Sull’anatocismo nell’ammortamento progressivo: un’impostazione non convenzionale

Flavio Pressacco, Laura Ziani

Sull'anatocismo nell'ammortamento progressivo: un'impostazione non convenzionale

Flavio Pressacco, Laura Ziani

Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche, D.I.E.S.
Università degli Studi di Udine
via Tomadini 30/a, 33100 Udine, Italia

Keywords: ammortamento progressivo, anatocismo, bullet bond, zero coupon bond.

1 Introduzione

In questo lavoro si analizza, da un punto di vista logico-matematico, il problema dell'esistenza di interessi su interessi (cosiddetto anatocismo) in piani di ammortamento tradizionale di un debito. La questione ha assunto notevole rilevanza pratica in epoca recente sulla spinta di numerose cause intestate da soggetti debitori per ottenere dichiarazioni di illegittimità di piani di ammortamento governati da un regime di capitalizzazione composta. Secondo gli attori, tali cause erano (e sono tuttora) basate sulla presenza del fenomeno degli interessi su interessi in tale regime e sulla illegittimità degli stessi ai sensi dell'art. 1283 del CC. La rilevanza economica del fenomeno ha attirato l'attenzione di un'ampia schiera di addetti ai lavori: magistrati, avvocati, commercialisti, consulenti tecnici e periti. Non sorprende che sul tema si siano svolti e si continuino a svolgere convegni molto affollati con la partecipazione di esperti di vari settori disciplinari. Anche all'esito di tali convegni si moltiplicano pubblicazioni di articoli o note scientifiche sul problema. Ed è doveroso registrare che un certo numero di tali contributi ha sposato (in modo più o meno deciso) la tesi della presenza (esplicita o implicita) di interessi su interessi. Un elenco non esaustivo include Annibali et al [1], Cacciafesta [3], Fersini-Olivieri [5], Marcelli et al [6], Mari [7]. Ciò non significa che la tesi sia maggioritaria, ma i sostenitori della tesi contraria sembrano ritenere superflui interventi tesi a contrastare questo vento nuovo. Evidentemente essi ritengono sufficiente quanto elaborato in passato dalla dottrina tradizionale che ha ritenuto per decenni di dare per scontata la legittimità di piani di ammortamento tradizionali, e in particolare del cosiddetto ammortamento a rata costante (detto in gergo francese), costruiti sulla base del regime dell'interesse composto. Diciamo apertamente che non riteniamo appropriata questa strategia di *benign neglect.* E da sostenitori della tesi tradizionale riteniamo utile e anzi necessario inquadrare con il massimo rigore la questione, analizzando con tutta la serietà e l'attenzione possibile gli argomenti controversi. Questo è l'obiettivo del presente lavoro.

La nostra analisi si basa, sulla scia della più recente letteratura, sulla scomposizione del debito, oggetto del piano di ammortamento, in una sequenza di debiti con differenti scadenze, rimborsabili con modalità elementare nelle due versioni alternative Bullet Bond (BB) e Zero Coupon Bond (ZCB). Le scomposizioni debbono generare piani di ammortamento consolidato in grado di replicare perfettamente il piano di ammortamento tradizionale del debito originario.

Si è riscontrato che tale approccio sfocia in un apparente paradosso: a seconda della modalità scelta per la scomposizione, un piano di ammortamento tradizionale registrerebbe assenza (scomposizione BB) o viceversa presenza (scomposizione ZCB) di interessi su interessi.

I sostenitori della tesi sulla presenza dell'anatocismo propongono di risolvere il paradosso a loro favore, suggerendo che nella modalità BB la presenza sarebbe implicita e l'assenza solo apparente. A nostro avviso la fondatezza di tale soluzione riposa sulla premessa giuridica che in ogni contratto di mutuo rimborsabile con modalità elementare (sia essa BB o ZCB) gli interessi siano esigibili solo alla scadenza finale dell'operazione.

Ora va precisato che, mentre riteniamo molto utile accogliere come principio cardine per l'analisi del problema la cadenza dell'esigibilità in luogo della cadenza del pagamento degli interessi, ci sembra compito del matematico (finanziario) analizzare le conseguenze di ambedue le possibili cadenze di esigibilità. In particolare anche le conseguenze della scelta alternativa dell'esigibilità periodica. Da tale scelta alternativa emerge che la soluzione del paradosso sarebbe perfettamente ribaltata: vi sarebbe assenza di interessi su interessi in ambedue le modalità di rimborso elementare, dunque anche in modalità ZCB! In questa ultima infatti gli interessi periodicamente esigibili, ma non pagati, si trasformerebbero in debito aggiuntivo (nuovo capitale) configurando in tal modo produzione legittima di interessi su capitale.

In conclusione la presenza di interessi su interessi non dipende a nostro avviso dal tipo di scomposizione utilizzata ma dalla premessa giuridica sulla cadenza di esigibilità degli interessi.

E a questo punto riteniamo che, avendo fatto chiarezza sul collegamento logico fra le possibili scelte relative a tale premessa e la presenza o assenza di interessi su interessi nel piano di ammortamento tradizionale, il compito del matematico si sia completato.

Saranno i giuristi con il conforto degli economisti finanziari a dover decidere responsabilmente se scegliere in modo imperativo una o l'altra delle due cadenze di esigibilità o lasciare tale scelta alla libertà contrattuale delle parti.

Il piano del lavoro è il seguente. Dopo questa introduzione, nel paragrafo 2 vengono richiamate, inquadrandole in una opportuna cornice logico-matematica, le relazioni fondamentali per la costruzione di un piano di ammortamento tradizionale in regime di capitalizzazione composta. I paragrafi 3 e 4 sono dedicati, sempre in tale cornice, alla formalizzazione di due modalità elementari di rimborso di un debito: come anticipato, modalità BB (par. 3) e modalità ZCB (par. 4). Nel paragrafo 5 dopo aver illustrato le caratteristiche del cosiddetto piano di ammortamento progressivo, si analizzano i risultati fondamentali ottenuti sull'equivalenza fra quest'ultimo e i piani consolidati costruiti scomponendo il debito con le procedure illustrate nei paragrafi precedenti. Nel paragrafo 6 si mettono a confronto le scomposizioni equivalenti ZCB e BB nei due casi di particolare rilevanza pratica dell'ammortamento a rata costante e a quota capitale costante. A conclusione di questa parte, che potremmo definire preliminare, del lavoro abbiamo evidenziato e commentato nel paragrafo 7 il paradosso che caratterizza, allo stato attuale della ricerca, le scomposizioni equivalenti e si sono discusse proposte alternative per dare soluzione al paradosso stesso. La chiave di accesso a queste soluzioni è l'attribuzione di un ruolo chiave alla cadenza di esigibilità degli interessi. Il paragrafo 8 riassume le conclusioni che legano le due possibili scelte alternative di tale cadenza (periodica o finale) alla presenza o assenza di interessi su interessi, risolvendo il paradosso in favore dell'una o dell'altra soluzione. Nell'ultimo paragrafo 9 si traggono le conclusioni.

2 Il piano di ammortamento tradizionale

Definiamo formalmente un piano di ammortamento tradizionale come il risultato (output A) derivante dall'applicazione di una opportuna regola di calcolo f ad un insieme di input $\mathbf{X}$. Useremo la notazione $\mathsf{A} = f(\mathbf{X})$.

A è una matrice N(righe)x4(colonne) nella quale N è il numero di rate posticipate equi-intervallate del piano e i quattro vettori colonna descrivono le sequenze delle rate $\mathbf{R}$, delle quote capitale $\mathbf{C}$, delle quote interesse $\mathbf{I}$ e dei debiti residui $\mathbf{D}$.

Tornerà utile distinguere il vettore $\mathbf{C} = (C_1, \ldots, C_N)$ delle N quote capitale in output dal vettore $\mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_{N-1})$ delle prime $N-1$ quote capitale in input.

Gli input esogeni sono la terna di scalari D_0 (debito iniziale con scadenza T misurata in anni), $N = n \cdot T$ (numero di rate equi-intervallate con periodicità $1/n$), i (tasso effettivo di interesse periodale[1]) e il vettore $\mathbf{Q}$ (prime $N-1$ quote capitale). Indicando con $\mathbf{K} = (D_0, T, i)$ la terna dei "pilastri contrattuali" si ha:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{K}, \mathbf{Q}) \tag{2.1}$$

La regola f si concretizza nelle seguenti relazioni fra gli output:

$$R_h = C_h + I_h \;\forall\, h = 1, \ldots, N \tag{2.2}$$

$$D_h = D_{h-1} - C_h \;\forall\, h = 1, \ldots, N \tag{2.3}$$

$$I_h = i \cdot D_{h-1} \;\forall\, h = 1, \ldots, N \tag{2.4}$$

$$\sum_{h=1}^{N} C_h = D_0 \tag{2.5}$$

Esse scompongono ogni rata (2.2) nella somma di quota capitale e quota interesse, attribuiscono alla quota capitale (2.3) il compito di saldare progressivamente il debito, precisano che la quota interesse (2.4) si calcola moltiplicando il debito residuo (ad inizio del periodo) per il tasso periodale, impongono all'ultima quota capitale (2.5) il vincolo di saldare esattamente il debito.

[1] Useremo nel seguito la notazione i anche se a rigore andrebbe usata la notazione $i_{1/n}$ per indicarne il riferimento alla periodicità delle rate.

Il piano di ammortamento tradizionale è poi riassunto dalla tabella seguente[2]:

h	R_h	C_h	I_h	D_h
0				D_0
1	$C_1 + I_1$	C_1	$i \cdot D_0$	$D_1 = D_0 - C_1$
2	$C_2 + I_2$	C_2	$i \cdot D_1$	$D_2 = D_1 - C_2$
...	...	...	...	...
h	$C_h + I_h$	C_h	$i \cdot D_{h-1}$	$D_h = D_{h-1} - C_h$
...	...	...	...	...
$N-1$	$C_{N-1} + I_{N-1}$	C_{N-1}	$i \cdot D_{N-2}$	$D_{N-1} = D_{N-2} - C_{N-1}$
N	$D_{N-1} \cdot (1+i)$	D_{N-1}	$i \cdot D_{N-1}$	0

Tabella 1: Matrice A che descrive le poste di un piano di ammortamento tradizionale di un debito D_0 con N rate e tasso di interesse periodale i.

Remark 1. *In questa impostazione abbiamo dunque formalmente distinto il vettore* $\mathbf{Q}$ *dal vettore* $(C_1, \ldots, C_{N-1})$ *per far risaltare la loro diversa "natura" di input e rispettivamente output. Ovviamente deve essere, per ogni* $h < N$, $Q_h = C_h$ [3]*. Si noti che l'ultima quota capitale è invece esclusivamente output della regola* f *(in particolare frutto della* (2.3) *e della* (2.5)*).*

Più formalmente è:

Definizione 2.1. $\mathsf{A} = (\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{I}, \mathbf{D}) = f(\mathbf{K}, \mathbf{Q})$

Coerentemente con la notazione, si può esprimere la regola f anche scrivendo direttamente tutte le componenti di A in formula chiusa come funzioni delle variabili in input $(\mathbf{K}, \mathbf{Q})$. Vale in proposito il

[2] In tabella 1 compare anche una riga con l'unica indicazione del debito iniziale D_0. Formalmente, sulla base della Def. 2.1 essa sarebbe estranea alla matrice A. Tale indicazione sarà tuttavia utilizzata anche nelle successive tabelle.

