広島大学附属中・高等学校研究紀要
〈第48号　2001〉

中学校数学の図形領域における包絡線の指導について

井　上　芳　文

学習指導要領の改訂にともない，次期の教育課程では内容の整理・統合や精選の観点から，科目の間や学年の間での内容の移行なども多くの箇所で見られるが，特に注目すべき点は平面幾何の内容を，これまで中学校で扱っていたものも含めるかたちで，多くの高校生が学習することになるという点である。そこで，中学校から高等学校にかけての図形指導の体系を改めて整理する必要がある。高等学校での抽象化された内容を扱う前段階の中学校の図形領域での学習では，生徒の具体的な活動にもとづいた思考を重視する必要がある。そこで本稿では，そのような意識のもとで中学校数学を見つめ直した中での，1つの授業実践を報告する。

1. はじめに

次回の学習指導要領の改訂にともなう新しい教育課程においては，内容の削減と同時に，学年の間，さらには中学校－高等学校での間での移行が様々な分野でなされることになる。とくに小学校から高等学校までの図形領域においては，かなりの変更点があるが，全体的に内容が後ろの学年に送られた感がある。とくに，高等学校1年生の数学Aにおいて多くの生徒が平面幾何を学習することになるので，中学校と高等学校の間の内容の整理は，指導の上で不可欠な準備となる。

また，図形分野の題材には独特の魅力がある。それまではどちらかというと数学を敬遠しがちだった生徒が，図形の領域の学習に入ったとたんに生き生きと授業に取り組むようになった例をいくつも目にしてきた。これは，図形そのものの美しさに加えて，学習の中に生徒の「活動」場面をより多く設定することが可能な分野であることが理由の一つに挙げられるであろう。自分の活動の中から何かを発見することの喜びが，生徒を図形の学習に引きつけるのではないだろうか。

本稿は，中学校数学ではあまり馴染みのない包絡線という題材の研究を通して，これからの中学校数学の図形領域における学習指導の視点を明確にすることを目的として行った，1つの授業実践の報告である。

2. 包絡線の定義と中学校―高等学校数学での具体的事例の検討

本校に赴任して最初の年に，同僚の先生に包絡線を扱った高校1年生の授業を見せていただいた。交点を持つ2本の線分に目盛りがついていて，それを順に結んでいく活動を通して，そこから放物線が浮かび上がってくるという授業であった。その授業では，生徒は自らの手で活動し，その結果として美しい図形を得ることで非常に興味を持って取り組んでおり，授業を観察させていただいた筆者にとっては，生徒の生き生きとした表情がとても印象的であった。その授業では，図形と方程式の知識や2次方程式の判別式を用いて，その図形が放物線であることを示していくという授業構成であった。

それ以来，生徒をこれだけ引きつける包絡線という内容を，図形の論証の導入となる中学校段階でも扱えないものかと考えていた。ただし，中学校で扱える図形には限りがあることから，円を題材としたもので教材を模索してきた。

一般に任意定数 α を含む方程式

$$f(x, y, \alpha)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

を曲線族という。方程式 (*) は α の値が連続的に変化するとき，一般に位置と形を連続的に変化する曲線 C_α の集合を定める。このとき，方程式 (*) の定義するすべての曲線が一定曲線 Γ 上の点においてこれと接し，また Γ はそれら接点の集合であるとき，Γ を曲線族 (*) の包絡線という。

