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t [x^T(s)R_1x(s) + u^T(s)R_2u(s)]ds \\ &:= \|\mathcal{G}(s)\|_2^2 \end{aligned} \tag{20}$$

ただし, $R_1 = E_1^TE_1,\ R_2 = E_2^TE_2 > 0$.

ここで, 以下の条件を仮定する.

仮定 1 $E_1^T E_2 = 0,\ D_1 D_2^T = 0$.

仮定 2 行列対 $(A,\ B)$, $(A,\ C)$ はそれぞれ可安定かつ可検出である.

続いて, H_2/H_∞ 制御問題の条件を満足する制御則を与える [5].

補題 1 仮定 1, 2 が成立する線形時不変システム (16) を考える. もし, H_2/H_∞ 制御問題が可解であれば, 以下の連立型リカッチ方程式 (21) を満足する Q, P が存在する.

$$\begin{aligned}&L_1(Q,\ P)\\&:= AQ + QA^T + V_1 + \gamma^{-2}QR_1Q - Q\bar{\Sigma}Q = 0 \qquad (21a)\\&L_2(Q,\ P)\\&:= (A+\gamma^{-2}QR_1)^T P + P(A+\gamma^{-2}QR_1)\\&\quad +R_1 - P\Sigma P + \gamma^{-2}PQ\bar{\Sigma}QP = 0 \qquad (21b)\end{aligned}$$

ただし, $V_1 = D_1 D_1^T$, $V_2 = D_2 D_2^T > 0$, $\Sigma := BR_2^{-1}B^T$, $\bar{\Sigma} := C^T V_2^{-1} C$. このとき,

$$A_c := A - Q\bar{\Sigma} - \Sigma P + \gamma^{-2}QR_1 \qquad (22a)$$

$$B_c := QC^T V_2^{-1} \qquad (22b)$$

$$C_c := -R_2^{-1}B^T P \qquad (22c)$$

n 次元動的制御則 (17) を構築するためには, 連立型リカッチ方程式 (21) を解く必要がある. そこで, 本論文ではニュートン法を利用した数値計算アルゴリズムを提案する. その結果, 局所二次収束及び初期値の近傍で解の唯一性を保証することが可能となる.

3.1 連立型リカッチ方程式の解の漸近構造

ニュートン法を導出する準備として, 連立型リカッチ方程式 (21) の解の漸近構造を調査する. 連立型リカッチ方程式 (21) において, $\varepsilon := \gamma^{-2}$ と定義し, γ が非常に大きいとき, ε を摂動項とみなす. このとき, 連立型リカッチ方程式 (21) を以下のように書換える.

$$\begin{aligned}&M_1(\varepsilon,\ Q,\ P)\\&= AQ + QA^T + V_1 + \varepsilon QR_1Q - Q\bar{\Sigma}Q = 0 \qquad (23a)\\&M_2(\varepsilon,\ Q,\ P)\\&= (A+\varepsilon QR_1)^T P + P(A+\varepsilon QR_1)\\&\quad +R_1 - P\Sigma P + \varepsilon PQ\bar{\Sigma}QP = 0 \qquad (23b)\end{aligned}$$

連立型リカッチ方程式 (23) において, $\varepsilon = 0$ とおけば, 以下の 0-オーダ方程式 (24) を得る.

$$AQ^0 + Q^0A^T + V_1 - Q^0\bar{\Sigma}Q^0 = 0 \qquad (24a)$$

$$A^TP^0 + P^0A + R_1 - P^0\Sigma P^0 = 0 \qquad (24b)$$

ただし, 0-オーダ方程式 (24) の解をそれぞれ Q^0, P^0 と定義している. ここで, 仮定 2 より, 0-オーダ解 Q^0, P^0 はそれぞれ安定化解であることに注意されたい. すなわち, $A - Q^0\bar{\Sigma}$, $A - \Sigma P^0$ の全ての固有値の実部は, それぞれ負である.

以上の準備の下, 連立型リカッチ方程式 (21) の解の漸近構造式を得ることが可能となる.

