広島大学附属中・高等学校研究紀要
〈第48号　2001〉

総合学習の一教材「ケプラーの法則の数学的証明」

河　野　芳　文

新しい学習指導要領に基づく教育が間もなく始まるが，多くの教師にとって“総合的な学習”をいかに扱うかは大きな課題であり，様々な取り組みや実践が行われている。しかし，その内容は小，中，高で異なり得ることはもちろん，高等学校に限っても生徒の興味・関心の違い等により，独自の展開が求められるであろう。今回の報告は，高等学校３年理系の物理選択者に対して，彼らの希望を踏まえて行った“ケプラーの法則の数学的証明”であり，極めて限定された対象者に対する毎回90分，４回連続の講義の実践記録である。

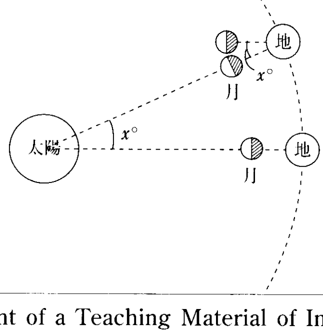
1. は　じ　め　に

我々教育に携わる者にとって，１年余り後に始まる新しい学習指導要領に基づく教育で，学校教育がどのように変わるのかは極めて興味深い問題である。とりわけ，興味・関心も高い反面，取り組みの歴史が浅い情報教育，総合学習がどのように実践されてゆくのかは，各学校のおかれた環境・生徒の実態等もあり，教育関係者には関心が高い。

そうした状況の下で，数学教師として総合学習に関わる方法はいろいろあり得るであろうが，やはり数学に関わるテーマであるとき最も主体的に関わりうるであろうし，生徒が意欲的に取りくむには，生徒にとって身近な問題であることが求められるであろう。

かって私は，中学一年生の授業で，生徒から「先生，月は地球の周りを27日で公転し，27日で自転するのに，地球から見たときの月の満ち欠けはなぜ約29.5日になるのですか。」と質問されたことがある。「それじゃあ，この時間はみんなと一緒にこの問題について考えてみよう。」ということになった。

そのときは，月は地球のまわりを円軌道を描いて27日で公転し，地球も太陽のまわりを円軌道を描いて360日で公転するものとし，次のような図をかいて，月が新月から新月までかかる日数を x とした。



このとき，次のような比例式が成り立つ。

$$360:(360+x)=27:x$$

従って，

$$360x=360\times27+27x$$

$$333x=9720 \text{ より，} x\fallingdotseq29.2$$

(月の自転・公転周期は約27.3日であり，地球の公転周期は365日であるとすると，x は約29.5日となり，ほぼ正しい値となる。)

生徒は納得し，「１次方程式はすごい。」と感動する者も出た。

しかし，その２年後に再び中学１年を受けもったとき，１次方程式の応用として上記の問題を扱ったところ，生徒はほとんど興味を示さず，唖然としたことであった。

こうした経験から，同じ問題でも，生徒の身近な問題であること，生徒に関心のある問題であることが必要であることを再認識するに至った。

こうした経緯を経て，高等学校３年生を対象にどんなことの証明が気にかかるか尋ねたところ，「物理で習ったケプラーの法則が，何故，どのようにして導かれるのかを知りたい。」との声があがった。そこで念のため，万有引力を知っているかと尋ね，既知であることを確認した上で，夏期休暇の７月下旬に４日間の連続講義を行うことにした。

数学的には，ケプラーの法則と万有引力の法則は同値であると考えられるから，生徒にとって身近かな万有引力の法則を出発点として理論展開することは自然なものといえるであろう。

また，必要な数学的道具は，二次曲線の極方程式と微分法および微分方程式であり，一学期に微分法の学習を終えた高校３年生には，適度な準備の下に説明可能であると思われる。

Development of a Teaching Material of Integrated Study in Senior High School
—— Mathematical Proof of Kepler's Laws ——
Yoshifumi KOHNO

2. ケプラーの法則の数学的証明

いくつかの節に分けて証明を行う。

① ケプラーの法則と万有引力の法則

天球上を行きつ戻りつしながら進む惑星の運動は，ギリシア時代からの謎であり，多くの哲学者等による宇宙構造論が提唱された。

とくに，アリストテレスに始まる地球中心説は有力であり，西暦105年頃に集大成されたプトレマイオスによる天動説にひきつがれ，その後1000年以上も影響力をもつことになった。

しかし，ルネッサンス期に入った1543年に，コペルニクスが地球を含むすべての惑星は太陽を中心とする円運動をするという地動説を発表し，ガリレイもこの説を支持するに至る。

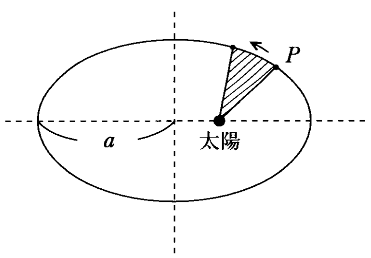
このように考えても観測の結果との食い違いが生じることから，ティコ・ブラーエの弟子であったヨハネス・ケプラーは，師の精密なデータをもとに試行錯誤をくり返し，苦節20年の後に惑星の運行に関する次の３法則を発見した。

〈Kepler の法則〉

・第１法則……惑星は，太陽を１つの焦点とするだ円軌道を描いて運行する。

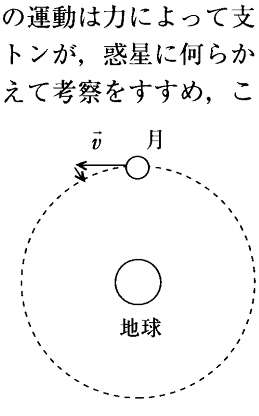
・第２法則……惑星と太陽を結ぶ線分は，一定時間に等しい面積を通過する。

・第３法則……惑星の公転周期 T の２乗は，だ円軌道の長軸半径 a の３乗に比例する。



ケプラーもはじめは神の力で惑星が運行すると考えていたが，次第に疑問をもつようになり，磁力のような何らかの力が働いているのではないかと考えるようになった。

その後しばらくして，物体の運動は力によって支配されるはずだとするニュートンが，惑星に何らかの力が働いているはずだと考えて考察をすすめ，この力を帰納的，理論的に導き，太陽と惑星の間に働く万有引力であるとした。地球のまわりを月が回る場合，月を地球に向かって引く力がなければ，月は軌道から飛び出し，地球のまわりを回ることができないからである。



万有引力の法則によれば，質量 M，m の２物体間には，それらの間の距離を r，比例定数を G として

$$F = G \times \frac{Mm}{r^2} \quad (G = 6.67 \times 10^{-11}\, m^3 / kg \cdot s^2)$$

の力が働くとされた。(この法則はキャベンディッシュ等により実証され，G の値も後により正確な値が求められた。)

この万有引力の大きさを調べてみよう。

(例題) １) 地上に 50 cm の間隔で置かれた 2 kg と 5 kg の物体が引き合う力は，

$$F = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{2 \times 5}{0.5^2} = 2.67 \times 10^{-9}\, N$$

であり，ほとんど０に等しい。すなわち，２物体間の万有引力はないに等しい。

２) 地球上に置かれた 1 kg の物体に働く引力を求めてみよう。地球の半径は 6.37×10^6 m，全質量は 5.98×10^{24} kg であるから，1 kg の物体に働く引力は，

$$F = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{5.98 \times 10^{24}}{(6.37 \times 10^6)^2} = 9.83N$$

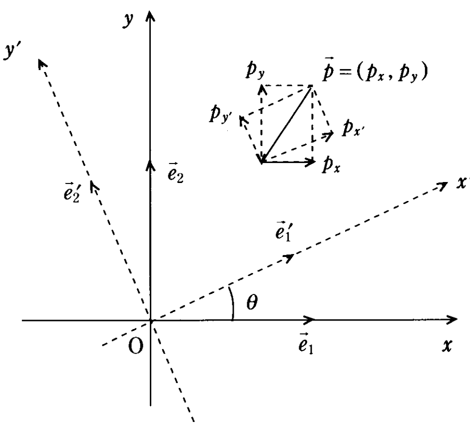
である。この力は，1 kg の物質に働く重力にほぼ等しい。

② 平面運動の極座標表示と座標軸の回転

２次元空間のベクトル $\vec{p}$ の成分が，$\mathrm{O}-xy$ 軸に関して

$\vec{p} = (p_x, p_y)$

で与えられるとき，座標軸 $\mathrm{O}-xy$ を O のまわりに角 θ だけ回転した座標軸 $\mathrm{O}-x'y'$ での成分 $(p_{x'}, p_{y'})$ はどのように表されるだろうか。



