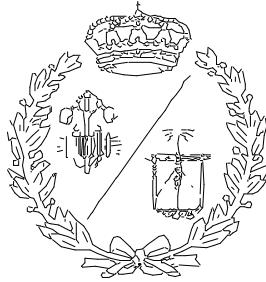


**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIÓN**

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA



Trabajo Fin de Grado

**RESISTENCIA MECÁNICA DE LOS
DEVANADOS DE TRANSFORMADORES DE
POTENCIA FRENTE A LAS CORRIENTES DE
CORTOCIRCUITO**

**(Mechanical Strength of Power Transformers
Windings Against Fault Currents)**

Para acceder al Título de

**GRADUADO EN INGENIERÍA EN
TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES**

Autor: Alberto Rodríguez Lostal

Julio - 2019

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	5
2. ESTADO DEL ARTE	9
3. ALCANCE Y DEFINICIÓN DEL PROYECTO	13
4. TRANSFORMADORES DE POTENCIA	14
4.1. IMPORTANCIA DEL TRANSFORMADOR, ¿QUÉ SON Y PARA QUÉ LOS UTILIZAMOS?.....	14
4.2. PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DE UN TRANSFORMADOR.....	18
4.3. GEOMETRÍA DEL TRANSFORMADOR.....	19
4.3.1. Tipos de transformadores según su núcleo.....	22
4.3.2. Tipos de transformadores según sus devanados.....	23
4.4. TRANSFORMADOR REAL.....	24
4.4.1. Pérdidas	25
4.4.2. Circuito eléctrico equivalente	27
4.4.3. Rendimiento de un transformador	31
4.4.4. Conexiones de los transformadores.....	33
5. SOBRECARGA EN TRANSFORMADORES	34
5.1. SOBRECARGA DE LARGA DURACIÓN	34
5.2. CORTA DURACIÓN – CORRIENTES DE CORTOCIRCUITO..	34
5.2.1. Corriente Simétrica de Cortocircuito.....	34
5.2.2. Régimen Transitorio de Corrientes de Cortocircuito... 	36
5.2.3. Normativa aplicable al cálculo de corrientes de cortocircuito	40
6. DISTRIBUCIÓN DE CARGAS Y DEFORMACIÓN DE LOS DEVANADOS.....	44
6.1. FUERZA EJERCIDA SOBRE LOS DEVANDOS (LEY DE LAPLACE)	44

6.2. DISTRIBUCIÓN Y CÁLCULOS DE CARGAS RADIALES Y TENSIONES EN EL CTC (MODELO ANALÍTICO)	46
6.2.1. Carga de Pandeo	49
6.2.2. Pandeo Libre y Pandeo Restringido	50
6.2.3. Flexión Radial (Pandeo No Lineal)	51
6.3. DISTRIBUCIÓN Y CÁLCULOS DE CARGAS AXIALES Y TENSIONES EN EL CTC (MODELO ANALÍTICO)	53
6.3.1. Caso de 'viga' bi-empotrada	54
6.3.2. Caso de 'viga' con dos apoyos fijos	59
6.3.3. Suma de esfuerzos	61
7. HERRAMIENTAS DEL CÁLCULO	62
7.1. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	62
7.2. COMSOL MULTIPHYSICS	64
8. TRANSFORMADOR DEL ESTUDIO	67
8.1. PARÁMETROS DE DISEÑO DEL TRANSFORMADOR	70
8.1.1. El núcleo	70
8.1.2. Los devanados	71
8.1.3. Sujeciones de los devanados	74
8.2. CÁLCULOS SOBRE LAS CARACTERÍSTICAS DEL TRANSFORMADOR DEL ESTUDIO	76
9. MODELOS DE SIMULACIÓN	79
9.1. MODELO 2D AXISIMÉTRICO	79
9.1.1. Geometría y distribución del modelo	80
9.1.2. Materiales	84
9.1.3. Físicas del Modelo. Corrientes y Distribución del campo magnético.	85
9.1.4. Malla	89
9.2. ESTUDIOS DENTRO DEL MODELO 2D	91
9.2.1. Estudio Estático	91

9.2.2. Estudio temporal	92
9.3. MODELO EN 3 DIMENSIONES	103
9.3.1. Datos de fuerza importados de las simulaciones del modelo 2D	107
9.3.2. Configuración del modelo	109
10. RESULTADOS	114
10.1. CARGAS EN SENTIDO RADIAL	116
10.1.1. Modelo con 4 Columnas.....	116
10.1.2. Modelo con 3 columnas	131
10.1.3. Modelo con 2 columnas	134
10.2. CARGAS EN SENTIDO AXIAL.....	136
10.2.1. Modelo con 2 columnas	136
10.3. SUMA DE ESFUERZOS	140
10.4. RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES TEMPORALES...	142
11. CONCLUSIONES.....	145
11.1. INSUFICIENCIAS DEL ESTUDIO.....	147
12. BIBLIOGRAFÍA	150

1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo con [1]:

“Uno de los aspectos importantes en la vida útil de un transformador de potencia es la conservación de los aislamientos sólidos y líquidos, que deberán permanecer íntegros ante la presencia de humedad y de contaminantes... El problema fundamental es el deterioro de las propiedades dieléctricas y mecánicas del papel aislante y otros componentes sólidos en el tiempo. Esto hará que, ante un cortocircuito, el papel aislante sea incapaz de soportar y se inicie una falla incipiente o, peor aún, una falla permanente.”

Si bien los transformadores eléctricos de potencia son máquinas relativamente sencillas dentro del conjunto de las máquinas eléctricas, debido principalmente a que no poseen partes móviles, estos están igualmente sometidos a envejecimiento, y la muerte de transformadores es un problema frecuente para las empresas encargadas de la generación, transporte y distribución de energía.

Para el caso concreto de los transformadores, su muerte casi siempre viene dada por una falla de aislamiento. Los gruesos conductores de que se componen los devanados o arrollamientos cuentan, en el caso de aquellos de gran potencia, con un doble aislamiento para prevenir las fallas por derivación. Los conductores o pletinas de cobre (generalmente de sección rectangular muy aplanada) están recubiertos de un barniz en dos capas fundidas de poliestiroamida y poliamidoamina. Posteriormente estos conductores pueden agruparse (CTC – Continuosly Transposed Conductor), o no (Flat Paper Wrapped Wire), para formar un conductor más grueso que, ahora ya sí, se arrolla entorno al núcleo para formar el bobinado (ver ilustración 1).

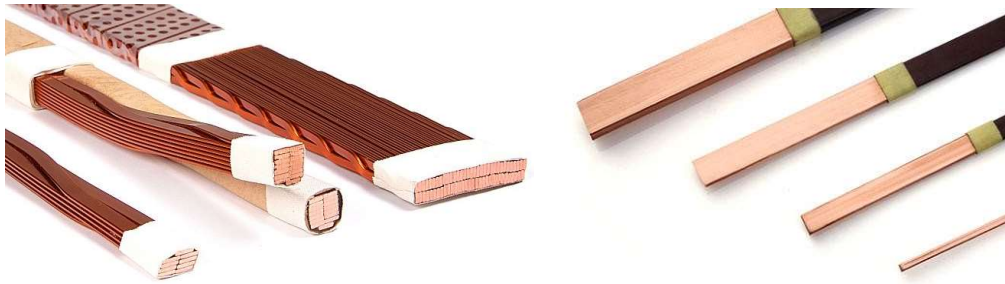


Ilustración 1. Continuosly transposed conductor (derecha) y Flat paper wrapped wire (izquierda).

Estos CTCs cuentan además con un segundo aislamiento compuesto generalmente por papel en varias capas que pueden superponerse entre sí. En el caso de estos conductores agrupados, el barniz aísla cada pletina del resto que están conectadas en paralelo, mientras el papel previene de derivaciones a masa y entre bobinas. Este segundo aislamiento, además de aumentar significativamente la capacidad dieléctrica del conductor, aporta también un pequeño extra a su resistencia mecánica.

Es este segundo aislamiento de papel el que supone el eslabón más débil de la cadena cuando se habla de la vida útil del transformador. Hoy en día, los transformadores cuyo ciclo de vida está terminando se proyectaron para durar entre 20 y 25 años, si bien su correcto mantenimiento y una monitorización constante de su temperatura de funcionamiento puede hacer que superen holgadamente los 30 años. Cuando se habla de la vida de un transformador se hace referencia siempre a la vida útil a una temperatura constante de poco más de 100 °C. Esto es debido a que, por encima de esos 100 °C, el tiempo real de operación consume más tiempo de esa vida útil que el que realmente haya pasado (p.e. un transformador funcionando a 125 °C durante 4 horas puede que haya consumido 6 horas de vida útil), mientras que si en horas de baja demanda se consigue reducir la temperatura de funcionamiento se ahorraran horas de vida útil.

Todo esto viene relacionado con el envejecimiento, entendido como deterioro, del papel aislante que envuelve los conductores. Con el paso del tiempo este pierde flexibilidad, volviéndose más rígido y quebradizo. Un

estudio llevado a cabo por Daniel Geissler y Thomas Leibfried, relaciona este envejecimiento y pérdida de resistencia con el grado de polimerización del papel, con valores en torno a 1300 DP¹ en la construcción del transformador, y por debajo de 200 DP, valor obtenido en análisis post-mortem hechos al papel de transformadores retirados por una falla de derivación, debido a grietas o rotura del papel aislante.

Un transformador es una máquina con un rendimiento energético muy alto, sin embargo, no es ideal. El núcleo, con su alta permeabilidad magnética, cumple bien su función de concatenar el flujo magnético, pero ni su permeabilidad es infinita ni la del medio circundante es nula, por lo que existe un cierto flujo de dispersión que se deriva a través de los devanados. Este flujo de dispersión, sumado a la densidad de corriente en los devanados (mayor en períodos de sobrecarga o fallas de cortocircuito), resulta en una fuerza electromagnética ejercida sobre los arrollamientos de las bobinas. Esta fuerza electromagnética, con componentes vertical y radial, provoca que los devanados se deformen por pandeo debido principalmente a las componentes axial y radial de la fuerza. Si estas fuerzas llegan a resultar excesivas y el conductor colapsa, un papel aislante deteriorado y poco flexible puede llegar a romperse, lo que supone la muerte del transformador.

Llegado el caso, la alta corriente circulante por los devanados durante una falla de cortocircuito llevará asociada mayores pérdidas por efecto Joule (por supuesto también aumentarán las pérdidas relacionadas con los ciclos de histéresis del núcleo, o las corrientes parásitas, ya sean estas en el núcleo, devanados, cuba...). Para los casos en que se produzcan corrientes de cortocircuito, la energía disipada en forma de calor por ese efecto Joule (proporcional al cuadrado de la corriente), es mucha en un periodo de

¹ DP: Degree of Polymerization. Grado de polimerización del papel. Número de unidades monoméricas en macromoléculas, polímeros u oligómeros.

tiempo muy breve, por lo que la evacuación de calor por medio de la convección hacia el aire o aceite de refrigeración, y de ahí al exterior, no es suficiente para evitar la elevación drástica de temperatura. De hecho, los cálculos de la temperatura que se alcanza durante un cortocircuito consideran el proceso como adiabático, ya que la duración de estos es muy breve (la norma establece 2 segundos para las pruebas de cortocircuito), por lo que los valores de temperatura que pueden alcanzarse son muy elevados, admitiendo hasta 250°C para transformadores sumergidos en aceite y 350°C para los de tipo seco.

Tipo de transformador	Temperatura del sistema de aislamiento, °C (clase térmica entre paréntesis)	Valor máximo de la temperatura, °C	
		Cobre	Aluminio
Sumergido en aceite	105 (A)	250	200
Seco	105 (A)	180	180
	120 (E)	250	200
	130 (B)	350	200
	155 (F)	350	200
	180 (H)	350	200
	200	350	200
	220	350	200
<p>NOTA 1 En el caso de arrollamientos contruidos con aleaciones de aluminio de alta resistencia a la tracción, se pueden permitir valores máximos de temperatura más altos, por acuerdo entre fabricante y comprador, pero que no superen los correspondientes al cobre.</p> <p>NOTA 2 Cuando se utilicen otros sistemas de aislamiento diferentes de la clase térmica A en transformadores sumergidos en aceite, se pueden permitir valores de temperatura máxima diferentes, por acuerdo entre fabricante y comprador.</p>			

Tabla 1. Valores máximos admisibles de la temperatura de cada arrollamiento después del cortocircuito. Fuente [2].

Estas temperaturas tan elevadas provocaran, en primer lugar, la rápida formación de burbujas en el aceite (en el caso de transformadores sumergidos, lo que hará que el relé de Buchholz desconecte el transformador de la red, cortando la corriente para evitar la destrucción del transformador), y en segundo lugar un cambio en la composición química del papel, que pasa a ceder oxígeno al aceite, deteriorándose. Este proceso de deterioro del papel lo hace más susceptible al fallo ante posibles eventualidades futuras.

2. ESTADO DEL ARTE

Para este trabajo, la idea original y el enfoque, así como las herramientas empleadas y los objetivos definidos se basan en una serie de artículos y ponencias previas. De esta forma, el conocimiento previo en la materia establece la base sobre la cual se asienta el proyecto.

En lo que a la muerte de transformadores se refiere, la vista está puesta sobre el aislante de los conductores desde hace ya tiempo. Se sabe que este envejece y pierde propiedades mecánicas bajo los efectos de las altas temperaturas que se pueden llegar a alcanzar en los transformadores de grandes potencias, en los cuales el conjunto se encuentra sumergido en aceite. Se reconoce también, con carácter general, que este envejecimiento está directamente relacionado con el grado de polimerización. El papel Kraft, el utilizado más habitualmente para esta aplicación, parte de un DP superior a 1300 de media, mientras que un transformador que se considere que haya consumido toda su vida útil presenta valores inferiores a 200.

En 2015, D. Geissler y T. Leibfried presentaron un estudio sobre el comportamiento del papel aislante de CTC's frente a la deformación [3]. Se trataba de una simulación por elementos finitos en la que no se tenía en cuenta el núcleo de cobre del conductor, solo las capas de papel, las cuales son sometidas a flexión. En su estudio se consideraban conductores de distintos espesores en dirección radial, así como un número variable de capas de papel aislante. Dado que el objetivo era determinar los efectos del envejecimiento del papel en sus propiedades mecánicas, y que se trataba de una simulación por ordenador, se empleaban muestras reales del papel, envejecidas y sometidas a ensayo, para determinar las propiedades mecánicas sobre las que luego se basaba el modelo. Tanto de los ensayos, como de la simulación, se obtuvieron una gran cantidad de datos. La conclusión más evidente era la reducción drástica del límite



elástico y de la carga de rotura para valores de polimerización inferiores a 200. Además, la simulación mostraba una distribución de daños creciente a medida que aumentaba también el espesor del conductor.

En 2015 y 2017, los mismos autores publican dos nuevos artículos [4, 5]. Si en el anterior se habían centrado en el envejecimiento del papel y el comportamiento de este frente al estrés mecánico; ahora le llegaba el turno al conductor. En el artículo de 2015, se presentaba una comparación entre distintos modelos, tanto analíticos, como computacionales -estos últimos basados en elementos finitos- para el estudio de CTCs. Se hacían diferentes consideraciones y simplificaciones. Se consideraban dos tipos de comportamiento mecánico de los conductores, uno lineal y otro no lineal, debido al cambio en la distribución de esfuerzos a medida que los devanados se deformaban. En el modelo lineal se consideran soportes articulados, mientras que en el no lineal se considera el caso de una viga biempotrada.

En el caso lineal, se comparaban también los resultados un modelo analítico, así como los de dos simulaciones, una detallada con transposición y otra simplificada con hebras paralelas unificadas y sin transposición. Los resultados de todos los modelos convergen razonablemente, avalando las simulaciones; concluyen que la transposición en el modelo es despreciable y que sus efectos disminuyen a medida que aumenta el número de hebras; sin embargo, y para el caso del análisis no lineal, no se presenta modelo analítico, lo cual podría ser interesante; si bien es cierto que la complejidad de este es superior y, sobre todo, que la buena correlación entre modelos que presenta el análisis lineal puede ser suficiente para acreditar la correlación también en este caso. En cuanto a la comparación de resultados entre análisis lineales y no lineales, el análisis lineal arroja unos valores de carga crítica considerablemente inferiores a los del análisis no lineal.

El artículo presentado dos años después (2017), tenía como objeto determinar la carga crítica de pandeo que puede llegar a producirse durante un cortocircuito, fundamentalmente en el devanado de baja, y debido a las altas corrientes y a los flujos de dispersión. En este caso se trata de una simulación y de un banco de pruebas, con el objetivo adicional de validar la simulación como método de estudio. Para la simulación emplean un modelo 2D, para calcular la densidad y distribución del campo magnético, y otro modelo 3D para simular las fuerzas y sus deformaciones. El banco de pruebas no es un transformador real; se trata de dos devanados concéntricos y conectados en serie, con el objetivo de lograr una correcta distribución del campo magnético. Finalmente logran deformaciones plásticas permanentes a partir de los 25 kA de corriente, y la deflexión máxima que alcanza el conductor para los valores pico de corriente es superior a 8 mm; bastante si se tiene en cuenta que, dos años antes, las deformaciones a las que habían sometido a las capas de aislante eran de solo 1 mm y las cargas críticas obtenidas en el estudio de secciones de CTC se daban para deflexiones del orden ese mismo milímetro. Los resultados del estudio muestran una buena convergencia entre el banco y la simulación, validando el uso de esta última, así como un reducido margen de error también con los resultados de la fórmula analítica usada comúnmente para el cálculo de esa carga crítica de pandeo.

Por último, en 2018 y en la universidad de Cantabria, la doctoranda Carmela Oria, en colaboración con su departamento, realiza un estudio en línea con el llevado a cabo por D. Geissler en 2015. El objetivo, profundizar en el estudio sobre las características mecánicas del papel y como estas varían a lo largo de la vida útil del transformador. Se trata igualmente de una simulación por elementos finitos, así como procesos reales de envejecimiento y ensayos mecánicos sobre muestras del papel. Sin embargo, en esta ocasión cada una de las capas de papel es ensayada y



modelada en detalle, hallando que las capas interiores y las exteriores no son iguales, como tampoco lo es la distribución de esfuerzos para cada una de las capas cuando se somete el modelo a flexión. Mientras las capas interiores presentan valores considerablemente más elevados del módulo de Young y algo inferiores de resistencia; las exteriores soportan valores de deformación mucho más elevados, del orden de 10 veces, y soportan algo más de carga antes de la rotura. Finalmente, el estudio plantea sus propias limitaciones en algunos puntos, sugiriéndose que mejorar y llevar a cabo con más detalle en el futuro, con el objetivo de lograr una simulación más realista de lo que sucede en el interior de un transformador, así como de los efectos del envejecimiento en el aislante. Sin embargo, sí ofrece conclusiones válidas, principalmente la distribución de cargas desigual entre capas del aislante, así como la pérdida de propiedades mecánicas en el papel, si bien la propia Carmela reconoce que el proceso de envejecimiento debe durar más para lograr resultados concluyentes, y que debe también analizarse el grado de polimerización del papel, para correlacionar este dato con el de las propiedades mecánicas.

En resumen, el papel aislante de los conductores (elemento fundamental de estos, así como de cualquier máquina eléctrica); sus propiedades no solo como aislante, propiedad de sobra testada, sino también las mecánicas, y su envejecimiento y las repercusiones de este, son áreas de estudio bien desarrolladas. La razón para ello es que, efectivamente, los devanados de un transformador de potencia están sometidos a sollicitaciones mecánicas. El objeto de estudio de este trabajo pasa por la naturaleza de esas sollicitaciones, sus mecanismos, su magnitud, y que tan severas puedan llegar a ser, así como efectos tener.

3. ALCANCE Y DEFINICIÓN DEL PROYECTO

El presente proyecto se centra en los devanados de transformadores considerados de gran potencia, cuyos devanados están conformados por conductores agrupados, formando CTCs. Inicialmente, se pensó en estudiar un total de cuatro transformadores, de diferentes potencias y tensiones, de los cuales se cuenta con la hoja de características proporcionada por el fabricante, con el objetivo de hallar si las corrientes de cortocircuito máximas a las que pueden llegar a verse sometidos son suficientes para provocar el colapso de su devanado de baja tensión, debido a las fuerzas de Lorentz que se generan en los devanados. Sin embargo, finalmente se decidió limitar el estudio a un único transformador, debido a la necesidad de acotar la extensión del trabajo. El transformador elegido es el de más baja potencia (10 MVA), sencillamente por ser el primero, y aquel en el que se basaron todas las pruebas y el aprendizaje previo.

Para llevar a cabo este estudio son necesarios una serie de datos fundamentales, aparte de las características eléctricas y de potencia del transformador, también es necesario conocer su geometría general, tamaño del núcleo, tipo de arrollamiento de los devanados, las sujeciones de este, etc. Puesto que se carece de esos datos, se estudiarán los factores de diseño de transformadores para estimar una geometría que se adapte a la hoja de característica del transformador en estudio. Los factores de diseño en que se basará esta geometría estimada son: la densidad de corriente aceptable en el cobre, la potencia del transformador, las tensiones de red y las corrientes nominales de cada fase, entre otros. La simulación, lo más exacta posible dentro de los parámetros de un trabajo de fin de grado, se llevará a cabo mediante COMSOL Multiphysics, un programa basado en el método de elementos finitos; método muy generalizado y extendido en las diferentes industrias dentro de las fases de diseño y en la fabricación de prototipos.

4. TRANSFORMADORES DE POTENCIA

Según Theodore Wildi [6]:

“El transformador es probablemente uno de los dispositivos eléctricos más útiles jamás inventados. Puede aumentar o disminuir la tensión o la corriente de un circuito, puede aislar circuitos entre sí y puede incrementar o disminuir el valor aparente de un capacitor, un inductor o un resistor. Además, el transformador nos permite transmitir energía eléctrica a grandes distancias y distribuirla de manera segura en fábricas y hogares”.

4.1. IMPORTANCIA DEL TRANSFORMADOR, ¿QUÉ SON Y PARA QUÉ LOS UTILIZAMOS?

Los transformadores eléctricos son uno de los elementos más importantes de cualquier red eléctrica. La variedad de tipos y de las aplicaciones que puede tener un transformador es muy amplia. La principal sin duda es la de modificar la tensión de la red; sin embargo esa es solo una, y aún dentro de esa misma aplicación las variantes son muchas. Algunas de sus aplicaciones y tipos son:

- Transformador de tensión
- Transformador de impedancia
- Transformadores para telecomunicaciones
- Transformador de medida
- Transformador de aislamiento
- Transformador de pulsos
- Transformador flyback

...

Aparte de modificar la tensión, un transformador también puede emplearse para modificar la impedancia aparente de un componente electrónico o todo un circuito. De esta forma puede alimentarse dos circuitos que deben

funcionar acoplados, pero con valores de tensión, corriente o impedancia muy dispares. Esto es fácilmente demostrable atendiendo a las ecuaciones básicas que rigen el comportamiento de un transformador.

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{I_2}{I_1} = a \quad (1)$$

$$N_1 * I_1 = N_2 * I_2 \quad (2)$$

Sustituyendo:

$$N_1 * \frac{E_1}{Z_1} = N_2 * \frac{E_2}{Z_2} \rightarrow N_2 * a * \frac{E_2 * a}{Z_1} = N_2 * \frac{E_2}{Z_2} \quad (3)$$

$$Z_1 = a^2 * Z_2 \quad (4)$$

Las anteriores son las ecuaciones básicas que rigen el funcionamiento de un transformador, y demuestran que una impedancia conectada en bornes del secundario con un valor de 'Z' ohmios, y alimentada a su tensión y corriente nominales, es visto por el primario como otra impedancia de valor equivalente a la primera y al cuadrado de la relación de transformación 'a'.

Otra aplicación de los transformadores es la de medida. Cuando se trata de redes de alta tensión, asegurar que esta se encuentra a la tensión y frecuencias apropiadas presenta un problema fundamental. Estas redes generan a su alrededor campos eléctricos y magnéticos de muy alta intensidad, además de conducir corrientes de gran valor. Los aparatos usados para medir estos valores pueden ser sensibles a esos campos o, por ejemplo, un amperímetro no soportar la corriente nominal de un transformador; por ello se utilizan transformadores para modificar estos valores hasta hacerlos manejables para los aparatos de medida.

También puede emplearse un transformador simplemente para aislar dos circuitos eléctricamente, manteniéndolos acoplados. Para ello se emplean los transformadores de aislamiento. Estos tendrán un tamaño acorde a la



potencia que deban manejar, pero su relación de transformación es uno, quiere decir, que no modifican ni la tensión, ni la corriente, simplemente aíslan los circuitos.

Por último, los transformadores que resultan interesantes de cara a este proyecto son los transformadores de tensión. La función principal de estos es modificar esa tensión y la corriente, pero los tipos y circunstancias en que lo hacen son muchas. Los transformadores de generación, por ejemplo, son los encargados de elevar la tensión en bornes del generador (con el objetivo de reducir la corriente para minimizar pérdidas), de cara al transporte de esa energía por la red. El generador de una central nuclear o hidroeléctrica no genera en las mismas condiciones que un aerogenerador, por ejemplo, de ahí que el transformador no sea el mismo, aunque su principio de funcionamiento y finalidad sí sean las mismas. Así mismo, esa tensión que se elevó de cara a su transporte posteriormente debe reducirse de cara a su distribución y consumo; son los transformadores reductores.

Otra clasificación significativa de los transformadores se hace según sus fases; esto es, el número de redes simultáneas que manejan, y que juntas conforman una sola red equilibrada. Los transformadores monofásicos solo manejan una fase, mientras que los más habituales son los trifásicos, pues la gran mayoría de redes de generación, transporte y distribución son trifásicas. A menudo estos transformadores trifásicos suelen estar conformados por tres transformadores monofásicos, pues de esta forma, si uno de ellos sufre una avería, solo es necesario cambiar "una fase", con el ahorro de costes que eso supone.

Por último, al hablar de transformadores de potencia, también es importante hacerlo de cómo están conectados sus devanados. Algunas de las conexiones posibles son:

- Conexión en delta o triángulo.
- Conexión en estrella.
- Conexión en zigzag.
- Conexión en delta abierta.

Las tres primeras son las más habituales. La conexión en delta abierta es la utilizada cuando, para modificar la tensión de una red trifásica, solo se dispone de dos transformadores monofásicos. Aunque a priori pueda parecer algo ventajoso, solo se emplea en casos de emergencia. Esto es debido a que la potencia total que el banco de transformadores puede manejar es igual al 86.6% de la suma de la potencia de los dos.

Las conexiones delta, estrella y zigzag se refieren solo al conjunto de devanados primario o secundario. En la conexión en delta, la entrada de cada devanado esta conectada a la salida del devanado anterior. Siendo H1 y H2 los terminales de los devanados primarios de los transformadores monofásicos P, Q y R; el terminal H1 de P estará conectado al terminal H2 de R, y el H1 de Q al H2 de P. De esta forma, la tensión de cada devanado primario es la tensión compuesta, es decir, $\sqrt{3}$ veces la tensión de fase.

En la conexión estrella en cambio, todos los terminales H2 o X2 (siendo X1 y X2 los terminales del secundario), se encuentran conectados entre sí, creando un neutro, que o bien puede emplearse en distribución, o bien puede conectarse a tierra. En la conexión en estrella, la tensión de cada devanado es la tensión simple de cada una de las fases.