[3] In un piano di ammortamento tradizionale si inseriscono usualmente anche vincoli su $\mathbf{Q}$ e quindi implicitamente sulle prime $N-1$ componenti di $\mathbf{C}$ (ad esempio $-I_h \leq C_h < D_{h-1}$ $h = 1, \ldots, N-1$; il confine inferiore esclude la concessione nel tempo di ulteriori finanziamenti, al netto di eventuale indebitamento aggiuntivo per interessi; quello superiore impedisce l'azzeramento del debito prima della scadenza T). Peraltro tali vincoli sono tradotti da diseguaglianze e dunque la loro presenza non pregiudica la libertà (entro tali vincoli) di scelta del vettore $\mathbf{Q}$, che rimane in tal modo uno degli input della f.

Risultato 1.

$$C_h = Q_h \; \forall\, h < N \tag{2.6a}$$
$$C_N = D_0 - \sum_{h=1}^{N-1} Q_h \tag{2.6b}$$
$$I_h = i \cdot (D_0 - \sum_{j=1}^{h-1} Q_j) \; \forall\, h = 1, \dots, N \tag{2.6c}$$
$$R_h = Q_h + i \cdot (D_0 - \sum_{j=1}^{h-1} Q_j) \; \forall\, h < N \tag{2.6d}$$
$$R_N = (1+i) \cdot (D_0 - \sum_{h=1}^{N-1} Q_h) \tag{2.6e}$$
$$D_h = D_0 - \sum_{j=1}^{h} Q_j \; \forall\, h < N \tag{2.6f}$$
$$D_N = 0 \tag{2.6g}$$

Le (2.6) esplicitano la dipendenza di tutte le poste della matrice A dalle variabili in input.

Esempio 1. *Consideriamo un debito* $D_0 = 1.000$ *Euro da ammortizzare in* $T = 4$ *anni, con rate annue* R_h*, al tasso annuo di interesse* $i = 10\%$ *e con sequenza in input di quote capitale* $\mathbf{Q} = (200; 300; 350)$ *e di conseguenza* $C_4 = 150$*. Risulta:*

h	R_h	C_h	I_h	D_h	$R_h \cdot (1+i)^{-h}$
0	0	0	0	1.000, 00	
1	300, 00	200, 00	100, 00	800, 00	272, 727
2	380, 00	300, 00	80, 00	500, 00	314, 050
3	400, 00	350, 00	50, 00	150, 00	300, 526
4	165, 00	150, 00	15, 00	0	112, 697
Tot	1.245, 00	1.000, 00	245, 00		1.000, 00

Tabella 2: Piano di ammortamento tradizionale di un debito $D_0 = 1.000$, $T = 4$ anni, $N = 4$ rate annue, tasso annuo di interesse $i = 10\%$ e sequenza di quote capitale $\mathbf{Q} = (200; 300; 350)$ e di conseguenza $C_4 = 150$. Nell'ultima colonna, che non fa parte del piano, sono stati inseriti i valori attualizzati al tempo 0 di tutte le rate.

Come nell'esempio, anche in generale vale il seguente fondamentale e non banale risultato.

Risultato 2. *La regola* f *implica la seguente condizione sulle rate:*

$$\sum_{h=1}^{N} R_h \cdot (1+i)^{-h} = D_0 \tag{2.7}$$

Corollario 1. *La regola f utilizza il regime di capitalizzazione composta come base della relazione di equivalenza finanziaria fra i valori riportati all'epoca 0 (iniziale) delle prestazioni del creditore (pagamento dell'importo corrispondente al debito iniziale) e del debitore (pagamento della sequenza delle rate). Lo si evince dal fatto che il fattore di attualizzazione impiegato nella (2.7) per attualizzare l'$h-$esima rata è $(1+i)^{-h}$.*

Basta questo per asserire che nel piano di ammortamento tradizionale vi è produzione esplicita o implicita di interessi sugli interessi? La risposta esige una approfondita analisi che svilupperemo nei prossimi paragrafi.

3 Piano di rimborso elementare in modalità Bullet Bond

In questo paragrafo analizziamo la particolare modalità di rimborso elementare detta Bullet Bond (BB). Essa prevede il pagamento, ad ogni scadenza $h = 1, \dots, N$, di una cedola di interessi $I_h = i \cdot D_0$ costante per ogni h, cui si aggiunge alla scadenza finale T il rimborso del debito D_0.

Traduciamo ora questa modalità di rimborso in un piano di ammortamento adottando la notazione formalizzata:

$$\mathsf{A}^B = (\mathbf{R}^B, \mathbf{C}^B, \mathbf{I}^B, \mathbf{D}^B) = f^B(\mathbf{X}^B) \tag{3.1}$$

Ivi l'apice B distingue l'output A^B, l'input $\mathbf{X}^B$ e la regola f^B dai corrispondenti simboli del piano tradizionale. In particolare è $X^B = \mathbf{K}$.

Remark 2. *L'input $\mathbf{X}^B$ differisce dunque da $\mathbf{X}$ per l'assenza del vettore $\mathbf{Q}$ delle prime $N-1$ quote capitale.*

Per quanto riguarda la regola f^B essa è descritta dalle seguenti relazioni sugli output:

$$R_h^B = C_h^B + I_h^B \; \forall\, h = 1, \dots, N \tag{3.2}$$

$$D_h^B = D_{h-1}^B - C_h^B \; \forall\, h = 1, \dots, N \tag{3.3}$$

$$I_h^B = I^B = i \cdot D_0 = R_h^B \; \forall\, h = 1, \dots, N-1 \tag{3.4}$$

$$R_N^B = I^B + D_0 = D_0 \cdot (1+i) \tag{3.5}$$

Remark 3. *Nella f^B le (3.2) e (3.3) preservano la logica delle (2.2) e (2.3). Ad esse si aggiungono le (3.4) e (3.5) che nel passaggio da f a f^B sostituiscono le (2.4) e (2.5).*

Peraltro, si accerta facilmente che queste ultime continuano ad essere soddisfatte come conseguenze necessarie delle (3.2)–(3.5).

Risulta inoltre:

Risultato 3. *In output delle quote capitale è:*

$$C_h^B = 0 \quad \forall\, h = 1, \ldots, N-1 \tag{3.6}$$

$$C_N^B = D_0 \tag{3.7}$$

Corollario 2. *La regola f^B vincola, senza lasciare alcun grado di libertà, il vettore $\mathbf{C}^B$; esso si può considerare output obbligato della regola.*

Ne consegue il seguente:

Risultato 4. $\mathsf{A} = f(\mathbf{K}, \mathbf{Q}) = \mathsf{A}^B = f^B(\mathbf{K})$ *se e solo se* $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$.

Il Ris. 4 asserisce che la modalità di rimborso BB genera con la regola f^B un piano di ammortamento A^B che coincide con il piano tradizionale generato dalla regola f applicata ad un input $(\mathbf{K}, \mathbf{Q})$ in cui tutte le prime $N-1$ quote capitale sono nulle.

Corollario 3. $\sum_{h=1}^{N} R_h^B \cdot (1+i)^{-h} = D_0$

Remark 4. *Come conseguenza del Cor. 3 il piano di rimborso in modalità BB rispetta il regime della capitalizzazione composta.*

Se vogliamo esprimere le poste di A^B in funzione degli input $\mathbf{K} = (D_0, N, i)$ possiamo scrivere:

$$I_h^B = I^B = i \cdot D_0 \;\forall\, h = 1, \ldots, N \tag{3.8}$$

$$R_h^B = I_h^B \;\forall\, h = 1, \ldots, N-1 \tag{3.9}$$

$$C_h^B = 0 \;\forall\, h = 1, \ldots, N-1 \tag{3.10}$$

$$C_N^B = I^B = D_0 \tag{3.11}$$

$$R_N^B = D_0 \cdot (1+i) \tag{3.12}$$

$$D_h^B = D_0 \;\forall\, h = 1, \ldots, N-1 \tag{3.13}$$

$$D_N^B = 0 \tag{3.14}$$

La tabella 3 riassume le poste di un piano di ammortamento in modalità BB e ne evidenzia la dipendenza dal vettore degli input $\mathbf{K}$.

h	R_h^B	C_h^B	I_h^B	D_h^B
0				D_0
1	$i \cdot D_0$	0	$i \cdot D_0$	$D_1 = D_0$
2	$i \cdot D_0$	0	$i \cdot D_0$	$D_2 = D_0$
...	...	...	...	...
h	$i \cdot D_0$	0	$i \cdot D_0$	$D_h = D_0$
...	...	...	...	...
$N-1$	$i \cdot D_0$	0	$i \cdot D_0$	$D_{N-1} = D_0$
N	$D_0 \cdot (1+i)$	D_0	$i \cdot D_0$	0

Tabella 3: Schema di rimborso elementare con modalità BB di un debito D_0 con N rate e tasso di interesse periodale i.

Remark 5. *In base al Ris. 4 la modalità BB può dunque essere vista sia come caso particolare di un ammortamento tradizionale derivante dalla scelta* $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ *(come parte dell'input* $\mathbf{X}$ *della regola* f*), che come risultato di una autonoma regola* f^B *che fra l'altro genera il vettore nullo come output obbligato delle prime* $N-1$ *quote capitale.*

Tale coincidenza non deve celare la differenza concettuale fra le due regole sintetizzate dalle notazioni f *ed* f^B*. La distinzione logica fra le regole consente di affermare che la legittimazione del piano di ammortamento tradizionale è rafforzata da tale coincidenza. In altre parole, il piano BB ha una sua autonoma dignità che va oltre l'essere la mera conseguenza dell'applicazione della regola tradizionale* f*. L'autonoma legittimazione della modalità BB ha, a nostro avviso, decisiva rilevanza quando si vogliano analizzare le regole di un ammortamento progressivo scomponendolo (come vedremo nel successivo paragrafo) in una sequenza di piani di rimborso in modalità BB. Ed è proprio in vista di questo obiettivo che ci siamo soffermati su questa interpretazione; essa altrimenti apparirebbe superflua o peggio possibile fonte di inutili complicazioni.*

Esempio 2. *Debito iniziale di* $D_0 = 1.000$ *Euro, con rata annua, tasso di interesse annuo* $i = 10\%$, *durata* $T = 4$ *anni:*

h	R_h^B	C_h^B	I_h^B	D_h^B
0	0	0	0	1.000, 00
1	100, 00	0	100, 00	1.000, 00
2	100, 00	0	100, 00	1.000, 00
3	100, 00	0	100, 00	1.000, 00
4	1.100, 00	1.000, 00	100, 00	0
Totale	1.400, 00	1.000, 00	400, 00	

Tabella 4: Schema di rimborso elementare in modalità BB di un debito $D_0 = 1.000$ con 4 rate annue e $i = 10\%$ annuo.