包絡線は，与えられた条件によってその形状は様々であるが，ここでは，中学校数学において扱いうる内容として，円に関するものをいくつか取り上げ，その問題を

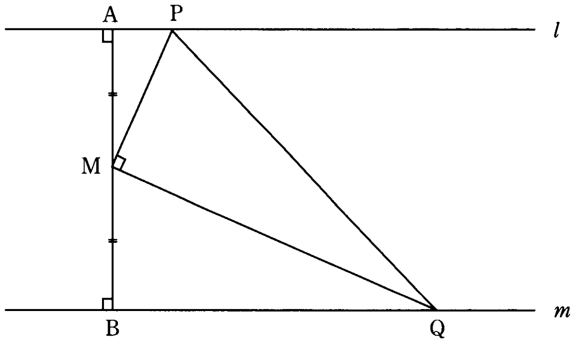
① 幾何学的な方法
② 座標平面を用いた方法

によって解決することを試みることにする。

Teaching of Envelope in Junior High School Mathematics
Yoshifumi INOUE

［例 1］

定直線 AB の中点をMとする。A, B を通り AB に垂直な直線 l, m上に点P，Qをとり，$\angle$PMQ $=90°$ となるようにすれば，PQ の包絡線は円である。



幾何学的な解決

証明 1

直線 PM と直線 m との交点を R とすれば，

$\angle AMP = \angle BMR$ ……… ①

仮定より $AM = BM$ ……… ②

$\angle PAM = \angle RBM = 90°$ ……… ③

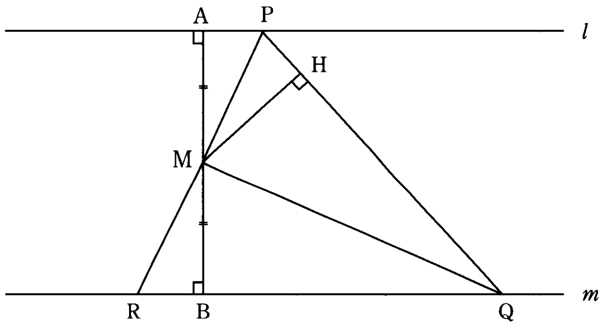
①②③より，$\triangle MAP \equiv \triangle MBR$

したがって，$MP = MR$

これより，$\triangle QMP \equiv \triangle QMR$

よって $QP = QR$

ゆえに $\angle QPM = \angle QRM$ ……… ④

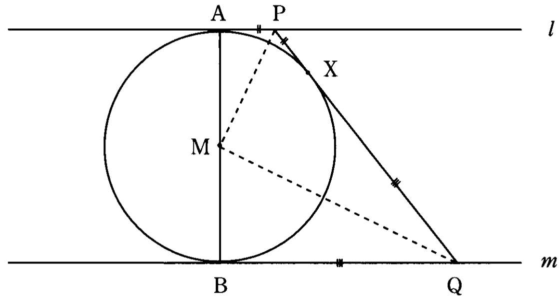


ここで，Mから直線 PQ へおろした垂線と直線 PQ との交点をHとすれば，④と $\angle APM = \angle QRM$ より $\triangle AMP \equiv \triangle HMP$

ゆえに $MH = MA$

このことは，Pの取り方によらず，MH が一定であることを示している。したがって，PQ はMを中心として MA を半径とする定円に接する。

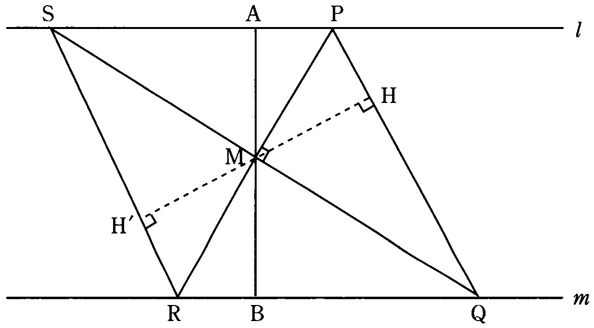
逆に，Mを中心として MA を半径とする円上の任意の点X（A，Bはのぞく）に対して，Xにおける接線と 2 直線 l, m との交点をそれぞれP，Qとするとき，$\angle PMQ = 90°$となることも，円と接線の性質を用いながらこの証明を逆にたどることで容易に確認できる。（ここでは省略する）