En la elevación o reducción de tensiones es habitual conectar uno de los grupos de devanados en delta mientras el otro se conecta en estrella. De esta forma uno de los devanados está sometido la tensión compuesta (conexión delta), mientras el otro maneja la tensión simple. Esto convierte la relación de transformación del transformador, que en principio es 'a', en una relación de transformación en fases del primario y del secundario igual

a $\sqrt{3}$ veces 'a', pero con el ahorro en materiales que esa relación de transformación efectiva supone.

Por último, la conexión zigzag es un tipo especial de conexión que combina las dos anteriores. Empleado sobre todo en distribución, viene a solventar uno de los problemas que la conexión estrella-delta presenta en este ámbito de aplicación. En las conexiones delta-estrella o estrella-delta, el devanado de baja tensión, ya sea este el primario (elevación) o el secundario (reducción), es el que se conecta en delta, por lo que carece de neutro, el cual es imprescindible en distribución. Para aprovechar la mejor relación de transformación de una conexión estrella-delta, y disponer al mismo tiempo de neutro en el secundario, la conexión en zigzag divide cada devanado en dos partes iguales; estando la primera conectada en estrella y la segunda en serie pero sentido inverso con la primera mitad del devanado de una de las otras fases y a su salida al neutro. Se consigue así una relación de transformación igual a $2/\sqrt{3}$, y a su vez un neutro que permita el equilibrio de tensiones y corrientes en la red.

4.2. PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DE UN TRANSFORMADOR

El principio de funcionamiento de los transformadores se basa en la ley de Faraday, o ley de Faraday-Lenz. Según esta, un campo magnético que varíe en el tiempo será capaz de inducir una fuerza electromotriz (FEM) en un circuito eléctrico que concatene ese campo magnético. Por supuesto, la variación del campo magnético viene determinada por la variación en la tensión del devanado primario.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}; \quad (5)$$

$$\text{siendo } \Phi_B = \int_S B * ds \quad (6)$$

De esta manera, un campo magnético que varíe con el tiempo de forma senoidal inducirá en el circuito una fuerza electromotriz igualmente senoidal. Expresado en términos electrotécnicos:

$$E = 4.44 * f * N * \Phi_{MAX} \quad (7)$$

Donde 'E' es el valor eficaz de la tensión inducida, ' Φ_{MAX} ' el valor pico del campo magnético, 'f' es la frecuencia a la que varía el campo y 4.44 es una constante, resultado de emplear la frecuencia y el valor pico en lugar del eficaz o RMS del campo. El término 'N' corresponde al número de espiras. Puesto que el valor de la fuerza electromotriz inducida depende del campo magnético concatenado, en la práctica se emplean una sucesión de espiras conectadas en serie, de forma que sus respectivas fuerzas electromotrices se sumen para obtener una de un valor mayor. Si ahora se cierra el circuito eléctrico conectando una carga en bornes de las espiras, la fuerza electromotriz hará que circule una corriente a través de las espiras. El signo negativo en la ecuación de la ley de Faraday-Lenz se debe a Heinrich Lenz, que determinó que el sentido de la corriente inducida es tal que se opone siempre a la causa que lo produce, en este caso la variación del flujo.

4.3. GEOMETRÍA DEL TRANSFORMADOR

La función básica de un transformador, que no su finalidad, será siempre la de acoplar dos circuitos eléctricos, estableciendo entre ellos una determinada relación. Para ello, uno de los devanados conectado al circuito del primario se encuentra arrollado entorno a un núcleo. La función de este núcleo es la de conducir el flujo magnético; para ello se trata de un núcleo de acero, el cual trata de ocupar toda la sección interna del devanado a fin de reducir en lo posible el flujo de dispersión. Este núcleo conforma un circuito magnético, a través del cual el flujo describe una trayectoria cerrada. De esta forma, y arrollado también sobre ese núcleo se encuentra otro devanado, este conectado al circuito del secundario. Dado que el flujo



en el núcleo es inducido por una fuente de corriente alterna, este es sinusoidal y varía a su vez, induciendo en el devanado secundario una fuerza electromotriz (ecuación (5)).

Se ha dicho que el núcleo es de acero. Por la ley circuital de Ampère se tiene que la densidad de corriente inducida es proporcional a la inducción magnética, esto es, la densidad del campo magnético a su vez inducido. Para lograr valores de inducción lo más elevados posibles, en la práctica la saturación magnética del núcleo, se emplean chapas de acero, las cuales poseen una permeabilidad de hasta 10^5 veces la del aire, con lo que llegan a obtenerse valores inductivos próximos a dos teslas. Poseen además, una muy baja remanencia magnética, lo que reduce las pérdidas por histéresis.

En la imagen inferior, los devanados se muestran arrollados entorno a zonas diferentes del núcleo por simplicidad conceptual. En la práctica, ambos devanados a menudo se encuentran arrollados uno encima del otro, con lo que se consigue mejorar enormemente la inductancia mutua, esto es, que todo el flujo inducido por el primario sea concatenado por el secundario, reduciendo las pérdidas y logrando eficiencias próximas al 100%. De cara al propósito de este trabajo, la mejora de la inductancia mutua conlleva la reducción de los flujos de dispersión, lo que reducirá a su vez las fuerzas mecánicas ejercidas sobre los conductores.

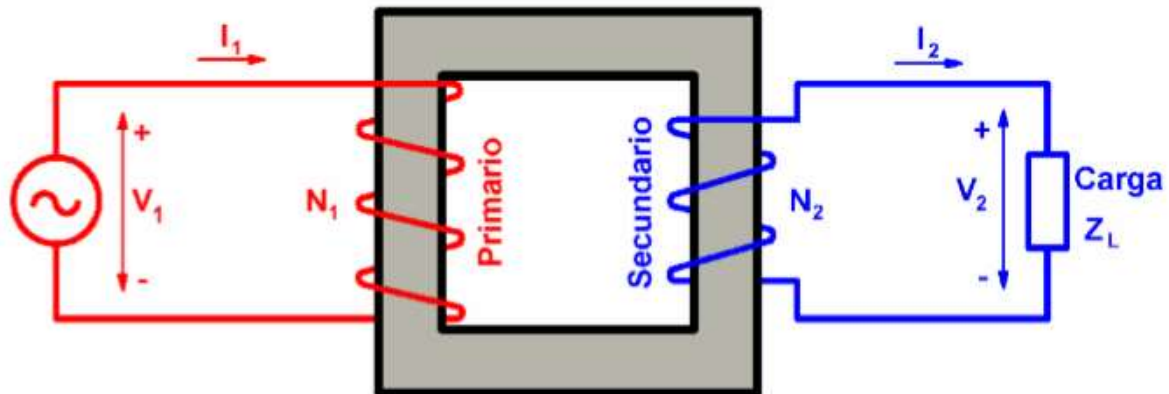


Ilustración 2. Elementos básicos de un transformador.

El campo magnético inducido no solo induce tensiones que conlleven la circulación de corrientes en los devanados; lo hace en todo aquel material cercano que sea conductor. El propio núcleo está hecho de un material magnético, por lo que, con el objetivo de reducir las corrientes circulares que se inducen en él, está conformado por chapas de acero laminadas, de muy pequeño espesor y aisladas. Estas están colocadas en paralelo a la circulación del campo, con lo que, al estar las chapas aisladas entre sí, la diferencia de potencial se limita a la inducida en un espesor ínfimo, dando lugar a corrientes de muy bajo valor y a pérdidas muy reducidas. Son las llamadas corrientes parásitas.

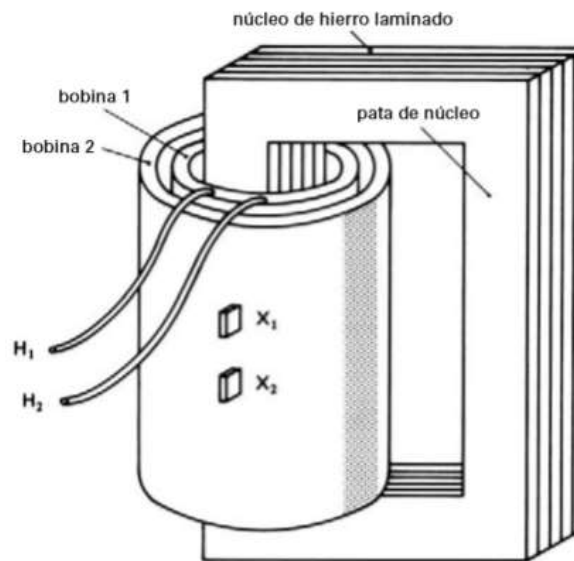


Ilustración 3. Detalle que muestra la conformación del núcleo a base de chapas delgadas.

4.3.1. Tipos de transformadores según su núcleo

Según sea la geometría del núcleo del transformador estos pueden clasificarse en dos grupos principalmente. El primero y más antiguo es el transformador de columnas. En él las chapas del núcleo forman un circuito magnético de forma cuadrada y sección constante ilustración (3)). En este tipo de transformadores los devanados están situados entorno a sus dos columnas verticales, pudiendo estar en una columna el primario y en la otra el secundario, sin embargo, como ya se ha dicho los devanados suelen montarse uno encima del otro, de ahí que en los transformadores de columnas la mitad de cada devanado se encuentre arrollado en cada una de las dos columnas.

La otra geometría, y la más empleada hoy en día es la del núcleo acorazado. En este caso el núcleo tiene forma de 'H' tumbada y cerrado en los extremos, proporcionando tres columnas sobre las que ubicar los devanados; y se emplean tanto en transformadores monofásicos como trifásicos. En los monofásicos la columna central alberga ambos devanados, siendo su sección el doble que la de las columnas laterales. En los trifásicos,

cada una de las columnas alberga una fase, y la sección de todas ellas es igual. En estos transformadores trifásicos, al estar las tensiones de fase desfasadas 120° respectivamente, y siempre y cuando el sistema se encuentre equilibrado, no se producen inducciones indeseadas en cada una de las tres columnas.

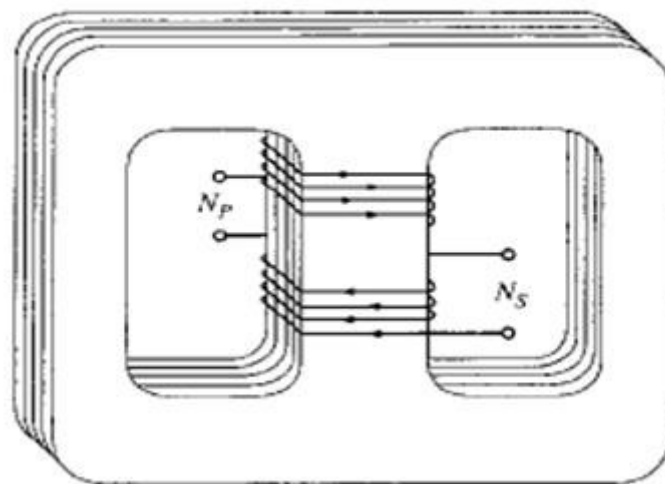


Ilustración 4. Esquema de un transformador de tipo acorazado.

4.3.2. Tipos de transformadores según sus devanados.

Devanado alta tensión

Los devanados de alta tensión de los transformadores de gran potencia, diseñados para corrientes nominales altas y con muchas más vueltas que el de baja tensión, suelen construirse arrollados bien en disco o bien en columnas. En los devanados de tipo disco el conductor es arrollado sobre sí mismo en cada vuelta, creando una bobinas planas o discos, que posteriormente se apilan verticalmente en torno al núcleo y que se conectan en serie.

En aquellos de tipo columna, el conductor se arrolla en un torno, creando cilindros de un diámetro cada vez mayor, de modo que cada uno aloje al

anterior y sea alojado por el siguiente. Estas columnas también se conectan en serie.



Ilustración 5. Construcción de un devanado tipo disco.

Devanado baja tensión

Los devanados de baja tensión tienen muchas menos vueltas, y en el caso de transformadores de gran potencia se construyen con CTCs ya que, al ser las corrientes muy elevadas, su sección es considerable. Las pletinas conectadas en paralelo y aisladas entre sí de un CTC reducen enormemente las pérdidas por conducción. Además, previenen el efecto pelicular, y su transposición evita la aparición de tensiones inducidas entre las pletinas por los flujos de fuga. Se construyen generalmente con un único conductor arrollado en forma de hélice, devanados helicoidales, aunque pueden emplearse dos conductores, con varias capas o no en función de la potencia y las tensiones de la red.

4.4. TRANSFORMADOR REAL

De Thodore Wildi [6]:

“En el mundo real los transformadores no son ideales, por lo que debemos modificar nuestro análisis simple para tener esto en cuenta. Así pues, los devanados de transformadores prácticos tienen resistencia y los núcleos no son infinitamente permeables. Además, el flujo producido por el primario no es capturado completamente por el secundario. En consecuencia, debemos tomar en cuenta el flujo de dispersión. Por último, los núcleos de hierro producen corrientes parásitas y pérdidas por histéresis, mismas que elevan la temperatura del transformador.”

Los transformadores son máquinas con un rendimiento muy alto, habitualmente superior al 99%, y mayor cuanto mayor sea su potencia nominal. De hecho, en su estudio electrotécnico es habitual considerarlos como ideales sin pérdidas. Sin embargo, es importante conocer cuáles son estas pérdidas y porque se producen, con el objetivo de que un buen diseño las reduzca, y porque un uso indebido del transformador puede hacer que estas se disparen, por ejemplo, en períodos de sobrecarga.

4.4.1. Pérdidas

Cuando se considera un transformador como ideal se están obviando varios factores. En primer lugar, la permeabilidad del núcleo; esta en comparación con la permeabilidad del aire ($\mu_0 = 4\pi * 10^{-7}$) o aceite que rodea al núcleo es muy elevada, entre 500 y 1500 veces más para las chapas de grano orientado, las más usadas generalmente en transformadores. Sin embargo, ni esta permeabilidad es infinita ni la del medio circundante es nula, esto da lugar a un acoplamiento débil entre bobinas (para mejorar este acoplamiento se montan una encima de la otra y se ensancha al máximo la sección del núcleo), por lo que una pequeña parte del flujo inducido por la fuerza magnetomotriz de cada bobina (N_1I_1 y N_2I_2) no es mutuo. En el circuito equivalente este fenómeno se sustituye por una pequeña inductancia en serie con los bobinados primario y secundario, con su respectiva caída de tensión y desfase de la intensidad. Adicionalmente, estos flujos de dispersión generan pérdidas al inducir a su



vez corrientes parásitas en los soportes, la cuba y los devanados. También en el núcleo se producen pérdidas por corrientes parásitas inducidas tanto por el flujo magnético mutuo como por los flujos de dispersión. Para reducir estas pérdidas el núcleo se fabrica apilando chapas magnéticas de grano orientado aisladas entre sí, con lo que se consigue reducir los valores máximos de estas corrientes y con ello las pérdidas que producen.

En segundo lugar, se obvia el ciclo de histéresis de los aceros aleados con silicio con que se fabrican las chapas del núcleo. Este material presenta una elevada permeabilidad (entre 1.5 T y 1.7 T), con unos niveles medios de inducción remanente (esto es, al retirar completamente el campo magnético excitador se conserva aproximadamente la mitad del flujo magnético inducido), pero lo más importante es su baja coercitividad (valor del campo magnético invertido para el que se consigue la desmagnetización completa del material). Así, la forma del ciclo de histéresis es alargada, con valores altos de densidad de flujo en la saturación magnética, pero muy estrechos debido a la baja coercitividad. Esto es así puesto que la energía perdida en cada ciclo de histéresis es igual al área del bucle. En imanes permanentes, por ejemplo, se busca justamente lo contrario, valores muy elevados de inducción remanente y de coercitividad, lo que da lugar a bucles de histéresis muy anchos.

Por último, los bobinados primario y secundario del transformador, generalmente de cobre o aluminio, no poseen una conductividad infinita, por lo que la corriente al circular generará pérdidas debidas al efecto Joule, equivalentes al cuadrado de la intensidad y a la resistividad del material. Lógicamente estas pérdidas son mucho mayores en el lado de baja tensión, de ahí que esta bobina siempre se coloque en el exterior, rodeando a la bobina de alta tensión, donde la refrigeración es más eficaz. Por la misma razón, los conductores del lado de baja serán más numerosos pero de menor sección, en busca de una reducción de estas pérdidas.

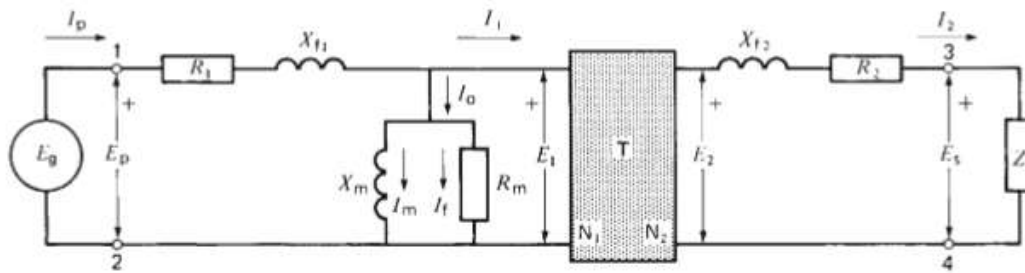


Figura 4.1. Circuito equivalente completo de un transformador práctico. Wildi, T. 2007 Transformadores Trifásicos. En: P. M. Guerrero (ed.) Máquinas Eléctricas. 6ª Edición. México: Pearson Education, p. 202

4.4.2. Circuito eléctrico equivalente

Para calcular el circuito eléctrico equivalente de un transformador real, se modelan sus pérdidas como impedancias conectadas en serie o paralelo con un transformador ideal. De esa forma, y mediante ensayos prácticos que se pueden llevar a cabo sobre el transformador, se calcula el valor de estas impedancias.

Ensayo de vacío

En primer lugar, tratamos de calcular las pérdidas producidas en el núcleo, las que se deben a los ciclos de histéresis y a las corrientes parásitas, pero solo las que se dan dentro del núcleo. Ambas pérdidas se modelan como una resistencia más una inductancia conectadas en paralelo en bornes del primario.

Para llevar a cabo el ensayo, se conecta una fuente de tensión en el primario (en la práctica siempre en el lado de baja tensión por simplicidad), mientras el secundario se deja abierto. Como hemos dicho la permeabilidad del núcleo no es ideal, por lo que para inducir la tensión E_2 será necesario que circule una pequeña corriente a través del primario, esto a pesar de que la corriente $I_2=0$, de ahí que las impedancias equivalentes de magnetización se conecten en paralelo (la I_1 del transformador ideal debe ser nula también). La tensión para las impedancias será la de la fuente E_1 (I_0 (Corriente de excitación) la marcada por un amperímetro en serie con la

fuente. Deberá conectarse también un vatímetro para conocer la potencia activa consumida (pérdidas en el núcleo). Con el dato de potencia activa y conociendo la aparente, podemos obtener la potencia reactiva necesaria para establecer el flujo.

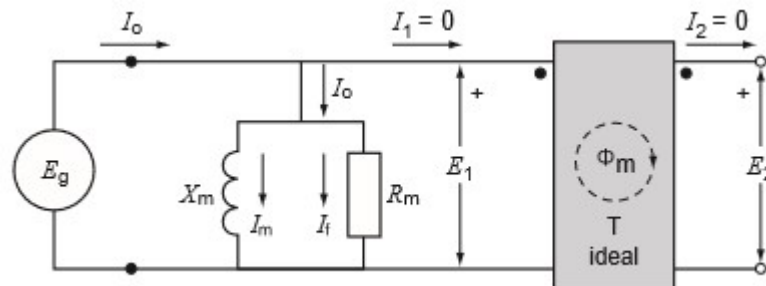


Figura x.xx. Corriente magnetizante (I_o) en un transformador conectado en vacío.
Wildi, T. 2007 Transformadores Trifásios. En: P. M. Guerrero (ed.) Máquinas Eléctricas. 6ª Edición. México: Pearson Education, p. 198

Ensayo de cortocircuito

Mediante el ensayo de cortocircuito podemos determinar las pérdidas por acoplamiento débil entre bobinas, esto es, la pérdida producida por su propia fuerza magnetomotriz inducida (Potencia reactiva) y las pérdidas en el cobre por conducción de la intensidad (Potencia activa)

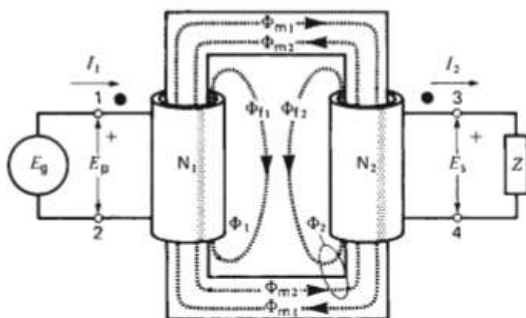


Figura x.xx. Flujos mutuos y de dispersión en un transformador bajo carga. Wildi, T. 2007 Transformadores Trifásios. En: P. M. Guerrero (ed.) Máquinas Eléctricas. 6ª Edición. México: Pearson Education, p. 199

Conectando una fuente de corriente, en el lado de alta por simplicidad y seguridad, mientras se cortocircuita el secundario.

En estas condiciones se aumenta la progresivamente la corriente en el secundario hasta alcanzar los valores nominales de corriente. Al estar el secundario desconectado los valores de tensión

serán mínimos.

Suponiendo el circuito equivalente de la *Ilustración 1* sustituyendo Z por un cortocircuito, tenemos que $I_1 = I_P - I_0$, I_0 se conoce del ensayo de vacío realizado previamente. R_2 y X_{12} pueden trasladarse al lado del primario mediante la transformación $Z' = a^2Z$, siendo "a" la relación ideal de transformación.

Se conocen pues la tensión E_p e I_p de la fuente, las corrientes I_0 e I_1 y las impedancias R_M y X_M , con lo que es posible calcular la tensión E_1 . Con todo ello más el dato de potencia aparente de la fuente y el de potencia activa, dado por un vatímetro conectado en serie-paralelo con la fuente, podemos obtener los valores de las impedancias R_1 , R_2 , X_{f1} y X_{f2} . Las resistencias representan las pérdidas por efecto Joule; las inductancias esos flujos de dispersión.

Simplificación del circuito eléctrico equivalente (Impedancia de un transformador)

El circuito de la figura 4.1. se puede simplificar para obtener la impedancia interna del transformador. Este es el dato operativo y de diseño más importante, ya que la regulación de tensión en carga del transformador, y por lo tanto su rendimiento; y por otro lado las condiciones de un posible cortocircuito dependen de esta impedancia.

En primer lugar, la corriente nominal es mucho mayor que la corriente magnetizante, por lo que toda la rama magnetizante se desprecia en favor de las corrientes operativas. En segundo lugar, la resistencia y reactancia del secundario pueden pasarse al

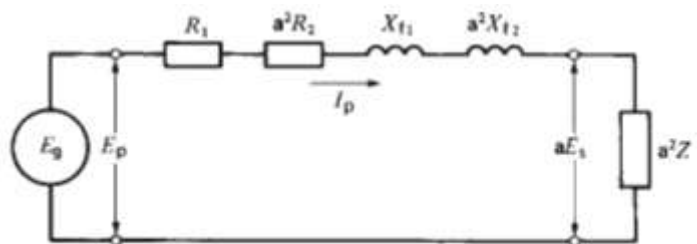


Figura 4.4. Circuito equivalente de un transformador real. Rama magnetizante despreciada. Wildi, T. 2007 Transformadores Trifásicos. En: P. M. Guerrero (ed.) Máquinas Eléctricas. 6ª Edición. México: Pearson Education, p. 210

primario, eliminando el transformador, con lo que nos quedamos con un único circuito eléctrico y cuatro impedancias en serie. Para ello, debemos calcular el equivalente de esas impedancias del secundario, multiplicando las halladas anteriormente por el cuadrado de la relación de transformación.

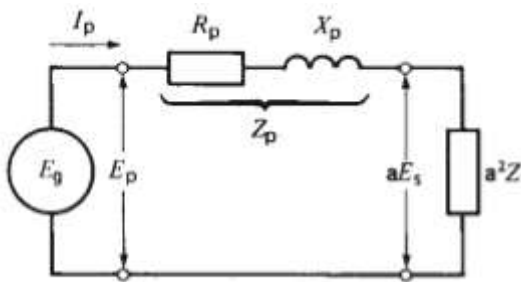


Figura 4.5. Impedancia de un transformador. Wildi, T. 2007 Transformadores Trifásios. En: P. M. Guerrero (ed.) Máquinas Eléctricas. 6ª Edición. México: Pearson Education, p. 210

Finalmente se calcula la impedancia del transformador asociando todas las impedancias independientes. Es importante apuntar que para transformadores de grandes potencias (> 500 kVA), las resistencias de conducción son del orden de cinco veces menores que las reactancias, por lo que

suelen despreciarse.

$$Z_P = \sqrt{R_P + X_P} = \sqrt{R_1 + a^2 R_2 + X_{f1} + a^2 X_{f2}} \quad (8)$$

Resulta importante aclarar para este trabajo, que según qué se esté tratando puede hablarse de impedancia del transformador (dato proporcionado siempre por los fabricantes) o impedancia de cortocircuito si, como es el caso, pretende hallarse las corrientes de cortocircuito que atravesarían un transformador en concreto. Sin embargo, ambas cosas son lo mismo.

$$\text{Resistencia de cortocircuito: } R_{cc} = R_1 + R_2' \quad (9)$$

$$\text{Reactancia de cortocircuito: } X_{cc} = X_1 + X_2' \quad (10)$$

$$\text{Impedancia de cortocircuito: } \bar{Z}_{cc} = \bar{R}_{cc} + j\bar{X}_{cc} \quad (11)$$

Valores por unidad

En la práctica, es muy poco habitual encontrar hojas de especificaciones técnicas que desglosen los valores de las impedancias resistivas e inductivas de un transformador, así como que se empleen los ohmios como unidades de referencia. La amplia diversidad de transformadores y de las redes en que estos se instalan, muy dispares entre sí; hace que los valores característicos de los primeros sean igualmente variados. Con objeto de unificar se introduce el método de valores por unidad, el cual permite reconocer similitudes entre transformadores muy diferentes, al presentar estos según sus valores relativos.

En el caso de la impedancia de un transformador, esta suele estar entre el 4 y el 14%, cuando en realidad se está hablando de valores que pueden ir desde las décimas hasta cientos de ohmios, dependiendo también de si están expresadas respecto de los valores de tensión del primario o del secundario.

$$\text{Impedancia base del primario: } Z_{np} = \frac{E_p^2}{S_n} \quad (12)$$

Siendo este un valor relativo, sin ningún significado real, pero que establece una referencia y un punto de comparación entre transformadores. A partir de él:

$$\text{Impedancia del transformador referida al primario: } Z_p(\%) = \frac{Z_p}{Z_{np}} * 100 \quad (13)$$

4.4.3. Rendimiento de un transformador

De la impedancia de cortocircuito, que es la impedancia del transformador, depende el rendimiento de este. Estas resistencias y reactancias propias de cada transformador producen una caída de tensión en bornes del secundario, con lo que en la práctica no se guarda la relación de transformación ideal, lo que se traduce en pérdidas.



$$\text{Regulación de tensión: } \varepsilon_c = C * (\varepsilon_{Rcc} * \cos \varphi_2 \pm \varepsilon_{Xcc} * \sin \varphi_2); \quad (14)$$

$$\text{Siendo } C = \frac{S}{S_n} \quad (15)$$

Por lo tanto, un fabricante que quiere ofrecer un producto con el mayor rendimiento posible tratará de reducir esta impedancia. Sin embargo, el valor nominal de la corriente de cortocircuito del transformador también depende de esta impedancia que, cuanto menor sea, dará lugar a una mayor corriente de cortocircuito. Un valor excesivo de esta corriente destruiría el transformador, por lo que es necesario encontrar un valor intermedio que mantenga las pérdidas lo más bajas posibles, sin comprometer la integridad de la máquina.

$$\text{Rendimiento: } \mu = \frac{C * S_n * \cos \varphi_2}{C * S_n * \cos \varphi_2 + C^2 P_{CuN} + P_{Fe}}; \quad (16)$$

La norma EN 60076-5 de transformadores establece las impedancias mínimas de cortocircuito.