上の図において，基本ベクトル $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ は新しい基本ベクトル $\vec{e}_1'$，$\vec{e}_2'$ を用いて，

$\vec{e}_1 = \cos\theta \cdot \vec{e}_1' - \sin\theta \cdot \vec{e}_2'$

$\vec{e}_2 = \sin\theta \cdot \vec{e}_1' + \cos\theta \cdot \vec{e}_2'$

と表されるから，

$$\vec{p}=p_x\vec{e}_1+p_y\vec{e}_2$$
$$=p_x(\cos\theta\cdot\vec{e}_1'-\sin\theta\cdot\vec{e}_2')+p_y(\sin\theta\cdot\vec{e}_1'+\cos\theta\cdot\vec{e}_2')$$
$$=(p_x\cos\theta+p_y\sin\theta)\vec{e}_1'+(p_y\cos\theta-p_x\sin\theta)\vec{e}_2'$$

ゆえに，

$$(p_{x'},\ p_{y'})=(p_x\cos\theta+p_y\sin\theta,\ -p_x\sin\theta+p_y\cos\theta) \quad\text{——— (1)}$$

（注）これは，行列を用いて，次のように表せる。

$$\begin{pmatrix}p_{x'}\\p_{y'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_x\\p_y\end{pmatrix}$$ あるいは，

$$\begin{pmatrix}p_x\\p_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{x'}\\p_{y'}\end{pmatrix}$$

次に，速度や加速度を極座標で表してみよう。

xy 平面上の動点を $P(x, y)$ とし，

$OP=r$

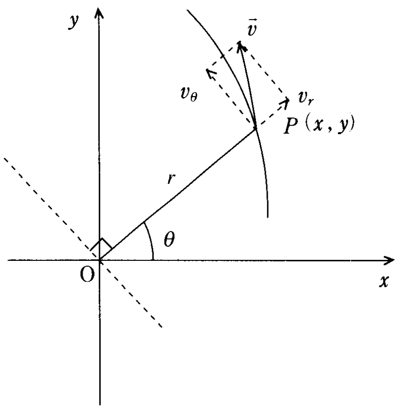
$\angle POx=\theta$

とすれば，

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

で，$x,\ y,\ r,\ \theta$ は時間 t の関数であると考えられるから，



$$v_x=\frac{dx}{dt}=r'\cos\theta-r\sin\theta\cdot\theta'$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=r'\sin\theta+r\cos\theta\cdot\theta'$$

ここで，点 P の速度 $\vec{v}$ を $\overrightarrow{OP}$ 方向の成分 v_r とそれに垂直な成分 r_θ に分けると，(1)より

$$\begin{cases}v_r=v_x\cos\theta+v_y\sin\theta\\v_\theta=-v_x\sin\theta+v_y\cos\theta\end{cases}$$

であるから，

$$v_r=(r'\cos\theta-r\sin\theta\cdot\theta')\cos\theta+(r'\sin\theta+r\cos\theta\cdot\theta')\sin\theta$$
$$=r'$$
$$v_\theta=-(r'\cos\theta-r\sin\theta\cdot\theta')\sin\theta+(r'\sin\theta+r\cos\theta\cdot\theta')\cos\theta$$
$$=r\theta' \quad\text{——— (2)}$$

となる。なお，ここで，

$$\theta'=\lim_{h\to0}\frac{\theta(t+h)-\theta(t)}{h}$$

を，原点に O に関する点 P の角速度と呼ぶことを注意しておく。

$v_x,\ v_y$ を t で微分して加速度 $\vec{a}=(a_x, a_y)$ を求めると，

$$a_x=(v_x)'=r''\cos\theta-r'\sin\theta\cdot\theta'-r'\sin\theta\cdot\theta'$$
$$-r\cos\theta\cdot(\theta')^2-r\sin\theta\cdot\theta''$$
$$=r''\cos\theta-2r'\theta'\sin\theta-r\theta''\sin\theta-r\cdot(\theta')^2\cos\theta$$

$$a_y=(v_y)'=r''\sin\theta+r'\cos\theta\cdot\theta'+r'\cos\theta\cdot\theta'$$
$$-r\sin\theta\cdot(\theta')^2+r\cos\theta\cdot\theta''$$
$$=r''\sin\theta+2r'\theta'\cos\theta+r\theta''\cos\theta-r(\theta')^2\sin\theta$$

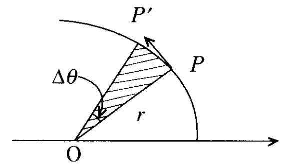
したがって，再び(1)より

$$a_r=a_x\cos\theta+a_y\sin\theta$$
$$=(r''\cos\theta-2r'\theta'\sin\theta-r\theta''\sin\theta-r\cdot(\theta')^2\cos\theta)\cos\theta$$
$$+(r''\sin\theta+2r'\theta'\cos\theta+r\theta''\cos\theta-r(\theta')^2\sin\theta)\sin\theta$$
$$=r''-r\cdot(\theta')^2$$
$$a_\theta=-a_x\sin\theta+a_y\cos\theta$$
$$=-(r''\cos\theta-2r'\theta'\sin\theta-r\theta''\sin\theta-r\cdot(\theta')^2\cos\theta)\sin\theta$$
$$+(r''\sin\theta+2r'\theta'\cos\theta+r\theta''\cos\theta-r(\theta')^2\sin\theta)\cos\theta$$
$$=2r'\theta'+r\theta'' \quad\text{——— (3)}$$

この２式のうちの後者は，次のようにかける。

$$a_\theta=\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}(r^2\theta') \quad\text{——— (4)}$$

定義　右の図のように微小時間 h の間に質点 P が P' まで動くとすると，線分 OP がこの間に通過する部分の面積について，ほぼ



$$\text{扇形 } OPP' \fallingdotseq \frac{1}{2}r^2\cdot\Delta\theta$$

が成り立つ。($\Delta\theta=\angle POP'$ とする。)

そこで，$h\to0$ としたときの極限

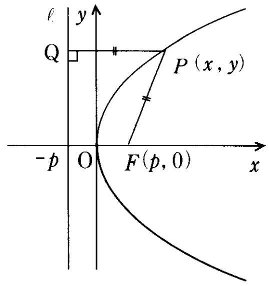
$$\lim_{h\to0}\frac{\text{扇形 }OPP'}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{2}r^2\cdot\Delta\theta}{h}=\frac{1}{2}r^2\cdot\theta'$$

を線分 OP が描く図形の面積速度という。

③　２次曲線と極方程式

２次曲線である放物線，だ円，双曲線は，それぞれ次のように定義される。

定義　1）定点 F と，F を通らない定直線 ℓ までの距離が等しい点 P の軌跡を放物線といい，F を放物線の焦点，ℓ を準線という。座標軸を，



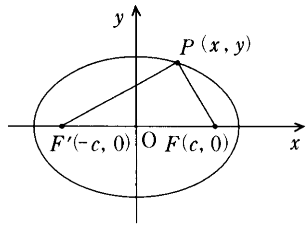
$F(p, 0)$，$\ell : x=-p$

($p>0$) となるようにとれば，放物線の方程式は

$y^2=4px$ ($p>0$)

と表される。

2）２定点 $F,\ F'$ からの距離の和が一定である点 P の軌跡をだ円という。$F,\ F'$ をだ円の焦点という。座標軸を，

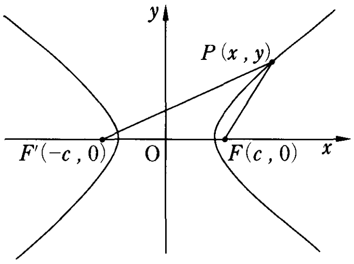


$F(c, 0)$，　$F'(-c, 0)$　$(c > 0)$ となるようにとり，$PF + PF' = 2a$ $(0 < c < a)$ とすれば，だ円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b = \sqrt{a^2 - c^2})$$