終

証明 2

図のように，直線 PM と直線 m の交点をR，直線 QM と直線 l の交点をSとする。



このとき，証明 1 より

$\triangle MAP \equiv \triangle MBR$ ……… ①

また，$\angle AMS = \angle BMQ$

$AM = BM$

$\angle SAM = \angle QBM = 90°$

より，$\triangle AMS \equiv BMQ$ ……… ②

①②より，

$MP = MR$，$MQ = MS$

となるので，四角形 PQRS は平行四辺形となる。

さらに，仮定より

$\angle PMQ = 90°$

であることから，四角形 PQRS はひし形となる。

ここで，Mから直線 PQ へおろした垂線と直線 PQ との交点をHとし，直線 HM と SR の交点を H′とする。ひし形 PQRS の面積を考えて

$AB \cdot RQ = HH' \cdot SR$

ここで，$RQ = SR$ であることから，

$AB = HH'$

ゆえに，$MH = MA$

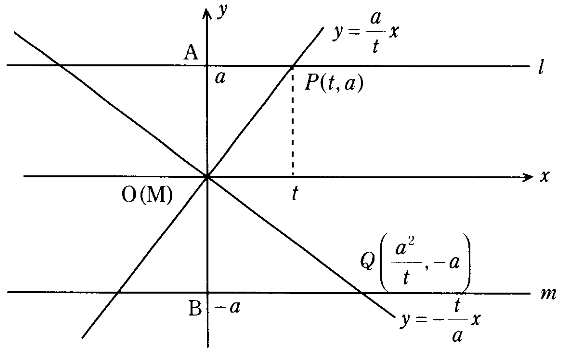
（以下は証明 1 に同じ）

終

座標平面を用いた解決

証明

点Mを原点とし，直線 AB を y 軸として座標平面を考える。また $\mathrm{MA}=a(>0)$，$\mathrm{AP}=t\,(\neq 0)$ とする。



このとき，点 P の座標は (t,a) となり，直線 MQ の方程式は $y=-\dfrac{t}{a}x$ であるから，点 Q の座標は $\left(\dfrac{a^2}{t},\ -a\right)$ となる。よって直線 PQ の方程式は

$$y-a=\frac{a-(-a)}{t-\dfrac{a^2}{t}}(x-t)$$

$$(y-a)(t^2-a^2)=2at(x-t) \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

t について整理すると

$$(y+a)t^2-2axt-a^2(y-a)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

t についての方程式②が 0 でない実数解 t を持つ条件を求めると，

（ｉ） $y+a\neq 0$ のとき

②が実数解を持つ条件は

$$D/4=(-ax)^2+(y+a)a^2(y-a)\geqq 0$$

この条件の下で②が実数解として 0 のみを解として持つのは $(x,y)=(0,a)$ のときであるから，求める条件は

$$x^2+y^2\geqq a^2 \text{ かつ } (x,y)\neq(0,a)$$

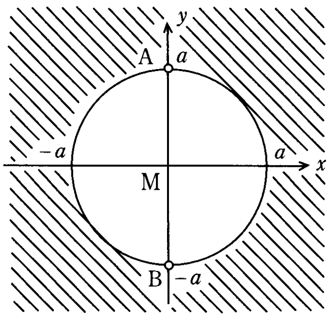
（ii） $y+a=0$ のとき

$y=-a$ を②へ代入すると

$$-2axt+2a^3=0$$
$$xt=a^2$$

この方程式が 0 でない実数解 t をもつ条件は $x\neq 0$

（ｉ），（ii）により，$(x,\ y)$ の存在範囲が求められる。



終

ここで，②で $t\to 0$ とすると，直線 l の方程式 $y=a$ が得られる。

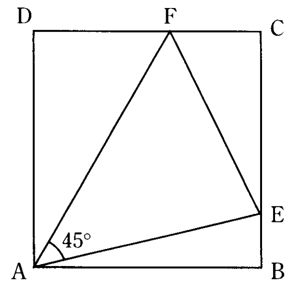
また，①を

$$(y-a)\left(a-\frac{a^2}{t^2}\right)=2a\left(\frac{a}{t}-1\right)$$

と変形して $t\to\infty$ とすれば，直線 m の方程式 $y=-a$ が得られる。

［例 2］

> 正方形 ABCD の辺 BC，CD 上に点 E，F を $\angle\mathrm{EAF}=45^\circ$ となるようにとるとき，EFの包絡線は円弧である。