Impedancia de cortocircuito a corriente asignada	
Potencia asignada kVA	Impedancia de cortocircuito mínima %
25 a 630	4,0
631 a 1 250	5,0
1 251 a 2 500	6,0
2 501 a 6 300	7,0
6 301 a 25 000	8,0
25 001 a 40 000	10,0
40 001 a 63 000	11,0
63 001 a 100 000	12,5
Mayor que 100 000	> 12,5

NOTA 1 Para las potencias asignadas superiores a 100 000 kVA, los valores son generalmente objeto de un acuerdo entre el fabricante y el comprador.

NOTA 2 En el caso de unidades monofásicas conectadas en banco trifásico, los valores de la potencia asignada se aplican al banco trifásico.

Ilustración 6. Impedancias mínimas de cortocircuito según la potencia asignada. Fuente: Norma AENOR EN 60076-5.

Como puede apreciarse en la tabla anterior, la impedancia mínima de cortocircuito (en valores por unidad) aumente a medida que lo hace la potencia del transformador y de la red. A mayor tensión de la red y mayor su potencia, mayor la corriente de cortocircuito. En redes de muy alta tensión los valores de las corrientes de cortocircuito alcanzan ya varias decenas de miles de amperios, por lo que se exigen impedancias de cortocircuito muy altas.

4.4.4. Conexiones de los transformadores

Aparte de los autotransformadores (muy habituales en muy grandes potencias y muy grandes tensiones por la reducción de material en la construcción de los devanados que permite), y de las conexiones en zig-zag, las cuales se usan también en los devanados de baja tensión (permiten una relación de transformación menor que la de la conexión en delta, pero mayor que la de estrella, y además proporciona una mejor regulación entre fases y sobre todo un neutro, lo cual resulta imprescindible en la distribución). Sin embargo, las conexiones más habituales son las delta-estrella (Dy) o bien estrella-delta (Yd). Las primeras son habituales del lado de la generación, usadas para elevar la tensión de cara al transporte. Esto se debe a que este tipo de conexión aumenta en $\sqrt{3}$ la relación de transformación dada por la relación de espiras. Por otro lado, la conexión estrella-delta se usa del lado de la distribución por la misma razón; la reducción de la tensión es $\sqrt{3}$ veces la dada por el número de espiras de cada devanado. Sin embargo, otra posibilidad puede ser el uso de conexiones estrella-estrella (Yy) o delta-delta (Dd) o bien las mencionadas anteriormente, pero invertidas. Esto no proporciona la relación de transformación óptima; sin embargo, puede por ejemplo aumentar la impedancia del transformador, lo cual llega a ser necesario en función de la aplicación, la potencia (generalmente alta) y la normativa aplicable.

5. SOBRECARGA EN TRANSFORMADORES

Un transformador que haya sido diseñado para funcionar a una potencia, su potencia nominal, a menudo trabajará por encima o por debajo de ese valor de potencia. Lógicamente que lo haga por debajo no tiene ningún efecto nocivo; más allá al menos de que su rendimiento o amortización económica puedan no ser los máximos. Sin embargo, habitualmente también trabajará por encima de esa potencia nominal. En principio esto no debe suponer y no supone un problema, si bien ello dependerá de lo que se le exija, y sobre todo del tiempo que deba estar trabajando por encima de esa potencia nominal.

5.1. SOBRECARGA DE LARGA DURACIÓN

Dependerá fundamentalmente de la demanda que un transformador sea vea obligado a dar más de lo que fue diseñado para dar. En términos generales, toda la red eléctrica se encuentra sobredimensionada, con el objetivo de tener una garantía cuando sea necesario hacer frente a situaciones anómalas. En este sentido, es habitual que un transformador se vea obligado a funcionar por encima de su potencia nominal, alcanzando el 100-110 % de esta. La normativa establece las condiciones en que se puede sobrecargar un transformador, con la temperatura como factor limitante más importante. Cualquier máquina eléctrica que haya estado trabajando por debajo de su potencia nominal podrá ser sobrecargada durante más tiempo.

5.2. CORTA DURACIÓN – CORRIENTES DE CORTOCIRCUITO

5.2.1. Corriente Simétrica de Cortocircuito

Son varios los tipos de cortocircuito que pueden producirse en una red trifásica y, por ende, un transformador que esté conectado a la red. Uno de

los más violentos y de obligado cálculo es el cortocircuito trifásico. Dado que es el más severo y que cubre suficientemente todas las posibilidades es el que generalmente se exige. Sin embargo, y dado que la mayoría de transformadores trifásicos actuales son, en realidad, bancos de transformadores monofásicos conectados en estrella-triángulo; el cortocircuito trifásico es más raro y poco habitual, por lo que el cortocircuito monofásico será el que se calcule. Este tipo de cortocircuito se produce cuando uno de los arrollamientos es puesto a tierra mientras el otro sigue a la tensión nominal de la red.

La situación es la misma que se pretende deliberadamente en el ensayo de cortocircuito. En dicho ensayo se consigue que por los arrollamientos circulen las corrientes nominales aplicando una tensión muy baja en comparación con la nominal, por lo tanto, al tener el mismo esquema, pero con la tensión nominal aplicada, las corrientes se disparan, alcanzo valores que de seguro causarían la destrucción del transformador si no son cortadas a tiempo.

Tomando el esquema de la figura 4.xx, con las impedancias de cortocircuito del secundario trasladadas al primario y la rama magnetizante omitida, debido a su baja magnitud, aún más en el cálculo de las corrientes de cortocircuito; sustituimos la carga por un cortocircuito y tenemos:

$$I_{1CC} = \frac{V_{1N}}{Z_P}; \text{ siendo } \varepsilon_{CC} = \frac{Z_P * I_{1N}}{V_{1N}} * 100 \quad (17)$$

$$I_{1CC} = \frac{I_{1N}}{\varepsilon_{CC}} * 100; \text{ e } I_{2CC} = \frac{I_{2N}}{\varepsilon_{CC}} * 100 \quad (18)$$

Siendo la tensión de cortocircuito hasta del 6% para transformadores de hasta 1000 kVA, y de hasta el 13 % para los de mayor potencia, es fácil ver que las corrientes de cortocircuito alcanzaran valores eficaces de entre 10 y 15 veces las corrientes nominales.

5.2.2. Régimen Transitorio de Corrientes de Cortocircuito

Se ha obtenido el valor eficaz de la corriente de cortocircuito para cuando este se produzca. Sin embargo, en caso de una falla los sistemas de protección del transformador lo desconectarán rápidamente. Por otro lado, un cambio en las condiciones de cargabilidad de cualquier circuito lleva asociado un régimen transitorio, durante el cual los valores instantáneos de tensión y corriente no se corresponden con esos valores eficaces. Por ello es necesario calcular los valores reales de corriente que recorrerán el transformador hasta que este sea desconectado, para obtener también los datos reales de los efectos que estos llevarán asociados.

Partiendo del circuito de la Figura 4.5. en el momento en que se produzca el cortocircuito de la carga a^2Z , lo que queda es un dipolo RL en serie, para el que aplican las siguientes ecuaciones:

$$u_{1n} = u_{R_p} + u_{X_p} \quad (1); \text{ En cualquier bobina: } u_L(t) = L * \frac{di(t)}{dt} \quad (19)$$

$$\text{Sustituyendo la ec. 2 en la ec. 1} \rightarrow u_{1n} = R_p * i_{1CC} + L_c * \frac{di_{1CC}}{dt} \quad (20)$$

Se tiene por tanto una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, en cuya solución es posible diferenciar dos soluciones agregadas. Por un lado, la solución forzada o estacionaria, que es aquella impuesta por la fuente (y el cortocircuito) y que gobernará el régimen estacionario; y por el otro lado se tiene la solución natural o libre. Esta se debe a la capacidad de la bobina de almacenar energía, estará determinada por la energía almacenada en el momento del cortocircuito y constituye la respuesta transitoria al cambio. Por lo tanto:

$$i_{1CC}(t) = i_{1EST}(t) + i_{1TRANS}(t) \quad (21)$$

Nomenclatura de las corrientes en el transitorio	
Abreviatura	Significado
i_{1CC}	Valor instantáneo de la corriente de cortocircuito.
i_{1EST}	Valor instantáneo de la componente estacionaria.
i_{1TRANS}	Valor instantáneo de la componente transitoria.
I_{1CC}	Valor eficaz de la componente estacionaria.

Tabla 2. Tabla de nomenclaturas de las corrientes.

La componente estacionaria ya fue calculada en el apartado anterior, su valor eficaz en realidad, únicamente es necesario por tanto expresarla en función del tiempo (I_{1CC} es el valor eficaz que corresponde a la función senoidal i_{1EST} , no es por tanto el valor eficaz de i_{1CC} , que para "t" próximo a cero carece de valor eficaz al ser la suma de una función senoidal y otra de carácter transitorio que decrece rápidamente).

$$\text{siendo } u_{1N} = \sqrt{2} U_{1N} * \sin(\omega t + \sigma) \rightarrow \overline{I_{1EST}} = \frac{\overline{U_{1N}}}{\overline{Z_P}} \quad (22)$$

$$\overline{Z_P} = R_p + jX_p = Z_p \angle \varphi \quad (23)$$

$$i_{1EST}(t) = \sqrt{2} I_{1CC} * \sin(\omega t + \sigma - \varphi) \quad (24)$$

El desfase σ representa el valor de la tensión en el momento del cortocircuito y nos puede servir para ajustar (suponer) su valor, en caso de necesitar de una condición de contorno inicial para resolver la ecuación diferencial. El desfase φ representa la relación entre las magnitudes de la impedancia resistiva y la reactiva del dipolo y por tanto también el desfase de la corriente de cortocircuito y la tensión de red.

Para calcular ahora la componente transitoria de la respuesta se debe resolver la ecuación 3 pero omitiendo la fuente (como se ha dicho el transitorio depende de la energía almacenada en el elemento almacenador, y no de la fuente). Debe resolverse la ecuación homogénea pues.

$$\text{Ec. homogénea: } 0 = R_{CC} * i_{1TRANS} + L_{CC} * \frac{di_{1TRANS}}{dt} \quad (25)$$

La solución para una ecuación diferencial del tipo de la homogénea es conocida:

$$\text{Para: } a * f(t) + b * \frac{df(t)}{dt} = 0 \rightarrow f(t) = C * e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow i_{1TRANS}(t) = C * e^{-\frac{t}{\tau_{CC}}} \quad (26)$$

$$\text{En este caso: } 0 = R_p * C * e^{-\frac{t}{\tau_{CC}}} + L_p * e^{-\frac{t}{\tau_{CC}}} * \left(-\frac{1}{\tau_{CC}}\right) \quad (27)$$

Despejando los factores comunes se obtiene

$$\tau_{CC} = \frac{L_p}{R_p} \quad (28)$$

por lo tanto:

$$i_{1CC}(t) = i_{1EST}(t) + i_{1TRANS}(t) = \sqrt{2} I_{1CC} * \sin(\omega t + \sigma - \varphi) + C * e^{-\frac{R_p * t}{L_p}} \quad (29)$$

Particularizando en $t = 0s$ para obtener el valor de la constante C:

$$i_{1CC}(t)|_{t=0} = i_{1EST}(0) + C * e^0 \rightarrow C = i_{1CC}(0) - i_{1EST}(0) \quad (30)$$

El valor $i_{1CC}(0)$ no es una incógnita, puesto que al tener un elemento inductor el valor de la corriente para $t(0^+) = t(0^-)$, siendo la corriente para $t < 0$ [$i_1(0^-)$] la corriente antes del cortocircuito.

$$i_{1CC}(t) = \sqrt{2} I_{1CC} * \sin(\omega t + \sigma - \varphi) + [i_1(0) - \sqrt{2} I_{1CC} * \sin(\sigma - \varphi)] * e^{-\frac{t}{\tau_{CC}}} \quad (31)$$

Los términos en I_{1CC} tendrán valores mucho mayores que los que alcanzase la corriente antes del fallo. Además, existe la posibilidad de que la corriente de cortocircuito se salte el régimen transitorio y entre directamente al estacionario. Atendiendo a la ecuación inmediatamente superior esto ocurre cuando $\sin(\sigma - \varphi) = 0$; por lo tanto, existe también la posibilidad contraria, que es que este régimen transitorio sea máximo para $\sin(\sigma - \varphi) = 1$. Esta segunda posibilidad es la importante, pues es en ese caso cuando se producen los valores pico más altos para la corriente de cortocircuito. Esta corriente máxima se produce además cuando C alcanza su valor absoluto más alto, es decir para aquellos casos en que $i_1(0) = 0$. Cuando se combinan estas dos posibilidades el valor pico de la corriente de cortocircuito es máximo, y se da en $t=T/2$, ya que para $t=0$ aparecen con signo contrario, pero medio ciclo después ambas se agregan positivamente alcanzando un valor máximo cercano a $2\sqrt{2} * I_{1CC}$ (en la gráfica siguiente puede apreciarse como no es posible alcanzar este valor), a este pico en la corriente de cortocircuito se le denomina corriente de choque.

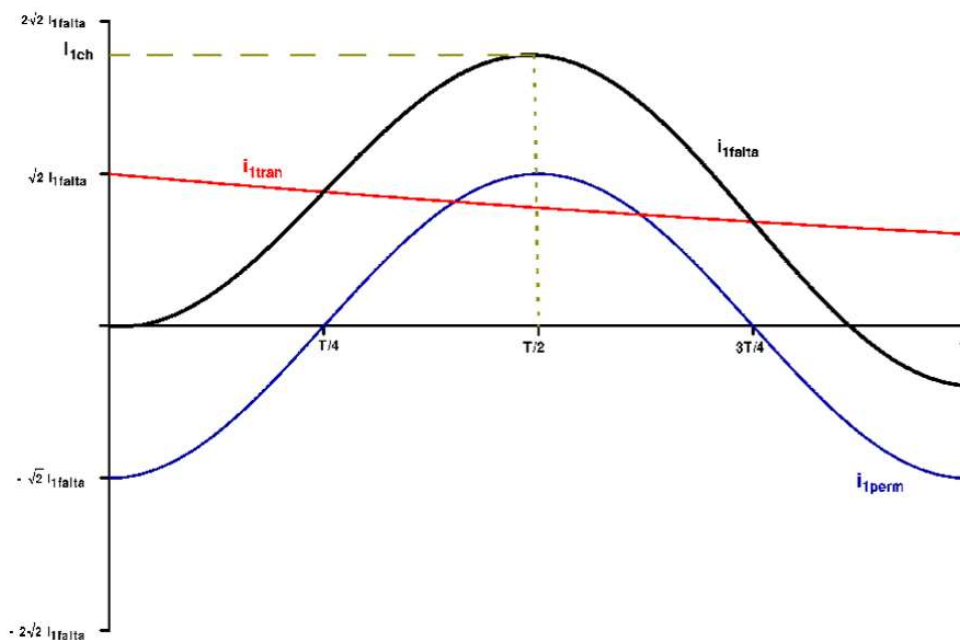


Ilustración 7. Evolución de las corrientes en un transformador durante un cortocircuito. Fuente: Miguel Ángel Rguez Pozueta "Transitorio en Transformadores"

5.2.3. Normativa aplicable al cálculo de corrientes de cortocircuito

La norma UNE-EN 60076, en su parte quinta, establece los requisitos que deben cumplir cualquier transformador para demostrar su aptitud para sobrellevar cortocircuitos, sin que se produzcan daños debido a los efectos tanto térmicos como dinámicos de estos.

Debido al amplio abanico de posibilidades en que se puede producir un cortocircuito (trifásicos, monofásicos, fase-fase, fase-tierra,...), así como a la amplia variedad de tipos de transformadores (trifásicos, monofásicos, de columnas, acorazados, autotransformadores,...) especial atención a estos últimos, que deberán demostrar su aptitud teniendo en cuenta su relación de transformación variable; se transcriben las exigencias de la norma de una forma general, sin entrar en los detalles concernientes a los casos más concretos. Si bien es cierto que, a menudo, la norma deja en manos del acuerdo entre cliente y proveedor, especialmente cuando se trata de transformadores de categoría II y III, las pruebas necesarias para que el transformador demuestre suficientemente su aptitud ante cortocircuitos. Por otro lado, para los transformadores de categoría I, puesto que su adquisición suele hacerse al por mayor, es habitual que el fabricante realice pruebas sobre una o varias unidades directamente.

Clasificación de los Transformadores de Potencia según su Potencia	
CAT I	Desde 25 kVA hasta 2.500 kVA
CAT II	Desde 2.501 kVA hasta 100.000 kVA
CAT III	Desde 100.001 kVA en adelante

Tabla 3. Clasificación de los transformadores según se potencia. Fuente [2].

En primer lugar, se debe aclarar que en los apartados anteriores se ha empleado una terminología diferente de la que emplea la norma. Se trataba aquella de una terminología más académica y general, aplicable a cualquier

aplicación electrotécnica, mientras que la que emplea la norma, y por tanto la que se emplea en este apartado, es la específica empleada para transformadores. A la corriente de cortocircuito se le denomina simplemente corriente de ensayo. Para su componente estacionaria se emplea el término corriente de cortocircuito simétrica. No se hace en cambio ninguna alusión directa a la componente transitoria de la corriente; en su lugar se multiplica el valor de la corriente simétrica por un factor, llamado factor de cresta, y que representa en cada caso el valor máximo que puede alcanzar la corriente de cortocircuito durante ese primer semiperíodo.

Valor de la corriente de cortocircuito simétrica I (Transformadores trifásicos con dos arrollamientos)

Según la norma:

$$I = \frac{U}{\sqrt{3} * (Z_t + Z_s)} \text{ (kA);} \quad (32)$$

Siendo:

U: La tensión asignada al arrollamiento considerado en kilovoltios (kV).

Z_s: La tensión de cortocircuito de la red.

Aparece ya la primera diferencia con los cálculos realizados anteriormente, puesto que de acuerdo con la norma se debe tener en cuenta no solo la impedancia de cortocircuito del transformador, sino también la impedancia de cortocircuito de la red.

$$Z_s = \frac{U_s^2}{S}; \quad (33)$$

Siendo:

U_s: La tensión de la red en kilovoltios (kV).

S: Potencia aparente de cortocircuito de la red en megavoltiamperios (MVA).

Z_t : Impedancia de cortocircuito del arrollamiento considerado.

$$Z_t = \frac{z_t * U^2}{100 * S} \text{ en } \Omega \text{ por fase (conexión estrella);}$$

z_t : Impedancia de cortocircuito a la corriente y frecuencias asignadas a la toma principal, así como a la temperatura de referencia, expresada en porcentaje.

S: Potencia asignada al transformador en megavoltiamperios.

Valor de cresta de la corriente de ensayo para los transformadores trifásicos con dos arrollamientos

En primer lugar, y para la obtención y ensayo de la corriente de choque o valor de cresta, en la práctica se deberá hacer uso de interruptores síncronos, los cuales permitan introducir el cortocircuito en el momento exacto en que la corriente normal de funcionamiento del transformador se hace cero.

$$\hat{i} = I * k * \sqrt{2} \tag{34}$$

Siendo:

I: EL valor eficaz de la corriente simétrica.

El término $\sqrt{2}$ hace referencia a la relación entre los valores de amplitud y eficaces de una onda sinusoidal. Por lo tanto, el valor máximo de k , como se demostró matemáticamente en el apartado correspondiente a la corriente transitoria, es inferior a dos.

El término $\sqrt{2} * k$, se le denomina factor de cresta. El término k , hace en realidad referencia a la relación X/R , siendo X la suma de las reactancias

del transformador y la red, y R también la suma de las resistencias de ambos.

X/R	1	1,5	2	3	4	5	6	8	10	14
$k \times \sqrt{2}$	1,51	1,64	1,76	1,95	2,09	2,19	2,27	2,38	2,46	2,55
NOTA Para otros valores de X/R comprendidos entre 1 y 14, el factor $k \times \sqrt{2}$ se puede determinar por interpolación lineal.										

Tabla 4. Tabla de valores del factor k . Fuente [2].

Los valores de la tabla anterior se corresponden con la siguiente formulación:

$$k * \sqrt{2} = \left(1 + \left(e^{-\left(\varnothing + \frac{\pi}{2}\right) * \frac{R}{X}} \right) \text{sen } \varnothing \right) * \sqrt{2}; \quad (35)$$

Donde \varnothing representa el arco tangente de la relación X/R , es decir la fase.

Para transformadores de categorías II y III, en aquellos casos en que la relación X/R sea superior a 14, el factor de cresta se considera igual a:

- CAT II: $1.8 * \sqrt{2} = 2.55$;
- CAT III: $1.9 * \sqrt{2} = 2.69$;

Duración de la corriente de cortocircuito

La normativa estima la duración máxima de un cortocircuito en 2 segundos. Este valor de tiempo está referido exclusivamente a la corriente simétrica de cortocircuito. En cuanto al régimen transitorio de la corriente, la duración de este depende de la relación reactancia-resistividad del devanado. Sin embargo, en el peor de los casos contemplado por la norma -esto es una relación XR igual a 14- la duración de este régimen es mucho menor a esos 2 segundos, amortiguándose casi completamente en unos 200 ms. En las simulaciones temporales de este estudio se van a considerar las 8 primeras décimas del cortocircuito, período que se considera suficiente para evaluar los efectos apreciables de esa corriente de choque, ya que pasado ese tiempo la amortiguación es ya del 90%.

6. DISTRIBUCIÓN DE CARGAS Y DEFORMACIÓN DE LOS DEVANADOS

La carga a la que van a verse sometidos los devanados del transformador es de tipo electromagnético. Los flujos magnéticos de fuga, inducidos por las corrientes de los devanados, y 'fugados' debido a que la permeabilidad del aire es no nula; generarán unas fuerzas sobre los propios devanados, descritas estas por la Ley de Laplace, a través de los cuales circula esa corriente inductora (primario) o inducida (secundario). Este efecto es normal, y de hecho los devanados están permanentemente sometidos a estas fuerzas; sin embargo, durante un cortocircuito las corrientes circulantes son muy superiores a las nominales para las cuales ha sido diseñado el transformador, esto provoca que los flujos de fuga alcancen también valores equivalentemente elevados que, sumados a las altas corrientes, den como resultado unas fuerzas cuyos módulos sean muy superiores al de las habituales.

6.1. FUERZA EJERCIDA SOBRE LOS DEVANDOS (LEY DE LAPLACE)

Hendrik Antoon Lorentz, físico neerlandés del siglo XIX, definió lo que hoy se conoce como fuerzas de Lorentz. La expresión de las fuerzas de Lorentz carece de demostración. La ecuación constituye en sí misma un postulado universalmente aceptado, pues su asunción conduce a resultados correctos, los cuales son demostrados a través de experimentos cuyos resultados pueden ser medidos empíricamente.

La expresión relaciona la carga, positiva o negativa, de una partícula que se encuentra en el seno de un campo magnético; el módulo y dirección de esa carga y la intensidad del campo magnético, con la fuerza que el campo

magnético es capaz de ejercer sobre la carga. La forma general de esta expresión es:

$$f = q * v \times B \quad (36)$$

siendo f la fuerza ejercida sobre la partícula, q su carga, v un vector que expresa su velocidad y B el campo vectorial de inducción magnética.

Para este caso de estudio en concreto, de la ecuación anterior se deriva otra, conocida como la 2ª Ley de Laplace en honor Pierre-Simon Laplace, que hace referencia a la fuerza ejercida por un campo magnético sobre un conductor que transporte una corriente. Conviene señalar que Laplace postuló esta expresión con anterioridad de la de la fuerza de Lorentz.

$$2^{\text{a}} \text{ Ley de Laplace: } f = \int_L I * dl \times B \quad (37)$$

Que expresada en forma diferencial y por unidad de volumen (densidad de fuerza N/m^3 y densidad de corriente A/m^3):

$$f = J \times B \quad (38)$$

De la ecuación (38), un producto vectorial, se deduce que para un conductor que transporte corriente en el seno de un campo magnético, se genera una fuerza para cada diferencial de longitud, cuya dirección es perpendicular tanto al sentido de circulación de la corriente como al campo magnético.

De la 2ª Ley de Laplace (37), son conocidas el módulo de la intensidad, así como su dirección. Asumimos que para un sistema de coordenadas esféricas la corriente solo tiene dirección azimutal. Falta pues saber los valores del campo vectorial magnético, que se extraerán del modelo en 2 dimensiones. Sin embargo, y debido a la ley de Ampère, puede asumirse

que el campo vectorial será nulo en la dirección azimutal, precisamente aquella en que circula la corriente (debido al producto vectorial), ya que esta es la que induce el campo.

Teniendo en cuenta el producto vectorial, puede deducirse que la componente axial (vertical) del campo magnético ocasionará sobre el conductor una fuerza en sentido radial, mientras que la componente radial del campo ocasionará una fuerza en sentido axial. Esto es importante, ya que el tipo de esfuerzo que ocasionan sobre el CTC es diferente. Por un lado, la fuerza que aparece en dirección radial ocasiona, debido a la geometría del CTC, que este se comporte como una viga que se ve sometida a pandeo, es decir, esfuerzo axial (en este apartado se asume desde el principio que el sentido de la fuerza se dirige hacia adentro, lo cual en realidad se corra la simulación). Sin embargo, la fuerza que actúa en dirección vertical somete a la viga a flexión; dado que la fuerza se aplica de forma homogénea debido a la simetría del modelo, esta parte se asemeja a una viga sometida a una carga uniformemente repartida a lo largo de toda su longitud, ocasionando esfuerzos cortantes y de flexión. Puede en este caso desarrollarse la 2ª Ley de Laplace tal que:

$$f = J \times B = \begin{pmatrix} F_r \\ F_\phi \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\phi B_z \\ 0 \\ J_\phi B_r \end{pmatrix} \quad (39)$$

6.2. DISTRIBUCIÓN Y CÁLCULOS DE CARGAS RADIALES Y TENSIONES EN EL CTC (MODELO ANALÍTICO)

Luis Ortiz Berrocal, en su libro *Resistencia de materiales*, define el arco funicular como: "prisma mecánico cuya línea media coincida con la curva funicular de un hilo solicitado por el mismo sistema de cargas". Puesto que

no debe utilizarse el término definido en la definición, debe aclararse que un hilo siempre adoptará esa línea media o curva funicular, puesto que al ser flexible se deforma bajo la acción de la carga, de tal modo que el esfuerzo resultante sea siempre de tracción y uniforme para toda la sección.