と表される。

3）2 定点 F, F' からの距離の差が一定である点 P の軌跡を双曲線という。座標軸を $F(c, 0)$ $F'(-c, 0)$ となるようにとり，$PF \sim PF' = 2a$ $(0 < a < c)$ とすれば，双曲線の方程式は，

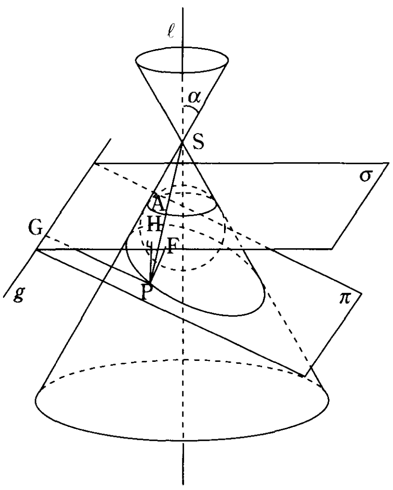


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b = \sqrt{c^2 - a^2})$$

と表される。

これらの曲線は，円すいの切り口として現れるところから，円すい曲線ともよばれる。

右の図のように，直線 ℓ と角 α をなす直線を ℓ のまわりに一回転させると，S を頂点とする直円すいができる。



この直円すいに球を内接させて，円すいとの接点を含む平面を σ，σ 上の直線 g を含みこの球に接する平面を π，π と球の接点を F とおく。また，平面 π と ℓ のなす角を β とし，直円すいと平面 π の交線上の点 P から直線 g，平面 σ に下した垂線の足をそれぞれ G，H とする。さらに，PS と球の接点を A とすると，

$$PF = PA$$

$$PH = PA\ \cos\alpha = PG\ \cos\beta$$

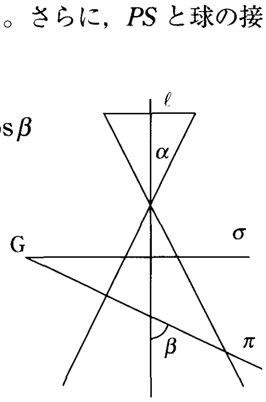
が成り立つから，

$$\frac{PA}{PG} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

$$\therefore \frac{PF}{PG} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

$(= e$ とおく$)$

———(5)



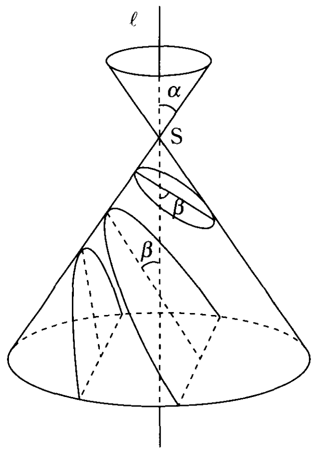
したがって，直円すいと平面 π の交線は，

$PF : PG = e : 1$（一定）

をみたす点 P の軌跡である。F をこの曲線の焦点，g をこの曲線の準線，e を離心率という。

$0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0 < e < 1$，$\alpha = \beta$ のとき，$e = 1$，$0 < \beta < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$1 < e$ であるから，点 P の軌跡である曲線は，

$0 < e < 1$ のとき，だ円，$e = 1$ のとき放物線，$1 < e$ のとき双曲線となる。



このことを示そう。

F を原点，F を通り準線 g に平行な直線を y 軸，F を通り g に垂直な直線を x 軸にとる。準線 g の方程式を　$x = -c\ (c > 0)$ とし，円すい曲線上の点を $P\ (x, y)$ とすれば，$G\ (-c, y)$ となるから，

$$\frac{PF}{PG} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x + c|} = e$$

より，

$$x^2 + y^2 = e^2(x + c)^2$$

$$\therefore (1 - e^2)x^2 - 2ce^2x + y^2 = c^2e^2$$

i）$e = 1$ のとき

$$-2cx + y^2 = c^2$$

よって，

$$y^2 = 2c\,(x + \frac{c}{2}) \quad \cdots\cdots\cdots 放物線$$

ii）$e \neq 1$ のとき

$$(1 - e^2)\left\{x^2 - \frac{2ce^2}{1 - e^2}x\right\} + y^2 = c^2e^2$$

$$(1 - e^2)\left\{\left(x - \frac{ce^2}{1 - e^2}\right)^2 - \left(\frac{ce^2}{1 - e^2}\right)^2\right\} + y^2 = c^2e^2$$

$$(1 - e^2)\left(x - \frac{ce^2}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2e^2}{1 - e^2}$$

$$\frac{\left(x - \dfrac{ce^2}{1 - e^2}\right)^2}{\left(\dfrac{ce}{1 - e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\dfrac{c^2e^2}{1 - e^2}} = 1$$

イ）$0<e<1$ のとき

$a=\dfrac{ce}{1-e^2}$，$b=\dfrac{ce}{\sqrt{1-e^2}}$ とおけば

$$\frac{(x-ae)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots \text{だ円}$$

ロ）$1<e$ のとき

$a=\dfrac{ce}{e^2-1}$，$b=\dfrac{ce}{\sqrt{e^2-1}}$ とおけば

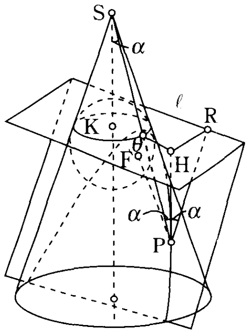
$$\frac{(x+ae)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots \text{双曲線}$$

となる。

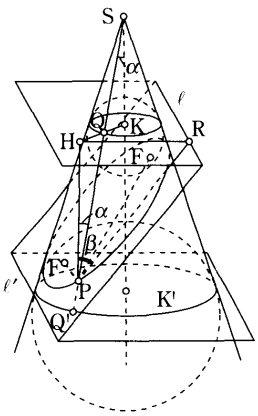
以上で，主張の正しいことが示された。

問　上述したことを，それぞれの場合について，図形的に確かめよ。

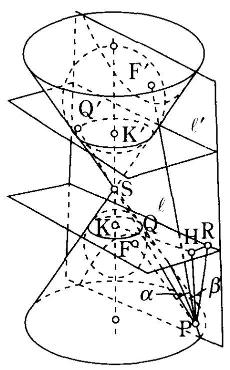
1）$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき



2）$\alpha=\beta$ のとき

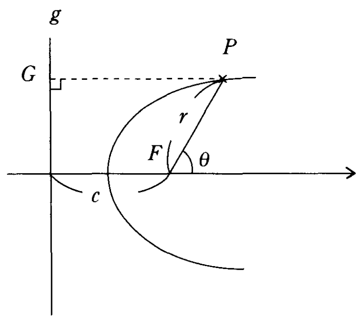


3）$0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき



〈2次曲線の極方程式〉

円すい曲線の焦点 F を極，F から準線 g に下した垂線を始線（右向きにとる）とする極座標系をとり，円すい曲線の極方程式を求めてみよう。



焦点 F から準線 g までの距離を c とし，円すい曲線上の点 P の極座標を $P(r,\ \theta)$，P から準線 g へ下した垂線の足を G とすると，

$$\frac{PF}{PG}=e$$

であるが，$PF=r$，$PG=c+r\cos\theta$ であるから，

$$r=e(c+r\cos\theta)$$
$$r(1-e\cos\theta)=ce$$
$$\therefore r=\frac{ce}{1-e\cos\theta}$$

$\ell=ce$ でおくと，

$$r=\frac{\ell}{1-e\cos\theta} \quad (\ell=ce) \qquad \text{———(6)}$$

これが，円すい曲線の極方程式である。また，次のように逆も成り立つ。

定理　$e>0$，$\ell>0$ のとき，極方程式

$$r=\frac{\ell}{1-e\cos\theta}$$

で与えられる曲線は，$0<e<1$ のとき，だ円，$e=1$ のとき，放物線，$1<e$ のとき，双曲線を表す。

$\because$　$r(1-e\cos\theta)=\ell$ において

$$r\cos\theta=x,\ r=\sqrt{x^2+y^2}$$

を考慮すると

$$\sqrt{x^2+y^2}-ex=\ell$$
$$\sqrt{x^2+y^2}=\ell+ex$$

両辺を平方して

$$x^2+y^2=e^2x^2+2e\ell x+\ell^2$$
$$\therefore (1-e^2)x^2-2e\ell x+y^2=\ell^2$$

1）$e=1$ のとき

$$-2\ell x+y^2=\ell^2$$
$$\therefore y^2=2\ell\left(x+\frac{\ell}{2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \text{放物線}$$