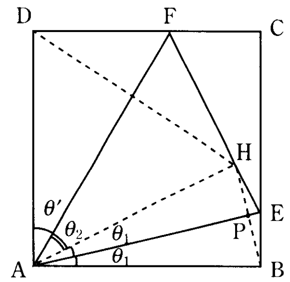
幾何学的な解決

証明

AE に関する点Bの対称点をHとする。このとき，$\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{EAH}=\theta_1$，$\angle\mathrm{HAF}=\theta_2$，$\angle\mathrm{FAD}=\theta'$ とすると，

$$\theta_1+\theta_2=45^\circ$$
$$2\theta_1+\theta_2+\theta'=90^\circ$$

これを解いて $\theta_2=\theta'$ $\qquad \cdots\cdots\cdots ①$



さらに，AE と BH の交点を P とすると，

$\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{HAP}$，$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{APH}=90^\circ$，$\mathrm{BP}=\mathrm{HP}$

より，

$$\Delta\mathrm{APB}\equiv\Delta\mathrm{APH}$$

であるから，

$\mathrm{AB}=\mathrm{AH}$ よって $\mathrm{AH}=\mathrm{AD}$

したがって，H は AF に関する D の対称点となる。よって $\angle\mathrm{AHE}=\angle\mathrm{AHF}=90^\circ$ となるので，H は EF 上にあって $\mathrm{AH}\perp\mathrm{EF}$ となる。したがって，EF は A

を中心として正方形の1辺の長さを半径とする4分円の弧 BD に接する。

終

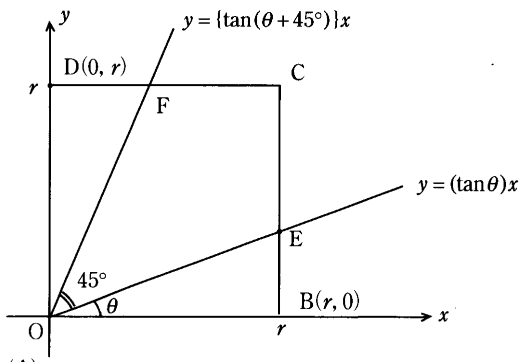
座標平面を用いた解決

証明

A(0, 0)，B(r, 0)，C(r, r)，D(0, r) とし，直線 AE, AF の方程式をそれぞれ

$$y=(\tan\theta)x,\ y=\{\tan(\theta+45°)\}x \quad (0°\leqq\theta<45°)$$

とする。



(A)

このとき，点E，Fの座標は

$$E(r, r\tan\theta), F\left(\frac{r}{\tan(\theta+45°)},\ r\right)$$

となる。よって直線 EF の方程式は

$$y-r=\frac{r-r\tan\theta}{\dfrac{r}{\tan(\theta+45°)}-r}(x-r) \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

となる。ここで，三角関数の加法定理より

$$\tan(\theta+45°)=\frac{\tan\theta+\tan 45°}{1-\tan\theta\cdot\tan 45°}=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$

であるから，$\tan\theta=t$ として (*) を整理すると

$$y-r=\frac{r-rt}{\dfrac{r(1-t)}{1+t}-r}(x-r)$$

$$(r+x)t^2-2yt+(r-x)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(**)$$

となる。よって，t についての方程式 (**) が $0\leqq t<1$ となる実数解 t をもつ条件を考えればよい。

ここでは正方形内の領域について考えればよいので，$0\leqq x\leqq r$，$0\leqq y\leqq r$ としてよい。

$f(t)=(r+x)t^2-2yt+(r-x)$ とおくと，$r+x\neq 0$ であるから，(**) は

$$f(t)=(r+x)\left(t-\frac{y}{r+x}\right)^2+\frac{r^2-x^2-y^2}{r+x}$$

と変形される。ここで，

$$0<\frac{y}{r+x}\leqq 1,\ f(0)=r-x\geqq 0$$

であるから，次の場合に分けて，(**) が $0\leqq t<1$ となる実数解 t をもつ条件を考える。

(以下，方程式 (**) の判別式をDとする)