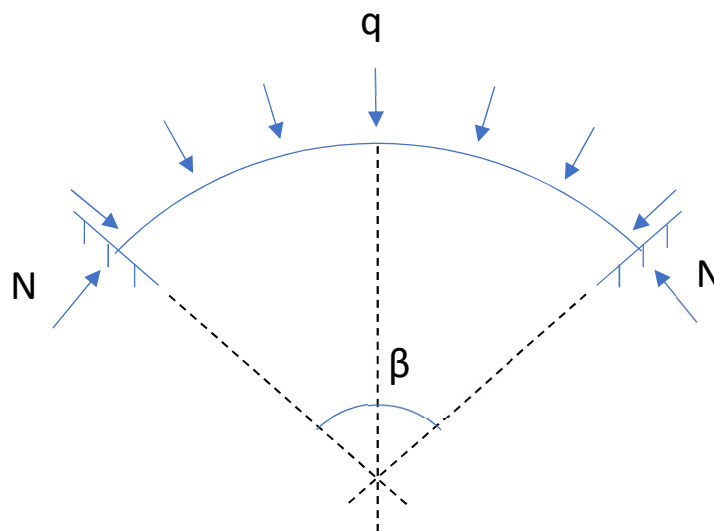


Ilustración 8. Esquema de la distribución de cargas sobre un segmento de CTC.

Para el caso del CTC, primero debe considerarse el esfuerzo al que se verá sometido para saber cuál es la curva funicular correspondiente a ese esfuerzo. Puesto que se trata de una carga siempre en sentido radial y uniformemente distribuida a lo largo de todo el arco, su curva funicular es una circunferencia o arco circular, que es precisamente la forma descrita idealmente por el CTC. Por supuesto, bajo la misma carga un cable se deformaría 'hacia adentro', resultando en un esfuerzo de tracción pura. Sin embargo, el CTC es rígido y por lo tanto no se deforma, al menos no hasta

que colapsa, y en lugar de tracción el esfuerzo al que se verá sometido es de compresión pura, pudiendo dar lugar de esta forma al pandeo.

Se presenta en cambio un problema, y es que esta es una situación ideal. Al aplicar una carga sobre el CTC este se deforma, abandonando esa curva funicular y provocando que el tipo de esfuerzo cambie.

Pueden producirse dos circunstancias, la de pandeo restringido o la de flexión radial. Que se dé una u otro generalmente dependerá de actúe los soportes del arrollamiento. En resistencia de materiales se conocen tres tipos diferentes de apoyos: apoyo móvil, apoyo fijo y empotramiento. Descartando el apoyo móvil, pues no es el caso, para el apoyo fijo pueden producirse dos reacciones, una fuerza vertical y otro horizontal, permitiendo este el giro, por lo que no hay momento en el apoyo. En el empotramiento en cambio no está permitido el giro, por lo que sí aparece un momento flector además de las dos fuerzas.

S. Timoshenko en su *Strength of Materials* describe el comportamiento de un aro circular sometido a pandeo, el cual se deforma adquiriendo la forma de una elipse. Cuando ese aro está soportado, como es el caso del arrollamiento de un transformador, y esos soportes admiten el giro, la deformación adquiere la forma de una semionda, de tal manera que entre cada dos soportes se produce una semionda, y la contraria para el segmento adyacente. Es lo que en [4] denominan pandeo lineal y en [12] pandeo restringido. Más adelante se describen las ecuaciones empleadas para el cálculo de las tensiones y cargas críticas bajo este tipo de comportamiento.

Cuando los soportes que sujetan el CTC no permiten el giro el modo de fallo anterior no puede producirse. En este caso el arco de CTC que se encuentra entre soportes en este caso se comporta como una viga curva, sometida a una carga uniformemente repartida. En este supuesto y en los apoyos sí

aparece un momento flector, que será además la causa principal de la aparición de tensiones en el conductor, y que harán que el CTC se comporte como una viga a flexión. Es lo que en [4] se denomina pandeo no lineal y en [12] flexión radial. Más adelante se describen las ecuaciones empleadas para el cálculo de las tensiones bajo este tipo de comportamiento.

6.2.1. Carga de Pandeo

Se tiene por lo tanto un segmento circular de CTC (ver ilustración 4) con una apertura igual a β (ángulo entre soportes). Dado que no se consideran esfuerzos cortantes ni de flexión, únicamente se ejerce una única reacción paralela al apoyo, la cual se descompone en dos de cara al cálculo siguiendo las direcciones de los ejes cartesianos. Como solo se tiene en cuenta una reacción en el apoyo es igual si este es un empotramiento o bien un apoyo fijo, en cualquier caso, no se trata de un apoyo móvil. Este punto sí cobra importancia para el caso de las cargas en sentido axial. Finalmente la carga, esta es una carga uniformemente repartida a lo largo de todo el segmento y cuya dirección varía para cada diferencial de longitud del segmento, de tal modo que siempre está dirigida hacia el centro geométrico de este. Para calcular la reacción en el apoyo se considera el equilibrio de fuerzas en el eje vertical, descomponiendo tanto la carga como la reacción en sus componentes verticales y horizontales e igualando las primeras.

Al calcular la componente vertical total de la carga es necesario integrar a lo largo de toda la curva, ya que la dirección en que esta es aplicada no es constante. Se integra para el intervalo $[0, \beta/2]$, la mitad del arco, y se multiplica por dos.

$$q_y = 2 * \int_0^{\frac{\beta}{2}} q * \cos\varphi * dl = 2 * \int_0^{\frac{\beta}{2}} q * \cos\varphi * R * d\varphi = 2 * q * R * [\text{sen}\varphi]_0^{\frac{\beta}{2}} \\ = 2 * q * R * \text{sen}(\beta/2) \quad (40)$$

$$N = V + H \rightarrow V = N * \text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (41)$$

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow 2 * N * \text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) = 2 * q * R * \text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) \rightarrow N = q * R \quad (42)$$

Por lo tanto, este esfuerzo axial para un arco funicular o antifunicular no depende de la longitud de este, si no solo del valor de la carga, y del radio del arco o aro. El esfuerzo total de compresión a que se verá sometido el CTC, uniforme para toda la sección, será el esfuerzo en el apoyo dividido entre la sección del CTC.

$$\text{Tensión: } \sigma = N/S \quad (43)$$

6.2.2. Pandeo Libre y Pandeo Restringido

Basado en lo visto en [4 y 13], se presentan las ecuaciones de la carga crítica para el caso del pandeo libre y del pandeo restringido.

$$\text{Carga de Pandeo Libre: } q_{crit} = \frac{3EI}{R^3} \quad (44)$$

$$\text{Tensión Crítica de Pandeo Libre: } \sigma_{crit} = \frac{3EI}{t * h * R^2} \quad (45)$$

En cuanto al pandeo restringido, cuando se introducen los soportes:

$$\text{Carga de Pandeo Restringido: } q_{crit} = \frac{EI}{R^3} * \left[\left(\frac{2 * \pi i}{2\beta} \right)^2 - 1 \right]^3 \quad (46)$$

$$\text{Tensión Crítica de Pandeo Restringido: } \sigma_{crit} = \frac{E * I}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 * \left(\frac{n^2}{4} - 1 \right) \quad (47)$$

En la ecuación anterior se sustituye β por 'n', término que se refiere al número de soportes en la circunferencia.

Pandeo de un perfil simple a compresión

² El termino t hace referencia a la altura de la pletina. El término h hace referencia al espesor de la pletina.

³ El término β sigue haciendo aquí referencia a la apertura de arco entre dos soportes.

Con el objetivo de contrastar los resultados de las formulaciones anteriores, se presenta también el cálculo de la carga crítica de pandeo o "carga crítica de Euler" para un perfil simple sometido a una compresión longitudinal.

Esta carga crítica de Euler se caracteriza por ser el valor a compresión límite o la frontera entre dos comportamientos posibles de una columna sometida a este esfuerzo. El problema se plantea como uno de equilibrio estático, para el cual una columna sometida a compresión es forzada fuera de su posición vertical original una distancia 'y'. En esa nueva posición se plantea la ley de momentos flectores en el punto medio, definida por la carga a compresión, y se resuelva la 'Ecuación General de la Línea Elástica' (XX), la cual se presenta más en profundidad en un apartado posterior. Una vez forzada la columna fuera de su posición original caben tres posibilidades:

- 1ª La columna vuelve a su posición original ($N < N_{CR}$).
- 2ª La columna permanece en su nueva posición (Equilibrio: $N = N_{CR}$).
- 3ª La columna continúa alejándose de su posición original hasta colapsar ($N > N_{CR}$).

La ecuación para hallar la carga crítica de Euler resuelve el problema anterior suponiendo el segundo caso, el único para el cual existe equilibrio estático.

$$N_{CR} = \frac{\pi^2 * E * I_Z}{L^2} \quad (48)$$

Siendo L: Longitud de la columna

E: Módulo de Young

I_Z : Menor módulo de inercia posible del perfil.

6.2.3. Flexión Radial (Pandeo No Lineal)

En [13] se explica el proceso completo para la obtención de las ecuaciones que describen la ley de axiles y la ley de flectores para toda la longitud del arco. Para ello se toma la apertura entre cada dos soportes y se halla el balance de fuerzas verticales, al igual que se hizo aquí anteriormente en el apartado 6.2.1. En este caso, y al existir tres reacciones en los apoyos (axil, reacción perpendicular al arco y momento) el problema es hiperestático y no se puede resolver mediante el simple planteamiento de las ecuaciones del equilibrio estático. Más adelante, para el caso de la carga axial se resuelve completamente un problema similar mediante el teorema de superposición, sin embargo, en este caso en [13] se resuelve mediante el teorema de mínima energía de Castigliano, el cual relaciona la energía potencial elástica en un punto con la deformación, también elástica, que el cuerpo experimenta en ese punto debida a la aplicación de una carga. Según el teorema:F

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad (49)$$

Finalmente, las ecuaciones que sirve para el cálculo del axil y del momento son:

$$N(\varphi) = qR * \left[\frac{\cos \varphi}{2 * \sin \alpha} \left(\frac{1}{f_1(\alpha) + \frac{AR^2}{I} f_2(\alpha) + \frac{E * A}{E_{eq} * A_{stick}}} \right) - 1 \right] \quad (50)$$

$$M(\varphi) = \frac{qR}{2} * \left(\frac{\cos \varphi}{2 * \sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{1}{f_1(\alpha) + \frac{AR^2}{I} f_2(\alpha) + \frac{E * A}{E_{eq} * A_{stick}}} \right) \quad (51)$$

Siendo

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{4 \sin^2 \alpha} \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) \quad (52)$$

$$f_2(\alpha) = \frac{1}{4 \sin^2 \alpha} \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2\alpha} \quad (53)$$

En las ecuaciones (50) y (51) el término en el dividendo $\frac{E \cdot A}{E_{eq} \cdot A_{stick}}$ se refiere a la energía almacenada en los soportes cuando el arco está sometido a la carga. En [4] Geissler prescinde de este término simplificando la ecuación. Dado que en este caso tampoco se dispone de datos sobre los soportes (material y espesor), también se recurrirá a la ecuación simplificada.

$$N(\varphi) = qR * \left[\frac{\cos \varphi}{2 * \sin \alpha} \left(\frac{1}{f_1(\alpha) + \frac{AR^2}{I} f_2(\alpha)} \right) - 1 \right] \quad (54)$$

$$M(\varphi) = \frac{qR}{2} * \left(\frac{\cos \varphi}{2 * \sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{1}{f_1(\alpha) + \frac{AR^2}{I} f_2(\alpha)} \right) \quad (55)$$

A diferencia de las ecuaciones que tanto [4] como [13] emplean para el cálculo de las cargas críticas en el caso del pandeo libre y restringido, en estas las ecuaciones permiten calcular la tensión que se genere en función de las condiciones, no una determinada carga crítica. Esto se debe a que en el caso del pandeo la deformación no tiene nada que ver con la ley de Hooke, o el límite elástico del material, mientras que en el caso de la flexión radial esta sí será llegado el caso una deformación debida a un exceso de tensión.

6.3. DISTRIBUCIÓN Y CÁLCULOS DE CARGAS AXIALES Y TENSIONES EN EL CTC (MODELO ANALÍTICO)

El cálculo de los esfuerzos ejercidos por el campo magnético sobre el CTC en dirección vertical se describe en su totalidad, por ser su contenido más próximo a lo estudiado en este grado. En este caso la carga, que sigue estando uniformemente repartida, aunque con una dirección uniforme en toda la longitud del arco, sí genera unos esfuerzos, principalmente de flexión, que no son despreciables (los esfuerzos cortantes se consideran

despreciables, por ser sus efectos nada comparables frente a los de flexión).

En el apartado anterior, el tipo de apoyo que supusiesen los soportes devenía en un tipo de deformación radial u otra. En el caso de las cargas axiales, el tipo de apoyo que se considere también es relevante a la hora de calcular las tensiones internas, si bien en ambos casos el CTC se va a comportar como una viga a flexión. Por ello se van a presentar los cálculos para el caso en que se considere que el apoyo es equivalente a un empotramiento, el cual no permite ningún tipo de movimiento, y para el caso en que se considere que este es equivalente a un apoyo fijo, el cual no admite desplazamiento, pero sí el giro.

6.3.1. Caso de 'viga' bi-empotrada

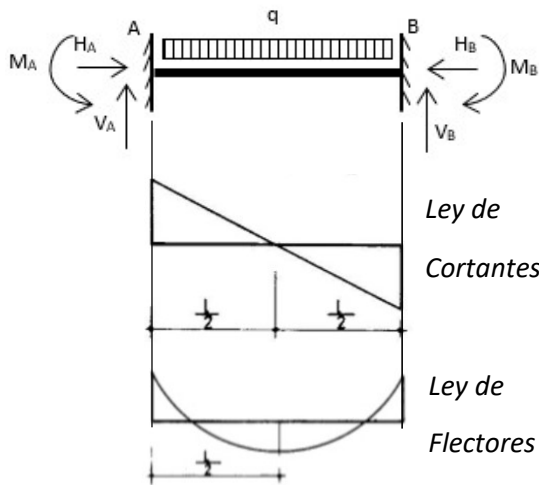
La 'viga' se encuentra empotrada, bi-empotrada en realidad, algo que para las cargas en sentido radial carecía de mayor interés. Sin embargo, este doble empotramiento genera en este caso 6 esfuerzos, tres por cada apoyo, lo que se traduce en el cálculo de una viga hiperestática de tercer grado, es decir, las tres ecuaciones de la estática por sí mismas son insuficientes para su resolución. Para resolver y hallar la ley de momentos flectores que permita determinar la distribución de tensiones, es posible hacerlo por superposición. Todos los cálculos que se presentan a continuación son los que corresponderían a una viga recta, sin embargo, se dan por buenos para el caso actual, en el cual la viga es curva dentro de un plano perpendicular al de aplicación de la carga.

En primer lugar, la 'viga', el cálculo de las reacciones en los apoyos, necesarios para aplicar posteriormente superposición, y las leyes de esfuerzos, que muestran como estos se distribuyen a lo largo de CTC.

$$\sum F_H = 0 \rightarrow H_A = H_B = 0^4 \quad (56)$$

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow V_A + V_B = qL \xrightarrow{V_A=V_B} V_A = V_B = \frac{q * L}{2} \quad (57)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -M_A + qL * \frac{L}{2} + M_B - V_B * L = q * L \rightarrow \cancel{M_A} = \cancel{M_B}^5 \quad (58)$$



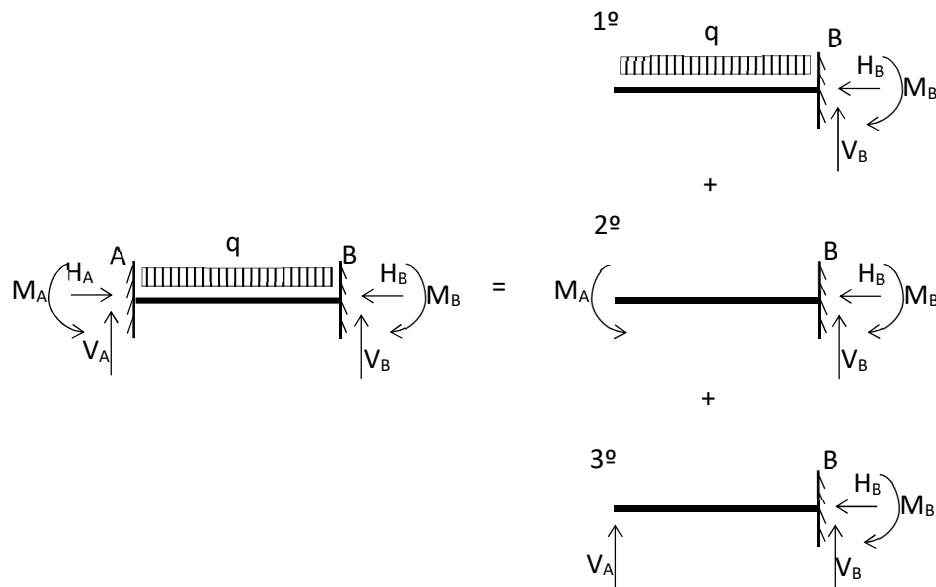
En el cálculo del equilibrio de momentos flectores, M_A y M_B , al ser iguales siempre se despejan, por ello para el cálculo de los momentos en los apoyos es necesario aplicar el teorema de superposición. Este método de resolución consiste en sustituir la viga original bi-empotrada e hiperestática de tercer grado por la suma de tantas vigas isostáticas como cargas haya, cuyos

efectos deben calcularse por separado. Para convertir la viga hiperestática en otra isostática se libera uno de los apoyos, y en su lugar se introduce, en cada una de las vigas por las que se sustituye la original, una de las tres reacciones que origina un empotramiento, además de la carga uniformemente repartida. Puesto que la reacción horizontal en el apoyo es nula, el total de vigas por las que se sustituye la original es tres. En la primera la carga uniformemente repartida, en la segunda el momento que ejerce el apoyo cuyo valor desconocemos; y en la tercera la reacción vertical del apoyo. Una vez están planteadas cada una de las vigas, se haya la ley de flectores de cada viga (y'') "entrando por la derecha" y, aplicando la ecuación diferencial aproximada de la línea elástica, el método de la

⁴ Asumiendo las hipótesis de resistencias de materiales.

⁵ Dada la simetría de la viga, los momentos en los apoyos se suponen iguales, por lo que se despejan.

doble integración y el de superposición puede hallarse la ley general del momento flector de la viga original bi-empotrada en función del valor del momento que desconocemos. Aplicando una condición de contorno a esa ley de flechas podrá despejarse el valor del momento.



$$\text{Ecu. Dif. Aprox. Línea Elástica: } y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_{FZ}}{EI_Z}; \quad (59)$$

$$\text{Método Doble Integración: } y'' = \frac{M_{FZ}}{EI_Z} \rightarrow y' = \int (y'' + C1) dx \quad (60)$$

$$y = \int (y' dx + C2) dx \quad (61)$$

Primera Viga:

$$M_{FZ}(x) = -q * x * \frac{x}{2} \rightarrow y'' = \frac{-qx^2}{2EI_Z} \xrightarrow{\text{Integrando}} y' = \frac{-qx^3}{6EI_Z} + C_1$$

$$C.C.1 : \varphi(x=L) = y'(x=L) = 0 \rightarrow C_1 = \frac{qL^3}{6EI_Z} \rightarrow y' = \frac{-qx^3}{6EI_Z} + \frac{qL^3}{6EI_Z} \rightarrow \text{Ley de Giros}$$

$$\xrightarrow{\text{Integrando}} y = \frac{-qx^4}{24EI_Z} + \frac{qL^3}{6EI_Z} * x + C_2$$

$$C.C.2 : y(x=L) = 0 \rightarrow C_2 = \frac{-qL^4}{8EI_z} \rightarrow y = \frac{-qx^4}{24EI_z} + \frac{qxL^3}{6EI_z} - \frac{qL^4}{8EI_z} \rightarrow \text{Ley de Flechas}$$

Segunda Viga:

$$M_{FZ}(x) = -M_A \rightarrow y'' = \frac{-M_A}{EI_z} \xrightarrow{\text{Integrando}} y' = \frac{-M_A * x}{EI_z} + C_1$$

$$C.C.1 : \varphi(x=L) = y'(x=L) = 0 \rightarrow C_1 = \frac{M_AL}{EI_z} \rightarrow y' = \frac{-M_Ax}{EI_z} + \frac{M_AL}{EI_z} \rightarrow \text{Ley de Giros}$$

$$\xrightarrow{\text{Integrando}} y = \frac{-M_Ax^2}{2EI_z} + \frac{M_AL}{EI_z} * x + C_2$$

$$C.C.2 : y(x=L) = 0 \rightarrow C_2 = \frac{-M_AL^2}{2EI_z} \rightarrow y = \frac{-M_Ax^2}{2EI_z} + \frac{M_ALx}{EI_z} - \frac{M_AL^2}{2EI_z} \rightarrow \text{Ley de Flechas}$$

Tercera Viga:

$$V_A = \frac{qL}{2} \rightarrow M_{FZ}(x) = \frac{qLx}{2} \rightarrow y'' = \frac{qLx}{2EI_z} \xrightarrow{\text{Integrando}} y' = \frac{qLx^2}{4EI_z} + C_1$$

$$C.C.1 : \varphi(x=L) = y'(x=L) = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{qL^3}{4EI_z} \rightarrow y' = \frac{qLx^2}{4EI_z} - \frac{qL^3}{4EI_z}$$

→ Ley de Giros

$$\xrightarrow{\text{Integrando}} y = \frac{qLx^3}{12EI_z} - \frac{qL^3}{4EI_z} * x + C_2$$

$$C.C.2 : y(x=L) = 0 \rightarrow C_2 = \frac{qL^4}{6EI_z} \rightarrow y = \frac{qLx^3}{12EI_z} - \frac{qL^3x}{4EI_z} + \frac{qL^4}{6EI_z} \rightarrow \text{Ley de Flechas}$$

Aplicando ahora superposición, se suman los resultados de la ley de flechas para cada una de la vigas, con lo que se obtiene la ley de flechas general de la viga original:

Superposición: \sum Leyes de Flechas = $y_1 + y_2 + y_3$

$$= \frac{-qx^4}{24EI_z} + \frac{qL^3x}{6EI_z} - \frac{qL^4}{8EI_z} - \frac{M_Ax^2}{2EI_z} + \frac{M_ALx}{EI_z} - \frac{M_AL^2}{2EI_z} + \frac{qLx^3}{12EI_z} - \frac{qL^3x}{4EI_z} + \frac{qL^4}{6EI_z}$$

$$= \frac{-qx^4}{24EI_z} + \frac{qLx^3}{12EI_z} - \frac{M_Ax^2}{2EI_z} - \frac{x}{EI_z} * \left(\frac{qL^3}{12} - M_AL \right) + \frac{L^2}{2EI_z} \left(-M_A + \frac{qL^2}{12} \right)$$

Para despejar el valor de M_A , se aplica de nuevo una condición de contorno. Puesto que se ha vuelto a la viga original, puede decirse que la flecha en A, es decir, en $x=0$ es nula, por tanto:

$$C.C.: y(x=0) = 0 \rightarrow y(x=0) = \frac{L^2}{2EI_z} \left(-M_A + \frac{qL^2}{12} \right) \rightarrow M_A = \frac{qL^2}{12}$$

M_A resulta con signo positivo, ya que el sentido de giro y el criterio de signos ya se tuvo en cuenta y aplicó previamente.

$$\text{Ley de Flechas: } y = -\frac{qx^4}{24EI_z} + \frac{qLx^3}{12EI_z} - \frac{qL^2x^2}{24EI_z} \quad (62)$$

$$\text{La deformación máxima: } y_{Max} \left(x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{qL^4}{384EI_z} + \frac{qL^4}{96 * EI_z} - \frac{qL^4}{96EI_z}$$

$$= -\frac{qL^4}{384EI_z} \quad (63)$$

Con el valor del momento flector que se produce en el apoyo ya puede hallarse la ley de momentos flectores a lo largo de toda la longitud del segmento del CTC.

$$M_{FZ} = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qLx}{2} - \frac{qL^2}{12} \quad (64)$$

Puede comprobarse que el momento flector es igual tanto para $x=0$ como para $x=L$, debido a la simetría.

Finalmente, y través de la ley de Navier, se hallará la distribución de tensiones en la sección del CTC.

$$\text{Navier: } \sigma = \frac{M_{FZ}}{I_Z} * y \quad (65)$$

Al considerar flexión sin esfuerzos cortantes, una mitad del conductor estará sometida a tracción, mientras que la otra estará sometida a compresión, sumándose esta compresión a la producida por el campo magnético en sentido radial, mientras que para $y=0$, situada en el centro del conductor, la tensión debida a la flexión es nula. A esta zona en $y=0$, situada en todo lo largo del conductor, se le denomina fibra neutra.

6.3.2. Caso de 'viga' con dos apoyos fijos

La otra posibilidad en cuanto al apoyo es que este sea de tipo fijo. Este tipo de apoyo, a diferencia del empotramiento, permite que la espira gire en el apoyo, no permitiendo el desplazamiento en ninguna dirección. Si estudiamos este tipo de viga, con dos de esos apoyos, tenemos una estructura hiperestática. Sin embargo, esta estructura en concreto, aun siendo hiperestática permite la resolución mediante las tres ecuaciones clásicas de la estática, por lo que su solución es mucho más sencilla que en el supuesto anterior.

Dado que no existen cargas en sentido horizontal, resolvemos directamente que el esfuerzo en los apoyos en este sentido es nulo.

$$\sum F_H = H_A - H_B = 0 \rightarrow H_A = H_B = 0$$

Dada la simetría, deducimos que el esfuerzo en los apoyos en sentido vertical es igual para ambos apoyos.

$$\sum F_Y = V_A + V_B - q * L \xrightarrow{V_A = V_B} 2 * V = q * l \rightarrow V = \frac{qL}{2}$$

$$\sum M_A = 0 = qL * \frac{L}{2} - V_B * L \rightarrow V_B = \frac{qL}{2}$$

No habiendo momentos en los apoyos, la suposición de reacciones verticales iguales en los apoyos, así como su valor, queda confirmada.

Aplicando ahora, al igual que en el apartado anterior la ecuación diferencial aproximada de la línea elástica:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_{FZ}}{E * I_Z}$$

$$M_{FZ}(x) = \frac{ql}{2} * x - \frac{qx^2}{2} = \frac{1}{2}(qx^2 - qLx) \quad (66)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_{FZ}(x)}{E * I_Z} = \frac{1}{2} \frac{(qx^2 - qLx)}{E * I_Z}$$

$$\text{Integrando: } y' = \frac{1}{2 * E * I_Z} * \left(\frac{1}{3} * qx^3 - \frac{1}{2} * qLx^2 \right) + C_1$$

Recordamos que la derivada primera de la deformación representa el giro. Siendo la 'viga' simétrica deducimos que este se hace cero en el punto medio.

$$y' \left(x = \frac{L}{2} \right) = 0 \rightarrow C_1 = \frac{1}{24} * \frac{qL^3}{E * I_Z}$$

$$\text{Integrando: } y = \frac{1}{2 * E * I_Z} * \left(\frac{1}{12} * qx^4 - \frac{1}{6} * qLx^3 \right) + \frac{1}{24} * \frac{qL^3}{E * I_Z} * x + C_2$$

En este caso podemos afirmar que la flecha es nula en los apoyos, es decir, en $x=0$ y en $x=L$, por lo que resolviendo se obtiene que el resultado de la segunda constante de integración es cero.

$$\text{Ley de Flechas: } y = + \frac{qx^4}{24EI_Z} - \frac{qLx^3}{12EI_Z} + \frac{qL^3x}{24EI_Z} \quad (67)$$

Obtenemos ahora la deformación máxima para este tipo de apoyos, la cual se da para el punto medio, para compararla con la del empotramiento:

$$y_{Max} = y\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} * \frac{qL^4}{E * I_Z} \quad (68)$$

En comparación, la deformación que se produce con un tipo de apoyo que permita el giro es cinco veces superior. Sin embargo, dado que se debe a ese giro, esta deformación superior no tiene por qué traducirse necesariamente en un mayor estrés sobre el papel que haga que este se quiebre.