定理 1 仮定 1, 2 のもと, $\varepsilon \in (0,\ \hat{\varepsilon})$ を満足する全ての $\varepsilon > 0$ に対して, 連立型リカッチ方程式 (21) の準正定対称解 $Q \ge 0$ 及び $P \ge 0$ が存在するような正のパラメータ $\hat{\varepsilon} > 0$ が存在する. また, Q 及び P はそれぞれ以下の構造をもつ.

$$Q(\varepsilon) = Q^0 + O(\varepsilon) \qquad (25a)$$

$$P(\varepsilon) = P^0 + O(\varepsilon) \qquad (25b)$$

(証明) 証明は陰関数定理によって可能である. すなわち, $\varepsilon = 0$ で (23) のヤコビ行列が正則であることを示せば十分である. そこで, $M_k(\varepsilon,\ Q,\ P) = 0$ を $Q = Q(\varepsilon)$ 及び $P = P(\varepsilon)$ の陰関数とみなしたときの $\varepsilon = 0$ 近傍でのヤコビ行列を計算する. 関数 $M_k(\varepsilon,\ Q,\ P)$ を Q 及び P について偏微分を行い, $\varepsilon = 0$ とすればヤコビ行列 (26) を得る.

$$\bar{\mathcal{J}}(0,\ Q^0,\ P^0) = \begin{bmatrix}\Psi_1 & 0\\ 0 & \Psi_2\end{bmatrix} \qquad (26)$$

ただし,

$$\bar{\mathcal{J}}(\varepsilon,\ Q,\ P) := \begin{bmatrix}\dfrac{\partial \mathrm{vec}M_1}{\partial(\mathrm{vec}Q)^T} & \dfrac{\partial \mathrm{vec}M_1}{\partial(\mathrm{vec}P)^T}\\ \dfrac{\partial \mathrm{vec}M_2}{\partial(\mathrm{vec}Q)^T} & \dfrac{\partial \mathrm{vec}M_2}{\partial(\mathrm{vec}P)^T}\end{bmatrix}$$

$$\Psi_1 := (A - Q^0\bar{\Sigma}) \otimes I + I \otimes (A - Q^0\bar{\Sigma})$$

$$\Psi_2 := (A - \Sigma P^0)^T \otimes I + I \otimes (A - \Sigma P^0)^T$$

ここで, 仮定 2 より $A - Q^0\bar{\Sigma}$, $A - \Sigma P^0$ の安定性がそれぞれ保証されるので, $\det\bar{\mathcal{J}}(0,\ Q^0,\ P^0) \ne 0$ が成立する. したがって, 陰関数定理によって, $\varepsilon \in (0,\ \hat{\varepsilon})$ を満足する全ての $\varepsilon > 0$ に対して, (25) が成立するような正のパラメータ $\hat{\varepsilon} > 0$ が存在する. (証明終)

以上の準備の下, 解の構造式 (25) を利用して, 連立型リカッチ方程式 (21) を解くためのニュートン法を導出する. ここで, 解の構造式 (25) は, ニュートン法の初期値設定に大いに重要な役割を果たすことに注意されたい.

3.2 ニュートン法

連立型リカッチ方程式 (21) の解法について, ニュートン法に基づくアルゴリズムの適用を考える.

$$\begin{aligned}&(A + \gamma^{-2}Q^{(n)}R_1 - Q^{(n)}\bar{\Sigma})Q^{(n+1)}\\&\quad +Q^{(n+1)}(A + \gamma^{-2}Q^{(n)}R_1 - Q^{(n)}\bar{\Sigma})^T\end{aligned}$$

$$+V_1-\gamma^{-2}Q^{(n)}R_1Q^{(n)}+Q^{(n)}\bar{\Sigma}Q^{(n)}=0 \quad (27a)$$

$$\begin{aligned}&(A+\gamma^{-2}Q^{(n)}R_1-\Sigma P^{(n)}+\gamma^{-2}Q^{(n)}\bar{\Sigma}Q^{(n)}P^{(n)})^TP^{(n+1)}\\&+P^{(n+1)}(A+\gamma^{-2}Q^{(n)}R_1-\Sigma P^{(n)}+\gamma^{-2}Q^{(n)}\bar{\Sigma}Q^{(n)}P^{(n)})\\&+\gamma^{-2}[R_1+P^{(n)}Q^{(n)}\bar{\Sigma}]Q^{(n+1)}P^{(n)}\\&+\gamma^{-2}P^{(n)}Q^{(n+1)}[R_1+P^{(n)}Q^{(n)}\bar{\Sigma}]^T\\&+R_1-\gamma^{-2}R_1Q^{(n)}P^{(n)}-\gamma^{-2}P^{(n)}Q^{(n)}R_1\\&+P^{(n)}\Sigma P^{(n)}-3\gamma^{-2}P^{(n)}Q^{(n)}\bar{\Sigma}Q^{(n)}P^{(n)}=0 \quad (27b)\end{aligned}$$

ここで, 初期値は $Q^{(0)}=Q^0$, $P^{(0)}=P^0$ に設定する.