（i） $r+x\neq y$ の場合

① $r-x>0$ のとき

$$\frac{D}{4}\geqq 0$$

すなわち

$$y^2-(r-x)(r+x)\geqq 0$$

ゆえに $x^2+y^2\geqq r^2$

② $r-x=0$ のとき

$f(0)=0$ より (**) は $t=0$ を解にもつので条件を満たす

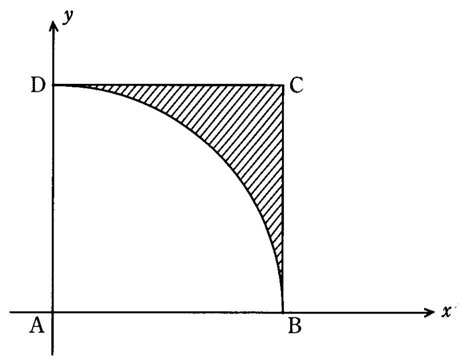
（ii） $r+x=y$ の場合

$0\leqq x\leqq r$，$0\leqq y\leqq r$ を満たすのは $(x, y)=(0, r)$ のみである。

このとき (**) から $t=1$ となり $0\leqq t<1$ を満たさない。

しかし E = C，F = D とすることで $(x, y)=(0, r)$ は明らかに条件を満たす点となるので題意に適する。

（i）（ii）の議論より，(x, y) の存在範囲が求められる。



終

3. 包絡線を題材とした中学校の図形指導の実践

(1) 中学校での図形領域の学習指導について

新しい指導要領においては，中学校数学での図形領域の学習の目標が次のように提示されている。

＜1年生＞

平面図形や空間図形についての観察，操作や実験を通して，図形に対する直観的な見方や考え方を深めるとともに，論理的に考察する基礎を培う。

＜2年生＞

基本的な平面図形の性質について，観察，操作や実験を通して理解を深めるとともに，図形の性質の考察における数学的な推論の意義と方法とを理解し，推論の過程を的確に表現する能力を養う。

＜３年生＞

図形の相似や三平方の定理について，観察，操作や実験を通して理解し，それらを図形の性質の考察や計量に用いる能力を伸ばすとともに，図形について見通しをもって論理的に考察し表現する能力を伸ばす。

このように，中学校の図形領域の学習指導については多くの能力の育成が求められている。この目標を達成するためには，次の点に留意して日々の授業を構成する必要があるように思われる。

① 議論の場としての学習形態の設定

数学的なコミュニケーション能力の育成は，中学校数学の大きな目標の一つとなるが，その能力は，日々の授業の中で自分なりの意見を持ち，その正当性を他人に伝えるような場面を通して育成されることが期待される。多少の曖昧さや柔軟性を許容しながらも，中学校段階でこのような学習を重視することで，論証の意義や方法の理解へとつなげることができると考えられる。

② 図形教材の配列について

中学校での図形領域の学習の重要性は，直感的な理解が中心であった小学校と，形式的な論証を中心とする上級学年の図形学習の中間段階としての役割である。以前に学習した内容を主張の根拠として，新しい事実が学習できるような，そういった題材の配列が重要な課題となる。とくに高等学校で図形に関する論証が大きく扱われることになる次回の学習指導要領のもとでの教育課程においては，中学校段階の図形領域の学習が果たす役割はますます重要になると考えられる。知的好奇心を喚起し，証明の必要性を感じさせるための初期の段階においては，どの部分を直感的な理解とし，どの部分を探求させるのかといったことも含めて，題材の配列が重要な課題となってくる。