Si verifica banalmente che il piano di ammortamento in modalità BB è perfettamente coincidente con il corrispondente piano di ammortamento tradizionale con in input $(\mathbf{K}, \mathbf{Q} = \mathbf{0})$.

Tornando alla questione della presenza di interessi sugli interessi, le tabelle 3 e 4 sembrano suggerire inequivocabilmente il seguente:

Risultato 5. *In modalità BB non vi è traccia della produzione di interessi su interessi. Le singole cedole (quote interesse) sono invero costantemente pari a* $i \cdot D_0$, *cioè sono ottenute applicando il tasso di interesse periodale al debito iniziale. La loro somma è (pur in regime di interesse composto)* $N \cdot i \cdot D_0$, *esattamente pari a quella che si otterrebbe in regime di interesse semplice*[4].

Vedremo più avanti (paragrafo 7) che la semplicità algebrica di questo ragionamento può essere ingannevole in assenza del conforto di una opportuna premessa giuridico economica.

4 Piano di rimborso elementare in modalità Zero Coupon Bond

In questo paragrafo analizziamo, utilizzando la stessa impostazione concettuale del paragrafo 3, la modalità elementare detta Zero Coupon Bond (ZCB). In essa l'importo del debito D_0 è interpretabile come il prezzo di emissione di un buono senza cedola di scadenza $T = N/n$ e valore di rimborso $D_0 \cdot (1 + i)^N$.

Il rimborso avviene dunque in unica soluzione alla scadenza T, ma per costruire un piano di ammortamento confrontabile con un piano tradizionale conviene pensare che tale rimborso corrisponde all'ultima rata $R_N = D_0(1 + i)^N$ di una sequenza di rate R_h tutte nulle per $h < N$.

[4] Ma si noti in tale regime pagabile solo alla scadenza finale N.

Utilizzando l'apice Z con logica analoga a quella dell'apice B nel paragrafo 3, scriveremo allora:

$$\mathsf{A}^Z = (\mathbf{R}^Z, \mathbf{C}^Z, \mathbf{I}^Z, \mathbf{D}^Z) = f^Z(\mathbf{X}^Z) \tag{4.1}$$

ove $X^Z = \mathbf{K}$ ed f^Z è descritta dalle seguenti relazioni:

$$R_h^Z = C_h^Z + I_h^Z \ \forall\, h = 1, \ldots, N \tag{4.2}$$

$$D_h^Z = D_{h-1}^Z - C_h^Z \ \forall\, h = 1, \ldots, N \tag{4.3}$$

$$I_h^Z = i \cdot D_{h-1}^Z \ \forall\, h = 1, \ldots, N \tag{4.4}$$

$$R_h^Z = 0 \ \forall\, h < N \tag{4.5}$$

$$R_N^Z = D_0 \cdot (1+i)^N \tag{4.6}$$

Le (4.2)−(4.6) rendono automaticamente soddisfatte le:

$$D_0 = \sum_{h=1}^{N} C_h^Z \tag{4.7}$$

$$D_0 = \sum_{h=1}^{N} R_h^Z \cdot (1+i)^{-h} \tag{4.8}$$

In particolare si può accertare che:

Risultato 6. *nell'output* A^Z *generato dalla regola* $f^Z(\mathbf{K})$ *compare il seguente vettore obbligato di quote capitale* $\mathbf{C}^Z$*:*

$$C_h^Z = -i \cdot D_0 \cdot (1+i)^{h-1} \ \ \forall\, h < N \tag{4.9}$$

$$C_N^Z = D_0 \cdot (1+i)^{N-1} \tag{4.10}$$

Dopo di ciò, è intuitivo che in tal caso vale il:

Risultato 7. $\mathsf{A} = f(\mathbf{K}, \mathbf{Q}) = \mathsf{A}^Z = f^Z(\mathbf{K})$ *se e solo se* $\mathbf{Q}$ *soddisfa la* (4.9).

Il Ris. 7 asserisce che la modalità di rimborso ZCB genera con la regola f^Z un piano di ammortamento A^Z che coincide con il piano tradizionale generato dalla regola f applicata ad un input $(\mathbf{K}, \mathbf{Q})$ in cui tutte le prime quote $N-1$ quote capitale soddisfano la (4.9)[5].

[5] Il Ris. 7 rimane valido se utilizziamo come input della f^Z il vettore $\mathbf{R}^Z$ come definito dalle (4.5) e (4.6) al posto di $\mathbf{Q}$ che soddisfa la (4.9). Anzi questo sarebbe il naturale input della regola f nell'ammortamento tradizionale in modalità di rimborso ZCB.

Utilizzando la medesima logica della tabella 3 e sorvolando sulla formale descrizione della $f^Z(\mathbf{K})$ in cui ogni posta venga espressa in funzione esclusivo degli input $\mathbf{K}$, il piano di rimborso in questa versione della modalità ZCB genera un piano riassunto dalla seguente tabella:

h	R_h^Z	C_h^Z	I_h^Z	D_h^Z
0	0	0	0	D_0
1	0	$-i \cdot D_0$	$i \cdot D_0$	$D_0 \cdot (1+i)$
2	0	$-i \cdot D_0 \cdot (1+i)$	$i \cdot D_0 \cdot (1+i)$	$D_0 \cdot (1+i)^2$
...	...	...	...	...
h	0	$-i \cdot D_0 \cdot (1+i)^{h-1}$	$i \cdot D_0 \cdot (1+i)^{h-1}$	$D_0 \cdot (1+i)^h$
...	...	...	...	...
$N-1$	0	$-i \cdot D_0 \cdot (1+i)^{N-2}$	$i \cdot D_0 \cdot (1+i)^{N-2}$	$D_0 \cdot (1+i)^{N-1}$
N	$D_0 \cdot (1+i)^N$	$D_0 \cdot (1+i)^{N-1}$	$i \cdot D_0 \cdot (1+i)^{N-1}$	0

Tabella 5: Schema di rimborso elementare in modalità ZCB regola f^Z di un debito D_0 con N rate e tasso di interesse periodale i.

Esempio 3. *Con in input gli stessi dati* (D_0, T, i) *dell'esempio 2 si ha allora in questa modalità:*

h	R_h^Z	C_h^Z	I_h^Z	D_h^Z
0	0	0	0	1.000, 00
1	0	$-100,00$	100, 00	1.100, 00
2	0	$-110,00$	110, 00	1.210, 00
3	0	$-121,00$	121, 00	1.331, 00
4	1.464, 10	1.331, 00	133, 10	0
Totale	1.464, 10	1.000, 00	464, 10	

Tabella 6: Schema di rimborso elementare in modalità ZCB regola f^Z di un debito $D_0 = 1.000$, $N = 4$ rate, $i = 10\%$ annuo.

Giova ricordare che in letteratura è stata proposta anche una regola alternativa per la produzione di un piano di ammortamento in modalità ZCB. Utilizzando l'apice $\hat{Z}$ in luogo dell'apice Z per la regola alternativa, scriveremo allora:

$$\mathsf{A}^{\hat{Z}} = (\mathbf{R}^{\hat{Z}}, \mathbf{C}^{\hat{Z}}, \mathbf{I}^{\hat{Z}}, \mathbf{D}^{\hat{Z}}) = f^{\hat{Z}}(\mathbf{X}^{\hat{Z}}) \tag{4.11}$$

ove $\mathbf{X}^{\hat{Z}} = \mathbf{X}^Z = \mathbf{K}$ ed $f^{\hat{Z}}$ è descritta dalle seguenti relazioni:

$$R_h^{\hat{Z}} = C_h^{\hat{Z}} + I_h^{\hat{Z}} \;\forall\, h = 1, \ldots, N \tag{4.12}$$

$$D_h^{\hat{Z}} = D_{h-1}^{\hat{Z}} - C_h^{\hat{Z}} \;\forall\, h = 1, \ldots, N \tag{4.13}$$

$$I_h^{\hat{Z}} = 0 \;\forall\, h < N \tag{4.14}$$

$$I_N^{\hat{Z}} = D_0 \cdot ((1+i)^N - 1) \tag{4.15}$$

$$R_h^{\hat{Z}} = 0 \; \forall \, h < N \tag{4.16}$$

$$R_N^{\hat{Z}} = D_0 \cdot (1+i)^N \tag{4.17}$$

Remark 6. *Si può constatare che le regole f^Z ed $f^{\hat{Z}}$ differiscono solo nella modalità di calcolo degli interessi descritte dalle (4.4) e rispettivamente dalle (4.14) e (4.15). Invece le relazioni (4.2), (4.3), (4.5) e (4.6) sono definite in modo formalmente identico alle corrispondenti relazioni (4.12), (4.13), (4.16) e (4.17). A dispetto di tale identità formale anche le sequenze in output delle quote capitale e dei debiti residui di A^Z e $\mathsf{A}^{\hat{Z}}$ sono diverse. Peraltro, mentre cambia la sequenza delle quote capitale non cambia la loro somma, che è ancora pari a D_0.*

Le tabelle 7 (in generale) e 8 (esempio 4) riassumono il piano di rimborso $\mathsf{A}^{\hat{Z}}$; confrontandole rispettivamente con le tabelle 5 e 6 si possono apprezzare le differenze fra i due approcci della modalità ZCB.

h	$R_h^{\hat{Z}}$	$C_h^{\hat{Z}}$	$I_h^{\hat{Z}}$	$D_h^{\hat{Z}}$
0	0	0	0	D_0
1	0	0	0	D_0
2	0	0	0	D_0
...	...	...	...	...
h	0	0	0	D_0
...	...	...	...	...
$N-1$	0	0	0	D_0
N	$D_0 \cdot (1+i)^N$	D_0	$D_0 \cdot ((1+i)^N - 1)$	0

Tabella 7: Schema di rimborso elementare in modalità ZCB regola $f^{\hat{Z}}$ di un debito D_0 con N rate e tasso di interesse periodale i.

Esempio 4. *Con in input gli stessi dati (D_0, N, i) dell'esempio 2 si ha allora in questa modalità:*

h	$R_h^{\hat{Z}}$	$C_h^{\hat{Z}}$	$I_h^{\hat{Z}}$	$D_h^{\hat{Z}}$
0	0	0	0	1.000, 00
1	0	0	0	1.000, 00
2	0	0	0	1.000, 00
3	0	0	0	1.000, 00
4	1.464, 10	1.000, 00	464, 10	0
Totale	1.464, 10	1.000, 00	464, 10	

Tabella 8: Schema di rimborso elementare in modalità ZCB regola $f^{\hat{Z}}$ di un debito $D_0 = 1.000$, $N = 4$ rate, $i = 10\%$ annuo.

Confrontando le tabelle 4 e 8 si può notare che:

Remark 7. *la regola alternativa* $f^{\hat{Z}}$ *genera in output sequenze di quote capitale e debiti residui simili a quelle ottenute (a parità di* $\mathbf{K}$*) dalla regola* f^B*. In particolare la sequenza delle quote capitale è* $(\mathbf{0}, D_0)$*. Ne consegue che non esiste un piano di ammortamento tradizionale coincidente con un piano generato dalla regola* $f^{\hat{Z}}$*.*

Confrontando le tabelle 6 e 8 si può notare che sia il monte interessi che la sequenza dei flussi di cassa delle rate coincidono nelle due impostazioni ZCB, pur essendo diversa la scomposizione della rata.