6.3.3. Suma de esfuerzos

Al sumar las tensiones producidas por el esfuerzo a compresión que se produce debido a la carga en dirección radial, y los esfuerzos de la carga axial, se podrá deducir una zona de máximas tensiones. La zona más solicitada será la mitad superior o inferior, sometida a compresión por parte del esfuerzo de flexión, y dentro de esta, cuanto más alejado del centro mayor la compresión. Además, la zona más solicitada por el esfuerzo de flexión son los extremos, junto a los apoyos. Siendo la zona central también de interés.

$$M_{FZ}(x = 0; x = L) = \frac{qL^2}{12} \rightarrow \text{Extremos del CTC}$$

$$M_{FZ}\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{qL^2}{24} \rightarrow \text{Centro del CTC}$$

Por lo tanto, y en principio, se deduce que la zona de máximas tensiones son los extremos, siendo la tensión en esos puntos:

$$\sigma_{MAX} = \sigma_N + \sigma_{MZ} = \frac{2qR}{S} + \frac{qL^2}{I_Z} * y_{MAX} \quad (69)$$

⁶ En este caso la deformación tiene signo positivo, mientras que en el sub-apartado anterior tenía signo negativo. Ya se ha apuntado que se debe al criterio de signos, y se puede tomar el valor absoluto como el dato relevante.

7. HERRAMIENTAS DEL CÁLCULO

7.1. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Por regla general la resolución de las ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones que, para cada caso, gobiernen un sistema continuo (infinitos grados de libertad) no suelen ser excesivamente complejas. Sin embargo, las complicadas geometrías que se puedan dar, los materiales a simular o los grados de libertad (variables) que podamos querer calcular hacen necesarios los métodos de cálculo numérico y un ordenador para resolver el sistema.

Entre los métodos existentes están aquellos basados en subdominios finitos, el método de elementos finitos (FEM por sus siglas en inglés), el de diferencias finitas (FDM) y el método por volúmenes finitos (FVM). Los tres métodos coinciden en los pasos a seguir para la resolución del sistema:

I. Mallado: El dominio original se divide en subdominios, elementos finitos de pequeño tamaño y forma geométrica simple (Malla de elementos finitos).

II. Derivada de las funciones: Partiendo de la ecuación o ecuaciones diferenciales iniciales que representen la física o físicas a aplicar, se discretiza para cada elemento del mallado, obteniendo una ecuación algebraica, lineal o no, que arroja la solución exacta para cada elemento de la malla. El conjunto de ecuaciones representa un sistema de ecuaciones matricial, del que se puede obtener una solución solo aproximada de todo el dominio por interpolación de los resultados obtenidos para cada elemento.

III. Ensamblaje: Partiendo de los elementos y sus ecuaciones, se reensambla el dominio original, exigiendo continuidad o cumpliendo un balance energético (flujo energético) entre elementos adyacentes.

Posteriormente se resolverá imponiendo previamente unas condiciones iniciales o de contorno (como por ejemplo la temperatura inicial del dominio, o un plano de simetría que, para un modelo que haya sido simplificado, se considere como adiabático).

El método empleado en este caso es el de elementos finitos, basado en ecuaciones diferenciales parciales (PDE's) que describirán las distintas físicas. El método de elementos finitos presenta alguna ventaja fundamental frente a los otros dos. Por un lado, la facilidad para aumentar la precisión del modelo, más aún en geometrías complejas, mejorando la aplicación de las físicas consideradas y obteniendo una solución más aproximada al sistema real. Esto se consigue refinando la malla de elementos finitos, que en este método no tiene tamaño ni forma determinados, por lo que se puede designar por regiones, aumentando la densidad y con ello la precisión en las zonas que se consideren críticas, pero sin aumentar innecesariamente la complejidad computacional del modelo. La otra ventaja es la posibilidad del análisis multifísico. Para el caso de, por ejemplo, un transformador, es necesario modelar las corrientes y campos electromagnéticos, la distribución de temperaturas y flujos de calor, los esfuerzos mecánicos debidos a sollicitaciones electromagnéticas o térmicas, o el comportamiento fluido-térmico-mecánico de la refrigeración. Todos ellos son fenómenos físicamente acoplados que no deben estudiarse por separado. FEM y Comsol Multiphysics, el software empleado y que se presenta a continuación, ofrecen la posibilidad de este acoplamiento multifísico.

7.2. COMSOL MULTIPHYSICS

El programa Comsol Multiphysics en su versión 5.3a será el empleado en este trabajo. Propiedad del Grupo Comsol fundado en 1986, se basó inicialmente en los códigos desarrollados por estudiantes de la Real Universidad Tecnológica de Estocolmo, Suecia. Se trata de un software de análisis y resolución de modelos por el método de elementos finitos el cual, en sus comienzos, allá por la década de 1960, estaba enfocado principalmente en el cálculo de estructuras. Sin embargo, su aplicación se extendió rápidamente a otras ciencias, como el electromagnetismo o la química, demostrándose fundamental en las fases de diseño de cualquier proyecto que requiera del análisis multifísico.

El beneficio principal derivado del uso de una herramienta tal que Comsol es el ahorro de costes de desarrollo. Permite ahondar en las fases de diseño previas a la fabricación de un prototipo, explorando diversas soluciones y ayudando a un mejor entendimiento del funcionamiento del sistema, por lo que el siguiente paso parte de una base mucho más sólida y cercana a la solución ideal y definitiva. Se consigue también reducir los tiempos de desarrollo ya que, aunque se invierte más tiempo en diseño e investigación, reduce los de fabricación y facilita enormemente el análisis. Por último, la comparación retrospectiva entre los resultados de la simulación de un prototipo y los reales de ese mismo sistema proporcionará información sobre la veracidad y exactitud del modelo, la correcta o suficiente aplicación de las físicas y su acoplamiento, lo que será de utilidad en futuros proyectos.

El modelado y simulación en Comsol, al igual que en cualquier otro software de estas características, se realiza en tres fases, preproceso, proceso y postproceso, que se describen brevemente a continuación.

- I. Preproceso: Para el estudio se parte de una geometría CAD, o “dominio”. Durante el preproceso se construye esta geometría, bien a través de la propia interfaz de Comsol, que posee herramientas para ello o, si esta es demasiado compleja, se puede también importar desde softwares especializados de diseño asistido por ordenador, como pueden ser SolidWorks o CATIA. También se definen los materiales de cada parte y las características necesarias para el cálculo. Deben seleccionarse en esta parte también las físicas a aplicar y el acoplamiento entre ellas, mediante sistemas acoplados de ecuaciones en derivadas parciales, los cuales pueden introducirse directamente o a través de la formulación débil, que permite escribir en forma integral las PDE’s, dando lugar a ecuaciones tratables mediante métodos de algebra lineal. Junto a las físicas deben introducirse también las condiciones de contorno, esto es, aquellas variables de valor conocido que afectan a la distribución de las físicas aplicadas. Por último, antes de la simulación debe discretizarse el modelo, esto es, generar la malla de elementos finitos, definiendo en cada parte la precisión necesaria.
- II. Proceso: Una vez preparado el modelo, el siguiente paso es definir las características del estudio que se va a llevar a cabo. Debe elegirse el Solucionador (Comsol suele ofrecer varias opciones en función de los datos introducidos hasta este momento), así como el tipo de estudio, si en estado estacionario, transitorio, en dominio de la frecuencia, etc.
- III. Postproceso: La última fase será el análisis de los resultados. Para ello deben elegirse cuales y en que forman se desean mostrar. En este punto, Comsol también puede generar por defecto representaciones de las distribuciones de cargas o estrés mecánico, el gradiente de temperaturas, deformaciones, gráficas o tablas de



datos. Se deben pues elegir y definir aquellos resultados que sean relevantes para el estudio.

8. TRANSFORMADOR DEL ESTUDIO

Para el estudio se va a emplear los datos de un transformador de la empresa WEG, que en su catálogo ofrece hojas de datos de los transformadores muy detalladas. EL transformador en cuestión es de 10 MVA sumergido en aceite con refrigeración ONAF – convección natural entre los devanados y el aceite dentro de la cuba y circulación forzada de aire en el exterior-, conectado en el primario a una tensión compuesta de 69 kV y en el secundario de 13.8 kV con conexión Dyn1. En nuestro caso, dado que no vamos a hacer ninguna simulación térmica, el tipo de refrigeración es indiferente; simplemente se establecerá una temperatura de 100 °C para todo el modelo. El desfase horario entre el primario y el secundario es también indiferente para el estudio, pero sí es importante la conexión en delta del primario y en estrella del secundario.

A continuación, se presenta la hoja de características completa del transformador.

HOJA DE DATOS



Identificación

Código del producto: 14149413
 Opcional : Transformador abajador
 Norma / Especificación : NBR 5356

Características del ambiente

Instalación : A la intemperie
 Altitud máxima de instalación (m.s.n.m) : 1000.0
 Atmósfera : No agresiva
 Temperatura máxima del ambiente (°C) : 40.0

Características eléctricas

Frecuencia (Hz): 60.0	Fases: Trifásico	Grupo de conexión: Dyn1
-----------------------	------------------	-------------------------

Devanado	Potencia (kVA)		Tensión (kV)	Conexión	Conmutación
	ONAF				
Alta tensión	10000.0		69.0 +/-2x2.5%	Delta	CST
Baja Tensión			13.8	Estrella	

Elevación de temperatura de los devanados media (°C)	65.0
Elevación de temperatura de los devanados punto más caliente (°C)	80.0
Clase del material aislante	E (120 °C)

Pruebas dielectricas	Alta tensión		Baja Tensión	
	Fase	Neutral	Fase	Neutral
Nivel de aislamiento (kV)	72.5		15.0	15.0
Tensión de prueba (kV)	350.0		110.0	110.0
Tensión de prueba (cortado) (kV)	385.0		121.0	
Tensión aplicada (kV)	140.0		34.0	34.0
Tensión inducida (kV)	2 x Vn		2xVn	2xVn

Temperatura de Referencia @ 85.0 °C - ONAF	100%
Pérdidas a vacío (kW)	11.0
Pérdidas en cortocircuito (kW)	
Pérdidas totales (kW)	117.0
Corriente de excitación (%)	0.5

Alta/Baja Tensión	Base		Impedancia @ 85.0 °C - ONAF (%)
	Posición (kV)	Potencia (kVA)	
	69.0 / 13.8	10000.0	10.0

Refrigeración	ONAF
Nivel de ruido (dB)	70.0
Descargas parciales (pC)	300.0
Corriente de inrush (Apk)	
Fator K	K1

Factor de carga [%]	Regulación (100% de carga)		
	ONAF (Φ = 0.8)	ONAF (Φ = 0.9)	ONAF (Φ = 1)
100	6.9	4.11	1.32

Rev.	Resumen de los cambios	Ejecutado	Verificado	Fecha
Ejecutor				
Verificador			Página	Revisión
Fecha	22/01/2019		1 / 2	

**RESISTENCIA MECÁNICA DE LOS DEVANADOS DE TRANSFORMADORES DE POTENCIA
FRENTE A LAS CORRIENTES DE CORTOCIRCUITO | ALBERTO RODRÍGUEZ LOSTAL**

HOJA DE DATOS



Factor de carga [%]	Rendimiento		
	ONAF ($\Phi = 0.8$)	ONAF ($\Phi = 0.9$)	ONAF ($\Phi = 1$)
25	99.27	99.34	99.41
50	99.25	99.325	99.4
75	99.08	99.17	99.26
100	98.86	98.975	99.09

Características constructivas

Forma constructiva :	Conservador con bolsa
Líquido aislante :	Mineral naftenico A
Pintura de acabado :	Cinza munsell N 6,5
Material de los conductores AT/BT :	Al/Al
Boquillas de alta tensión :	Superior
Boquillas de baja tensión :	Superior

Accesorios

Pruebas

Rutina: Si
 Opcional: De acuerdo con orden de compra
 Especial: De acuerdo con orden de compra

Notas

Las informaciones contenidas son sólo para orientación. Sujeto a cambios sin previo aviso.

Rev.	Resumen de los cambios	Ejecutado	Verificado	Fecha
Ejecutor			Pagina 2 / 2	Revisión
Verificador				
Fecha				

8.1. PARÁMETROS DE DISEÑO DEL TRANSFORMADOR

Para llevar a cabo la simulación es necesario conocer su geometría interna. Como ya se ha dicho se desconocen los parámetros de diseño concretos del transformador empleado en la simulación, por lo que a continuación van a estudiarse los parámetros de diseño de los elementos necesarios, que serán el núcleo, los devanados y las sujeciones de estos y a calcularse los valores definitivos.

8.1.1. El núcleo

Para determinar la sección del núcleo, aunque se hará solo de forma aproximada, se seguirá el mismo proceso que en [10]. Se calcula la sección neta en función del flujo y de la inducción. El flujo se calculará en función de la tensión por espira (esta es necesaria a su vez para conocer el número de espiras de cada devanado), que a su vez depende de la potencia. Para el flujo suponemos un valor constante de 2.1 Teslas.

$$Sección_{Núcleo} = \frac{\phi_m}{B}; \quad (B = 2.1 T) \quad (70)$$

$$\phi_m = \frac{E_t}{4.44 * f} \quad (71)$$

$$E_t = k * \sqrt{S_n * 10^{-3}} \quad (72)$$

Para devanados de cobre, la constante k adquiere valores entre 0.37 y 0.45. Se tomará un valor general de 0.40, de esta manera la sección total del núcleo depende únicamente de la potencia del transformador, que será un tercio de la potencia aparente total para cada fase. La sección finalmente hallada (cilíndrica) no será exacta; en cualquier caso, y para los objetivos del proyecto, es suficiente con una aproximación. En cuanto a la altura, será la de los devanados completos.

Existe otro método para hallar la sección de núcleos para transformadores de muy bajas potencias, empleado generalmente en la construcción de transformadores para aplicaciones “caseras”. Se halla la sección total en cm^2 como la raíz cuadrada de la potencia activa en vatios.

$$Sección_{Núcleo} = \sqrt{P} \quad (73)$$

En cualquier caso, se empleará el primer método, apto para grandes transformadores y en la que el parámetro fundamental es la potencia aparente, que es el dato más relevante en transmisión de potencia, y del que se dispone.

8.1.2. Los devanados

Para este trabajo, debe someterse un tramo de un CTC al paso de una corriente de cortocircuito, con el objetivo de comprobar si las fuerzas de Lorentz provocan el colapso de este, con una deformación plástica súbita por pandeo. Sin embargo, para llevar a cabo ese estudio es necesario conocer, no solo el valor de las corrientes de cortocircuito para un transformador en concreto, sino también la geometría de sus devanados y su distribución. Este es un dato difícil de conseguir que los fabricantes no proporcionan. Por ello, la geometría del CTC de estudio se basará en los datos de un fabricante de CTCs (en concreto DeAngeli Proddotti), de los que sí se dispone, aunque no en relación con las aplicaciones concretas a que se destinan; por lo que es de esperar que la geometría final del CTC a la que se llegue no sea de la de una empresa dedicada a ello y con experiencia en el sector. En la siguiente tabla se presentan las características del fabricante, y se comparan con los usados por Daniel Geissler y Thomas Leibfried en [4, 5].

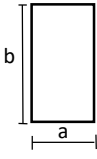
	TABLA COMPARATIVA DE LA GEOMETRÍA DEL CTC							
	Hilo Individual							
	DeAngeli Prodotti		Geissler (Artículo 2015)			Geissler (Artículo 2017)		
	Cu	Al	A	B	C	A	B	C (epoxy)
a (mm)	0,8 - 3,25	1,5 - 3,25	1,4			1,5	1,4	1,13
b (mm)	2,5 - 12,5	5,0 - 12,5	8,3			5,15	8,3	5,7
$N = b/a$	$2,5 < N < 7,5$	$2,5 < N < 7,0$	5,93			3,43	5,93	5,04
$S \neq a \times b$ (mm ²)	4,35 - 35	8,0 - 35	-			-		-
Haz Completo del CTC								
Nº de hilos	5 - 85		11	21	41	19	21	37
Ancho (Radial) (mm)	5 - 80		8,4	15,4	29,4	15	15,4	21,47
Altura (mm)	6 - 27		16,6			10,3	16,6	11,4
Ancho/Alto	< 6		0,5	0,93	1,77	1,46	0,93	1,88

Tabla 5. Comparación de características de CTC.

Por otro lado, el uso de CTCs es obligado en los devanados de baja tensión, que por otro lado son los interesantes de cara a este estudio, sin embargo, no siempre se usan en el devanado de alta tensión y, si las corrientes no son demasiado altas, no se considerarán CTCs. En su lugar se empleará un conductor simple o flat paper wrapped wire de una sección adecuada.

Para la estimación de las dimensiones del CTC, se tendrán en cuenta las corrientes nominales y las de cortocircuito. No conociendo los factores de diseño que son realmente determinantes, cuando las corrientes no sean excesivamente altas, se tomarán valores del ancho de la pletina bajos, lo que en la práctica ayuda a reducir el efecto pelicular o efecto Hall. Así mismo, valores bajos de las corrientes de cortocircuito permitirán elegir valores altos de la relación ancho/alto, lo que también previene la aparición del efecto pelicular, de las corrientes parásitas y las grandes diferencias de tensión inducidas en las pletinas y entre pletinas. A medida que las corrientes crezcan, serán necesarios conductores mecánicamente más fuertes, lo que se traduce en pletinas más anchas y con un ratio ancho/alto más bajo y próximo a la unidad.

Para el cálculo total de pletinas se aplicará a estas un factor de relleno de 0.95, ya que estas no son perfectamente rectangulares. En la práctica este

**RESISTENCIA MECÁNICA DE LOS DEVANADOS DE TRANSFORMADORES DE POTENCIA
FRENTE A LAS CORRIENTES DE CORTOCIRCUITO | ALBERTO RODRÍGUEZ LOSTAL**

valor varía aproximadamente entre 0.91 y 0.99, por ello se aplica un valor intermedio.

Una vez calculadas las intensidades de cortocircuito, se comprobará que la potencia del cortocircuito trifásico no es superior a la recogida por la norma, ya que se considera que esa es la máxima potencia que puede entregar la red. De serlo, se hallará la nueva intensidad, más baja, acorde a esa potencia aparente máxima.

Tensión más elevada para el material, U_m kV	Potencia aparente de cortocircuito MVA	
	Práctica actual en Europa	Práctica actual en Norteamérica
7,2; 12; 17,5 y 24	500	500
36	1 000	1 500
52 y 72,5	3 000	5 000
100 y 123	6 000	15 000
145 y 170	10 000	15 000
245	20 000	25 000
300	30 000	30 000
362	35 000	35 000
420	40 000	40 000
525	60 000	60 000
765	83 500	83 500

NOTA Si no está especificado, se debería considerar un valor entre 1 y 3 para la relación entre la impedancia homopolar y la impedancia directa de la red.

Tabla 6. Potencia aparente de cortocircuito de la red a una tensión dada. Fuente: Norma AENOR UNE EN 60076-05.

En cuanto a la distribución de los devanados, el devanado de alta tensión se supone configurado como un devanado de tipo anillo. Estos devanados están compuestos de varias vueltas de un conductor plano, arrollando cada vuelta sobre la anterior, sin que haya ninguna distancia entre ellas. Sí existe en cambio una separación entre anillos, es decir, entre cada altura del devanado, de forma que pueda circular el aceite para la refrigeración. Estos devanados son bastantes resistentes, además de soportar menores fuerzas.

Sobre la distribución del devanado de baja tensión, se parte del mismo esquema presentado en [4], con cada vuelta del devanado separada 5 mm axial y radialmente de las demás. El número de capas se establecerá en función de los resultados de la simulación del modelo en dos dimensiones.

8.1.3. Sujeciones de los devanados

En cuanto a las sujeciones de los devanados, existen dos factores fundamentales que afectan su configuración. La primera, y seguramente la más importante, es la refrigeración. La intensidad que circula a través de los devanados genera una gran cantidad de calor por efecto Joule. Éste debe ser evacuado a fin de evitar daños en el transformador, especialmente en el papel aislante, y los soportes entorpecen esa tarea. Estos soportes, generalmente de madera, suponen una barrera que evita la correcta circulación del flujo de aceite de refrigeración que contiene la cuba del transformador. Por lo tanto, cuantos menos soportes sean necesarios tanto más eficaz y eficiente será la refrigeración.

Por otro lado, esos soportes son fundamentales. El propio peso de los devanados es muy elevado, y la separación entre espiras también es fundamental para asegurar la correcta refrigeración. Además, la capacidad para soportar cortocircuitos de la que trata este trabajo depende directamente de la configuración de estos soportes. A menor número de soportes mejor refrigeración, pero también peor sujeción, y unos soportes ubicados demasiado lejos unos de otros darían lugar a secciones en 'voladizo' demasiado grandes, cuya resistencia a las fuerzas electromagnéticas de cortocircuito sería escasa.

Por lo tanto, en lo que a los soportes se refiere es fundamental llegar a un equilibrio, en el cual se asegure la mejor refrigeración con un sistema que no se encuentre sobredimensionado innecesariamente, y que por lo tanto sea ineficiente; pero para el cual también este asegurada la resistencia

mecánica de los devanados. Este es el punto fundamental de este trabajo y, dado que se desconocen los parámetros exactos de estos soportes para el transformador de estudio, tratarán de establecerse los requerimientos mínimos de sujeción, en base a las características del transformador y la configuración de los devanados de este.

8.2. CÁLCULOS SOBRE LAS CARACTERÍSTICAS DEL TRANSFORMADOR DEL ESTUDIO

Transformador ONAF 10000 kVA 69 kV – 13.8 kV Conexión Dyn1

Tensión compuesta del primario: 69 kV

Tensión compuesta del secundario: 13.8 kV

Primario en Delta – Tensión de los devanados: 69 kV

Secundario en Estrella – Tensión de los devanados: $13.8/\sqrt{3}=7.97$ kV

Impedancia del transformador: 10%

Corriente nominal del primario:

$$I_{1n} = \frac{S_n}{3 * V_{1n}} = \frac{10 * 10^6}{3 * 69 * 10^3} = 48.31 \text{ A}$$

Impedancia base del primario:

$$Z_{np} = \frac{3 * (69 * 10^3)^2 (V)}{10 * 10^6 (VA)} = 1428.3 \Omega$$

Impedancia del transformador en valor absoluto visto desde el primario:

$$Z_p = 0.1 * Z_{np} = 142.83 \Omega$$

Corriente de cortocircuito del primario:

$$I_{1cc} = \frac{V_{1n}}{Z_p} = \frac{69 * 10^3 (V)}{142.83 (\Omega)} = 483.1 \text{ A}$$

Máxima corriente de choque en el primario:

$$I_{1choque} = 2\sqrt{2} * I_{1cc} = 1366.39 \text{ A}$$

Corriente nominal del secundario:

$$I_{2n} = \frac{S_n}{3 * V_{2n}} = \frac{10 * 10^6}{3 * 7.97 * 10^3} = 418.24 \text{ A}$$

Impedancia base del secundario:

$$Z_{ns} = \frac{3 * (7.97 * 10^3)^2 (V)}{10 * 10^6 (VA)} = 19.056 \Omega$$

Impedancia del transformador en valor absoluto:

$$Z_p = 0.1 * Z_{np} = 1.9056 \Omega$$

Corriente de cortocircuito del secundario:

$$I_{2c} = \frac{V_{2n}}{Z_p} = \frac{7.97 * 10^3 (V)}{1.9056 (\Omega)} = 4182.41 A$$

Máxima corriente de choque en el secundario:

$$I_{2choq} = 2\sqrt{2} * I_{2cc} = 11829.64 A$$

Potencia de cortocircuito:

$$S_{cc} = 3 * V_n * I_{cc} = 3 * 7.97 * 10^3 * 4182.41 = 100 MVA$$

Potencia máxima de cortocircuito:

$$S_{ccMax} = 3 * V_n * I_{choqu} = 3 * 7.97 * 10^3 * 11829.64 = 282.85 MVA$$

Devanados del transformador:

Primario: La corriente a través del primario es baja, por lo que no se considera CTC.

Densidad de corriente en el cobre: $\rho = 3 A/mm^2$

$$I_{1n} = 48.31 A \rightarrow A_{primario} = \frac{I_{1n}}{\rho} = 16.10 mm^2$$

Conductor rectangular $\rightarrow 2 \times 8.5 mm$

Secundario: La corriente del secundario es ya elevada como para considerar el uso de un CTC.

$$I_{2n} = 418.24 A \rightarrow A_{secundario} = \frac{I_{2n}}{\rho} = 139.41 mm^2$$

Relación N alta para evitar el efecto pelicular.

Poco espesor de pletina debido a las corrientes de cortocircuito no demasiado altas.

$$a = 1.12 \text{ mm con } N = 6 \rightarrow b = 6.72 \text{ mm} \rightarrow S = 7.52 \text{ mm}^2$$

$$\text{Factor relleno } k = 0.95 \rightarrow S' = 7.15 \text{ mm}^2 \rightarrow n^{\circ} \text{ pletinas} = \frac{139.41 \text{ mm}^2}{7.15 \text{ mm}^2} = 21$$

Sección del núcleo:

$$E_t = 0.4 * \sqrt{\frac{10}{3} * 10^6 * 10^{-3}} = 23.09 \text{ V} \rightarrow \phi_{max} = \frac{23.09}{4.44 * 60} = 0.087 \text{ Wb}$$

$$\text{Sección}_{\text{Núcleo}} = \frac{\phi_{max}}{2.1} = 0.0413 \text{ m}^2 = 41\,280.6 \text{ mm}^2$$

$$r = 114.63 \text{ mm} \approx 115 \text{ mm}$$

Número de espiras de los devanados:

$$\text{Tensión por espira} = 23.09 \text{ V}$$

$$\text{Primario: } N^{\circ} \text{ Espiras} = \frac{69 * 10^3}{23.09} = 2988.3 \approx 2990 \text{ espiras}$$

$$\text{Secundario: } N^{\circ} \text{ Espiras} = \frac{7.97 * 10^3}{23.09} = 345.17 \approx 345 \text{ espiras}$$

9. MODELOS DE SIMULACIÓN

Para la simulación van a realizarse dos modelos. El primero es un modelo en 2 dimensiones para el cálculo de la distribución del campo magnético y la densidad de fuerza en los devanados. El segundo modelo es uno en 3 dimensiones que, partiendo del dato de la densidad de fuerza del modelo 2D, se usará para hallar la distribución de tensiones. Ambos modelos van a emplearse para hacer dos tipos de estudios diferentes. El primero es un estudio estático para el cual se emplea el dato de la máxima corriente de choque. El segundo estudio es un estudio temporal. En este último, las corrientes simuladas poseen la componente simétrica y la transitoria, por lo que la fuerza a la que se ven sometidos los devanados no es constante. La duración de este estudio será aquella durante la cual la componente transitoria tenga una aportación apreciable, pues es cuando la fuerza alcanzará sus valores máximos.