定理 2 連立型リカッチ方程式 (21) が解を持つと仮定する. このとき, アルゴリズム (27) はニュートン法であり, 解はアルゴリズム (27) を繰返し計算することによって得ることができる.

(証明) まず, 関数 $L_k(Q,\ P)=0,\ (k=1,\ 2)$ を Q 及び P について偏微分した結果を (28) に与える.

$$\mathcal{J}(Q,\ P):=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\mathrm{vec}L_1}{\partial(\mathrm{vec}Q)^T} & \dfrac{\partial\mathrm{vec}L_1}{\partial(\mathrm{vec}P)^T}\\ \dfrac{\partial\mathrm{vec}L_2}{\partial(\mathrm{vec}Q)^T} & \dfrac{\partial\mathrm{vec}L_2}{\partial(\mathrm{vec}P)^T}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Xi_1 & 0\\ \Xi_2 & \Xi_3\end{bmatrix} \quad (28)$$

ただし,

$$\begin{aligned}\Xi_1&:=(A+\gamma^{-2}QR_1-Q\bar{\Sigma})\otimes I_n\\&\quad+I_n\otimes(A+\gamma^{-2}QR_1-Q\bar{\Sigma})\\ \Xi_2&:=(\gamma^{-2}P)\otimes(R_1+PQ\bar{\Sigma})\\&\quad+(R_1+PQ\bar{\Sigma})\otimes(\gamma^{-2}P)\\ \Xi_3&:=I_n\otimes(A+\gamma^{-2}QR_1-\Sigma P+\gamma^{-2}Q\bar{\Sigma}QP)^T\\&\quad+(A+\gamma^{-2}QR_1-\Sigma P+\gamma^{-2}Q\bar{\Sigma}QP)^T\otimes I_n\end{aligned}$$

続いて, 連立型リカッチ方程式 (21) に vec をとれば

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\mathrm{vec}L_1(Q^{(n)},\ P^{(n)})\\ \mathrm{vec}L_2(Q^{(n)},\ P^{(n)})\end{bmatrix}\\&:=\mathcal{J}(Q^{(n)},\ P^{(n)})\begin{bmatrix}\mathrm{vec}Q^{(n)}\\ \mathrm{vec}P^{(n)}\end{bmatrix}+\mathcal{E}(Q^{(n)},\ P^{(n)}) \quad (29)\end{aligned}$$

ただし,

$$\mathcal{E}(Q,\ P):=\begin{bmatrix}\mathrm{vec}\Phi_1(Q,\ P)\\ \mathrm{vec}\Phi_2(Q,\ P)\end{bmatrix}$$

$$\Phi_1(Q,\ P)=V_1-\gamma^{-2}QR_1Q+Q\bar{\Sigma}Q$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(Q,\ P)&=R_1-\gamma^{-2}R_1QP-\gamma^{-2}PQR_1\\&\quad+P\Sigma P-3\gamma^{-2}PQ\bar{\Sigma}QP\end{aligned}$$

を得る. さらに, アルゴリズム (27) に vec をとれば

$$\mathcal{J}(Q^{(n)},\ P^{(n)})\begin{bmatrix}\mathrm{vec}Q^{(n+1)}\\ \mathrm{vec}P^{(n+1)}\end{bmatrix}+\mathcal{E}(Q^{(n)},\ P^{(n)})=0 \quad (30)$$

を得る. 以上より, (30) から (29) を引けば (31) を得る.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\mathrm{vec}Q^{(n+1)}\\ \mathrm{vec}P^{(n+1)}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\mathrm{vec}Q^{(n)}\\ \mathrm{vec}P^{(n)}\end{bmatrix}-\mathcal{J}(Q^{(n)},\ P^{(n)})^{-1}\\&\quad\times\begin{bmatrix}\mathrm{vec}L_1(Q^{(n)},\ P^{(n)})\\ \mathrm{vec}L_2(Q^{(n)},\ P^{(n)})\end{bmatrix} \quad (31)\end{aligned}$$