Dal punto di vista algebrico sembrerebbe di poterne dedurre (in ambedue le impostazioni) il seguente:

Risultato 8. *Nella modalità di rimborso ZCB vi è sicuramente produzione di interessi su interessi.*

Nella regola f^Z per ogni h vale la:

$$D_{h-1} = D_0 + \sum_{j=1}^{h-1} I_j \tag{4.18}$$

che sostituita nella (2.4) porge la[6]:

$$I_h = i \cdot \left(D_0 + \sum_{j=1}^{h-1} I_j \right) = i \cdot D_0 + i \cdot \sum_{j=1}^{h-1} I_j \tag{4.19}$$

Essa scompone ogni quota interesse nella somma dell'interesse prodotto dal debito iniziale e dell'interesse prodotto dalla somma degli interessi precedenti. Nel secondo addendo dunque si annida palesemente la produzione di interessi sugli interessi.

Il saldo delle quote interesse così calcolate, se pagabili in unica soluzione a scadenza, coincide con l'interesse prodotto a scadenza dall'applicazione della regola $f^{\hat{Z}}$ (dalla (4.15)).

Come già evidenziato alla fine del paragrafo 3 la semplicità algebrica di questo ragionamento può essere ingannevole. Riprenderemo in esame la questione nel paragrafo 7.

[6] Fersini-Olivieri ([5], p. 138) propongono esattamente la stessa scomposizione peraltro con riferimento al caso particolare di un debito iniziale ottenuto attualizzando in regime di interesse composto un importo R, saldo alla scadenza j del debito.

5 Piani di ammortamento tradizionali progressivi

Piani di ammortamento tradizionale progressivo si distinguono dal caso generale per l'introduzione di vincoli di diseguaglianza sulle quote capitale (input e output del piano), per $h < N$:

$$0 < Q_h = C_h < D_{h-1} \tag{5.1}$$

Le diseguaglianze richiedono che il debito residuo diminuisca progressivamente ($C_h > 0$) senza peraltro azzerare il debito prima della scadenza ($C_h < D_{h-1}$).

Per analizzare la questione della presenza o assenza di interessi su interessi in un ammortamento progressivo tradizionale si è suggerito di fare ricorso a opportune scomposizioni del debito D_0. Ci occuperemo nelle successive sezioni della scomposizione del debito in sequenze di debiti equivalenti rimborsabili in modalità BB (sezione 5.1) e rispettivamente in modalità ZCB (sezione 5.2).

Segnaliamo che una trattazione molto accurata delle specificità dell'operazione di mutuo si trova nel capitolo 4 intitolato *Ammortamento di prestiti* (a cura di U. Magnani) di un trattato di Matematica Finanziaria, ormai datato ma di esemplare chiarezza (cfr. [2] pag. 147-184). Ivi, nel contesto di una trattazione matematica, trova spazio anche un significativo richiamo a tematiche proprie del diritto e in particolare all'art.1283 del CC (ibidem pag.147). Giova richiamare le parole dell'autore: *se si analizzano le norme di legge sul mutuo ci si accorge che il legislatore prevede che il contratto possa articolarsi in una delle seguenti modalità alternative: 1) restituzione finale del capitale e corresponsione (annua, salvo patti o usi contrari) degli interessi; 2) restituzione del capitale e degli interessi ad un'unica scadenza finale; 3) restituzione graduale del capitale prevista a più scadenze successive, nel qual caso gli interessi da pagare a ciscuna di queste andranno ovviamente man mano commisurati al capitale che alla stessa risulta non ancora reso.* Nella nostra trattazione le modalità sub 1) e 2) sono definite modalità elementari ed etichettate rispettivamente come BB e ZCB, mentre quella sub 3) è definita ammortamento tradizionale (progressivo). Gli esempi che seguono (ibidem pag. 150) chiariscono che la sequenza delle quote capitale è obbligata nelle modalità elementari 1) e 2); esse possono essere invece concordate, con $N - 1$ gradi di libertà, per precisare un ammortamento tradizionale.

5.1 Scomposizione del piano in una sequenza equivalente di piani di rimborso in modalità BB

Partiamo da un piano di ammortamento tradizionale progressivo di un debito descritto dalla $\mathsf{A} = f(\mathbf{K}, \mathbf{Q})$ ove f è definita dalle relazioni (2.2)−(2.5), $\mathbf{K} = (D_0, N, i)$ e $\mathbf{Q}$ soddisfa la (5.1).

Per ogni $J = 1, \ldots, N$ indichiamo con ${}_JD_0 = B_J > 0$ l'importo di un debito contratto all'epoca 0 ed estinguibile in modalità BB con J rate al tasso periodale i. Ciascun B_J è allora il valore facciale di tale BB.

Definizione 5.1. *La scomposizione* $({}_1D_0, \ldots, {}_ND_0) = (B_1, \ldots, B_N) = \mathbf{B}$ *è ammissibile se:*

$$\sum_{J=1}^{N} {}_JD_0 = \sum_{J=1}^{N} B_J = D_0 \tag{5.2}$$

Indichiamo con la notazione $\mathbf{K}_J = (B_J, J, i)$ la terna di input di un piano di ammortamento in modalità BB descritto dalla:

Definizione 5.2. ${}_JA^B = ({}_J\mathbf{R}^B, {}_J\mathbf{C}^B, {}_J\mathbf{I}^B, {}_J\mathbf{D}^B) = f^B(\mathbf{K}_J) \quad \forall \quad J = 1, \ldots, N$

Remark 8. *Tutti i vettori* $\mathbf{K}_J$ *sono univocamente individuati dato* B_J*. Essi hanno in comune il tasso periodale* i *e differenti* J*. Ciascuna matrice* ${}_JA^B$ *ha dimensione* Jx4*.*

Al fine di rendere possibile la somma delle matrici completeremo ogni ${}_JA^B$ aggiungendovi $N - J$ righe tutte identicamente nulle (senza peraltro introdurre nuove notazioni). Sicché d'ora in avanti ${}_JA^B$ avrà comunque dimensione Nx4 ma solo le prime J righe significative e le altre identicamente nulle (cfr. tab. 9).

Definiamo poi piano di ammortamento consolidato in modalità BB della sequenza di debiti ottenuti da una scomposizione ammissibile secondo la (5.2) la matrice A^B così definita:

Definizione 5.3. $\mathsf{A}^B = \sum_{J=1}^{N} {}_JA^B = \sum_{J=1}^{N} f^B(\mathbf{K}_J)$

La matrice somma A^B esprime le poste di un ipotetico piano di ammortamento consolidato ottenuto sommando le poste di tutti i singoli piani di ammortamento di ciascun BB [7].

[7] Per quanto di nostra conoscenza, si deve a Cacciafesta ([4], pp. 137-140) l'idea della scomposizione di un piano di ammortamento progressivo nella somma di n prestiti in modalità BB.

Chiediamoci ora se esiste (almeno) un vettore $\mathbf{B}$ tale che

$$\mathsf{A}^B = \sum_{J=1}^{N} f^B(\mathbf{K}_J) = \mathsf{A} = f(\mathbf{K}, \mathbf{Q}) \tag{5.3}$$

Sussiste in proposito il seguente fondamentale

Teorema 1. *Esiste un unico vettore* $\mathbf{B}$ *cioè una unica scomposizione ammissibile* $(B_1, \ldots, B_N)$ *per cui è soddisfatta la* (5.3).

Dato $\mathsf{A} = f(\mathbf{K}, \mathbf{Q})$ *esso è dato dalle:*

$$B_J = Q_J \ \forall \ J < N \tag{5.4}$$

$$B_N = D_0 - \sum_{J=1}^{N-1} Q_J \tag{5.5}$$

Definizione 5.4. *Tale soluzione si dice scomposizione BB equivalente di un piano di ammortamento tradizionale progressivo del debito* D_0.

In definitiva il Teorema 1 afferma che un piano di ammortamento progressivo tradizionale di un debito D_0 con input $(\mathbf{K}, \mathbf{Q})$ coincide con il piano di ammortamento consolidato in modalità BB della sequenza di debiti ottenuti dalla particolare scomposizione in cui il valore facciale di ciascun BB (con "scadenza" J) eguaglia il valore della corrispondente quota capitale dell'ammortamento tradizionale.

Tale equivalenza consente di formulare il seguente importante corollario:

Corollario 4. *L'assenza di interessi su interessi in ognuno dei piani di rimborso in modalità BB (cfr. Risultato 5) implica l'assenza di interessi su interessi nel piano di ammortamento tradizionale equivalente.*

Il corollario 4 è un risultato fondamentale dal punto di vista finanziario. Data una scomposizione del debito D_0 in una sequenza di debiti B_J, $J = 1, \ldots, N$, a ciascuno di essi si applica un piano di ammortamento in modalità BB; in tali piani, in forza del Risultato 5, non vi è presenza di interessi su interessi. Scegliendo $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ ne segue l'assenza di interessi su interessi nel piano tradizionale le cui poste riproducono quelle del piano consolidato dell'insieme dei BB.

Esempio 5. *Con riferimento ad una sequenza ammissibile di BB con debiti iniziali pari a* $\mathbf{B} = (200, 300, 350, 150)$*, la cui somma è pari a* $D_0 = 1.000$ *Euro, le tabelle seguenti descrivono le matrici dei singoli piani di ammortamento (9(a)–9(d)) e la matrice del piano consolidato (9(e)).*

(a) ${}_1A^B$ con ${}_1D_0 = B_1 = 200$

h	${}_1R_h^B$	${}_1C_h^B$	${}_1I_h^B$	${}_1D_h^B$
0	0	0	0	200,00
1	220,00	200,00	20,00	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
Tot	220,00	200,00	20,00	

(b) ${}_2A^B$ con ${}_2D_0 = B_2 = 300$

h	${}_2R_h^B$	${}_2C_h^B$	${}_2I_h^B$	${}_2D_h^B$
0	0	0	0	300,00
1	30,00	0,00	30,00	300,00
2	330,00	300,00	30,00	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
Tot	360,00	300,00	60,00	

(c) ${}_3A^B$ con ${}_3D_0 = B_3 = 350$

h	${}_3R_h^B$	${}_3C_h^B$	${}_3I_h^B$	${}_3D_h^B$
0	0	0	0	350,00
1	35,00	0,00	35,00	350,00
2	35,00	0,00	35,00	350,00
3	385,00	350,00	35,00	0
4	0	0	0	0
Tot	455,00	350,00	105,00	

(d) ${}_4A^B$ con ${}_4D_0 = B_4 = 150$

h	${}_4R_h^B$	${}_4C_h^B$	${}_4I_h^B$	${}_4D_h^B$
0	0	0	0	150,00
1	15,00	0,00	15,00	150,00
2	15,00	0,00	15,00	150,00
3	15,00	0,00	15,00	150,00
4	165,00	150,00	15,00	0
Tot	210,00	150,00	60,00	

(e) $\mathsf{A}^B = \sum_{j=1}^{4} {}_jA^B$ con $D_0 = \sum_{j=1}^{4} {}_jD_0^B = 1.000,00$

h	R_h^B	C_h^B	I_h^B	D_h^B
0	0	0	0	1.000,00
1	300,00	200,00	100,00	800,00
2	380,00	300,00	80,00	500,00
3	400,00	350,00	50,00	150,00
4	165,00	150,00	15,00	0
Tot	1.245,00	1.000,00	245,00	

Tabella 9: Scomposizione di un debito $D_0 = 1.000$ in una sequenza ammissibile di BB con debiti iniziali pari a $\mathbf{B} = (200, 300, 350, 150)$ relativi ai singoli piani di ammortamento e al piano di ammortamento consolidato in modalità BB. Tasso di interesse annuo $i = 10\%$ e $T = 4$ anni.