2）$e\neq 1$ のとき

$$(1-e^2)\left(x^2-\frac{2e\ell}{1-e^2}x\right)+y^2=\ell^2$$

$$(1-e^2)\left\{\left(x-\frac{e\ell}{1-e^2}\right)^2-\left(\frac{e\ell}{1-e^2}\right)^2\right\}+y^2=\ell^2$$

$$(1-e^2)\left(x-\frac{e\ell}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{\ell^2}{1-e^2}$$

$$\therefore \frac{\left(x-\frac{e\ell}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{\ell}{1-e^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{\ell^2}{1-e^2}}=1$$

イ）$0<e<1$ のとき

$a=\dfrac{\ell}{1-e^2}$, $b=\dfrac{\ell}{\sqrt{1-e^2}}$ とおくと

$$\frac{(x-ae)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots\cdots\cdots \text{だ円}$$

ロ）$1<e$ のとき

$a=\dfrac{\ell}{e^2-1}$, $b=\dfrac{\ell}{\sqrt{e^2-1}}$ とおくと

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots\cdots\cdots \text{双曲線}$$

以上により，主張はすべて証明された。

（証明終）

（注） 定理における極方程式から分かるように，$e \geqq 1$ であれば，右辺の分母はいくらでも小さい値をとり，$r \to \infty$ となり得る。これからも，$r \geqq 1$ のとき，放物線か双曲線であると判断できるであろう。

④ 微分方程式とその解

$y=2\sin px$ とすれば，

$$y'=2\cos px \times p = 2p\cos px$$
$$y''=-2p\sin px \times p=-2p^2\sin px=-p^2 y$$
$$\therefore y''+p^2y=0$$

このように，x の関数 y とその導関数 y', y'', …, $y^{(n)}$ および x の間に成り立つ関係式

$$f(x,\ y,\ y',\ y'',\cdots,y^{(n)})=0 \qquad \text{——— ①}$$

を，y に関する微分方程式という。微分方程式が $y^{(n)}$ を含み，それより高次の導関数を含まないならば，これを n 階の微分方程式という。

また，微分方程式①をみたす関数 y を，微分方程式①の解という。

（例１）微分方程式 $y''-g=0$ から，

$y'=gx+c_1$ （c_1：定数）

$\therefore y=\dfrac{1}{2}gx^2+c_1x+c_2$ （c_2：定数）

したがって，$y=\dfrac{1}{2}gx^2+c_1x+c_2$ は，微分方程式 $y''-g=0$ の解である。

この（例１）の解は，もとの微分方程式の階数と同じ個数の任意定数を含んでいる。このような解を微分方程式の一般解という。（なお，c_1, c_2 に特別な値を代入して得られる解を特殊解という。）

（例２） $y=\sin(x+c)$ は，$y'=\cos(x+c)$ より，微分方程式 $y'^2+y^2=1$ の一般解である。

しかし，$y=1$, $y=-1$ もこの微分方程式をみたす。

$y=\pm1$ のように，一般解から得られない解を特異解という。

問１．１） $y=cx^2$ を一般解とする微分方程式をつくれ。

２） $y=c_1\sin kx+c_2\cos kx$ を一般解とする微分方程式をつくれ。

∵１）$y=cx^2$ を微分すると，$y'=2cx$.

２式から c を消去して，

$2y-xy'=0$

２） $y=c_1\sin kx+c_2\cos kx$ を微分して

$y'=kc_1\cos kx-kc_2\sin kx$

よって，

$y''=-k^2c_1\sin kx-k^2c_2\cos kx=-k^2y$

よって，求める微分方程式は，

$y''+k^2y=0$

〈微分方程式の解法〉

微分方程式は，適当な条件の下で解の存在が保証されるのであるが，その解を具体的に求めるのは一般に難しい。

しかし，微分方程式のいくつかのタイプについては，その解を具体的に求めることができる。以下において，そのようなものを扱う。

〈変数分離形〉

$$y'=f(x)g(y)$$

の形の微分方程式を変数分離形という。これは

$$\frac{1}{g(y)}\cdot\frac{dy}{dx}=f(x)$$

と変形してみれば，

$$\frac{d}{dx}\left\{\int\frac{1}{g(y)}dy\right\}=\frac{d}{dy}\left\{\int\frac{1}{g(y)}dy\right\}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{g(y)}\cdot\frac{dy}{dx}$$

であるから，

$$\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx+c$$

より，求められる。なお，$g(y)=0$ の解 $y=y_0$ は上記微分方程式の特異解である。

（例題１）次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y'=y^2$　　(2) $xy'=y^2-1$

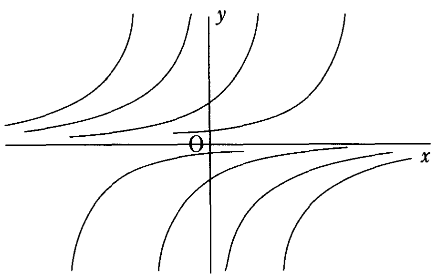
∵(1) $\dfrac{y'}{y^2}=1$ より

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{y}\right)=1$$

$$\therefore -\frac{1}{y}=x+c$$

すなわち，

$$y=\frac{-1}{x+c}$$



(2) $\dfrac{y'}{y^2-1}=\dfrac{1}{x}$ より，$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{y+1}\right)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$

両辺を x で積分して，

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=\log|x|+C_1$$

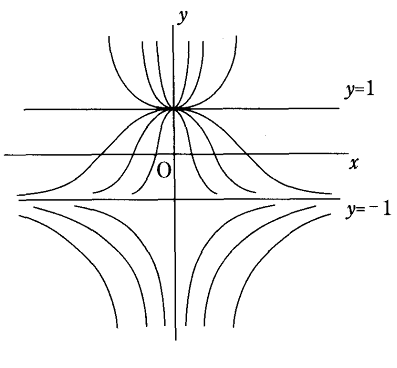
$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=e^{2C_1}x^2$$

よって，

$$\frac{y-1}{y+1}=\pm e^{2C_1}x^2$$

$c=\pm e^{2C_1}$ とおいて，y について解くと，

$$y=\frac{1+cx^2}{1-cx^2}$$



〈同次形〉

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

のように，y' が $\dfrac{y}{x}$ の式で与えられる微分方程式を同次形の微分方程式という。

この場合，$y=xu$ とおけば，$y'=u+xu'$ であるから，与えられた微分方程式は，

$u+xu'=f(u)$，すなわち，$xu'=f(u)-u$

の形となり，変数分離形である。

（例題２）次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y'=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$　(2) $y'=\dfrac{2x+y}{y}$

∵(1) $y=xu$ とおけば，$y'=u+xu'$ であるから，

$$u+xu'=\frac{u}{1+u^2}$$

分母を払って

$$u+u^3+x(1+u^2)u'=u$$

$$\therefore \frac{1+u^2}{u^3}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x}$$

両辺を x で積分して

$$\int\frac{1+u^2}{u^3}du=-\int\frac{1}{x}dx$$

$$\therefore -\frac{1}{2u^2}+\log|u|=-\log|x|+c_1$$

$$-\frac{x^2}{2y^2}+\log|y|=c_1$$

$$\therefore |y|=e^{c_1}\cdot e^{\frac{x^2}{2y^2}}$$

$c=\pm e^{c_1}$ として，

$$y=ce^{\frac{x^2}{2y^2}}$$

(2) $y=xu$ とおけば，$y'=u+xu'$ であるから，

$$u+xu'=\frac{2}{u}+1$$

$$xu'=\frac{-u^2+u+2}{u}$$

$$\therefore \frac{u}{u^2-u-2}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x}$$