したがって, アルゴリズム (27) はニュートン法である. 以上より, ニュートン法 (27) を繰返し計算することによって解を得ることができる. (証明終)

定理 3 定理 1 と同じ条件が成立すると仮定する. また, 初期値を $Q^{(0)}=Q^0$, $P^{(0)}=P^0$ に設定する. このとき, $\varepsilon\in(0,\ \hat{\sigma}^*)$ を満足する全ての ε に対して, ニュートン法 (27) が解 Q^* 及び P^* に二次収束するような $\hat{\sigma}^*$ が存在する. さらに, 解 Q^* 及び P^* は, 初期値 $Q^{(0)}=Q^0$, $P^{(0)}=P^0$ の近傍で唯一である. すなわち, 以下の関係が成立する.

$$\|Q^{(n)}-Q^*\|\le O(\varepsilon^{2^n}),\ n=0,\ 1,\ ... \quad (32a)$$

$$\|P^{(n)}-P^*\|\le O(\varepsilon^{2^n}),\ n=0,\ 1,\ ... \quad (32b)$$

(証明) 証明はニュートン-カントールビッチ定理 [1] によって行われる. 関数 $M_k(\varepsilon,\ Q,\ P)=0$ は, Q, P に関して連続関数であり, かつ偏微分 (28) から, 任意の Q^a, P^a, Q^b 及び P^b に対して, (33) を満足するような正定数 $\mathcal{L}(\varepsilon)$ が存在することが容易に分かる.

$$\begin{aligned}&\|\bar{\mathcal{J}}(\varepsilon,\ Q^a,\ P^a)-\bar{\mathcal{J}}(\varepsilon,\ Q^b,\ P^b)\|\\&\le\ \mathcal{L}(\varepsilon)\|(Q^a,\ P^a)-(Q^b,\ P^b)\| \quad (33)\end{aligned}$$

さらに, 構造式 (25) を利用して (34) が確認される.

$$\bar{\mathcal{J}}(\varepsilon,\ Q^{(0)},\ P^{(0)})=\bar{\mathcal{J}}(0,\ Q^0,\ P^0)+O(\varepsilon) \quad (34)$$

以上より, 十分小さな ε に対して, $\bar{\mathcal{J}}(0,\ Q^0,\ P^0)$ が正則であることに注意して, $\bar{\mathcal{J}}(\varepsilon,\ Q^{(0)},\ P^{(0)})$ が正則であることが示される. したがって, $\beta=\|\bar{\mathcal{J}}(\varepsilon,\ Q^{(0)},\ P^{(0)})^{-1}\|$ を満足する正定数 β が存在することが分かる. 一方, $M_k(\varepsilon,\ Q^{(0)},\ P^{(0)})=O(\varepsilon)$ が構造式 (25) を利用して示されるので, $\eta=\|[\bar{\mathcal{J}}(\varepsilon,\ Q^{(0)},\ P^{(0)})]^{-1}\|\cdot\|M_k(\varepsilon,\ Q^{(0)},\ P^{(0)})\|=O(\varepsilon)$ を満足する η の存在が示される. したがって, $\eta=O(\varepsilon)$ を考慮すれば, 十分小さなパラメータ ε に対して, 不等式 $\theta=\beta\eta\mathcal{L}(\varepsilon)<2^{-1}$ を満足するような θ の存在が示される. 最終的にニュートン-カントールビッチ定理を適用すれば関係式 (32) 及び解 Q^* 及び P^* の初期値近傍での唯一性が証明される. (証明終)

ニュートン-カントールビッチ定理を適用することによって, 陰関数定理を利用しなくても, (32) で $n=0$ とおけば, $Q^{(0)}=Q^0$, $P^{(0)}=P^0$ より解の構造式 (25) を得ることができることに注意されたい.