Si può notare che il piano consolidato in modalità BB (ottenuto assemblando un portafoglio di BB con valori facciali $\mathbf{B}$) presenta in output oltre al vettore delle quote $\mathbf{C}^B$, anche tutte le altre poste coincidenti con quelle del piano di ammortamento tradizionale, avente in input $Q_h = C_h^B$ per ogni $h < N$ (cfr. Tabella 2).

5.2 Scomposizione di un piano in una sequenza di piani ZCB

Sempre partendo dallo stesso piano tradizionale progressivo $\mathsf{A} = f(\mathbf{K}, \mathbf{Q})$ introdotto nel paragrafo 5.1, indichiamo ora per $J = 1, \ldots, N$ con ${}_JD_0 = Z_J > 0$ l'importo di un debito contratto all'epoca

0 ed estinguibile in modalità ZCB con il pagamento in unica soluzione, dopo J periodi, dell'importo $Z_J \cdot (1+i)^J$. Ciascun Z_J è il prezzo di emissione all'epoca 0 dello ZCB con scadenza dopo J periodi.

Definizione 5.5. *La scomposizione* $({}_1D_0, \ldots, {}_ND_0) = (Z_1, \ldots, Z_N) = \mathbf{Z}$ *è ammissibile se:*

$$\sum_{J=1}^{N} {}_JD_0 = \sum_{J=1}^{N} Z_J = D_0 \tag{5.6}$$

Indichiamo con la notazione $\mathbf{K}_J = (Z_J, J, i)$ la terna di input di un piano di ammortamento in modalità ZCB descritto dalla:

Definizione 5.6. ${}_JA^Z = ({}_J\mathbf{R}^Z, {}_J\mathbf{C}^Z, {}_J\mathbf{I}^Z, {}_J\mathbf{D}^Z) = f^Z(\mathbf{K}_J) \quad \forall \quad J = 1, \ldots, N$

Remark 9. *Tutti i vettori* $\mathbf{K}_J$ *sono univocamente individuati dato il rispettivo* Z_J. *Essi hanno in comune* i, *e differenti* J. *Ciascuna matrice* ${}_JA^Z$ *ha dimensione* Jx4.

Anche qui come nella precedente sezione 5.1 completeremo ogni matrice con l'aggiunta di $N - J$ righe tutte identicamente nulle, mantenendo ancora la notazione ${}_JA^Z$.

Definiamo poi piano di ammortamento consolidato in modalità ZCB della sequenza di debiti ottenuti da una scomposizione ammissibile secondo la (5.6) la matrice A^Z così definita:

Definizione 5.7. $\mathsf{A}^Z = \sum_{J=1}^{N} {}_JA^Z = \sum_{J=1}^{N} f^Z(\mathbf{K}_J)$

La matrice somma A^Z esprime le poste di un ipotetico piano di ammortamento consolidato ottenuto sommando le poste di tutti i singoli piani di ammortamento di ciascun ZCB.

È possibile ora provare il seguente risultato che consente di esprimere in formula chiusa le componenti della matrice del piano consolidato. Precisamente:

Risultato 9. *Per ogni* $h = 1, \ldots, N$ *si ha:*

$$C_h^Z = Z_h \cdot (1+i)^{h-1} - i \cdot (1+i)^{h-1} \cdot \sum_{J>h} Z_J \tag{5.7}$$

$$I_h^Z = i \cdot (1+i)^{h-1} \cdot \sum_{J=h}^{N} Z_J \tag{5.8}$$

$$R_h^Z = Z_h \cdot (1+i)^h \tag{5.9}$$

$$D_h^Z = (1+i)^h \cdot (D_0 - \sum_{J=1}^{h} Z_J) \tag{5.10}$$

Chiediamoci ora se esiste (almeno) un vettore $\mathbf{Z}$ tale che

$$\mathsf{A}^Z = \sum_{J=1}^{N} f^Z(\mathbf{K}_J) = \mathsf{A} = f(\mathbf{K}, \mathbf{Q}) \tag{5.11}$$

Sussiste in proposito il seguente fondamentale

Teorema 2. *Esiste un unico vettore $\mathbf{Z}$, cioè una unica scomposizione ammissibile $(Z_1, \ldots, Z_N)$, per cui è soddisfatta la (5.11).*

Dato $\mathsf{A} = f(\mathbf{K}, \mathbf{Q})$ esso è dato dalle:

$$Z_J = (1+i)^{-J} \cdot (Q_J + i \cdot (D_0 - \sum_{h<J} Q_h)) \ \forall\ J < N \tag{5.12}$$

$$Z_N = (1+i)^{-N+1} \cdot (D_0 - \sum_{J=1}^{N-1} Q_J) \tag{5.13}$$

o anche, in funzione della sequenza delle rate R_J dell'ammortamento tradizionale, da:

$$Z_J = R_J \cdot (1+i)^{-J} \ \forall\ J = 1, \ldots, N \tag{5.14}$$

Definizione 5.8. *Tale soluzione si dice scomposizione ZCB equivalente di un piano di ammortamento tradizionale progressivo del debito D_0.*

In definitiva il Teorema 2 afferma che un piano di ammortamento progressivo tradizionale di un debito D_0 con input $(\mathbf{K}, \mathbf{Q})$ coincide con il piano di ammortamento consolidato in modalità ZCB della sequenza di debiti ottenuti dalla particolare scomposizione in cui il valore di emissione di ciascun ZCB (con scadenza J) è funzione delle quote capitale in input del piano tradizionale secondo le (5.12) e (5.13).

Tale equivalenza consente di formulare il seguente importante corollario:

Corollario 5. *La presenza di interessi su interessi in ognuno dei piani di rimborso in modalità ZCB (cfr. Risultato 8) implica la presenza di interessi su interessi nel piano di ammortamento tradizionale equivalente.*

Data una scomposizione del debito D_0 in una sequenza di debiti Z_J, $J = 1, \ldots, N$, a ciascuno di essi si applica un piano di ammortamento in modalità ZCB; in tali piani, in forza del Risultato 8, vi è presenza di interessi su interessi. Scegliendo $Z_h = R_h \cdot (1+i)^{-h}$ (o $\mathbf{Z}$ come dalle (5.12) e (5.13)) ne seguirebbe la presenza di interessi su interessi nel piano tradizionale le cui poste riproducono quelle del piano consolidato dell'insieme degli ZCB.

Remark 10. *La sequenza dei valori iniziali dei singoli debiti non coincide più con la sequenza* $\mathbf{Q}$ *delle quote capitali, come invece accade nella modalità BB. Si confrontino la tabella 9 e la tabella 10 in cui si hanno rispettivamente* $\mathbf{B} = (200; 300; 350; 150)$ *e* $\mathbf{Z} = (272,73; 314,05; 300,53; 112,70)$*. Nell'esempio la differenza tra le due tabelle non evidenzia alcuna regolarità, regolarità che invece apparirà chiara nel caso dell'ammortamento tradizionale a rata costante (metodo francese) come vedremo nel paragrafo 6.*

Esempio 6. *Con riferimento ad una sequenza ammissibile di ZCB con debiti iniziali pari a* $\mathbf{Z} = (272,73; 314,05; 300,53; 112,70)$*, la cui somma è pari a* $D_0 = 1.000$ *Euro, le tabelle seguenti descrivono le matrici dei singoli piani di ammortamento (8(a)–8(d)) e la matrice consolidata (8(e)).*

(a) ${}_1A^Z$ con ${}_1D_0^Z = Z_1 = 300 \cdot (1,1)^{-1}$

h	${}_1R_h^Z$	${}_1C_h^Z$	${}_1I_h^Z$	${}_1D_h^Z$
0	0	0	0	272, 73
1	300, 00	272, 73	27, 27	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
Tot	300, 00	272, 73	27, 27	

(b) ${}_2A^Z$ con ${}_2D_0^Z = Z_2 = 380 \cdot (1,1)^{-2}$

h	${}_2R_h^Z$	${}_2C_h^Z$	${}_2I_h^Z$	${}_2D_h^Z$
0	0	0	0	314, 05
1	0	−31, 40	31, 40	345, 45
2	380, 00	345, 45	34, 55	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
Tot	380, 00	314, 05	65, 95	

(c) ${}_3A^Z$ con ${}_3D_0^Z = Z_3 = 400 \cdot (1,1)^{-3}$

h	${}_3R_h^Z$	${}_3C_h^Z$	${}_3I_h^Z$	${}_3D_h^Z$
0	0	0	0	300, 53
1	0	−30, 05	30, 05	330, 58
2	0	−33, 06	33, 06	363, 64
3	400	363, 64	36, 36	0
4	0	0	0	0
Tot	400, 00	300, 53	99, 47	

(d) ${}_4A^Z$ con ${}_4D_0^Z = Z_4 = 165 \cdot (1,1)^{-4}$

h	${}_4R_h^Z$	${}_4C_h^Z$	${}_4I_h^Z$	${}_4D_h^Z$
0	0	0	0	112, 70
1	0	−11, 27	11, 27	123, 97
2	0	−12, 40	12, 40	136, 36
3	0	−13, 64	13, 64	150, 00
4	165, 00	150, 00	15, 00	0
Tot	165, 00	112, 70	52, 30	

(e) $\mathsf{A}^Z = \sum_{J=1}^4 {}_JA^Z$ con $D_0 = \sum_{J=1}^4 {}_JD_0^Z = 1.000,00$

h	R_h^Z	C_h^Z	I_h^Z	D_h^Z
0	0	0	0	1.000, 00
1	300, 00	200, 00	100, 00	800, 00
2	380, 00	300, 00	80, 00	500, 00
3	400, 00	350, 00	50, 00	150, 00
4	165, 00	150, 00	15, 00	0
Tot	1.245, 00	1.000, 00	245, 00	

Tabella 10: Scomposizione di un debito $D_0 = 1.000$ in una sequenza ammissibile di ZCB con debiti finali pari a $(300; 380; 400; 165)$ relativi ai singoli piani di ammortamento e al piano di ammortamento consolidato in modalità ZCB. Tasso di interesse annuo $i = 10\%$ e $T = 4$ anni.