両辺を x で積分して，

$$\frac{1}{3}\int\left(\frac{2}{u-2}+\frac{1}{u+1}\right)du=-\int\frac{1}{x}dx$$

$$2\log|u-2|+\log|u+1|=-3\log|x|+c_1$$

$$\log|u-2|^2\cdot|u+1|=\log\frac{e^{c_1}}{|x|^3}$$

よって，

$$(x-2y)^2(x+y)=\pm e^{c_1}$$

$c=\pm e^{c_1}$ として，

$$(x-2y)^2(x+y)=c.$$

〈定数係数線形微分方程式〉

$y'+ay=b$ や，$y''+ay'+by=c$

の形の微分方程式を，それぞれ定数係数１階線形微分方程式，定数係数２階線形微分方程式という。

$y'+ay=b$ は変数分離形であるから，ここでは後者について考察する。

1）$c=0$ のとき，

$$y''+ay'+by=0 \qquad \text{——— (1)}$$

の形である。

まず，y_1，y_2 が微分方程式 (1) の解であれば，$c_1y_1+c_2y_2$ も解であることに注意しておこう。

$y=e^{\rho x}$ が (1) の解であるとすれば，

$$y'=\rho e^{\rho x},\ y''=\rho^2 e^{\rho x}$$

であるから，(1)より

$$e^{\rho x}(\rho^2+a\rho+b)=0$$

$$\therefore \rho^2+a\rho+b=0 \qquad \text{——— (*)}$$

イ）$a^2-4b>0$ のとき

方程式（*）の２つの実数解を ρ_1，ρ_2 とすれば，$c_1e^{\rho_1 x}+c_2e^{\rho_2 x}$ は (1) の一般解である。

ロ）$a^2-4b=0$ のとき

（*）の重解を ρ_0 とすれば，$\rho_0=-\dfrac{1}{2}a$ であり，$c_1e^{\rho_0 x}$ は解である。また，$e^{\rho_0 x}$ の定数倍以外の解を $y_2(x)$ として，$\dfrac{y_2(x)}{e^{\rho_0 x}}=z(x)$ とおけば，

$y_2(x)=z(x)e^{\rho_0 x}$ であるから，

$$y_2'=z'(x)\cdot e^{\rho_0 x}+\rho_0 z(x)e^{\rho_0 x}$$

$$y_2''=z''(x)e^{\rho_0 x}+\rho_0 z'(x)e^{\rho_0 x}+\rho_0 z'(x)e^{\rho_0 x}+{\rho_0}^2 z(x)e^{\rho_0 x}$$

したがって，$2\rho_0=-a$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}&y_2''+ay_2'+by_2\\&=e^{\rho_0 x}(z''(x)+\rho_0 z'(x)+\rho_0 z'(x)+\rho_0^2 z(x)+az'(x)\\&\qquad +a\rho_0 z(x)+bz(x))\\&=e^{\rho_0 x}\{z''(x)+(\rho_0^2+a\rho_0+b)z(x)\}\\&=e^{\rho_0 x}z''(x)\end{aligned}$$

より，$z''(x)=0$

そこで，$z(x)=x$ とおけば，$y_2(x)=xe^{\rho_0 x}$ を得る。

したがって，一般解

$$c_1\,e^{\rho_0 x}+c_2x\,e^{\rho_0 x}=e^{-\frac{a}{2}x}\ (c_1+c_2x)$$

を得る。

ハ）$a^2-4b<0$ のとき

（*）の虚数解を

$$\rho_1=p+qi,\ \rho_2=p-qi$$

とすれば，解と係数の関数より

$$2p=-a,\ 2q=\sqrt{4b-a^2}$$

とおける。

$$e^{\rho_1 x}=e^{px+qxi}=e^{px}\cdot(\cos qx+i\sin qx)$$

$$e^{\rho_2 x}=e^{px-qxi}=e^{px}(\cos qx-i\sin qx)$$

であるから

$$\frac{e^{\rho_1 x}+e^{\rho_2 x}}{2}=e^{px}\cos qx,\ \frac{e^{\rho_1 x}-e^{\rho_2 x}}{2i}=e^{px}\sin qx$$

も解となる。従って，一般解

$$c_1e^{px}\cos qx+c_2e^{px}\sin qx$$

を得る。

（注）$z=x+yi$ を複素数とするとき，

$$e^z=e^{x+y_i}=e^x(\cos y+i\sin\theta)$$

と定義すれば，任意の複素数 z，z' に対して，

$$e^z\cdot e^{z'}=e^{z+z'},\ (e^z)^{z'}=e^{zz'}$$

$$e^z\div e^{z'}=e^{z-z'},\ \frac{1}{e^z}=e^{-z}$$

が成り立つ。この定義は，オイラーによる。

2）$c\neq 0$ のとき，

$$y''+ay'+by=c \qquad \text{——— (2)}$$

$b\neq 0$ のとき

(1)の解を $y_1(x)$ として，$y(x)=y_1(x)+\dfrac{c}{b}$ とおけば(2)の解が得られる。

$b=0$，$a\neq 0$ のとき

(1)の解を $y_1(x)$ として，$y(x)=y_1(x)+\dfrac{c}{a}x$ とおけば(2)の解が得られる。

$a=b=0$ のとき，

(1)の解を $y_1(x)$ として，$y(x)=y_1(x)+\dfrac{c}{2}x^2$ とおけば，(2)の解が得られる。

次に，こうして得られた解以外に一般解は存在しないことを示しておこう。

そのために，補題を１つ準備する。

補題１ α，β を与えられた定数として，微分方程式

$$y''+ay'+by=0 \qquad \text{——— (1)}$$

の解 $y(x)$ で，

$$y(0)=\alpha,\ y'(0)=\beta$$

をみたすものが存在する。

∵イ）$a^2-4b>0$ のとき，

$y=c_1e^{\rho_1 x}+c_2e^{\rho_2 x}$ より

$$y'=c_1\rho_1e^{\rho_1 x}+c_2\rho_2e^{\rho_2 x}$$

であるから，

$$y(0)=c_1+c_2=\alpha$$

$$y'(0)=c_1\rho_1+c_2\rho_2=\beta$$

したがって，

$$c_1=\frac{\alpha\,\rho_2-\beta}{\rho_2-\rho_1},\ c_2=\frac{\alpha\,\rho_1-\beta}{\rho_1-\rho_2}$$

とすればよい。

ロ）$a^2-4b<0$ のとき，

$y(x)=e^{px}(c_1\cos qx+c_2\sin qx)$ より

$$y'(x)=pe^{px}(c_1\cos qx+c_2\sin qx)+e^{px}(-c_1\,q\sin qx+c_2\,q\cos qx)$$

であるから，

$$y(0)=c_1=\alpha$$

$$y'(0)=pc_1+c_2q=\beta$$

したがって，

$$c_1=\alpha,\ c_2=\frac{\beta-p\alpha}{q}$$

とすればよい。

ハ）$a^2-4b=0$ のとき

$y(x)=e^{-\frac{a}{2}x}(c_1+c_2x)$ より，

$$y'(x)=-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x}(c_1+c_2x)+e^{-\frac{a}{2}x}c_2$$