ニュートン法 (27) は, 連立一次方程式であるが, MATLAB[6] の既存の求解関数 (`lyap` など) を利用して

解くことができない. 従って, 実際の計算は (35) を利用して行なわれる.

$$\begin{bmatrix} \mathrm{vec}Q^{(n+1)} \\ \mathrm{vec}P^{(n+1)} \end{bmatrix} = -\Phi^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{vec}G^{(n)} \\ \mathrm{vec}H^{(n)} \end{bmatrix} \tag{35}$$

ただし,

$$\Phi = \begin{bmatrix} I_n \otimes D^{(n)} + D^{(n)} \otimes I_n & 0 \\ (\gamma^{-2}P^{(n)}) \otimes E^{(n)} + E^{(n)} \otimes (\gamma^{-2}P^{(n)}) & I_n \otimes F^{(n)T} + F^{(n)T} \otimes I_n \end{bmatrix}$$

$$D^{(n)} := A + \gamma^{-2}Q^{(n)}R_1 - Q^{(n)}\bar{\Sigma}$$

$$E^{(n)} := R_1 + P^{(n)}Q^{(n)}\bar{\Sigma}$$

$$F^{(n)} := A + \gamma^{-2}Q^{(n)}R_1 - \Sigma P^{(n)} + \gamma^{-2}Q^{(n)}\Sigma Q^{(n)}P^{(n)}$$

$$G^{(n)} := V_1 - \gamma^{-2}Q^{(n)}R_1Q^{(n)} + Q^{(n)}\bar{\Sigma}Q^{(n)}$$

$$\begin{aligned} H^{(n)} := &\ \gamma^{-2}P^{(n)}Q^{(n)}\bar{\Sigma}Q^{(n+1)}P^{(n)} \\ &+\gamma^{-2}P^{(n)}Q^{(n+1)}\bar{\Sigma}Q^{(n)}P^{(n)} \\ &+R_1 - \gamma^{-2}R_1Q^{(n)}P^{(n)} - \gamma^{-2}P^{(n)}Q^{(n)}R_1 \\ &+P^{(n)}\Sigma P^{(n)} - 3\gamma^{-2}P^{(n)}Q^{(n)}\bar{\Sigma}Q^{(n)}P^{(n)} \end{aligned}$$

4　数値例

本論文で考察されたニュートン法の有用性を検証する.

4.1　数値例-1

非線形行列方程式 (1) において, $n = 2$, $A = I_2$ と設定して実際に解を求める. 初期値 $X^{(0)} = 8I_2$ としたとき, 9 回の繰り返し計算によって収束解は $X = I_2$ となった.

Table 1.

n	$\|F(X^{(n)})\|$
0	$5.1100e+2$
1	$1.5115e+2$
2	$4.4527e+1$
3	$1.2939e+1$
4	3.5906
5	$8.5479e-1$
6	$1.2459e-1$
7	$4.5441e-3$
8	$6.8485e-6$
9	$1.5633e-11$

収束の様子を確認するために誤差のノルムを Table 1 に与える. ただし, 収束判定を $\|F(X^{(n)})\| < e-10$ とした. Table 1 より, 提案されたアルゴリズムは二次収束であることが確認される.

一方, 初期値を

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -0.9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

としたとき, 同じ収束条件の下, 42 回の繰り返し計算によって収束解は

$$X = \begin{bmatrix} 3.708692581858486e-2 & -9.667518887727056e-1 \\ 1.074176712689223 & -1.037086925818585 \end{bmatrix}$$

となった. この解は 2.1 の解 i に相当する. 以上より, 初期値を変更することにより, 様々な解を得ることが可能である.

4.2　数値例-2

本論文で提案されたアルゴリズム (27) の有用性を検証する. 各係数行列は, 文献 [5] で扱われている数値と同一とする. すなわち, システムの行列は以下で与えられる.

$$A = \textbf{block diag}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{pmatrix}$$

$$A_i := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\zeta\omega_i \end{bmatrix}$$

$$\omega_i = i^2,\ i = 1, \ldots, 5\ \zeta = 0.01$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.809 & 0 & -0.951 & 0 & 0.309 & 0 & 0.5878 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1.9 \end{bmatrix}^T,\ R_1 = E_1^T E_1$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} B & 0_{10\times 1} \end{bmatrix},\ D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1.9 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = R_2 = D_2 D_2^T = E_2^T E_2 = 3.61$$

$$V_1 = LL^T + \Sigma = -(A + A^T) + \Sigma,\ \gamma = 12.02,$$

$$B = C^T = \begin{bmatrix} -0.891 & 0 & 0.5878 & 0 & 0.7071 & -0.891 & 0 & 0.5878 & 0 & 0.7071 \end{bmatrix}^T$$

この問題では, 初期値 $Q^{(0)} = Q^0$, $P^{(0)} = P^0$ が容易に MATLAB の求解関数 [6] `are` を利用して計算される.