9.1. MODELO 2D AXISIMÉTRICO

Para calcular la distribución del campo magnético de fuga en los devanados que determine la fuerza a que estos se ven sometidos, se recurre a un modelo en 2 dimensiones axisimétrico, esto es, un modelo que se configura en dos dimensiones pero que es simétrico respecto de un eje de radio cero, por lo que al hacer la revolución respecto de ese eje se obtiene un modelo y sus resultados en tres dimensiones. Puesto que la sección de CTC que se quiere estudiar se considera un segmento de circunferencia perfectamente circular; y dado que la corriente solo posee dirección azimutal, lo que conlleva un campo magnético inducido que solo posee componentes radiales y axiales (verticales), esta opción de modelado resulta muy apropiada y útil, siendo más sencillo y computacionalmente más eficiente que un modelo 3D.



Para esta simulación no es necesario considerar ningún acoplamiento entre físicas. Puesto que los únicos datos de entrada del modelo son la geometría simulada, las corrientes que circulen por los devanados y las condiciones de contorno; y únicamente se pretenden obtener la distribución del campo magnético y las fuerzas sobre los devanados, pero no sus efectos, solo son necesarias las ecuaciones del electromagnetismo.

9.1.1. Geometría y distribución del modelo

En un primer momento, para la distribución de los devanados en los modelos, se pensó en utilizar una configuración similar a la de [7]. En ese estudio se tomaban solo unas pocas vueltas de los devanados. Sin embargo, el objetivo de aquel no era comprobar los efectos de un cortocircuito en un transformador en concreto, sino comprobar la resistencia de los devanados.

Durante la realización del proyecto, al comparar el resultado de simulaciones con distintas configuraciones de los devanados (unos con solo unas pocas vueltas y otros mucho más completos), se comprobó que los resultados del campo magnético y la inducción en los devanados variaban considerablemente. Como se puede ver en las siguientes capturas, la máxima inducción -que se da en la zona entre los devanados- aumenta a medida que los devanados crecen, Por lo tanto, debía emplearse un modelo que un amplio número de vueltas para cada devanado, con el objetivo de obtener valores lo más próximos posibles a los reales. Se puede observar también que la máxima inducción crece mucho más rápidamente a medida que los devanados aumentan en dirección radial de lo que lo hace si los devanados aumentan en altura. De esto se deduce que, en el diseño de transformadores, y en lo que a la resistencia mecánica se refiere, es interesante hacerlos considerablemente más altos que anchos.

Espiras Secundario	Niveles en Altura	Niveles Radialmente	Inducción máxima (Teslas)
--------------------	-------------------	---------------------	---------------------------

RESISTENCIA MECÁNICA DE LOS DEVANADOS DE TRANSFORMADORES DE POTENCIA FRENTE A LAS CORRIENTES DE CORTOCIRCUITO | ALBERTO RODRÍGUEZ LOSTAL

4	2	2	1
8	2	4	1,4
12	2	6	1,7
12	6	2	1,4
25	5	5	2,4

Tabla 7. Tabla comparativa de la inducción para diferentes configuraciones de los devanados del modelo.

Es importante remarcar que, para todos los modelos que se presentan, sean o no los definitivos, se ha realizado una configuración de los devanados de tal forma que se respete, de forma aproximada, la relación de transformación -la cual es ligeramente superior a 8-. En todos los casos el devanado de alta tensión posee cuatro veces más espiras para cada altura que el devanado de baja tensión, así como el doble de alturas. Por ejemplo, un modelo con una configuración del devanado de baja tensión de 2 columnas y 2 alturas, es decir, 4 espiras; tendrá un devanado de alta tensión con 8 columnas y 4 alturas, es decir 32 espiras, 8 veces más que el secundario.

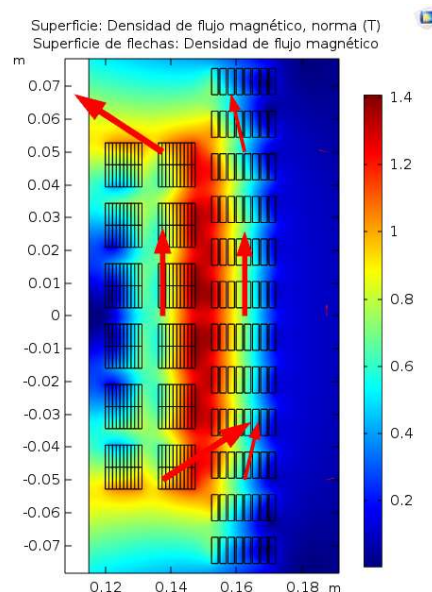


Ilustración 9. Devanados mucho más desarrollados en altura que en anchura.

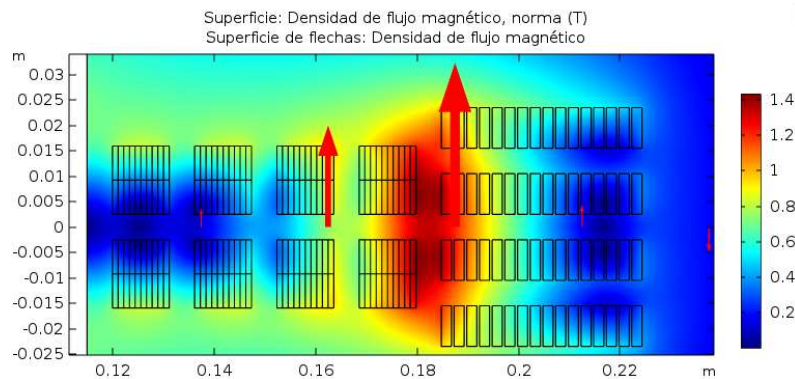


Ilustración 10. Devanados más desarrollados en anchura que en altura.

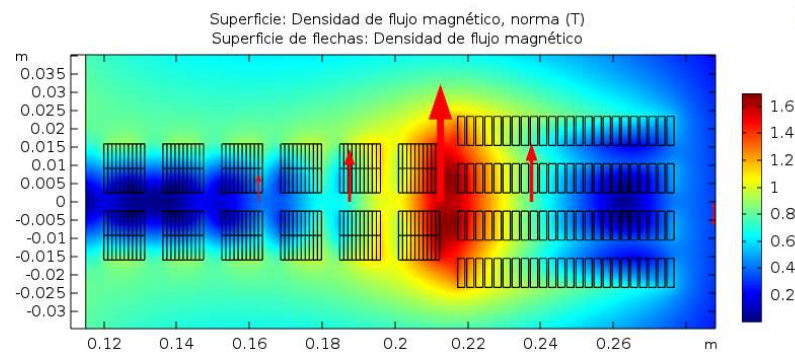


Ilustración 11. Devanados mucho más desarrollados en anchura que en altura.

Finalmente, y ante la necesidad de realizar las simulaciones con un modelo que fuera capaz de replicar la severidad de las condiciones de un cortocircuito en el transformador real, pero que a su vez fuese lo más ligero posible, de tal forma que su computación pudiera realizarla un ordenador personal, se realizaron una serie de pruebas. El devanado fue aumentando progresivamente de tamaño en cada una, y con el aumento de espiras aumentó también la inducción entre los devanados.

En las diversas pruebas, se pudo comprobar que la diferencia entre la inducción al emplear 4 y 5 columnas para el devanado de baja tensión era bastante considerable, siendo esta mucho menor al usar 4 columnas, por lo que se decidió emplear este esquema. Por otro lado, en lo que a la altura se refiere, en los modelos con 5 columnas era necesario emplear, al menos, entre 15 y 20 niveles, ya que los niveles de inducción seguían aumentando;

sin embargo, para el modelo de 4 columnas a partir de las 10 alturas la inducción apenas sí aumenta.

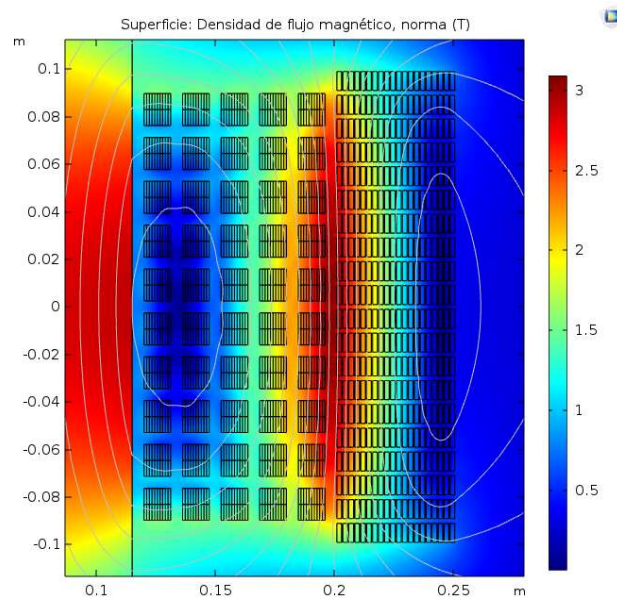


Ilustración 12. Modelo con devanado secundario de cinco vueltas en dirección radial, alcanzando una inducción entre devanados alta.

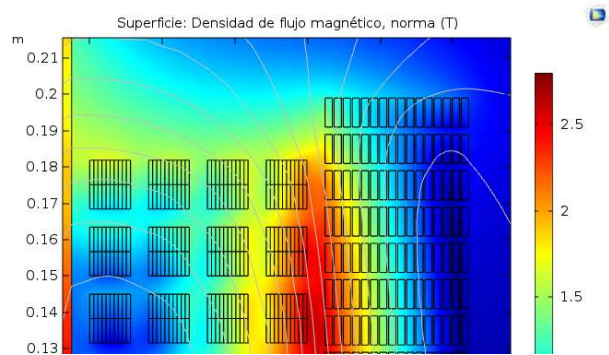


Ilustración 13. Modelo con 4 columnas en dirección radial y 20 capas en dirección axial.

Finalmente, el modelo de simulación presenta 4 niveles en dirección radial y 10 en dirección axial para el devanado en baja tensión (40 espiras), por lo que el devanado de alta tensión presenta 16 capas de espiras en dirección radial y 20 en dirección axial (320 espiras), manteniendo así la relación de transformación original.

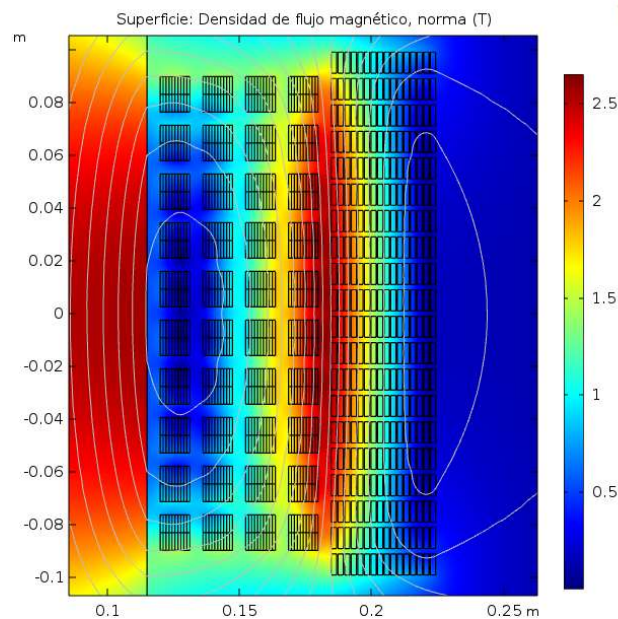


Ilustración 14. Distribución de los devanados finalmente empleada para las simulaciones.

9.1.2. Materiales

Para este modelo, la característica principal de los materiales es su permeabilidad magnética, la cual es un dato del que Comsol dispone para cada material de su biblioteca. En el transformador real, el núcleo y los devanados se encuentran dentro de la cuba, y esta se inunda de aceite, el cual permite una mejor refrigeración (ONAF). Para el modelo, y dado que la permeabilidad relativa del aceite y la de el aire es la misma, se define el entorno como aire, con una permeabilidad relativa prácticamente igual a la unidad (en realidad, el dato en Comsol es directamente 1). Los devanados se definen como cobre. El material está igualmente disponible en la librería de Comsol, y su permeabilidad relativa también es 1. Por último, el material del núcleo es el único realmente interesante, ya que su permeabilidad es la única que no se considera igual a la del vacío. Los núcleos de los transformadores están fabricados con chapas de acero laminadas de grano orientado. Esto ayuda a reducir enormemente las pérdidas debidas a las corrientes parásitas y también aquellas debidas a los ciclos de histéresis del material. En este caso, se elige acero blando "sin pérdidas". No se

pretenden calcular las pérdidas por lo que ese tipo de material es adecuado. Su permeabilidad relativa, a diferencia de la del aire y la del cobre, no es lineal. Dado que su función es concatenar la totalidad del flujo magnético, lo que se busca es precisamente que alcancen la saturación magnética para valores relativamente bajos del campo magnético. Los datos de permeabilidad también los proporciona Comsol. En este caso una curva HB, al contrario de la BH habitual. Lo más común es calcular la inducción (B) en un material dado un campo magnético (H), que según la ley circuital de Ampère:

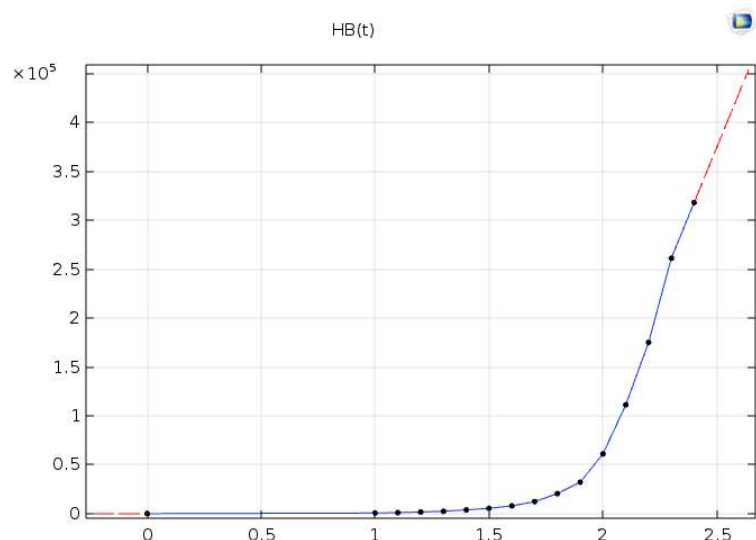


Ilustración 15. Curva HB del acero dulce empleado en el núcleo para el modelo 2D. Fuente: Biblioteca de Comsol Multiphysics.

$\nabla \times H = J$, siendo J el vector densidad de corriente. Sin embargo, para realizar este cálculo, Comsol recurre al concepto de vector de potencial magnético (A).

9.1.3. Físicas del Modelo. Corrientes y Distribución del campo magnético.

A la hora de calcular los valores de la inducción magnética (B) en un material, que posteriormente nos permita calcular la densidad de fuerza tal que:

$$f = J \times B \tag{74}$$

Siendo J el vector densidad de corriente; lo más habitual es tomar el valor del campo magnético (H) y de la permeabilidad relativa de ese material, de tal forma que:

$$\nabla \times H = J \quad (75)$$

$$B = \mu_0 \mu_r * H \quad (76)$$

Sin embargo, Comsol no lo hace de esta manera. En su lugar Comsol calcula la inducción magnética tomando el valor del vector de potencial magnético (A), cuyo rotacional da lugar al vector inducción magnética.

Cálculo en Comsol de la inducción magnética

Siguiendo el conjunto de las leyes de Maxwell para explicar como Comsol calcula la distribución de campo; en primer lugar se tiene la Ley de Gauss para el campo electromagnético. Según esta, es sabido que a diferencia del campo eléctrico, el campo magnético no diverge, es decir, las líneas de campo dibujan trayectorias cerradas, lo que físicamente significa que un volumen finito de espacio no puede contener ni una fuente ni tampoco un sumidero del campo magnético. Expresado esto último matemáticamente en forma integral:

$$\oint_S \vec{B} * d\vec{S} = 0 \rightarrow \text{En forma diferencial: } \vec{\nabla} * \vec{B} = 0 \quad (77)$$

La no divergencia de los campos magnéticos permite a su vez definir el vector potencial magnético. Siendo nula la divergencia del campo, puedo definirse un campo vectorial A, tal que la divergencia de su rotacional, por demostración matemática y para cualquier campo vectorial, siempre sea nula:

$$\vec{\nabla} * \vec{B} = \vec{\nabla} * (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (78)$$

En segundo lugar se tiene la ley de Ampère, la cual relaciona un campo magnético inducido con la causa que lo produce. Siendo esta una corriente estacionaria (lo es, pues se ha definido un estudio magneto-estático), la ley de Ampère define lo que se conoce popularmente como ley de la mano derecha, es decir, una corriente que circule genera a su alrededor un campo

magnético circular que encierra la corriente que lo induce y cuyo rotor apunta en la misma dirección y sentido que esa corriente. Integralmente:

$$\oint_C \vec{B} * d\vec{l} = \mu_0 * \int_S \vec{J} * d\vec{S} \rightarrow \text{En forma diferencial: } \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (79)$$

Siendo \vec{J} el vector densidad de corriente. Cabe señalar que para corrientes o campo que varíen con el tiempo esta relación es incorrecta; sin embargo, para el estudio que se propone es suficiente.

Por lo tanto, se tiene que el vector inducción magnética es igual al rotacional de un vector de potencial magnético, que su divergencia es nula, y que su rotacional es proporcional al vector densidad de corriente que lo induce, por lo tanto se puede decir:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} * (\vec{\nabla} * \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (80)$$

Para terminar de definir completamente el vector de potencial magnético, es necesario definir como nula su divergencia, al igual que la del campo magnético, por lo que:

$$\vec{\nabla} * \vec{A} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} * (\vec{\nabla} * \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (81)$$

En consecuencia, se obtiene una expresión que define el vector de potencial magnético a partir del vector densidad de corriente, siendo la inducción el rotacional de este vector de potencial magnético. Para hallar pues el campo magnético (H) es necesaria una relación o curva BH (al contrario de la curva HB habitual, aunque es lo mismo). En Comsol, y en general, esta relación dependerá del material para el que se pretenda definir esta relación. Por ejemplo, para el aire presente en el modelo, se trata simplemente de una relación lineal, al igual que para el cobre. Esto es debido a que su permeabilidad relativa es prácticamente la unidad, por lo que su permeabilidad absoluta es la del vacío y sus curvas HB o BH son conocidas. No pasa lo mismo sin embargo con el acero del núcleo. La función de este

es precisamente la de canalizar el flujo, y deben hacerlo además en una dirección preferente, por lo tanto su permeabilidad absoluta es mucho más alta que la del vacío y además es un medio anisotrópico, cuya saturación magnética corresponde a valores más altos de inducción, los cuales se alcanzan con valores relativamente bajos del campo magnético. En este caso la relación BH dependerá de la permeabilidad relativa específica de cada material, por lo tanto esta relación nos la da directamente Comsol de su biblioteca de materiales, simplificando enormemente la simulación.

Leyes de Ampère en Comsol

Para la aplicación de todo lo anterior en el modelo se configuran cuatro leyes de Ampère, una para cada dominio. Los cálculos que estas leyes conllevan es algo que Comsol realiza automáticamente, sin embargo, el proceso sigue los pasos vistos en el apartado "Distribución del campo magnético". Se realiza de esta manera dado que Comsol necesita, como ajuste de entrada para las leyes, características del material para el que se quiere calcular la distribución del campo, o la relación constitutiva deseada entre el campo y la inducción magnética en el material. Para el aire, se define un material no sólido, dado que sus propiedades magnéticas no dependen en ningún caso de orientaciones ni deformaciones, y el dato de la permeabilidad relativa del aire como el de relación constitutiva entre el campo y la inducción. Para los devanados también se toma el dato de permeabilidad relativa, pero se elige la opción de material sólido (en este caso resulta innecesario, dado que no hay un acoplamiento con una física estructural y no van a darse deformaciones, aun así, sería lo correcto). Por claridad se introduce una ley para el devanado primario y otra para el secundario, si bien podría introducirse una para ambos devanados. Por último, el núcleo posee igualmente su propia ley, en este caso se marca la opción de material sólido, dado que su permeabilidad sí depende de su orientación y como relación constitutiva la curva BH para el acero dulce.

Corrientes

Para introducir el dato del valor de las corrientes en el modelo, inicialmente se recurrió a la condición en el dominio *Densidad de corriente*. Sin embargo, y como se explicará más adelante, en el apartado correspondiente a los estudios, los resultados obtenidos de esta forma en los estudios temporales generaban dudas. Finalmente, se empleó esta condición para el estudio estático, mientras que para el estudio temporal se recurrió a la condición de *bobina*. Dado que cada uno de los estudios recurre a una solución diferente, ambas se explican más en detalle en el apartado dedicado a cada uno de ellos.

9.1.4. Malla

El siguiente paso a la configuración de las físicas, y el último de este pre-proceso, es la elección del mallado de elementos finitos. Dado que la región del modelo que más interesa es el dominio del devanado de baja tensión, en un primer momento se introdujo una única malla, pero con configuraciones diferentes para ese devanado de baja tensión, por un lado, y el resto del modelo por otro.

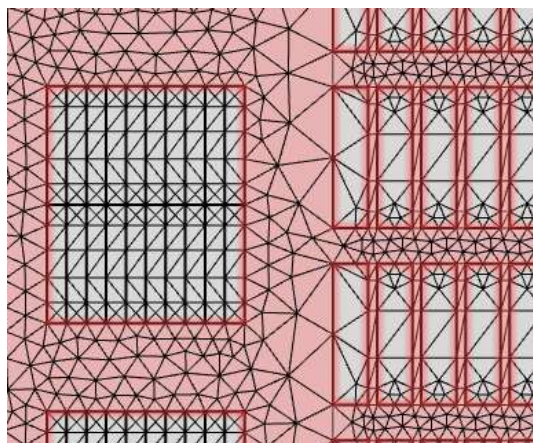


Ilustración 17. Detalle de la malla de los devanados

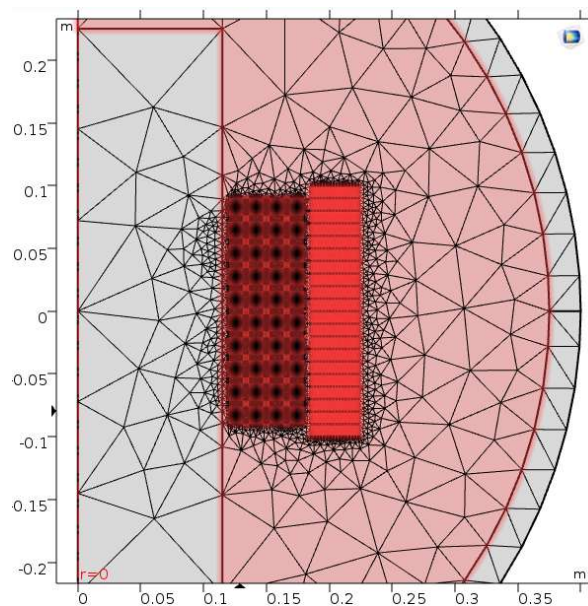


Ilustración 16. Detalle del mallado del núcleo, los devanados y el aire circundante.

Sin embargo, la complejidad del modelo, mayor de la inicialmente proyectada hizo aumentar su peso computacional. Si en



un primer momento se pensó en una malla de elementos *finos* para el devanado secundario y *normales*⁷ para el resto del modelo, finalmente se optó por un mallado triangular libre para el devanado de baja tensión con elementos de tamaño 'normal' y otro, también triangular libre, pero con un tamaño de los elementos definido como *extra-grueso*⁸, para el resto del modelo, ya que el detalle en esa zona no interesa.

⁷ El tamaño mínimo del elemento normal es de 0.00024m y el máximo de 0.0536m

⁸ El tamaño mínimo del elemento extra-grueso es de 0.0128m y máximo de 0.16m, si bien la física puede asignar valores inferiores en las zonas en que sea necesario, como así ocurre en el modelo.

9.2. ESTUDIOS DENTRO DEL MODELO 2D

Como ya se ha dicho, dentro del modelo en 2 dimensiones van a realizarse dos estudios diferentes. El primero será un estudio magneto-estático, mientras que el segundo será un estudio magneto-temporal. El objetivo es: por un lado, obtener los valores de las fuerzas máximas que puedan llegar a darse en el transformador cortocircuitado y comprobar sus efectos; por otro poner a prueba una simulación que trate de aproximar algo mejor la situación real, introduciendo los valores instantáneos de las corrientes, simétrica y transitoria para obtener los valores también instantáneos de las fuerzas, y hacer una simulación del modelo en tres dimensiones también en el dominio del tiempo, que tenga en cuenta el breve período de tiempo durante el cual van a experimentarse esas fuerzas, así como los efectos inerciales de las masas.

9.2.1. Estudio Estático

Para el estudio estacionario, el valor de las corrientes de cortocircuito que circulan a través de cada espira de los devanados será el de la corriente de choque. Como ya se explicó anteriormente, este valor depende de la corriente simétrica de cortocircuito y del factor de cresta. Sin embargo, para el transformador seleccionado se desconoce la relación X/R, únicamente se conoce su impedancia en tanto por uno. En consecuencia, para el factor de cresta se empleará el apunte que aparece en la normativa [2]. Según este, cuando la relación X/R es superior a 14, el factor de cresta depende de la potencia; tomando un valor de 2.55 para transformadores de categoría 2 y 2.69 para transformadores de categoría 3. Dado que nuestro transformador se enmarca dentro de la categoría 2, se empleará el valor de 2.55. Por lo tanto, los valores de corriente para el estudio estático son:

$$I_{1CC} = 483.1 A \rightarrow I_{1choq} = 2.55 * I_{1CC} = 1231.9 A$$

$$I_{2CC} = 4182.41 A \rightarrow I_{2Choq} = 2.55 * I_{2C} = 10665.1 A$$

Para la simulación, se va a definir una densidad de corriente uniforme a través de todas las espiras, ya que se desprecian fenómenos como el efecto Hall, por lo que tomando la sección de cada espira se calcula la densidad de corriente en los devanados:

$$J_{1Choq} = \frac{I_{1Choq}}{A_{Primario}} = \frac{1231.9 A}{16.10 mm^2} = 76 515 527.95 A/m^2$$

$$J_{2Choq} = \frac{I_{2Choq}}{A_{Secundario}} = \frac{10665.1 A}{139.41 mm^2} = 76 502 012.12 A/m^2$$

La sección de los conductores, tanto del primario como del secundario, dependen de las corrientes nominales de diseño, lo que hace que la densidad de corriente en ambos devanados finalmente sea muy similar. Por lo que para la simulación se toma un valor común.

$$J_{Choq} = 7.65 * 10^7 A/m^2$$

En cuanto al sentido de circulación de las corrientes, en el apartado sobre el principio de funcionamiento del transformador ya se explicó que la fuerza electromotriz, inducida por el campo eléctrico del primario, es tal que su campo magnético se opone a la variación en la corriente que lo originó (signo negativo de la ley de Faraday Lenz (5)). En el caso de un transformador, esto hará que los rotacionales de las corrientes en los devanados primario y secundario sean siempre opuestos, ya que la inducida en el secundario surge en oposición a la inductora del primario. Por lo tanto, y para el modelo, se asignará a cada devanado la misma densidad de corriente, para un modelo axisimétrico J_{ϕ} , pero a uno de ellos con signo positivo y al otro con signo negativo. Ambas corrientes se definen en dirección azimutal.