であるから，

$$y(0)=c_1=\alpha$$
$$y'(0)=-\frac{1}{2}ac_1+c_2=\beta$$

したがって，

$$c_1=\alpha,\ c_2=\beta-\frac{a\alpha}{2}$$

とすればよい。

（証明終）

この補題を用いて，次の定理を証明しよう。

$\boxed{\text{定理 1}}$ 定数係数2階線形微分方程式

$$y''+ay'+by=0 \qquad \text{———(1)}$$

の一般解は，

イ）$a^2-4b>0$のとき

$$y(x)=c_1e^{\rho_1x}+c_2e^{\rho_2}x$$

（ρ_1，ρ_2 は，$\rho^2+a\rho+b=0$ の実数解）

ロ）$a^2-4b<0$のとき

$$y(x)=e^{px}(c_1\cos qx+c_2\sin qx)$$

（$2p=-a$，$2q=\sqrt{4b-a^2}$）

ハ）$a^2-4b=0$ のとき

$$y(x)=e^{-\frac{a}{2}x}(c_1+c_2x)$$

で与えられる。

$\because$⇐）イ），ロ），ハ）が解であることはすでに示された。

⇒）微分方程式(1)の任意の解 $y(x)$ をとり，

$$y(0)=\alpha,\ y'(0)=\beta$$

とする。補題1により，(1)の解 $\varphi(x)$ で，

$$\varphi(0)=\alpha,\ \varphi'(0)=\beta$$

をみたすものがあることがいえるから，

$$z(x)=y(x)-\varphi(x)$$

とおけば，$z(x)$ は

$$z''+az'+bz=0,\ z(0)=0,\ z'(0)=0$$

をみたす。

このとき，$z(x)\equiv0$となることを示そう。

$z_1(x)=e^{\frac{a}{2}x}z(x)$ とおけば，$z(x)=e^{-\frac{a}{2}x}z_1(x)$ であるから，

$$z'(x)=-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x}z_1(x)+e^{-\frac{a}{2}x}z_1'(x)$$

$$\begin{aligned}z''(x)&=\frac{a^2}{4}e^{-\frac{a}{2}x}z_1(x)-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x}z_1'(x)\\&\quad-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x}z_1'(x)+e^{-\frac{a}{2}x}z_1''(x)\\&=\frac{a^2}{4}e^{-\frac{a}{2}x}z_1(x)-ae^{-\frac{a}{2}x}z_1'(x)+e^{-\frac{a}{2}x}z_1''(x)\end{aligned}$$

これらを，$z''+az'+bz=0$ に代入して，

$$\frac{a^2}{4}e^{-\frac{a}{2}x}z_1(x)-ae^{-\frac{a}{2}x}z_1'(x)+e^{-\frac{a}{2}x}z_1''(x)$$
$$+a\left(-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x}z_1(x)+e^{-\frac{a}{2}x}z_1'(x)\right)+be^{-\frac{a}{2}x}\cdot z_1(x)=0$$

$$e^{-\frac{a}{2}x}\left\{z_1''(x)+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)z_1(x)\right\}=0$$

$$\therefore z_1''(x)+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)z_1(x)=0 \qquad \text{———}(*)$$

なお，$z_1(0)=z(0)=0$であり，

$$z_1'(x)=\frac{a}{2}e^{\frac{a}{2}x}z(x)+e^{\frac{a}{2}x}z'(x)$$

より，

$$z_1'(0)=\frac{a}{2}z(0)+z'(0)=0$$

であることに注意する。

イ）$a^2-4b\leqq0$のとき

（＊）の両辺に $z_1'(x)$をかけると，

$$z_1'\cdot z_1''+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)z_1\cdot z_1'=0$$

すなわち

$$\frac{d}{dx}\left\{z_1'\cdot z_1'+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)z_1^2\right\}=0$$

$$\therefore (z_1')^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)\cdot z_1^2=0$$

（$\because z_1(0)=z_1'(0)=0$ より）

ここで，$b-\dfrac{a^2}{4}\geqq0$ であるから，

$$(z_1')^2=0$$

これより，$z_1(x)=c_0$（定数）

$z_1(0)=0$であるから，

$$z_1(x)=0$$

$$\therefore z(x)=e^{-\frac{a}{2}x}\cdot z_1(x)=0.$$

ロ）$a^2-4b>0$のとき

$b-\dfrac{a^2}{4}=-s^2\ (s>0)$とおき，

$$h(x)=z_1'(x)-sz_1(x)$$

とおけば，$h(0)=z_1'(0)-sz_1(0)=0$ で，

$$\begin{aligned}h'(x)&=z_1''(x)-sz_1'(x)\\&=s^2z_1(x)-sz_1'(x) && (\because (*)\text{より})\\&=-s\,h(x) && \text{———}(**)\end{aligned}$$

ここで，$u(x)=h(x)e^{\int_0^x s dt}=h(x)\cdot e^{sx}$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
u'(x) &= h'(x)\cdot e^{sx}+sh(x)\cdot e^{sx}\\
&= e^{sx}(h'(x)+sh(x))\\
&= 0
\end{aligned}
$$

したがって，$u(x)=c_1$（定数）

一方，$u(0)=h(0)=0$であるから，

$$u(x)=0$$

$$\therefore h(x)=e^{-sx}u(x)=0$$

よって，

$$z_1'(x)-s\,z_1(x)=0$$

$z_1(0)=0$であるから，（＊＊）から$h(x)=0$を導いたのと全く同様にして，

$$z_1(x)=0$$

を得る。

$$\therefore z(x)=e^{-\frac{a}{2}x}\,z_1(x)=0$$

イ），ロ）により，

$$y(x)-\varphi(x)=z(x)=0$$

$$\therefore y(x)=\varphi(x).$$

（証明終）

（例題３）次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$y''+4y'+3y=0$

(2)　$y''-2y'+y=0$

(3)　$y''+sy=0\quad(s>0)$

∵(1) $y=e^{\rho x}$とおけば，$\rho^2+4\rho+3=0$

これより，$p=-1,\ -3$

よって，一般解は

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}$$

(2) $y=e^{\rho x}$とおけば，$\rho^2-2\rho+1=0$

これより，$\rho=1$（重解）

よって，一般解は

$$y(x)=e^x(c_1+c_2x)$$

(3) $y=e^{\rho x}$とおけば，$\rho^2+s=0$

これより，$\rho=\pm\sqrt{s}\ i$

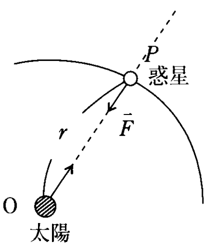
よって，一般解は，

$$y(x)=c_1\cos\sqrt{s}\,x+c_2\sin\sqrt{s}\,x.$$

④　ケプラーの法則の証明

以上の準備をした上で，いよいよ目標のケプラーの法則の証明に入る。

まず，中心力の概念を導入しよう。



万有引力のように，力が定点Oと質点Pを結ぶ直線上で働くとき，この力を中心力という。

万有引力$\vec{F}=m\vec{a}$（m：惑星の質量）を動径OP方向とこれに垂直な方向に分けて，成分で，

$$(F_r,F_\theta)=(m\,a_r,\ m\,a_\theta)$$

と表すとき，太陽の質量がM，太陽と惑星間の距離がrであれば，

$$
\left.
\begin{aligned}
F_r &= m\,a_r=-\frac{GMm}{r^2}\\
F_\theta &= m\,a_\theta=\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}(r^2\theta')=0
\end{aligned}
\right\}\qquad\text{―――①}
$$

であるから，

$$r^2\theta'=h\ （一定）\qquad\text{―――②}$$

すなわち，惑星の面積速度は一定である。（ケプラーの第２法則）

また，$a_r=r''-r(\theta')^2$であるから，①より

$$r''-r(\theta')^2=-\frac{GM}{r^2}$$

であるが，②を利用すると

$$r''-\frac{h^2}{r^3}=-\frac{GM}{r^2}\qquad\text{―――③}$$

ここで，rは$\theta=\theta(t)$の関数であることを考慮すれば，再び②より

$$r'=\frac{d}{dt}\cdot r=\frac{d}{d\theta}r\cdot\frac{d\theta}{dt}=\theta'\cdot\frac{d}{d\theta}r=\frac{h}{r^2}\cdot\frac{d}{d\theta}r$$

$$r''=\frac{d}{d\theta}\cdot r'\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{r^2}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\cdot\frac{d}{d\theta}r\right)$$

これらを③に代入して，

$$\frac{h^2}{r^2}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right)-\frac{h^2}{r^3}=-\frac{GM}{r^2}$$

ここで，$\frac{1}{r}=u$とおくと，

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}=u^2\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right)=u^2\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)\frac{du}{d\theta}=-\frac{du}{d\theta}$$

であるから，

$$h^2u^2\cdot\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{du}{d\theta}\right)-h^2u^3=-GM\,u^2$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GM}{h^2}$$

したがって，

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(u-\frac{GM}{h^2}\right)+\left(u-\frac{GM}{h^2}\right)=0$$

これは，定数係数の２階線形常微分方程式であるから，解くと，

$$
\begin{aligned}
u-\frac{GM}{h^2} &= c_1\cos\theta-c_2\sin\theta\\
&= \sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos\theta-\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin\theta\right)
\end{aligned}
$$

ここで，$c=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$，$\cos\alpha=\frac{c_1}{c}$，$\sin\alpha=\frac{c_2}{c}$とおく