Si può notare che il piano consolidato in modalità ZCB, ottenuto assemblando un portafoglio di ZCB con valori di emissione $\mathbf{Z}$ dati delle (5.12) e (5.13) o dalla (5.14), produce in output il vettore $\mathbf{C}^Z$ delle quote ed è equivalente al piano di ammortamento tradizionale con in input il vettore $\mathbf{C}^Z$ stesso (cfr. Tab. 2). Si segnala inoltre che i singoli piani evidenziano con segno negativo le quote capitale relative a ogni annualità precedente alla scadenza del bond. Esse corrispondono all'accensione di nuovi debiti derivanti dal mancato pagamento degli interessi maturati. Si evidenzia per questa via che, nel piano consolidato, ogni quota capitale C_h^Z è il risultato di due contributi: uno positivo pari a $Z_h \cdot (1+i)^{h-1}$, quota capitale dello ZCB con scadenza h che chiude il singolo piano e l'altro negativo pari a $-i \cdot \sum_{J=h+1}^{T} Z_J \cdot (1+i)^{h-1}$, somma dell'opposto delle quote interesse maturate, ma non ancora pagate all'epoca h (cfr. (5.7)).

6 Casi particolari

Riassumiamo i risultati ottenuti nel paragrafo 5.

Dato un ammortamento progressivo tradizionale $\mathsf{A} = f(\mathbf{K}, \mathbf{Q})$ con $\mathbf{K} = (D_0, N, i)$ esiste una scomposizione del debito D_0 in N debiti $\mathbf{B} = (B1, \ldots, B_N)$ tale che il piano di ammortamento consolidato in versione BB di tali debiti coincide con A. Tale scomposizione soddisfa $\mathbf{B} = (\mathbf{Q}, C_N)$. Il valore facciale di ciascun BB coincide con la corrispondente quota capitale del piano tradizionale.

Parallelamente esiste una scomposizione del debito D_0 in N debiti $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_N)$ tale che il piano di ammortamento consolidato in versione ZCB di tali debiti coincide con A. Tale scomposizione soddisfa le (5.12)−(5.13) o alternativamente, la (5.14).

In generale risulta $\mathbf{B} \neq \mathbf{Z}$; le due scomposizioni sono diverse anche se $\sum_{J=1}^{N} B_J = \sum_{J=1}^{N} Z_J = D_0$. Per quanto di nostra conoscenza non ci consta che in letteratura si sia posta adeguata attenzione a tale differenza. Con i dati dell'esempio 1, le differenze $Z_J - B_J$ sono riassunte dalla seguente sequenza (cfr. tabelle 9 e 10): $72,73$; $14,05$; $-49,37$; $-37,30$.

Non è immediato intendere come si comporti la differenza $\Delta(J) = Z_J - B_J$ in funzione di J, particolarmente quando la sequenza delle quote capitale è irregolare.

Vedremo però che interessanti regolarità nel comportamento della funzione Δ si ritrovano nei casi particolari di costanza delle quote capitale o rispettivamente delle rate.

6.1 L'andamento della funzione differenza nel caso dell'ammortamento tradizionale con quota capitale costante

Con quote capitale costanti $C_J = Q_J = (D_0/N)$ si ha per la scomposizione equivalente in modalità BB:

$$B_J = (D_0/N) \quad J = 1, \ldots, N \tag{6.1}$$

Per la scomposizione in modalità ZCB è invece:

$$R_J = (D_0/N) \cdot (1 + i \cdot (N - J + 1)) \quad J = 1, \ldots, N \tag{6.2}$$

e quindi

$$Z_J = (D_0/N) \cdot (1 + i \cdot (N - J + 1)) \cdot (1 + i)^{-J} \quad J = 1, \ldots, N \tag{6.3}$$

Remark 11. *Si noti nella (6.3) un curioso duplice effetto di trasformazione della quota capitale (costante) nel debito Z_J. Si ha una capitalizzazione in regime semplice (al tasso i) per $N-(J-1)$ periodi, "compensata" da una attualizzazione in regime composto (allo stesso tasso) per J periodi.*

A conti fatti la funzione differenza è:

$$\Delta_J = Z_J - B_J = (D_0/N) \cdot [(1 + i \cdot (N - J + 1)) \cdot (1+i)^{-J} - 1] \;\; J = 1, \ldots, N \tag{6.4}$$

La funzione Δ è il prodotto della costante (D_0/N) per la funzione $\Theta_J(N,i) = [(1+i\cdot(N-J+1))\cdot(1+i)^{-J} - 1]$ il cui andamento in funzione di J variabile da 1 a N può essere agevolmente tabellato per varie combinazioni di coppie (N,i). Qui riportiamo la tabella dei valori per la coppia $N = 4$, $i = 10\%$ comune a tutti gli esempi del lavoro.

J	$\Theta_J(N,i)$	Δ_J	Z_J	B_J	$(Z_J - B_J)$
1	$0,273$	$68,182$	$318,182$	$250,000$	$68,182$
2	$0,074$	$18,595$	$268,595$	$250,000$	$18,595$
3	$-0,098$	$-24,606$	$225,394$	$250,000$	$-24,606$
4	$-0,249$	$-62,171$	$187,829$	$250,000$	$-62,171$

Tabella 11: Andamento della funzione $\Delta(J)$ per la combinazione $(N = 4, i = 10\%)$.

6.2 L'andamento della funzione differenza nel caso dell'ammortamento tradizionale con rata costante

Nei piani di ammortamento tradizionale a rata costante si sfrutta un ben noto risultato: la sequenza delle quote capitale è crescente in progressione geometrica di ragione $(1+i)$. Formalmente:

$$C_{J+1} = C_J \cdot (1+i) \;\; J < N \tag{6.5}$$

La generica C_J può essere espressa in funzione di C_1 secondo la:

$$C_J = C_1 \cdot (1+i)^{J-1} \;\; J = 1, \ldots, N \tag{6.6}$$

Tenendo conto che la somma di tutte le quote capitale deve eguagliare D_0 se ne deduce la:

$$D_0 = \sum_{J=1}^{N} C_1 \cdot (1+i)^{J-1} \tag{6.7}$$

da cui immediatamente:

$$C_1 = \frac{D_0}{\sum_{J=1}^{N} \cdot (1+i)^{J-1}} \tag{6.8}$$

La (6.8) consente di esprimere la prima quota capitale (e ovviamente anche tutte le altre) di un ammortamento tradizionale a rata costante in funzione della terna degli input $\mathbf{K} = (D_0, N, i)$. Si conferma con ciò che la sequenza delle quote capitale è output obbligato di un ammortamento tradizionale a rata costante.

Ricordando il Teorema 1 la scomposizione equivalente in modalità BB di un piano di ammortamento tradizionale a rata costante è allora data da:

$$B_J = C_J = \frac{D_0}{\sum_{J=1}^{N} \cdot (1+i)^{J-1}} \cdot (1+i)^{J-1} \tag{6.9}$$

Passando alla scomposizione equivalente in modalità ZCB basta ricordare che la relazione fra il generico debito della sequenza equivalente e la rata costante deve essere:

$$Z_J = R_J \cdot (1+i)^{-J} = R.(1+i)^{-J} \;\; J = 1, \ldots, N \tag{6.10}$$

La sequenza dei debiti equivalenti è dunque decrescente nella stessa progressione geometrica (di ragione $(1+i)$) della sequenza crescente delle quote capitale. Dato che le due sequenze $\mathbf{B}$ e $\mathbf{Z}$ hanno la stessa somma, se ne deduce immediatamente il fondamentale

Risultato 10.

$$Z_J = C_{N-J+1} \;\; J = 1, \ldots, N \tag{6.11}$$

Verbalmente: le due sequenze sono le stesse ma in ordine inverso.

Ne segue dalla (6.9) il

Corollario 6.

$$Z_J = B_{N-J+1} \;\; J = 1, \ldots, N \tag{6.12}$$

ovvero

$$B_J = Z_{N-J+1} \;\; J = 1, \ldots, N \tag{6.13}$$

e immediatamente per la funzione

$$\Delta(J) = Z_J - B_J = Z_J - Z_{N-J+1} \;\; J = 1, \ldots, N \tag{6.14}$$

o anche

$$\Delta(J) = B_{N-J+1} - B_J = B_1 \cdot ((1+i)^{N-J} - (1+i)^{J-1}) \;\; J = 1, \ldots, N \tag{6.15}$$

$\Delta(J)$ è dunque una funzione decrescente di J che si annulla per $J^* = (N+1)/2$ se N dispari ed è perfettamente simmetrica rispetto a J^*. Indichiamo con $\Psi_J(N,i) = ((1+i)^{N-J} - (1+i)^{J-1})$ tale funzione e illustriamo l'andamento di $\Delta(J)$ per la combinazione $(N = 4, i = 10\%)$ nella tabella seguente.

J	$\Psi_J(N,i)$	Δ_J	Z_J	B_J	$(Z_J - B_J)$
1	0,331	71,321	286,792	215,471	71,321
2	0,110	23,702	260,720	237,018	23,702
3	−0,110	−23,702	237,018	260,720	−23,702
4	−0,331	−71,321	215,471	286,792	−71,321

Tabella 12: Andamento della funzione $\Delta(J)$ per la combinazione $(N = 4, i = 10\%)$.

Ne conseguirebbero interessanti riflessioni sulle scomposizioni equivalenti nelle due modalità che qui non abbiamo lo spazio per approfondire.

Esempio 7. *Si consideri un debito $D_0 = 1.000$ da ammortizzarsi con rata annua costante $R = 315,47$ Euro, scadenza $T = 4$ e tasso di interesse annuo $i = 10\%$.*

h	R_h	C_h	I_h	D_h
0	0	0	0	1.000,00
1	315,47	215,47	100,00	784,53
2	315,47	237,02	78,45	547,51
3	315,47	260,72	54,75	286,79
4	315,47	286,79	28,68	0
Tot	1.261,88	1.000,00	261,88	

Tabella 13: Piano di ammortamento tradizionale di un debito $D_0 = 1.000$ con rata annua costante $R = 315,47$ Euro, scadenza $T = 4$ e tasso di interesse annuo $i = 10\%$.