Table 2.

n	$g(n)$
0	$2.0743e-1$
1	$3.3993e-3$
2	$2.2580e-6$
3	$8.2202e-11$

提案されたアルゴリズム (27) の収束の様子を確認するために誤差のノルムを Table 2 に与える. ただし, 収束判定を $g(n) := \sum_{k=1}^{2} \|L_k(Q^{(n)},\ P^{(n)})\| < e-10$ とした. アルゴリズム (27) を実行した結果, 3 回の繰り返し計算によって収束解は得られた. 収束解を次のページに与える. Table 2 より, 提案されたアルゴリズムは二次収束であることが確認される.

一方, 初期値の有効性を確認するために, γ の値をいろいろ変更したときの誤差のノルムを Table 3 に与える. ただし, 収束判定は $\gamma = 12.02$ のときと同一である. Table 3 より, γ が十分に大きい場合, 提案された初期値は求める解に十分に近いので, 適切であることが確認される.

5　まとめ

本論文では, 非線形行列方程式を解くために, ニュートン法の適用を考えた. 特に, 学部の講義で行われる数値計算

$$Q^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -7.6597e-13 & -3.0737e-15 & 1.8273e-14 & 1.3861e-15 & 7.6433e-14 & -3.8375e-18 & 1.7668e-14 & 5.3822e-16 & -6.2135e-14 \\ 7.3420e-13 & 1.0000 & -4.1090e-15 & -5.4223e-14 & 2.1154e-15 & 5.8538e-14 & 2.1208e-16 & -2.8798e-14 & -7.2115e-16 & 4.3672e-14 \\ 1.2382e-15 & 1.7900e-15 & 1.0000 & 4.3038e-15 & -3.4081e-16 & -2.5018e-14 & 4.9483e-17 & -2.9138e-14 & 8.3483e-17 & 1.7270e-15 \\ -3.7674e-15 & 4.0352e-15 & -2.7580e-14 & 1.0000 & -5.2799e-15 & -1.5419e-14 & 1.9498e-16 & -3.0944e-14 & 4.2335e-15 & -3.2650e-15 \\ 1.2833e-15 & 2.8057e-15 & -1.0263e-15 & -4.5352e-15 & 1.0000 & -5.9832e-14 & -9.8335e-17 & 6.7509e-14 & 1.5592e-16 & 6.1727e-14 \\ 2.6012e-15 & 4.9209e-14 & -2.8517e-14 & -8.0811e-14 & -3.3827e-14 & 1.0000 & -2.2022e-14 & -8.6102e-14 & 6.9530e-15 & -3.2773e-14 \\ 1.3356e-16 & 9.3488e-16 & -6.6469e-16 & -2.4141e-15 & -1.2722e-16 & 4.6580e-14 & 1.0000 & 1.4641e-14 & -3.1140e-16 & -6.4341e-14 \\ 3.2135e-14 & 4.6363e-14 & 4.0585e-15 & -2.5564e-15 & -1.4939e-13 & 7.4437e-14 & 1.9264e-14 & 1.0000 & 2.0359e-14 & 2.5539e-15 \\ 2.9846e-16 & -1.6157e-15 & -1.1585e-16 & 4.2618e-15 & -3.1434e-16 & 7.7161e-15 & 9.5332e-16 & -5.0850e-14 & 1.0000 & -1.9880e-14 \\ 4.3069e-14 & 1.1639e-14 & -8.0788e-15 & -3.2923e-14 & 5.6814e-14 & 3.5137e-14 & 1.0775e-13 & 2.5271e-14 & -7.1591e-14 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.1027e+1 & -6.0451e-6 & -8.2302e-3 & -3.4231e-2 & 9.0248e-4 & 4.1754e-3 & 1.2698e-3 & 1.6855e-3 & 1.2117e-4 & -1.7233e-3 \\ -6.0451e-6 & 1.1025e+1 & 5.4745e-1 & -3.6297e-3 & -3.3793e-1 & 6.0081e-4 & -4.3102e-1 & 3.2816e-4 & 1.0755e+0 & -4.1077e-4 \\ -8.2302e-3 & 5.4745e-1 & 5.9218e+1 & -1.6257e-4 & -5.0566e-2 & -9.0205e-2 & -8.7002e-3 & -3.2127e-2 & 5.2475e-2 & 3.0994e-2 \\ -3.4231e-2 & -3.6297e-3 & -1.6257e-4 & 3.7037e+0 & 4.5702e-1 & -1.6015e-3 & 5.1464e-1 & -4.9735e-4 & -1.2127e+0 & 6.3132e-4 \\ 9.0248e-4 & -3.3793e-1 & -5.0566e-2 & 4.5702e-1 & 1.8894e+1 & -3.7826e-5 & 4.6248e-2 & 9.2175e-2 & -5.9157e-2 & -4.0909e-2 \\ 4.1754e-3 & 6.0081e-4 & -9.0205e-2 & -1.6015e-3 & -3.7826e-5 & 2.3314e-1 & -2.9145e-1 & 3.2378e-4 & 3.1608e-1 & -9.9242e-5 \\ 1.2698e-3 & -4.3102e-1 & -8.7002e-3 & 5.1464e-1 & 4.6248e-2 & -2.9145e-1 & 1.2950e+2 & -3.5650e-5 & -7.4213e-1 & -4.4652e-1 \\ 1.6855e-3 & 3.2816e-4 & -3.2127e-2 & -4.9735e-4 & 9.2175e-2 & 3.2378e-4 & -3.5650e-5 & 5.0592e-1 & 1.0904e+0 & -1.8363e-3 \\ 1.2117e-4 & 1.0755e+0 & 5.2475e-2 & -1.2127e+0 & -5.9157e-2 & 3.1608e-1 & -7.4213e-1 & 1.0904e+0 & 5.6331e+2 & -1.5528e-4 \\ -1.7233e-3 & -4.1077e-4 & 3.0994e-2 & 6.3132e-4 & -4.0909e-2 & -9.9242e-5 & -4.4652e-1 & -1.8363e-3 & -1.5528e-4 & 9.0103e-1 \end{bmatrix}$$