と，

$$= c(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta)$$
$$= c\cos(\theta+\alpha)$$
$$\therefore \frac{1}{r} - \frac{GM}{h^2} = c\cos(\theta+\alpha)$$
$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + c\cos(\theta+\alpha)$$

両辺の逆数をとって，

$$r = \frac{1}{GM/h^2 + c\cos(\theta+\alpha)} = \frac{h^2/GM}{1+\left(h^2c/GM\right)\cos(\theta+\alpha)}$$

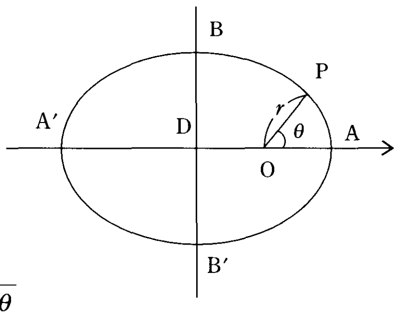
そこで， $\ell = \dfrac{h^2}{GM}$， $\ell = \dfrac{h^2c}{GM}$ とおくと，

$$r = \frac{\ell}{1+e\cos(\theta+\alpha)}$$

惑星と太陽の距離は無限に大きくなることはないから，$0<e<1$ でなければならず，したがって，この極方程式はだ円を表す。

すなわち，惑星は太陽を1つの焦点とするだ円軌道を描く。(ケプラーの第1法則)

最後に示すべきはケプラーの第3法則であるが，それには，$\theta+\alpha$ を改めて θ とした極方程式



$$r = \frac{\ell}{1+e\cos\theta}$$
$$\begin{pmatrix} 0<e<1, \\ \ell>0 \end{pmatrix}$$

について考えればよい。($\theta=0$ のとき，r の値は最小となるから，だ円の極方程式の極は上図の点 O の位置にある。)

このとき，図において，

$$OA = \frac{\ell}{1+e},\quad OA' = \frac{\ell}{1-e}$$

であるから，

$$AA' = OA + OA' = \frac{\ell}{1+e} + \frac{\ell}{1-e} = \frac{2\ell}{1-e^2}$$

したがって，だ円軌道の長軸半径は，

$$DA = \frac{\ell}{1-e^2}$$

また，

$$DO = DA - OA = \frac{\ell}{1-e^2} - \frac{\ell}{1+e} = \frac{\ell e}{1-e^2}$$

で，P が B の位置にくるとき，

$$r\cos\theta = OB\cos\theta = -DO = -\frac{\ell e}{1-e^2}$$

であるから，$r + re\cos\theta = \ell$ より，

$$r + e\cdot\left(\frac{-\ell e}{1-e^2}\right) = \ell$$
$$\therefore OB = r = \ell + \frac{\ell e^2}{1-e^2} = \frac{\ell}{1-e^2}$$

これから，ピタゴラスの定理より，短軸半径

$$DB = \sqrt{OB^2 - OD^2} = \frac{\ell}{1-e^2}\sqrt{1-e^2} = \frac{\ell}{\sqrt{1-e^2}}$$

だ円の面積＝$\pi\times$(長軸半径)$\times$(短軸半径) であるから，だ円の面積を S とすれば，

$$S = \pi\times\frac{\ell}{1-e^2}\cdot\frac{\ell}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\pi\ell^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

面積速度は $\dfrac{1}{2}r^2\theta' = \dfrac{1}{2}h$ であったから，惑星の公転周期を T とすれば，

$$T = \frac{S}{\frac{1}{2}h} = \frac{2\pi\ell^2}{h(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

が成り立つ。

$\ell = \dfrac{h^2}{GM}$ に注意して両辺を平方すれば，

$$T^2 = \frac{4\pi^2\ell^4}{h^2(1-e^2)^3} = \frac{4\pi^2\ell}{h^2}\times\left(\frac{\ell}{1-e^2}\right)^3$$
$$= \frac{4\pi^2}{GM}\times(\text{長軸半径})^3$$

よって，惑星の公転周期の2乗は，だ円軌道の長軸半径の3乗に比例する。(ケプラーの第3法則)

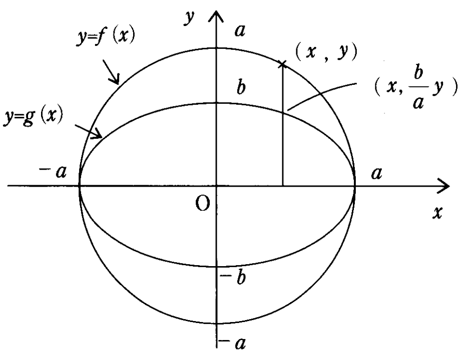
このケプラーの法則は，ケプラーの師ティコ・ブラーエが約30年かけて集めた正確な観測結果を，弟子のケプラーが長年月をかけて失敗をくり返しながら考察した後に発見したもので，第2法則を1609年，第3法則を1618年に発見している。

それからしばらくしてイギリスにニュートンが生まれ，1661年に18才でケンブリッジ大学に入学する。ところが，1664年に疫病が大流行したため大学は閉鎖となり，郷里に帰ったニュートンはそこで2年間を過ごした。ニュートンはこの2年間でめざましく活動し，微積分法，万有引力の法則，光の粒子説の3大発見を行っている。

ニュートン自身は，ケプラーの法則から万有引力の法則に導かれたが，ここではその逆を行った訳である。

〈参考〉だ円の面積について，

だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$ の面積は，次のように考えると分かりやすい。



だ円上のすべての点は，円 $x^2+y^2=a^2$ 上のすべての点の y 座標を $\dfrac{b}{a}$ 倍して得られるから，円の上半分の弧 $y=f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ に対し，だ円の上半分の弧の方程式は

$$y=g(x)=\frac{b}{a}f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

で与えられる。

$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{1}{2}\pi a^2$ であるから，

$$\int_{-a}^{a}g(x)dx=\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{1}{2}\pi ab$$

したがって，だ円の面積を S とすれば，

$$S=2\times\frac{1}{2}\pi ab=\pi ab$$

（これは，積分法を習っていない生徒への説明）

3. 授業実践と反省・課題

この講義は，高Ⅲ理系物理選択者を対象に2001年7月26日から4日間の日程で行ったものであるが，私が担当する「数学Ⅲ」選択者34名のうちの物理選択者および他のクラスからの参加者からなる14名の高Ⅲ生が受講してくれた。

講義は毎回90分を目安として，第1回目にはケプラーの法則をとりまく歴史と座標軸の回転および極座標に関する微分を扱ったが，生徒が希望したテーマであること，初日であることなどの要因もあり熱心に聴いていた。

意外なことに，生徒は座標軸の回転に興味をもち，さらに，運動の速度，加速度の成分が極座標表示の下で極めて簡単な形になることに驚いていたが，ニュートンがこうなることへの見通しを持っていたのかどうか詮索する者もいた。

第2回目の講義では，2次曲線を円すいの切断面としてより視覚的・図形的に捉えることを目ざしたが，切断面に現れる曲線が放物線，だ円，双曲線の定義をきちんと満たしていることを確認する場面で，多くの生徒が大きくうなずいていたのは印象的であった。条件が図形上で巧妙に確認されていく過程は，我々にとっても美しく，美事な調べということができる。

特に，2次曲線に対して形式的に定義される離心率 e が何を表すのか疑問に思っていた生徒は，e がもつ図形的意味を知ってすっきりしたとの思いを述べていた。それだけに，また，2次曲線の極方程式を離心率 e との関係でまとめる話には熱心であった。

第3回目の講義では，定数係数の2階線形同次微分方程式の解法をも含めてじっくり扱うつもりであったが，ケプラーの法則の議論にたどりつく前に線形微分方程式に疲れることをおそれて，ケプラーの法則の証明を先に行うことにした。

ケプラーの第2法則があっけなく解決した後，いろいろな変数に関する微分を用いながらケプラーの第1法則にたどりつくまでの議論は，流石に生徒にとっては疲れるものであったが，定数係数の線形微分方程式が現れると，その巧妙さに改めて感心する者も見られた。