(2) 包絡線の指導

小学校においては，具体物についての操作的・直観的な取り扱いを通して，次第に平面や空間における抽象的な図形概念を理解させるための学習指導がなされてきている。これに引き続いて中学校第１学年では，操作的な活動を中心にして基本的な図形の性質や作図についての学習指導がなされる。

中学校２年生ではこれまでに，図形に関する性質を，すでに学習した基礎的な知識をもとにして説明することを通して，証明の方法とその意義について学習してきている。しかし，このように厳密な客観性を持った論証の意義を理解させる一方で，論証の記述についての形式的な扱いには深入りすることなく，仮定から結論を導くための筋道の立て方や，論証の有用性を理解させるような学習も重要であると考えられる。

具体的な方略としては，主体的な活動を通して生徒に図形に関する性質を予想させ，これまでに学習した知識を用いてその予想を確認するという経験を通して，論証の有用性と数学的発見の喜びを体験させたい。同時に，図形の性質を探求するなかで，具体的活動からその性質を予想することの重要性も強調できると考えている。

このような問題意識のもとで，中学校２年生の図形の性質の単元が終わったところで，発展学習として包絡線を扱うことにした。実際の授業では次の点に留意して授業の準備を進めた。

① 毎日の授業の雰囲気づくり

日々の授業の中では，指導者が一方的に知識を与えるのではなく，『なぜ，そうなるのか？』『本当にそうなるのか？』といった疑問を生徒に投げかけ，できるだけ生徒達に自分の言葉で説明するように指導している。とくに，図形の論証の学習に入って以降は，「みんなにわかる言葉で」「理由をきちんと述べながら」自分の意見を主張することを要求してきた。この姿勢は，自分の意見を相手に伝えるというコミュニケーション能力の育成にもつながるものであり，論証指導の根底に据えられるべき目標であると考えられる。

また，図形に関する定理は，生徒に「与える」のではなく，自ら発見させるように授業の構成を工夫した。もちろん，何もないところから発見させるには時間的な制約もあるので，ある程度の場面の設定が必要なことはいうまでもない。このように，生徒が自分で発見したことがらについては，それを論証によって確認してみようという学習者の動機付けは，当然強くなることが期待される。

② 前提となる知識の復習

学習指導要領の改訂にともなう移行期であるため，各学年の学習内容が多少変則的になっている。その単元を学習するのに必要な知識を「いつ」「どのような場面で」学習したかを把握しておくことが重要である。

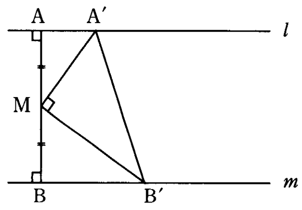
(3) 授業実践

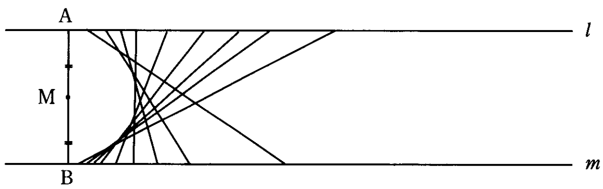
対象生徒：中学校　２年生

題　　目：図形の性質の探求と証明　～直角三角形の斜辺からうかびあがる図形～

目　　標：ある条件を満たす直角三角形の斜辺からうかびあがる図形について考えさせることによって，自らの活動を通して図形の性質を探求することの楽しさと論証の有用性を理解させる。

指導の過程

<table>
<tr><th>学習内容</th><th>指導過程・学習活動</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr><td>（導　入）
課題の提示</td><td>○課題の提示
［課題］
右の図の直線 l 上の点A′に対して，B′を直線 m 上に
$\angle A'MB' = 90^\circ$
となるようにとる。このようにして直角三角形A′MB′を何通りもつくるとき，斜辺A′B′からうかびあがる図形について考えてみよう。


・点A′のとり方をいろいろに変え，三角定規を利用してそれぞれの場合に点B′をとらせる。</td><td>・辺A′M，B′Mは記入しないようにさせる。</td></tr>
<tr><td>（展　開）
結果の予想</td><td>○結果の予想
・A′をいろいろにとったときに線分A′B′がえがく図形を予想させる。