Table 3.

n	$g(n),\ (\gamma = 1.0e+1)$	$g(n),\ (\gamma = 1.0e+2)$	$g(n),\ (\gamma = 1.0e+3)$	$g(n),\ (\gamma = 1.0e+4)$
0	$2.9970e-1$	$2.9970e-3$	$2.9970e-5$	$2.9971e-7$
1	$7.9970e-3$	$6.9310e-7$	$7.0673e-11$	$3.8691e-11$
2	$1.0021e-5$	$4.5054e-11$		
3	$6.6496e-10$			
4	$1.2330e-9$			
5	$9.5893e-11$			

の理解を助けるための教材としての可能性を検証した．結果として，ニュートン法を導出する際に必要な行列関数の数学的基礎を導入することが可能となり，数学的には高度であるが，身近にニュートン法の実用性をアピールすることが出来ると考えられる．また，有用性を確認するため，実際の制御問題である H_2/H_∞ 制御を主題として，非線形行列方程式である連立型リカッチ方程式を解くためのニュートン法を導出した．提言されたアルゴリズムは，ニュートン法に基づいており，局部二次収束を達成することを証明した．その他の特徴として，初期値近傍での解の唯一性及び解の構造を明らかにした．これらの結果は，ニュートン法が解を求めるための道具だけでなく，様々な理論的結果を証明するために利用することが出来ることを示している．今後は， 以上の考察をもとに，授業実践を行っていく予定である．

References

[1] J.M. Ortega, *Numerical analysis, A second course*, SIAM (1990)

[2] D.L. Kleinman, On an iterative technique for Riccati equation computations, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.13, No.1, pp.114-115 (1968)

[3] A.J. Laub, A Schur method for solving algebraic Riccati equations, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.24, No.6, pp.913-921 (1979)

[4] J.R. Magnus and H. Neudecker, *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, John Wiley and Sons (1999)

[5] W. M. Haddad, D. S. Bernstein and Y. W. Wang : Dissipative H_2/H_∞ controller synthesis, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.39, No.4, pp.827-831 (1994)

[6] MATLAB 公式ホームページ, `http://www.cybernet.co.jp/matlab/`