続く第3法則の証明への流れもやや面倒ではあるが，次第に第3法則が浮きぼりになると，大きくうなづく者も見られ，ニュートンやケプラーの偉大さを讃える場面もあった。

第4回目は後回しにした微分方程式の話であったが，微分方程式や解の意味の説明に続く変数分離形，同次形の微分方程式の解法までは，比較的よく取り組んでいたように思われる。

しかし，定数係数2階線形微分方程式の部分では，複素数の指数関数の登場もあり，一般解を導く過程までを理解するのがやっとであった。したがって，一般解がそれ以外にないことを証明する後半の部分については，その証明を断念せざるを得なかった。

受験学年でもあり，初日は出席しても塾との兼ね合いで次第に欠けていくのではないかと危惧したが，初日に出席した14名のうち，13名が最後まで熱心に聴いてくれた。

全くの自由参加の中で出席した生徒であったことに加えて，テーマが生徒自身から出されたものであったことが幸いしたように思われる。

今回の講義の流れには，ニュートンのアイディアを踏まえながら多くの物理学者，数学者がより精密化してまとめあげたものが根底にあり，それを高校

Ⅲ年生の知識に合わせて，物理的準備を少なくし，数学的知識を補いつつまとめ上げたものである。

講義を終えて，ティコ・ブラーエ，ヨハネス・ケプラー，アイザック・ニュートンの偉大さを改めて痛感したが，数学教育においては，

①その教材を学ぶ意義を知らせる意味での，導入部分の大切さ

②生徒に身近かな素材で，彼等が興味をもてるような中身，展開であることの大切さ

を心掛けるべきだとの思いを強くした。

そのためにも，授業者自身が既存の教材の再検討を行って新しい切り口を見い出したり，未開の分野に分け入って新しい教材を開発する気持ちを持つことが大切であろう。

微分方程式は高校では扱われていないが，数学の自然科学への応用を含めて高校で扱って欲しい教材である。ただ，線形微分方程式の議論は難しく，今回の講義でも扱うかどうかで苦慮したところである。多くの先生方による改良の努力を経て，高等学校でも扱いうる教材となることを期待したい。

なお，今回の講義に参加してくれた高校Ⅲ年生にも感謝したい。

〈参考文献〉

1. 小出昭一郎：「物理学」（三訂版）裳華房　1997
2. 金原寿郎編：「基礎物理学上，下」裳華房　1983
3. 矢野健太郎：「初等解析幾何学」岩波書店　1960
4. 本部　均：「解析幾何学」共立出版　1993
5. 吉田　耕作：「微分方程式の解法」岩波書店　1965
6. 古屋　茂：「微分方程式入門」サイエンス社　1979

「ケプラーの法則の数学的証明」の感想

1. 非常に興味深い授業だった。プリントに書いてあることは分かったけれども，なぜここでこのような発想をすることができるのか？と思うところがいくつもあった。(というよりも，ずっとそうだった。) たとえば，極座標表示をして，v_x, v_y を v_r, v_θ に変えると非常に簡潔な式になったけれども，なぜ極座標表示をすると簡潔な式になるのか。これは単なる偶然なのか，もしくは計算し尽くされた上で行われたものなのかといった疑問が残る。まぁ，ここが天才と凡人の違いなのかも。ニュートンは偉すぎる！
2. Difficult です。ケプラーの法則の証明を聴いて何となくは理解したが，実際に証明しろと言われたら……。理解するのにも一苦労いるのに，これを実際に無のところから発見し，必要な道具をつくってこれを証明する当時の学者には感心するばかりである。物理の授業よりも詳しく証明していたので，本質というようなものがみえてきたような気がする。ただ一つ後悔していることは，ちゃんと始まりの時間から授業を受けていないことです。実は，朝がかなり弱いので，自分が聴いた部分は分かったけれども，それ以前の部分は授業を聴きながら何となく理解したと言うところです。

   しかし，普段の授業ではやることのできないような内容の授業を受けることができ，よかったと思う。
3. とても難しかった。こんな解法を思いつくニュートンは天才だと思う。今回の話では，万有引力の法則から微分方程式を導くまでの内容を理解するのがしんどかった。

   GM/h^2 を代入するとかは大学生にとって当たり前なのでしょうか。複雑な計算も，文字を置き換えたり変形することですごく簡単にしてしまえるのは，やはりひらめきなのだろうか。
4. 第一法則の証明はまだ完全には理解できていませんが，第三法則は数値がきれいに収まっていて気に入りました。ただ，$T^2 = ka^3$ の k にあたる $4\pi^2/GM$ にも何か意味があるのでしょうか。

   微分方程式を導く過程はややこしかったですが，変形の仕方が巧みですごいなあと思ったり。

   ケプラーの法則にたどり着くまでの準備は長かったけれども，思ったよりもわかりやすくてよかったです。3 体問題にもこの法則・考えは使われるのでしょうか？
5. 極座標表示や 2 次曲線の話に感動しました。毎日が驚きの連続でした。

   先生の授業は，程よいスピードと丁寧な解説だったので，わかりやすく楽しかったです。物理で公式程度にちょろちょろっと習ったケプラーの法則だけど，なぜそうなるのかがこの証明を通して分かり，良かったです。

   でも，一つ一つの部分は分かったつもりでも，全体を通した論理の流れをまだつかみきっていないので，もっと修行してきちんと理解します。ありがとうございました。
6. おもろかった。

   思っても見ないような考えが出てきて新鮮。

補習の息抜き（頭は疲れるけど）になりました。

No. 5 の微分方程式を導くところで，その意図が分かりにくく理解しづらかった。

7. 全体的に良かったけれど，特に第 3 法則の証明を知りたかったので満足です。

でも，いろいろな記号が出てくるので，納得するまでが結構大変でした。

ニュートンもケプラーも本当にすごい人たちですね。

8. 難しいと言えば難しいけれど，その分すごく面白かったです。

座標軸を回転させるところなんか，ものすごく感動してしまいました。

「数学C」では離心率 e の定義や意味を詳しくやっていなかったので，この講義でやっと納得がいきました。（途中略）

プリント No. 5 のケプラーの第一法則への展開式での微分が結構複雑で，θ で微分するのか t で微分するのかの区別が私にはできそうにありません。

ケプラーが20年かかって導き出した法則を，私たちは本来ならば大学の授業やその演習で扱うと聴きました。しかし，ケプラー，ニュートン以後私たち人類はどれだけ数学を発展させてきたのでしょう。

ニュートン力学は現在でも有効で，人類は未だニュートンの手のひらから抜け出ていないのではないでしょうか。

何か話がずれてきましたが，授業でなくても良いので，他の自然科学の理論や数学の理論についての講義を是非期待しています。

9. ニュートンは本当にすごいということが分かった。ティコ・ブラーエ，ケプラーも偉い。

説明は難しかったが，説明付きの板書を読めば理解することはできた。

円錐曲線の話は一学期の授業でもやったが，入試問題になるとは思わなかった。何も知らない状況から円錐の切り口としての楕円，放物線，双曲線のいろいろな性質が導けたりすれば楽しいだろうと思う。通常の物理や数学の授業よりも楽しく受けることができた。

塾をさぼってでも参加した甲斐があったと思う。

10. 一通りの流れはよく理解できたと思う。（はずである）従って，一週間ぐらいは忘れずに残っているとは思うけど……。

難しいと感じたのは数学的な考えのところ。極座標とかはほとんどビギナーなもので……。でもだいたいの感じはつかめたと思う。（2 学期の予習になったのではと思う。）

微分計算は何とか分かったと思うぐらい。従って，筋道は分かるけど，計算して自分でやれといわれるとほぼ不可能です。

ニュートンもケプラーもすごい。

11. 極座標表示がよく分からなかったが，他の部分はたぶん分かる。最初はとても難しそうな気がしてたけど，一つ一つの話を聞いていくと，ちゃんとつながっていくんだなあと実感。あと，円錐曲線が 2 次曲線であることの証明も説明を聞けばあっさりわかってしまい，感動すると共に驚いてしまった。

12. ニュートンとティコ・ブラーエとケプラーは天才だと言うことが分かった。また，楕円の面積の求め方が分かった。それと同時に，数学の美しさや道具としての微分積分の威力が分かった。また，河野先生の板書の字がきれいであることが分かった。本当にありがとうございました。