Esempio 8. *Con riferimento ad una sequenza ammissibile di BB con debiti iniziali pari a* $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ *come nell'esempio 7, la cui somma è pari a $D_0 = 1.000$ Euro, le tabelle seguenti descrivono le matrici dei singoli piani di ammortamento (12(a)–12(d)) e la matrice consolidata (12(e)).*

(a) ${}_1A^B$ con ${}_1D_0 = B_1 = 215,47$

h	${}_1R_h^B$	${}_1C_h^B$	${}_1I_h^B$	${}_1D_h^B$
0	0	0	0	215,47
1	237,02	215,47	21,55	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
Tot	237,02	215,47	21,55	

(b) ${}_2A^B$ con ${}_2D_0 = B_2 = 237,02$

h	${}_2R_h^B$	${}_2C_h^B$	${}_2I_h^B$	${}_2D_h^B$
0	0	0	0	237,02
1	23,70	0,00	23,70	237,02
2	260,72	237,02	23,70	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
Tot	284,42	237,02	47,40	

(c) ${}_3A^B$ con ${}_3D_0 = B_3 = 260,72$

h	${}_3R_h^B$	${}_3C_h^B$	${}_3I_h^B$	${}_3D_h^B$
0	0	0	0	260,72
1	26,07	0,00	26,07	260,72
2	26,07	0,00	26,07	260,72
3	286,79	260,72	26,07	0
4	0	0	0	0
Tot	338,94	260,72	78,22	

(d) ${}_4A^B$ con ${}_4D_0 = B_4 = 286,79$

h	${}_4R_h^B$	${}_4C_h^B$	${}_4I_h^B$	${}_4D_h^B$
0	0	0	0	286,79
1	28,68	0,00	28,68	286,79
2	28,68	0,00	28,68	286,79
3	28,68	0,00	28,68	286,79
4	315,47	286,79	28,68	0
Tot	401,51	286,79	114,72	

(e) $\mathsf{A}^B = \sum_{J=1}^4 {}_JA^B$ con $D_0 = \sum_{J=1}^4 {}_JD_0^B = 1.000,00$

h	R_h^B	C_h^B	I_h^B	D_h^B
0	0	0	0	1.000,00
1	315,47	215,47	100,00	784,53
2	315,47	237,02	78,45	547,51
3	315,47	260,72	54,75	286,79
4	315,47	286,79	28,68	0
Tot	1.261,88	1.000,00	261,88	

Tabella 14: Scomposizione di un debito $D_0 = 1.000$ in una sequenza ammissibile di BB con debiti iniziali pari a $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ relativi ai singoli piani di ammortamento e al piano di ammortamento consolidato in modalità BB. Tasso di interesse annuo $i = 10\%$ e $T = 4$ anni.

Come si vede, il piano consolidato a rata costante in modalità BB equivale al piano tradizionale progressivo a rata costante (cfr. Tab. 13).

Esempio 9. *Con riferimento ad una sequenza ammissibile di ZCB con debiti iniziali pari a con debiti $Z_J = C_{N-J+1}$ dall'esempio 7, la cui somma è pari a $D_0 = 1.000$ Euro, le tabelle seguenti descrivono le matrici dei singoli piani di ammortamento (11(a)–11(d)) e la matrice consolidata (11(e)).*

(a) ${}_1A^Z$ con ${}_1D_0^Z = Z_1 = C_4$

h	${}_1R_h^Z$	${}_1C_h^Z$	${}_1I_h^Z$	${}_1D_h^Z$
0	0	0	0	286, 79
1	315, 47	286, 79	28, 68	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
Tot	315, 47	286, 79	28, 68	

(b) ${}_2A^Z$ con ${}_2D_0^Z = Z_2 = C_3$

h	${}_2R_h^Z$	${}_2C_h^Z$	${}_2I_h^Z$	${}_2D_h^Z$
0	0	0	0	260, 72
1	0	−26, 07	26, 07	286, 79
2	315, 47	286, 79	28, 68	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
Tot	315, 47	260, 72	54, 75	

(c) ${}_3A^Z$ con ${}_3D_0^Z = Z_3 = C_2$

h	${}_3R_h^Z$	${}_3C_h^Z$	${}_3I_h^Z$	${}_3D_h^Z$
0	0	0	0	237, 02
1	0	−23, 70	23, 70	260, 72
2	0	−26, 07	26, 07	286, 79
3	315, 47	286, 79	28, 68	0
4	0	0	0	0
Tot	315, 47	237, 02	78, 45	

(d) ${}_4A^Z$ con ${}_4D_0^Z = Z_4 = C_1$

h	${}_4R_h^Z$	${}_4C_h^Z$	${}_4I_h^Z$	${}_4D_h^Z$
0	0	0	0	215, 47
1	0	−21, 55	21, 55	237, 02
2	0	−23, 70	23, 70	260, 72
3	0	−26, 07	26, 07	286, 79
4	315, 47	286, 79	28, 68	0
Tot	315, 47	215, 47	100, 00	

(e) $\mathsf{A}^Z = \sum_{J=1}^4 {}_JA^Z$ con $D_0 = \sum_{J=1}^4 {}_JD_0^Z = 1.000,00$

h	R_h^Z	C_h^Z	I_h^Z	D_h^Z
0	0	0	0	1.000, 00
1	315, 47	215, 47	100, 00	784, 53
2	315, 47	237, 02	78, 45	547, 51
3	315, 47	260, 72	54, 75	286, 79
4	315, 47	286, 79	28, 68	0
Tot	1.261, 88	1.000, 00	261, 88	

Tabella 15: Scomposizione di un debito $D_0 = 1.000$ in una sequenza ammissibile di ZCB con debiti $Z_J = C_{N-J+1}$ relativi ai singoli piani di ammortamento e al piano di ammortamento consolidato in modalità ZCB. Tasso di interesse annuo $i = 10\%$ e $T = 4$ anni.

Valgono ancora le medesime considerazioni sull'equivalenza tra piano tradizionale e piano consolidato viste per la modalità BB con l'ulteriore precisazione che mediante la scomposizione del debito in ZCB, si possono apprezzare le accensioni di nuovi finanziamenti che diversamente, nel piano consolidato, non emergerebbero.

7 Osservazioni sul paradosso presenza/assenza di interessi su interessi

Ritorniamo alla questione della presenza o assenza di interessi su interessi in un piano di ammortamento tradizionale progressivo. Sul punto i Cor. 4 e 5 ci consegnano una conclusione apparentemente paradossale.

Dato un piano di ammortamento tradizionale di un certo debito esistono due distinte scomposizioni equivalenti di tale debito. Una scomposizione è legata alla modalità di rimborso BB, l'altra alla modalità ZCB. Ambedue le scomposizioni godono della seguente proprietà: il piano consolidato di rimborso ottenuto dalla somma dei singoli piani di rimborso coerenti con la rispettiva modalità coincide con il piano tradizionale. La coincidenza suggerisce di applicare al piano tradizionale le proprietà di presenza (modalità ZCB) o assenza (modalità BB) di interessi su interessi, caratteristiche delle modalità elementari di rimborso. Di qui il paradosso: con la scomposizione equivalente in modalità BB (rispettivamente ZCB) si ha un piano di ammortamento tradizionale caratterizzato da assenza (rispettivamente presenza) di interessi su interessi. Nel piano tradizionale tale risultato sembra così dipendere dalla modalità elementare scelta per il rimborso di ciascun debito (che determina univocamente la scomposizione del debito in una sequenza equivalente di debiti).

Il paradosso ha rilevanti implicazioni sia negli aspetti pratici in relazione al divieto di anatocismo presente nell'ordinamento italiano, ma anche dal punto di vista teorico. Esso sembra aprire la porta ad un insanabile conflitto fra le due interpretazioni.

Va segnalato che i fautori (Fersini-Olivieri, [5]; Marcelli [6], Annibali *et al*, [1]) della tesi della presenza di interessi su interessi assumono come punto di partenza le conclusioni relative alla modalità ZCB. Per risolvere poi il puzzle della contraddizione con l'assenza di tali interessi nei piani in modalità BB utilizzano una sorta di proprietà transitiva. Se dall'equivalenza con la sequenza degli ZCB si è dedotta la presenza di interessi su interessi nel piano tradizionale, essa deve logicamente essere presente anche in ciascun piano di rimborso della sequenza dei BB. Ivi l'assenza deve essere soltanto apparente: nella modalità BB la presenza non sarebbe palese (come in quella ZCB) ma occulta. Al tirar delle somme essa viene presentata come conseguenza necessaria, anche se non immediatamente percepibile, del regime dell'interesse composto.

Più formalmente, la cedola costante I^* finanziariamente equivalente in regime di capitalizzazione composta si ottiene come soluzione nell'incognita I dell'equazione:

$$D_0 \cdot (1+i)^N = D_0 + I \cdot \frac{(1+i)^N - 1}{i}$$

La soluzione unica di tale equazione è $I^* = i \cdot D_0$.

Essa è palesemente influenzata dalla presenza a primo membro di interessi su interessi generati dal debito D_0 per l'intera durata dell'operazione. Per intendere la portata di tale fenomeno, confrontiamo la soluzione I^* con la soluzione I^{**} dello stesso problema in regime di capitalizzazione semplice, a parità degli input $\mathbf{K}$.

La cedola I^{**} sarebbe allora soluzione della:

$$D_0 \cdot (1 + i \cdot N) = D_0 + I^{**} \cdot \sum_{J=1}^{N} (1 + i \cdot (N - J))$$

la cui soluzione è:

$$I^{**} = \frac{D_0 \cdot i \cdot N}{\sum_{J=1}^{N} (1 + i \cdot (N - J))}$$

A conti fatti, $I^{**} = I^* \cdot \Phi(N, i)$ con $\Phi(N, i)$, fattore di correzione, pari a:

$$\Phi(N, i) = \frac{2}{2 + i \cdot (N - 1)}$$

$\Phi(N, i)$ è ovviamente minore di 1 ed è funzione decrescente tanto della durata N che del tasso di interesse i.

Con i dati del nostro esempio, $\mathbf{K} = (1.000; 4; 10\%)$ risulta $\Phi(N, i) = \dfrac{2}{2,3} = 0,8696$. Tenuto conto che $I^* = 10\% 1.000 = 100$, risulta $I^{**} = 86,96$; sarebbe così precisata la portata della presenza di interessi su interessi implicita nella modalità elementare BB. Più esplicitamente, il fattore di correzione dà un'idea dell'aggravio nella cedola derivante dalla produzione implicita di interessi su interessi in questa modalità.

Per motivare in maniera più incisiva tale impostazione bisogna sostenere che in modalità BB le cedole I^* non sarebbero rappresentative di interessi esigibili alle varie scadenze $h = 1, \ldots, N$ in cui vengono pagati, ma solo anticipazioni, concordate contrattualmente, dell'importo totale degli interessi maturati e però esigibili solo alla scadenza N.

Giova però ribadire che la fondatezza di tale argomentazione è basata sulla premessa che gli interessi di ciascun BB, pur maturando con cadenza periodale (nel nostro esempio annua), non siano esigibili fino alla scadenza del BB stesso.

Ove invece essi fossero esigibili man mano che maturano, il loro pagamento con le cedole del BB a cadenza periodale non costituirebbe affatto anticipazione di pagamenti dovuti solo a scadenza.

Il venir meno della premessa farebbe così cadere la conclusione sulla presenza implicita di interessi su interessi nella modalità BB; il paradosso rimarrebbe apparentemente irrisolto.

Vedremo invece che proprio la premessa utilizzata per invocare la presenza (implicita) di interessi su interessi nella modalità BB, può essere sfruttata (ribaltandola) per risolvere il paradosso e dedurre l'assenza di interessi su interessi anche nella modalità ZCB.

Si tratta appunto di ribaltare la premessa ipotizzando che gli interessi via via maturati, siano esigibili con cadenza periodale, non solo nella modalità BB ma anche nella ZCB. L'accordo contrattuale per il pagamento degli stessi in unica soluzione a scadenza non modifica la cadenza della loro esigibilità. Il loro mancato pagamento (pur contrattualmente accettato) suggerisce di considerare gli interessi scaduti e non pagati come nuovo finanziamento. Formalmente gli interessi maturati e non pagati si trasformano in debito aggiuntivo e in tale veste (e non già nella originaria veste di interessi) generano altri interessi. Questo e non altro è algebricamente descritto nelle tabelle che sintetizzano ciascuno dei piani di rimborso dei singoli debiti in modalità ZCB.