</td><td></td></tr>
<tr><td>予想の検証</td><td>○予想の検証
・図形を予想した理由を考えさせ，それを数学的に説明するための筋道を考えさせる。
・これまでに学習した図形の性質を用いて，定点Mから直線A′B′に引いた垂線AHの長さがいつもAMに等しくなっていることを証明させる。
・直線A′B′がMを中心として半径AMの円の接線になっていることを理解させ，このことからA′B′のえがく図形が円であることを結論づける。</td><td>・Mから直線A′B′への垂線に着目させる。
・二等辺三角形の性質や三角形の合同などを用いて証明させる。</td></tr>
<tr><td>（まとめ）</td><td>○本時の学習のまとめ</td><td></td></tr>
<tr><td>備　考</td><td colspan="2">使用教科書：中学数学２年（大阪書籍）
準　備　物：三角定規，ワークシート</td></tr>
</table>

4. 反省と課題

(1) 授業実践からの課題

中学校数学ではあまり馴染みのない包絡線という内容を，その図形的な魅力とともに中学生にも理解させたいというねらいで授業を行った。

授業では，まず実際に三角定規を用いて自分で作図をしてから，そこに浮かび上がってくる図形の形状を予想し，多くの生徒はそれが円であることに驚きと興味を持っているようであった。その後，自分の予想を確認するかたちで論証を試みるという学習過程を経たことで，包絡線という内容も，かろうじて中学生でも扱える題材となった。その一方で，多くの問題点も明らかとなった。

① 極限の扱い

作図の場面で，生徒はすぐにその図形的な美しさに気づき，そこにある種の図形が浮かび上がってくることを予想した。多くの生徒はそれが円であると

予想したが，生徒の中には「なめらかでないから円ではない」と主張する生徒もあった。A′の取り方をの幅を無限に小さく取ることによって，その極限として円が得られることになるが，中学校段階における学習においては直感的な理解にとどまらざるを得ない。この部分の議論を行うことは単に生徒を混乱に陥れるだけであって，かえって全体の見通しを失うことになると考えられる。

② 論証のための手がかりの不足

実際の授業では，図形の形状を予想するところまでの展開と，その予想を検証する議論との間には大きなギャップがあったと反省している。その図形が円であることを証明するために何を示せばよいのかという全体の見通しを立てることが困難であり，実際の授業場面では指導者の誘導の色が濃くなってしまった。また，実際の論証の段階においても，補助線の引き方等にやや飛躍があったように思われ，生徒の十分な理解が得られない部分もあったように思われる。

また，今回のような内容では，数学的な活動（作図などの外的な活動と内的な思考活動）を豊かなものにしたいとの指導者の意図に反して，生徒が結果だけを知識として覚えてしまうおそれがあることも留意しておく必要がある。

③ 証明の厳密性

数学的には，条件を満たす直線群がすべて円の接線になっていることの逆，すなわち，円上の任意の点に対して接線を引いたときに，その接線が2直線と交わる点A′，B′によってつくられる角が$\angle A'MB' = 90°$であることを確認する必要がある。数学的には，その条件が必要十分であることの確認は非常に重要な議論である。しかし，活動による発見の喜びと『自分の予想を自分で検証する』というところに重点を置いた今回の授業では，直感的に理解できる部分に関しては厳密な議論は避けることとした。

(2) 図形領域の学習指導と活動の重要性

数学的な概念の心的構成の基本になるのが具体物に対する働きかけとしての操作・活動である。このため，小学校における算数の学習指導は，具体的な対象物に対する生徒の活動を主体としたものになっている。そして，小学校高学年から中学校にかけて，しだいに，その対象物が抽象化されていくことになる。例えば，小学校ではいくつもの画用紙の三角形を扱って思考をすすめ，それを抽象化して数学的な図形としての三角形という概念を確立してゆく。それにともなって，中学校での操作活動は，その対象が次第に抽象化された図形へと移っていく。しかしその操作活動を内面化することで概念を獲得していくという過程に変わりはなく，その水準が上がったものとして捉えることができる。