9.2.2. Estudio temporal

En el estudio temporal, las corrientes definidas son la suma de la corriente simétrica de cortocircuito y la componente transitoria. Las amplitudes de la componente simétrica son las calculadas en el apartado correspondiente a los cálculos del transformador. Sin embargo, ya que para el estudio estático se uniformizó la densidad de corriente en ambos devanados, para el estudio temporal se parte de esos. Por su parte, la componente transitoria queda tal y como se calculó en el apartado correspondiente a las corrientes de cortocircuito, ecuación (24).

$$J_{instantánea} = \sqrt{2} * \frac{J_{choqu}}{2.55} * (\text{sen}(\omega * t + \phi) + e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)})$$

Dado que $\tau = \frac{L}{R}$, y que para el transformador se ha asumido una relación XR igual a 14:

$$\tau = \frac{L}{R} \xrightarrow{X_L=L*\omega} \tau = \frac{X_L/\omega}{R} \xrightarrow{\frac{X}{R}=14; w=60 \text{ Hz}} \tau = 0.037136 \text{ s}$$

Puesto que las corrientes de cada devanado deben tener rotacionales inversos, el valor instantáneo para cada uno es:

$$J_{1-instantánea} = \sqrt{2} * \frac{J_{choqu}}{2.55} * (\text{sen}\left(\omega * t - \frac{\pi}{2}\right) + e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)})$$

$$J_{2-instantánea} = \sqrt{2} * \frac{J_{choque}}{2.55} * (\text{sen}\left(\omega * t + \frac{\pi}{2}\right) - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)})$$

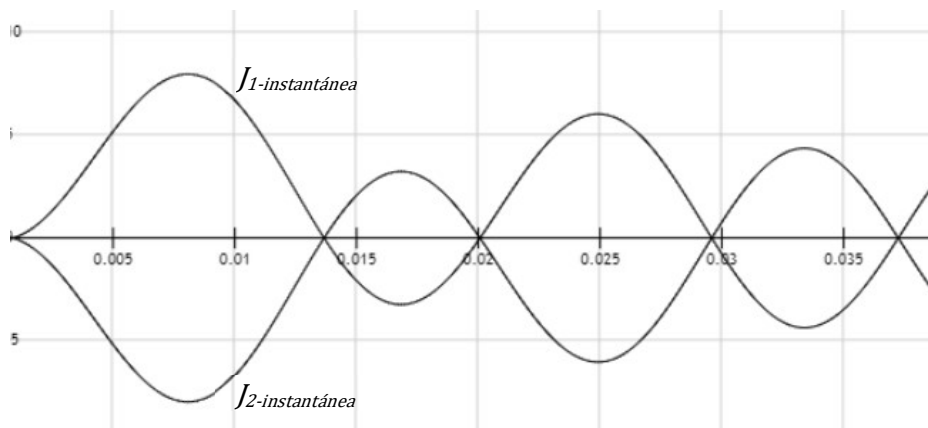


Ilustración 18. Gráfica de las corrientes instantáneas de cortocircuito (la amplitud no se corresponde con la del transformador).

Como ya se dijo anteriormente, en un principio se empleó la condición de densidad de corriente en los devanados para definir las corrientes de cortocircuito en el modelo. Sin embargo, surgen problemas a la hora de hacer las simulaciones, principalmente debido a los efectos de la inducción. Los problemas se deben a que, a la hora de correr las simulaciones, el campo magnético inducido por la corriente de cada una de las espiras induce a su vez corrientes en las demás, no respetándose en las espiras las corrientes anteriores.

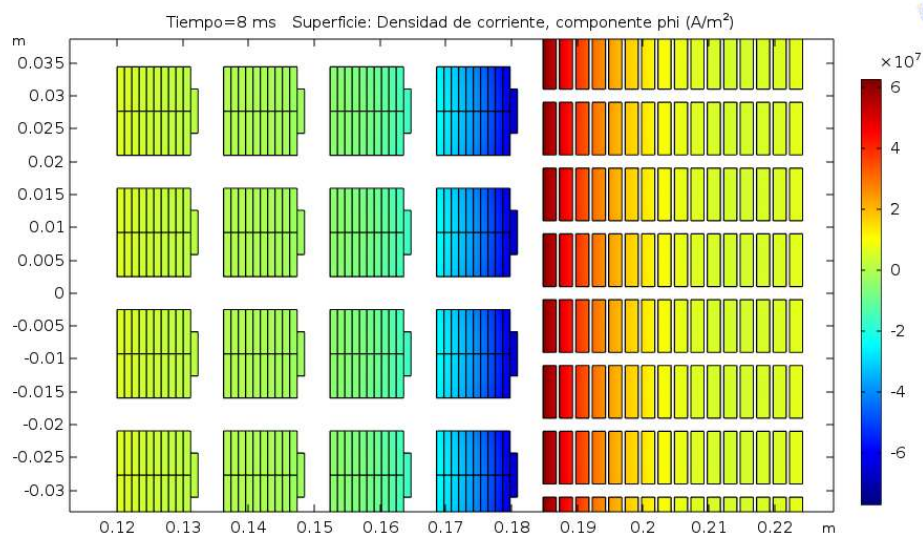


Ilustración 19. Densidad de corriente en los devanados para el estudio temporal.

Naturalmente, esto no sucede en un transformador (en realidad sí que se dan efectos inductivos dentro de cada espira, pero los efectos son despreciables y, además, la transposición de las pletinas viene a evitar los fenómenos de inducción de tensiones y corrientes no deseadas en los devanados). Sin embargo, en las simulaciones los valores de estas corrientes inducidas son tales que alcanzan órdenes de magnitud similares a los de las corrientes definidas, distorsionando completamente el valor de las corrientes a través de los devanados, llegando incluso a anularla en las espiras más alejadas del espacio entre los dos devanados, y haciendo que

el valor de la corriente no sea uniforme en todas las espiras (ver ilustraciones 7 y 8).

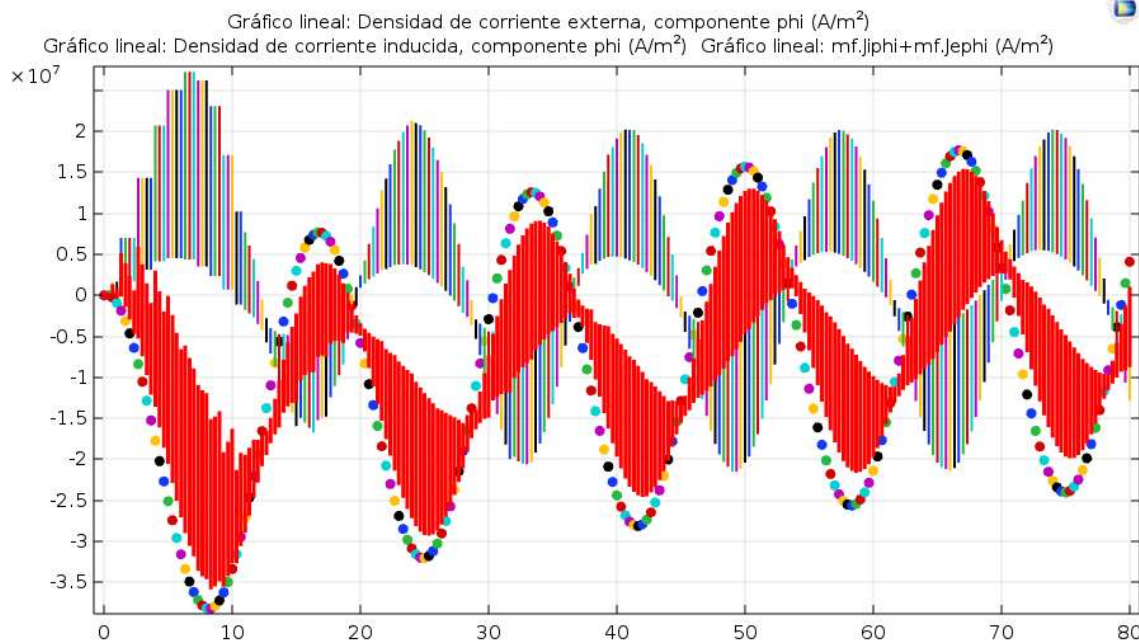


Ilustración 20. Estudio temporal. Corriente a través de una espira del secundario. El punteado representa la corriente definida (simétrica más transitoria), el ciclo la corriente inducida y en rojo la corriente total a través de la espira.

Lógicamente, la uniformidad de la corriente en cada una de las espiras es un requisito fundamental de la simulación. Además, Estas corrientes, a su vez, ocasionan que la evolución del campo magnético y la inducción sea irregular (ilustración 12). Otra peculiaridad de los resultados del estudio temporal es el desfase que se produce entre las corrientes y el campo magnético (ilustración 12).

Este desfase entre el campo y las corrientes en realidad sí que se da en un transformador, al menos cuando este se encuentra funcionando bajo carga normalmente. En la ilustración 9

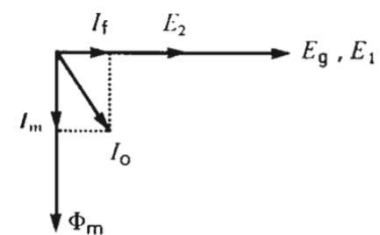


Ilustración 21. Gráfico de desfases entre tensiones e intensidades en un transformador.

puede verse que el campo magnético está en fase con la corriente magnetizante, y 90° retrasado respecto de la tensión. El campo también estará retrasado un ángulo \varnothing respecto de la corriente, en función de lo inductiva que esta sea (en principio ningún transformador

de transporte o distribución está diseñado para alimentar cargas capacitivas). En cambio, cuando se trata de un cortocircuito, si asumimos el circuito de la **figura 4.5**, la impedancia equivalente del transformador es inductiva pura -pues la parte resistiva se desprecia-, por lo que la corriente de cortocircuito estará 90° retrasada respecto de la tensión y en fase con el campo magnético.

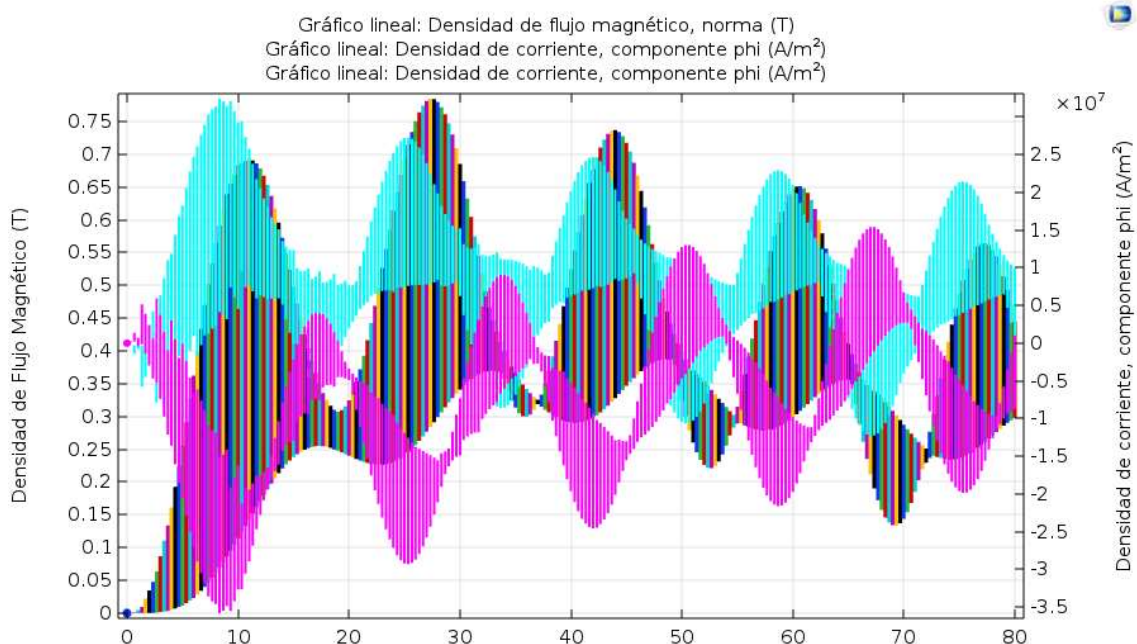


Ilustración 22. Estudio temporal. Inducción en la misma espira de la ilustración 8 (ciclo), en rosa la corriente a través de esa misma espira y el azul representa la corriente a través del primario. Inducción y corrientes desfasadas.

Para solventar el problema de las corrientes no uniformes a través de todas las espiras de cada devanado se recurre de nuevo al estudio estacionario. Al haber realizado este estudio anteriormente ya se ha comprobado que este problema no se da (naturalmente, pues la inducción de tensiones y corrientes requiere de la variación del campo magnético en el tiempo). Por lo tanto, se realiza un estudio estacionario y se introduce un barrido paramétrico que calcule la solución para cada instante t , con el mismo intervalo y el mismo paso que un estudio temporal.

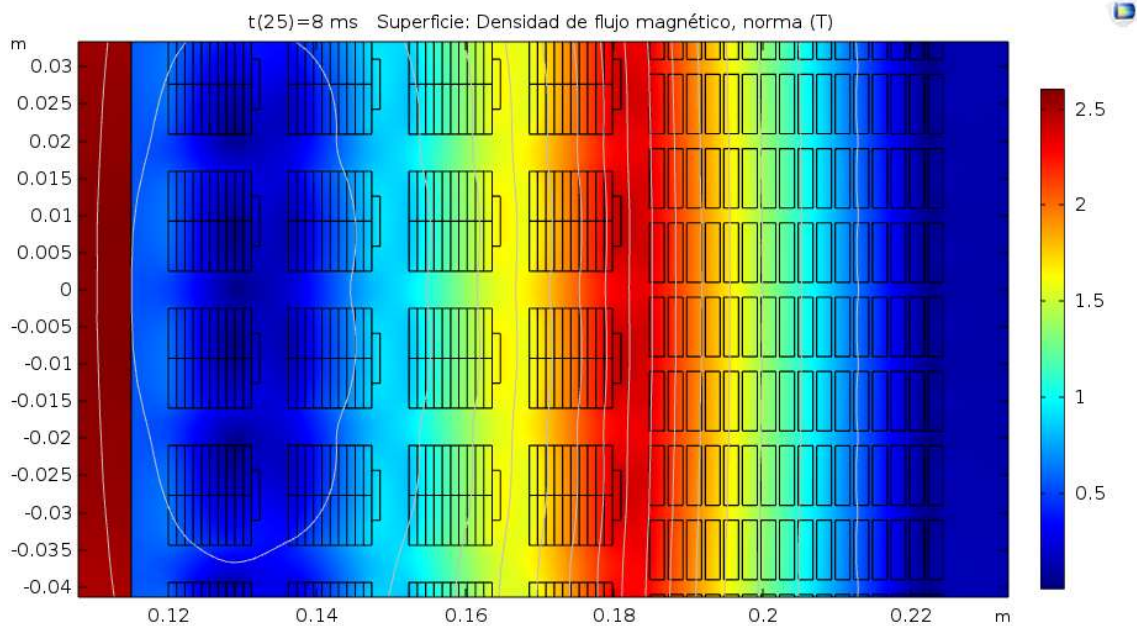


Ilustración 23. Estudio paramétrico. Inducción en la zona entre devanados.

El estudio paramétrico logra solventar el problema de las corrientes y, además, al ser un estudio estacionario, las corrientes y el campo se encuentran en todo momento en fase. Sin embargo, no deja de ser un estudio estacionario al que se le introduce el valor instantáneo de las corrientes para cada instante t , pero no un auténtico estudio dependiente del tiempo. Por último, las diferencias entre los valores máximos del campo magnético y la inducción de los estudios temporal y paramétrico son muy grandes. En el caso del estudio estacionario con barrido paramétrico, para el cual

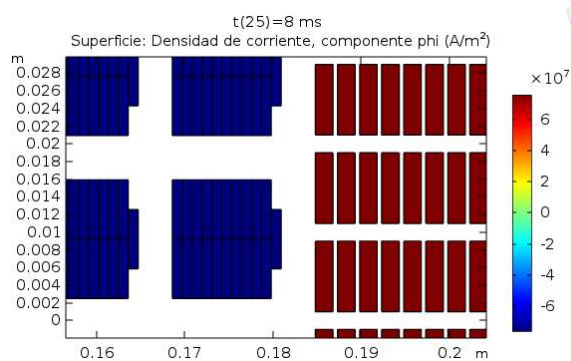


Ilustración 24. Estudio paramétrico. Densidad de corriente en los devanados.

alcanzan valores de 2.5 teslas en un medio de permeabilidad la del vacío, se antojan difíciles, teniendo en cuenta que bajo carga el núcleo difícilmente supera los 2 teslas, siendo este un medio con una permeabilidad mucho más alta.

Dadas esas razones, finalmente se consigue configurar un modelo temporal en el que la densidad de corriente en todas las espiras de cada devanado sea constante. Para ello, se emplea la condición de bobina. Con ella, el programa entiende desde el principio que lo que se está modelando es una bobina, y que necesariamente todas las espiras deben conducir exactamente la misma corriente. Esta condición aúna las dos empleadas anteriormente en los modelos estáticos y temporal -las de la ley de Ampère y la de densidad de corriente-, por lo que las leyes de Ampère definidas para los devanados ya no son necesarias y se anulan.

El caso del devanado primario y el del secundario no son exactamente el mismo. En el caso del primario, cada dominio seleccionable representa toda una espira de la bobina completa, mientras en el caso del secundario, cada dominio representa solo una pletina, teniendo cada espira o vuelta de la bobina veintiún pletinas. Sin embargo, dada esa separación

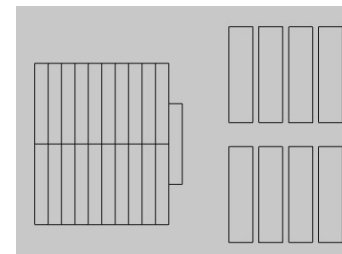


Ilustración 25. Detalle de la separación en dominios de los devanados.

de las espiras del secundario en dominios independientes, se configuran ambos devanados exactamente igual, considerando cada pletina como una vuelta de bobina por sí misma. Ambos devanados se configuran como grupos completos de bobina para los cuales, además, es necesario definir no ya la densidad de corriente, sino el valor absoluto de corriente en cada dominio. Por lo que los valores definitivos de corriente para cada devanado son:

$$i_{1cc} = Jest * rA * hA * \sin\left(w * t - \frac{\pi i}{2}\right) + Jest * rA * hA * \exp(-t/tau)$$

$$i_{2c} = Jest * rB * hB * \sin\left(w * t + \frac{\pi i}{2}\right) - Jest * rB * hB * \exp(-t/tau)$$

Siendo rA , rB , hA y hB , los espesores y las alturas de los conductores.

Comparación Estudio Paramétrico en 't' y Temporal con bobinas

Los resultados del estudio temporal con dominios de bobina vienen a confirmar y avalar los valores obtenidos del estudio estacionario paramétrico, obteniendo resultados muy similares, tanto para los valores del campo, inducción, corrientes y fuerzas ejercidas sobre los devanados. Además, si bien ambos son con diferencia los estudios más pesados de cuantos se han realizado, el estudio paramétrico es algo más rápido en la simulación, así como más sencillo en su configuración. Por su parte, este último estudio temporal presentó algunos problemas de convergencia en el resolvidor no lineal. Para lograr que convergiese se hizo necesario ajustar varias veces la configuración por defecto del resolvidor no lineal, ya que con cada iteración y las sucesivas modificaciones del modelo se repetían los errores debidos a esa falta de convergencia. Para la configuración final, en la sección *Completamente Acoplado*, debajo de *Resolvidor Temporal*, el método no-lineal se cambió de *Constante* a *Automático (Newton)*, y se redujo el factor de amortiguamiento inicial, de 1 a 0.9.

A continuación, se presenta una captura de cada estudio comparando sus resultados, en las que puede verse que estos son aparentemente idénticos, apreciándose solo pequeñas diferencias bajo un estudio más detallado.

Finalmente, los datos que se tendrán en cuenta para seguir adelante con la simulación del modelo en tres dimensiones serán los del estudio paramétrico, dada su mayor ligereza en la simulación, pero sobre todo porque a la hora de sacar resultados resulta mucho más rápido.

Con el objetivo de realizar una estimación del error que se asume al elegir el estudio paramétrico, van a tomarse los datos de la fuerza radial en la pletina de transposición de una espira del devanado de baja tensión, en concreto la ubicada más próxima al devanado de alta tensión, en la quinta altura. Como se verá más adelante esta es la espira que experimenta mayores fuerzas.

EL dato de la fuerza, como también se verá más adelante, se obtiene mediante una sonda de domino, aplicada a esa pletina en concreto, la cual calcula el promedio de la densidad de fuerza en todo el dominio. Ambos datos se toman para el instante $t = 8$ segundos que, como se puede ver en las gráficas, es aquel para el que se producen las mayores fuerzas.

$$\text{Estudio Temporal} \rightarrow F_{\text{Radial}} = -1.8793 * 10^8 \frac{N}{m^3}$$

$$\text{Estudio Estacionario Paramétrico} \rightarrow F_{\text{Radial}} = -1.8342 * 10^8 \frac{N}{m^3}$$

$$\text{Error} = \frac{|F_{\text{Est.Paramétrico}}| - |F_{\text{Temporal}}|}{|F_{\text{Temporal}}|} = 0.0239 \rightarrow \text{Err} (\%) = 2.39\%$$

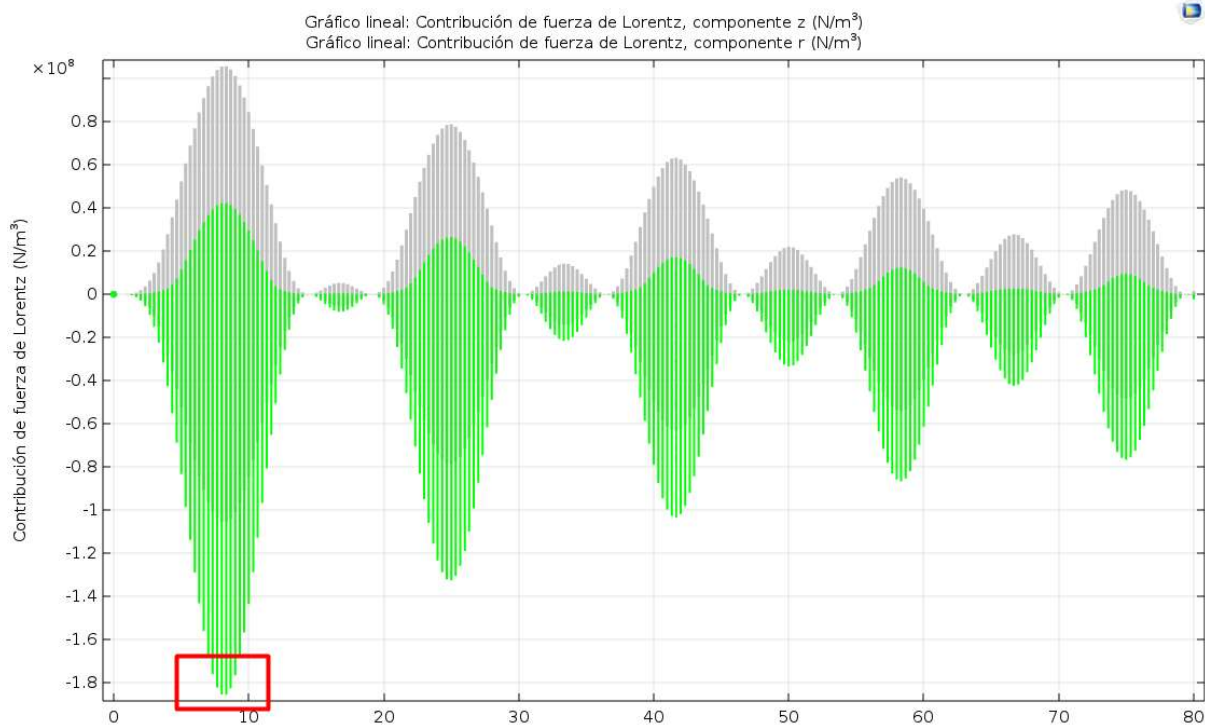


Ilustración 26. Estudio temporal. Fuerzas axiales (gris) y radial (verde) en el devanado de baja tensión

RESISTENCIA MECÁNICA DE LOS DEVANADOS DE TRANSFORMADORES DE POTENCIA FRENTE A LAS CORRIENTES DE CORTOCIRCUITO | ALBERTO RODRÍGUEZ LOSTAL

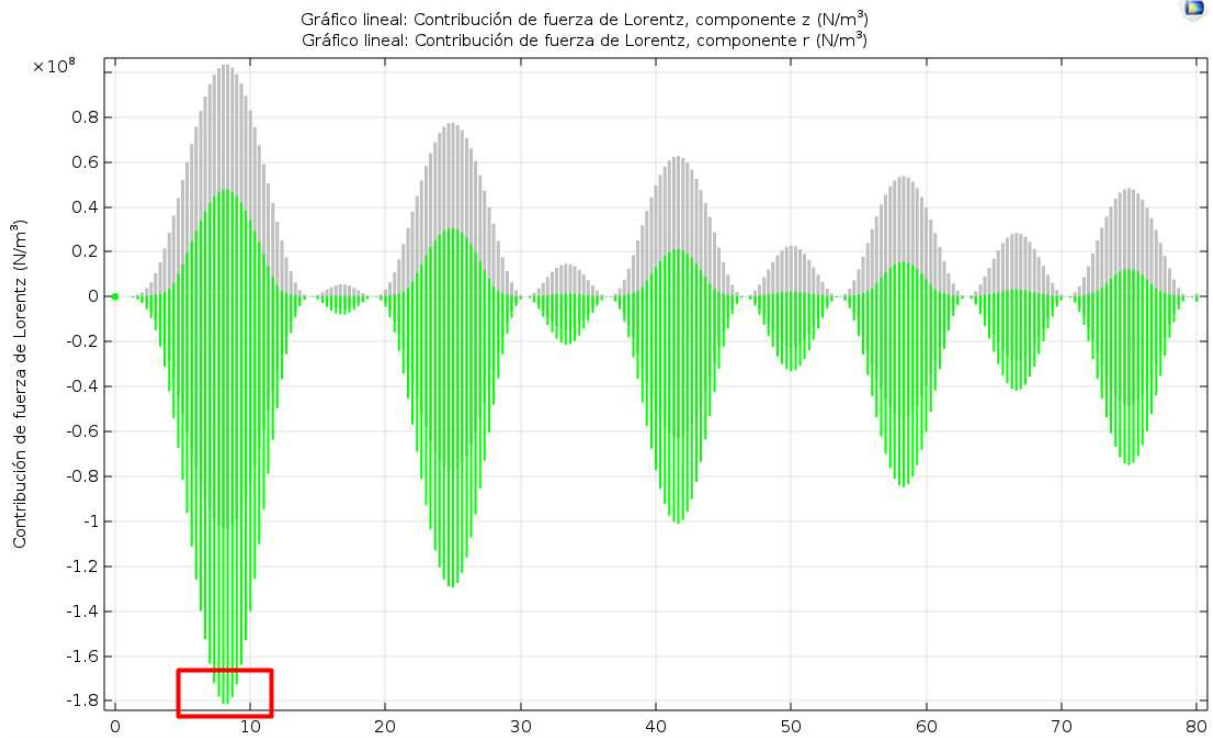


Ilustración 27. Estudio estacionario con barrido paramétrico en t . Fuerzas axial (gris) y radial (verde) en el devanado de baja tensión.