Tirando le somme, questa impostazione consente di escludere la presenza di interessi su interessi nella modalità ZCB risolvendo in tal modo il paradosso in favore dell'assenza di interessi su interessi in ambedue le modalità di rimborso.

8 Un confronto tra le due correnti di pensiero

Dedicheremo questa sezione al confronto tra le diverse possibili conclusioni sulla presenza o assenza di produzione interessi su interessi nell'ammortamento progressivo tradizionale.

Presentiamo dapprima un'analisi delle modalità elementari.

Ai fini dell'analisi hanno rilevanza logica tanto la cadenza di esigibilità, E, degli interessi che la cadenza dei pagamenti, P degli stessi. Ambedue possono essere periodiche (simbolo J) o concentrate alla scadenza finale (simbolo N). Per quanto riguarda la cadenza dei pagamenti, al simbolo J è ovviamente associabile la modalità BB e al simbolo N la modalità ZCB. Fin qui nulla di nuovo rispetto alla letteratura esistente. Originale invece, per quanto ci consta, la distinzione sulla cadenza dell'esigibilità, non necessariamente coincidente nella nostra impostazione con quella dei pagamenti.

Coerentemente con tale approccio, la prima colonna della tabella 16 descrive le quattro possibili combinazioni delle due cadenze. Ad esempio, la combinazione $(J;J)$ indica che gli interessi sono esigibili con cadenza periodica che coincide con la cadenza del pagamento degli stessi.

$(E;P)$	BB	ZCB
$(J;J)$	NO	–
$(J;N)$	–	NO / Incomp*
$(N;J)$	SI implicita	–
$(N;N)$	–	SI

Tabella 16: Rimborso (ammortamento) elementare. SI, presenza interessi su interessi; NO, assenza. E, Esigibilità interessi; P, Cadenza pagamenti. J = periodica; N = a scadenza.

La coerenza fra le due cadenze E e P (righe 1 e 4) produce risposte immediate e pacificamente condivise. Più precisamente, nella combinazione $(J;J)$, gli interessi maturati ed esigibili con cadenza periodica sono pagati alla data di esigibilità. Essi non producono altri interessi e dunque non vi sono interessi su interessi (NO). Nella combinazione $(N;N)$, gli interessi maturati periodicamente, ma esigibili solo a scadenza, producono (in regime di interesse composto) interessi. Dunque, sia algebricamente che giuridicamente vi sono interessi su interessi (SI).

La situazione è più complessa nei casi di non coincidenza fra le due cadenze, ovvero nelle combinazioni $(J;N)$ (in modalità ZCB) o rispettivamente $(N;J)$ (in modalità BB).

Nella combinazione $(J;N)$, gli interessi maturano e sono esigibili con cadenza periodica. Per accordo contrattuale essi non vengono pagati fino alla scadenza finale. Algebricamente dunque essi producono (in regime composto) interessi; finanziariamente sono interessi esigibili e non pagati che divengono, dalla data di esigibilità, debito aggiuntivo. La produzione di interessi si deve considerare come produzione di interessi su capitale. La risposta sarebbe allora NO.

Sempre in questa combinazione, una visione diversa potrebbe eccepire che l'art. 1283 C.C. proibisce in ogni caso la produzione di interessi su interessi, a prescindere dalla loro esigibilità. In questo caso, vi sono solo due alternative: o gli interessi vengono pagati immediatamente (e allora si torna alla combinazione $(J;J)$) o, in caso contrario, perdono l'immediata esigibilità (e ci si trasferisce alla combinazione $(N; N)$). In base a questa visione l'unica modalità compatibile con tale interpretazione del dettame codicistico sarebbe quella BB. La seconda riga semplicemente sarebbe incompatibile secondo tale interpretazione del dettame dell'art. 1283 C.C. Segnaliamo con un asterisco questa interpretazione.

Nella combinazione $(N; J)$, gli interessi maturano anno per anno ma sono esigibili solo alla scadenza finale. Per accordo contrattuale essi però vengono pagati con cadenza periodica. Trattasi di pagamenti anticipati rispetto alla data di esigibilità, il cui importo (costante) è finanziariamente equivalente all'importo dovuto a scadenza. In regime di interesse composto tale importo incorpora la produzione di interessi su interessi (si veda il commento alla combinazione $(N; N)$). In definitiva nella combinazione $(J; N)$ la produzione di interessi su interessi, pur non evidenziata algebricamente, è conseguenza implicita del regime composto.

Riassumendo, la risposta al quesito sulla produzione di interessi su interessi dipende dalla cadenza di esigibilità degli stessi, E e non dalla cadenza dei pagamenti, P: con $E = J$ abbiamo NO; con $E = N$ la risposta è SI. Sintetizzando, il driver giuridico (esigibilità degli interessi) prevale su quello matematico (modalità BB o ZCB del loro pagamento).

Passando all'ammortamento progressivo tradizionale, dobbiamo tener conto che esso può essere interpretato sia come combinazione di debiti rimborsabili con una sequenza di BB (necessariamente associati alla $P = J$ per ognuno di essi) che come combinazione di debiti rimborsabili con una sequenza di ZCB (necessariamente associati alla $P = N$ per ognuno di essi). Ci si riduce dunque a due sole righe (una per ogni E) a ciascuna delle quali sono associate due possibili combinazioni (interpretazioni): BB ovvero $P = J$, oppure ZCB ovvero $P = N$.

Logicamente ognuna delle due combinazioni deve ereditare le proprietà (SI o NO) di produzione di interessi su interessi della corrispondente modalità elementare. Ne consegue banalmente la seguente:

	Interpretazione	
E	BB, $P = J$	ZCB, $P = N$
J	NO	NO*
N	SI implicita	SI

Tabella 17: Ammortamento progressivo. SI, presenza interessi su interessi; NO, assenza. E, Esigibilità interessi; P, Cadenza pagamenti. J = periodica; N = a scadenza.

Non vi è necessità di commentare le motivazioni che combaciano perfettamente con quelle discusse nell'analisi della Tabella 16, salvo eventualmente per quanto concerne l'asterisco in corrispondenza alla combinazione $E = J$, interpretazione ZCB. Questa modalità contrattuale potrebbe essere vietata, ma ciò non pregiudicherebbe la sopravvivenza dell'interpretazione BB, che anzi risulterebbe l'unica ammissibile con inequivocabile risposta NO.

Concludiamo il paragrafo con una sottolineatura a questo punto ovvia ma non superflua: i risultati ottenuti valgono per ogni possibile declinazione dell'ammortamento progressivo tradizionale, dunque anche per il cosiddetto ammortamento francese a rata costante.

9 Commento conclusivo

In questo lavoro abbiamo analizzato la spinosa e dibattuta questione della presenza o assenza di interessi su interessi nell'ammortamento progressivo tradizionale.

Abbiamo trovato conveniente introdurre una trattazione, per certi versi innovativa, dell'ammortamento tradizionale considerato come l'esito (output) A dell'applicazione di regole di calcolo sintetizzate dalla notazione f a un conveniente insieme di input $\mathbf{X}$. In tale cornice abbiamo inquadrato anche le modalità elementari note con gli acronimi BB e rispettivamente ZCB, riassumendone le caratteristiche di assenza (BB) o rispettivamente presenza (ZCB) di interessi su interessi ben note in letteratura.

Abbiamo poi analizzato in dettaglio la tecnica della scomposizione di un debito in una sequenza di debiti equivalenti nelle due modalità BB e ZCB, evidenziandone alcune proprietà e definendo in modo formale il piano di ammortamento consolidato coincidente con un ammortamento progressivo tradizionale. Si è in particolare sottolineato che le scomposizioni equivalenti sono diverse nei due casi. Un paragrafo è stato dedicato allo studio delle scomposizioni equivalenti nei casi di particolare rilevanza pratica dell'ammortamento tradizionale a rata costante e rispettivamente a quota capitale costante, evidenziandone interessanti regolarità nella differenza fra le due scomposizioni in modalità ZCB e BB.

A conclusione di questa parte, che potremmo definire preliminare, del lavoro abbiamo evidenziato un paradosso che caratterizza, allo stato della ricerca, le scomposizioni equivalenti. Recependo i risultati trovati per le rispettive modalità elementari, un ammortamento progressivo tradizionale registrerebbe sia assenza (in corrispondenza di una scomposizione equivalente BB) che presenza (in corrispondenza di una scomposizione equivalente ZCB) di interessi su interessi.

Alcuni recenti contributi apparsi in letteratura hanno proposto di risolvere il paradosso mettendo in evidenza nella scomposizione BB una presenza implicita di tali interessi. La tesi ha fondamento se si ritiene che i pagamenti delle cedole di un BB siano anticipazioni di interessi esigibili giuridicamente solo alla scadenza. Trattasi a nostro avviso di una argomentazione la cui fondatezza deve essere vagliata da giuristi. Per conto nostro abbiamo preso spunto da questa impostazione ribaltandola nel suo contrario: in ogni prestito gli interessi sarebbero esigibili con cadenza periodale quale che sia la modalità contrattuale scelta per il rimborso. In tal caso il paradosso viene risolto in senso opposto. Non vi sarebbero interessi su interessi né nella scomposizione BB né in quella ZCB; in questa ultima in particolare gli interessi non pagati si trasformerebbero ad ogni cadenza periodale in debito aggiuntivo (nuovo capitale) e gli interessi generati da tale debito si dovrebbero interpretare non come interessi su interessi, ma come interessi su capitale.

Per concludere, la presenza o assenza di interessi su interessi non dipende a nostro avviso dal tipo di scomposizione, ma dalla premessa giuridica sulla cadenza di esigibilità degli interessi. A ben vedere il compito del matematico non è quello di sentenziare su questo punto ma solo quello di chiarire limpidamente gli sviluppi matematici coerenti con tali condizioni giuridiche.

Riferimenti bibliografici

[1] Annibali A. and Barracchini C. and Annibali A., Anatocismo e ammortamento di mutui alla francese in capitalizzazione semplice, 2016, Createspace Independent Pub

[2] Bortot P. and Magnani U. and Olivieri G. and Torrigiani M., Matematica Finanziaria, Monduzzi Ed., 1993

[3] Cacciafesta F., A proposito dell'articolo Sull'anatocismo nell'ammortamento francese, Banche & Banchieri, 2015, 4, 528-533

[4] Cacciafesta F., Lezioni di matematica finanziaria classica e moderna, Giappichelli Ed., 2001

[5] Fersini P. and Olivieri G., Sull'anatocismo nell'ammortamento francese, Banche & Banchieri, 2015, 2, 134-171

[6] Marcelli R. and Pastore A.G. and Valente A., Sull'ammortamento alla francese, Diritto della banca e del mercato finanziario, 2019, 2, Ed. Pacini Giuridica

[7] Mari C. and Aretusi G., Sull'esistenza e unicità dell'ammortamento dei prestiti in regime lineare, Il risparmio, 2018, 1, 25-45 1, 7

5