その一方で数学的活動は，生徒に主体性があることにその重要性がある。生徒が自分の手で活動を行うことで，学習活動を自らのものとしてとらえ，創造の意欲と探求心の高揚につながるものとなる。特に中学校段階の図形領域においては，無意味に突然与えられた定理を決められた形式にしたがって証明することにのみ重点が置かれるのではなく，まず自分の活動によって定理を予想し，それを論証によって確認するという過程を経ることによって，数学的な考え方のよさや有用性を理解させることが可能となる。

特に中学校2年生では，図形の論証の導入段階であるから，一般性を持った論証のみを重視するのではなく，その前段階として1つの具体的な場合について，活動をともなったかたちで確認し，それから「ほんとうにそうか」「そのことはいつも成り立つのか」といった問題意識のもとで，論証に入ってゆくという学習指導の過程を重視する必要があると思われる。

(3) 高等学校数学へのつながり

高等学校に図形の内容の一部を移行することで，中学校での図形領域の学習指導ではやや余裕を持った扱いが可能になる。このことにより，論証の形式にこだわったり，その方略の紹介に終始するのではなく，自らの活動で図形の性質を発見し，それを確認していくという学習が今まで以上に可能になること思われる。

5. おわりに

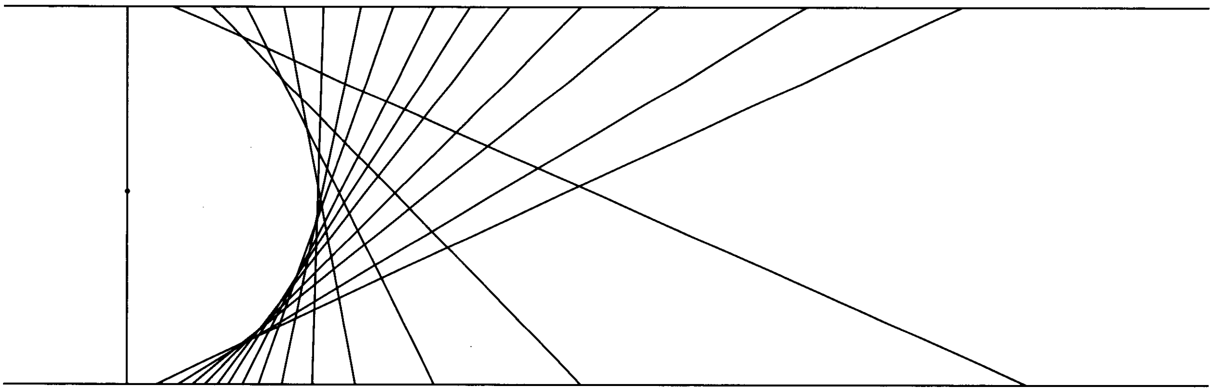
教育課程の改訂にともなう学習内容の移行により，これまで以上に中学校と高等学校とのつながりがあいまいになりつつある。しかし，系統性という数学特有の性質を考えるとき，中・高の学習内容を今こそ整理しなおすことが必要である。その視点の一つが生徒の「活動」を中心に考えた学習指導である。中・高一貫指導という本校の利を活かして，図形以外の領域においても研究を重ねていきたい。

参考文献

1. 栗田　稔「教職数学シリーズ　基礎編②『幾何』」，共立出版，1981.
2. 那須俊夫「変換幾何入門」，共立出版，1990.
3. 清水静海「『図形領域』指導における基礎・基本の定着と個性を生かす教育との関連」，『教育科学　数学教育 6月号』，明治図書，1999.
4. 一松信　編「改訂増補　新数学事典」，大阪書籍，1991.
5. 岩田至康　編「幾何学大事典5」，槇書店，1980.

資　料

例 1 .



例 2 .