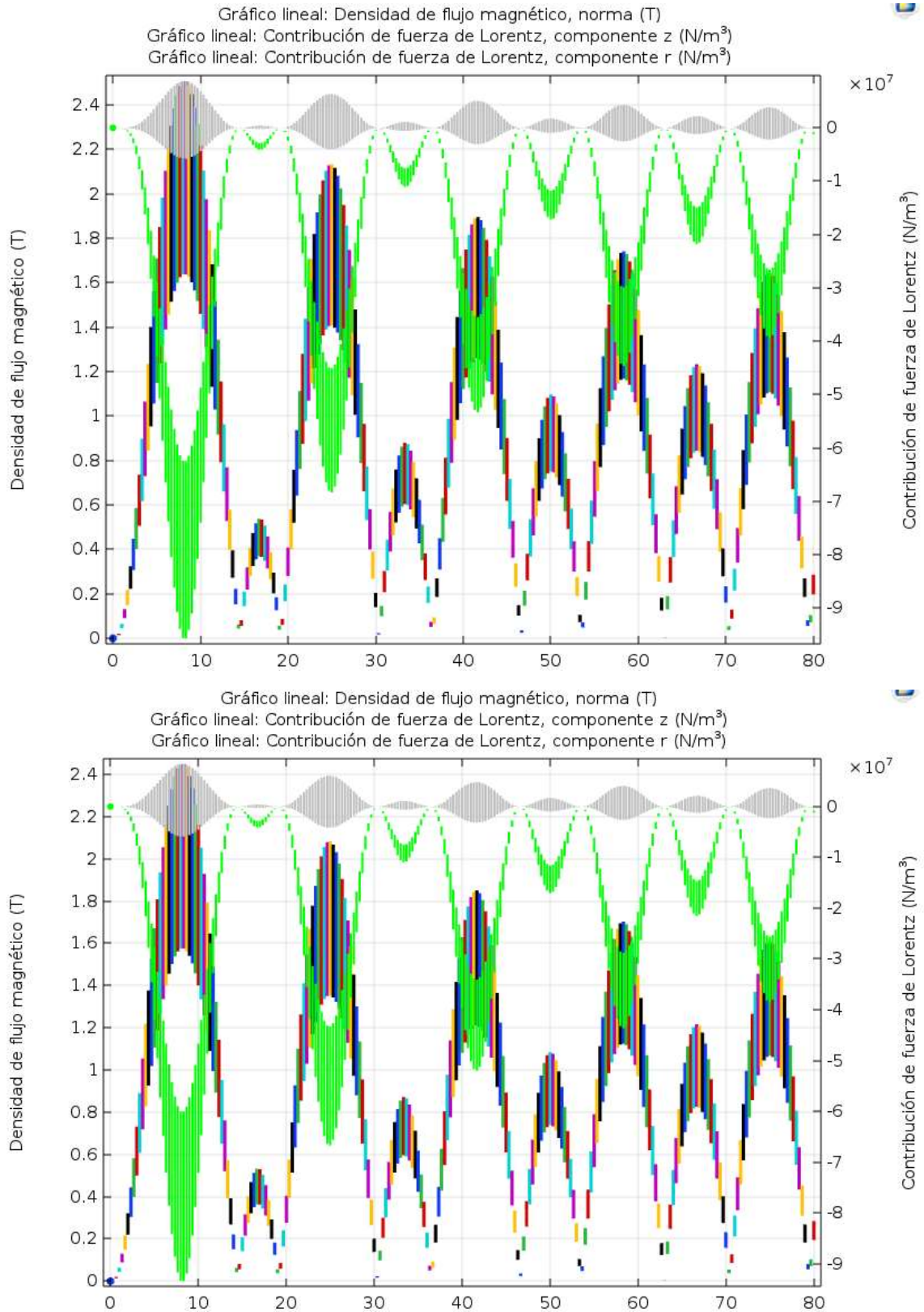


Ilustración 28. Arriba: Estudio temporal. Abajo: Estudio paramétrico. En ambos la inducción representada por el ciclo, en gris las fuerzas en sentido axial y en verde las fuerzas en sentido radial.

9.3. MODELO EN 3 DIMENSIONES

La idea para crear el modelo en tres dimensiones es revolucionar la geometría del modelo en dos dimensiones, a partir del eje con radio cero. Dado que revolucionar la geometría completa de aquel modelo daría como resultado una simulación excesivamente pesada, en su lugar se analizará la distribución de fuerzas obtenida anteriormente, con el objetivo de seleccionar solo aquella espira que se vea sometida a las mayores fuerzas.

Las siguientes dos ilustraciones son gráficos de superficie que muestran la distribución de la densidad de fuerza en los devanados. La ilustración 25 se corresponde con el estudio estacionario, mientras que la ilustración 26 se corresponde con el estudio estacionario paramétrico (en adelante estudio paramétrico) en el instante $t = 8$ mseg.

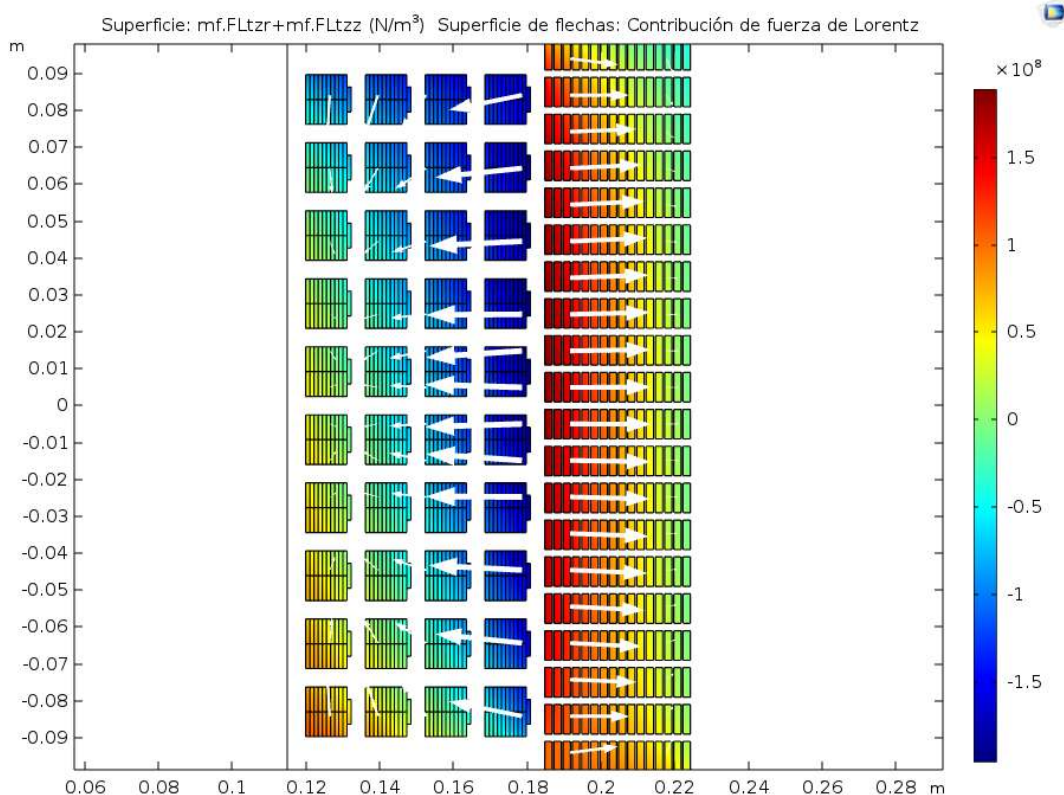


Ilustración 29. Estudio estacionario. Distribución de fuerzas en los devanados.

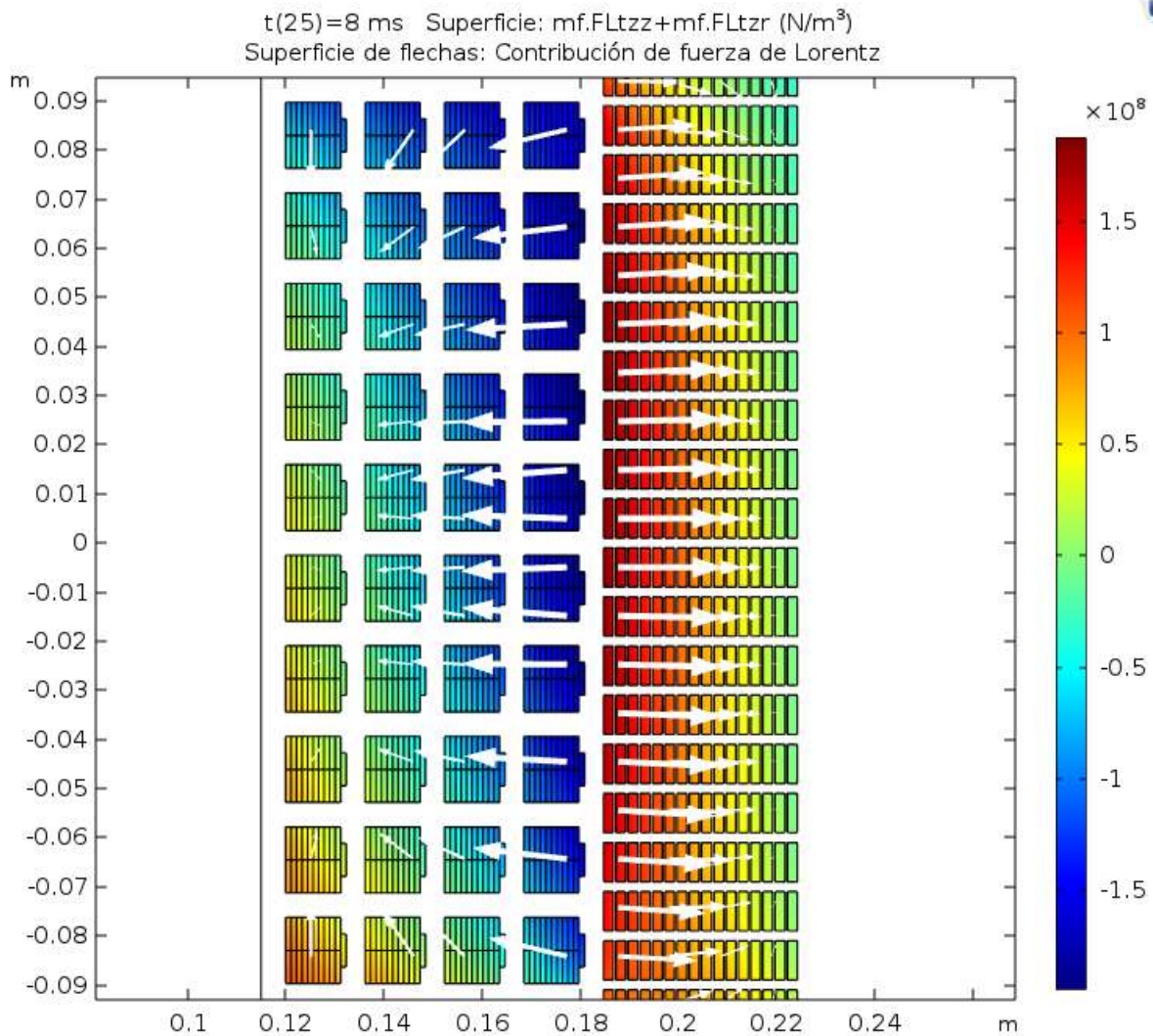


Ilustración 30. Estudio estacionario paramétrico en $t = 8s$. Distribución de fuerzas en los devanados.

Como se puede apreciar, ambas gráficas son muy similares, tanto en distribución como en los valores absolutos de las fuerzas, esto es debido al instante de tiempo escogido. En $t = 8$ milisegundos las corrientes del estudio temporal alcanzan sus valores máximos y, dado que el factor XR del transformador empleado para el cálculo de la componente transitoria y el factor de cresta empleado para calcular las corrientes máximas de cortocircuito están relacionados por la norma [2], sus valores y sus efectos están muy parejos.

En primer lugar, se puede apreciar que no solo el devanado de baja tensión está sometido a grandes fuerzas. El devanado de alta tensión también experimenta unas fuerzas de un valor muy similar, aunque en sentido inverso. Sin embargo, el devanado de alta tensión, en general, estará constituido en discos, por lo que, aunque las espiras interiores experimentan una gran fuerza, estas se apoyan en las exteriores, las cuales experimentan una fuerza casi nula. El resultado es un esfuerzo uniformemente distribuido, y un conjunto con una resistencia mecánica suficiente para soportar los efectos de un cortocircuito.

Este trabajo se centra en las espiras del devanado de baja tensión. Estas, al ser conductores mucho más grandes, requieren de espacio libre a su alrededor, a través del cual el aceite pueda circular, proporcionando la refrigeración necesaria. Es este requerimiento de espacio libre el que da lugar a conductores en "voladizo", y que por lo tanto puedan no estar lo suficientemente bien soportados como para resistir estas fuerzas.

En términos generales, las mayores fuerzas vienen a distribuirse en las proximidades entre los dos devanados, lo cual viene a confirmar lo visto en [3]. En este sentido, las espiras ubicadas más próximas al núcleo apenas sí experimentan alguna fuerza, a excepción de las aquellas ubicadas más cerca de los extremos inferior y superior, las cuales sí están sometidas a un esfuerzo axial considerable. Pero son las espiras colocadas entre devanados y a media altura las que experimentan las mayores fuerzas.

Las dos espiras del devanado de baja tensión que aparentemente están sometidas a las mayores fuerzas son las ubicadas en la quinta y sexta altura. La siguiente ilustración muestra en detalle las fuerzas en cada una de ellas.

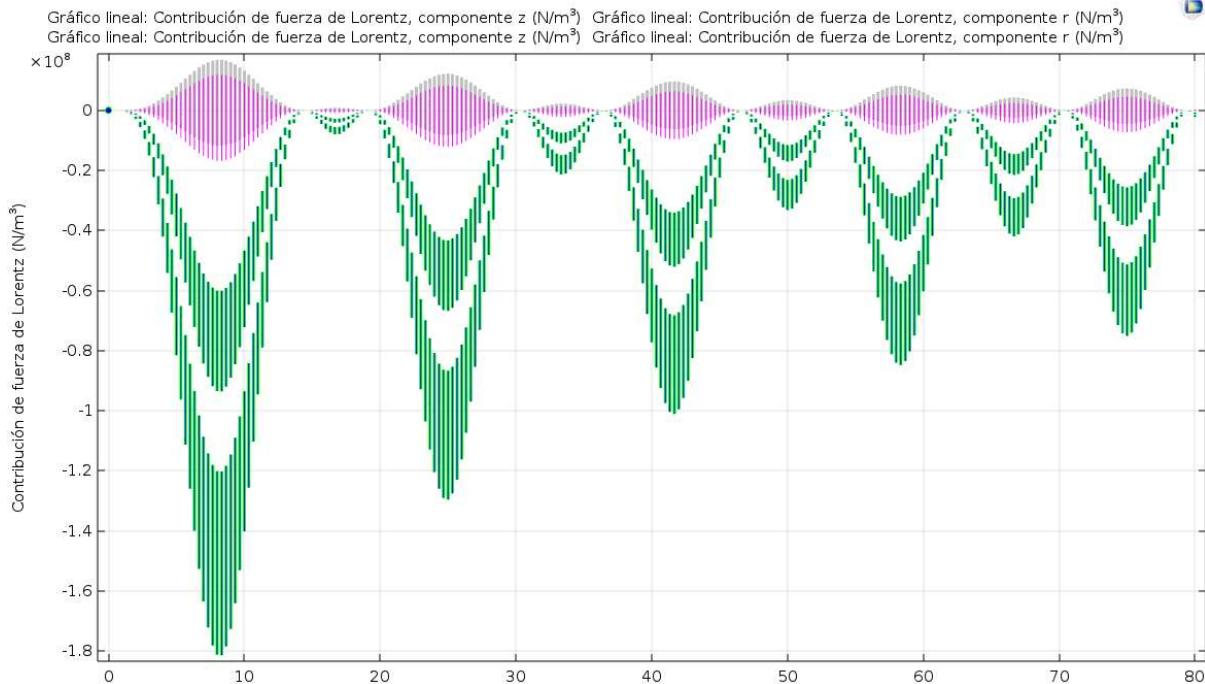


Ilustración 31. Estudio estacionario. Fuerzas en las espiras r4-h5 y h6.

En la ilustración 32, en gris y rosa, se muestran las fuerzas en sentido axial para cada una de las espiras. Puede apreciarse que ambas son muy parecidas, si bien una se ve más forzada en sentido vertical hacia arriba, mientras la otra experimenta la misma fuerza, pero en sentido vertical hacia abajo. En cuanto a la fuerza radial, la de mayor interés, se muestra en verde claro y en azul para cada una de las espiras. El verde oscuro de la ilustración 32 se debe a la superposición de ambas gráficas, lo que indica que los valores son idénticos para ambas espiras.

En vista de los resultados, para el modelo en tres dimensiones se tomarán los datos de fuerza para la espira ubicada en r4-h5⁹. Así mismo, se tomarán los datos de la espira ubicada en r1-h1, con el objeto de comprobar los efectos de las fuerzas axiales máximas. Bien es cierto que estos son considerablemente inferiores a las fuerzas en sentido radial, sin embargo, las fuerzas en sentido radial someten las espiras a pandeo por compresión,

⁹ Por simplicidad se hace así referencia a la posición de la espira en el devanado.

mientras que este esfuerzo axial las somete a flexión. Se trata de esfuerzos muy distintos, y así lo serán también los comportamientos de las espiras.

9.3.1. Datos de fuerza importados de las simulaciones del modelo 2D

Para este modelo en 3 dimensiones, cuyo objeto es calcular la distribución de tensiones en el CTC, así como resolver si llegan a producirse deformaciones, el dato de partida son las densidades de fuerza obtenidas de las simulaciones del modelo 2D. Los resultados para la densidad de fuerza obtenidos de las simulaciones electromagnéticas suponen un grandísimo conjunto de datos. Tanto si se toman la fuerzas axiales y radiales por separado, como si se las toma juntas, lo que se obtienen son dos campos escalares, en el primer caso, o un único campo vectorial, en el segundo, con una gran densidad de puntos.

Si bien existe la posibilidad de trabajar con esos conjuntos de datos en Comsol, finalmente y por simplicidad se recurrió a una metodología diferente. En lugar de tomar los datos exactos para cada elemento de la malla, se establecen sondas de dominio en las pletinas de la espira seleccionada. Estas sondas de domino calculan el valor promedio de la densidad de fuerza en todo el domino, calculado mediante integración, y que será el valor de la densidad de fuerza que se introducirá en el modelo en 3 dimensiones.

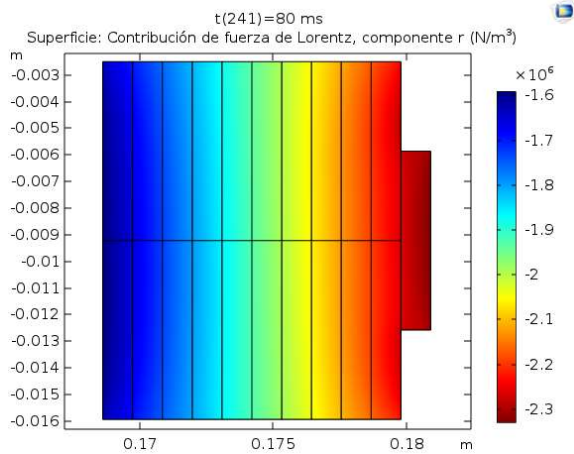


Ilustración 33. Distribución radial de la fuerza. Estudio paramétrico ($t=80s$).

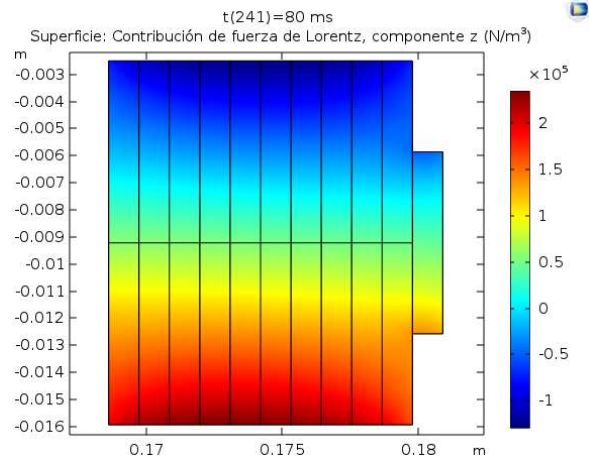


Ilustración 32. Distribución axial de la fuerza. Estudio paramétrico ($t=80s$).

Atendiendo a las distribuciones de

fuerzas de las ilustraciones 33 y 34; en cuanto a la componente radial de la fuerza, puede verse que esta 'empuja' hacia la 'izquierda', es decir en dirección al núcleo, y que la fuerza es mayor cuanto más nos alejamos de él, por lo que la distribución de la componente radial de la fuerza tiende a comprimir unas pletinas contra las otras, por lo que en ningún caso puede llegar a producirse una separación de las pletinas. En cuanto a la componente axial se da algo similar. En este caso la fuerza cambia de sentido, pero empujando hacia abajo en la parte superior de la espira y hacia arriba en la inferior, por lo que también se da un esfuerzo de compresión entre pletinas, sin que pueda llegar a producirse en ningún caso una separación de estas.

Siendo así que las pletinas siempre van a tender a mantenerse juntas, es más importante la carga total que soporte la espira que no la distribución en detalle de la fuerza. Por ello, para simplificar y acelerar el proceso de importación de los datos, las sondas de dominio se van a dividir por un lado estará la que obtenga el valor promedio de la fuerza radial en toda la espira y por otro la que haga lo propio con las fuerzas axiales. Inicialmente la idea era hacer una simulación con una sección completa del CTC entre soportes, sin embargo, esta simulación es muy pesada, por lo que en su lugar se

simula una única pletina, sometida a la fuerza promedio, calculada por las sondas, del conductor completo.

Para la espira r4-h5, la de las ilustraciones 33 y 34, en el estudio estacionario los valores promedios de las fuerzas calculados por las sondas son los siguientes.

$$\text{Fuerza Radial: } Fr = -1.5339 * 10^8 \frac{N}{m^3} = -0.15339 \frac{N}{mm^3}$$

$$\text{Fuerza Axial: } Fa = 2.4589 * 10^6 \frac{N}{m^3} = -0.0024589 \frac{N}{mm^3}$$

Para la espira r1-h1:

$$\text{Fuerza Radial: } Fr = -2.8531 * 10^6 \frac{N}{m^3} = -0.0028531 \frac{N}{mm^3}$$

$$\text{Fuerza Axial: } Fa = 7.645 * 10^7 \frac{N}{m^3} = 0.07645 \frac{N}{mm^3}$$

9.3.2. Configuración del modelo

Geometría

Para crear la geometría de este modelo se crea en primer lugar un plano de trabajo, sobre el cual se importa únicamente la geometría de la pletina que se va a estudiar. Para ello es importante que la geometría en el modelo 2D, el modelo 'donante', no se haya completado, es decir, no se haya realizado el paso 'Formar unión', pues este transforma toda la geometría en un único bloque. Dado que se van a simular las fuerzas sobre una única pletina de la espira, y dado que las ecuaciones del apartado 6 para el cálculo de las tensiones se van en el radio medio de la espira, se emplea para la simulación una de las pletinas ubicadas en el centro del conductor, anotando su radio medio, de cara al cálculo analítico que se hará también para las comparaciones. Posteriormente esa geometría se revoluciona respecto del eje vertical de radio cero (eje 'y' en este caso), los grados que correspondan a cada simulación.

Los datos de las fuerzas, en el caso de las simulaciones estacionarias, se introducen simplemente como parámetros del modelo, mientras que para las simulaciones en el dominio del tiempo estos datos de las fuerzas se importan al modelo desde archivos '.txt' exportados desde las simulaciones electromagnéticas.

Material

Para la definición de las características del material de la pletina, al igual que para el modelo 2D, se emplea el cobre de la biblioteca de Comsol, el cual presenta las características básicas y más habituales. Estas son un módulo de Young de $1.1 \cdot 10^5$ MPa (Geissler emplea un valor de $1.3 \cdot 10^5$ MPa), un coeficiente de Poisson igual a 0.34 o una densidad de 8940 kg/m^3 . Sin embargo, estas características solo permiten la simulación de tensiones y deformaciones lineales, basadas en el módulo de Young y que, para este caso en que el cobre es un material ortotrópico, solo permiten una simulación válida para aquellos esfuerzos que no produzcan deformaciones plásticas en el cobre.

Para una simulación precisa de esfuerzos más allá del límite elástico de un material es necesario que el programa conozca la característica completa del material de la simulación. Esta característica puede aproximarse mediante funciones, a través de los coeficientes de Hill para cada material, ... En este trabajo finalmente se descartó emplear una característica completa, puesto que no se pretende hallar deformaciones precisas, sino solo las tensiones internas en la pletina. En su lugar se empleará un módulo tangencial calculado en base al límite elástico del cobre ($R_{p0.2\%}$), y al límite de proporcionalidad (σ_0) dado por Geissler en [4]. Este límite de proporcionalidad se refiere al punto de corte del módulo tangencial con el eje de ordenadas de las tensiones, y representa el límite para el cual se cumple la ley de Hooke. Este módulo tangencial, entendido como una recta dentro de la gráfica de tensiones, se calcula como la recta que pasa por el

punto del límite elástico, que para el cobre corresponde a 65 MPa para una deformación del 0.2%, y por el punto del límite de proporcionalidad, que en este caso son 32 MPa.

$$\text{Ecuación de la recta: } y = a * x + b$$

$$1^{\text{er}} \text{ punto de la recta: } x = 0.002 \rightarrow y = 65 \text{ MPa}$$

$$2^{\text{o}} \text{ punto de la recta: } x = 0 \rightarrow y = 32 \text{ MPa}$$

Dados esos datos el módulo de Yong, entendido como la inclinación de la recta sale:

$$E_t = 1.65 * 10^{10} \text{ Pa}$$

D. Geissler et al. / Mathematics and Computers in Simulation 130 (2016) 81–94

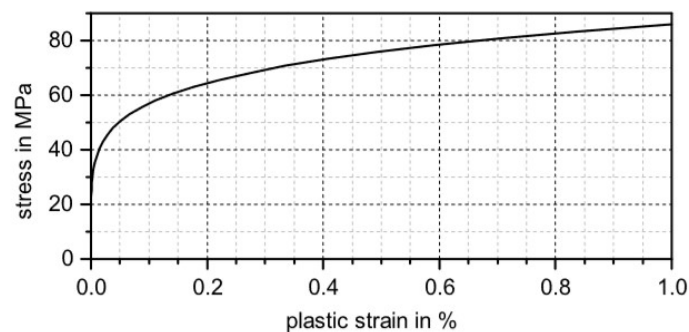


Ilustración 34. Característica tensión deformación propuesta por Geissler en [4].

El objetivo, será que Comsol emplee el módulo de Young mientras, y en aquellos elementos en los que las tensiones de von Mises no superen el valor para el cual las rectas del módulo de Young y del módulo tangencial se cortan (ilustración 36). Este punto, llamado tensión de fluencia inicial, en este caso se da para 37.65 MPa, y representa, además del cambio entre ambas rectas, el punto en el cual comienzan las deformaciones plásticas, por lo tanto, mientras las tensiones se mantengan por debajo de esta tensión de fluencia inicial se podría considerar que el devanado es estable, dado que al no haber fluencia las tensiones no se propagan.

Para que Comsol realice las simulaciones en función de estos dos módulos es necesario aplicar una condición de plasticidad a la de material elástico lineal. Al hacerlo, el propio programa exige, como mínimo dos nuevos

parámetros, el de módulo tangencial (pendiente de la nueva recta) y el de tensión de fluencia inicial (punto del plano por el que pasa la recta).

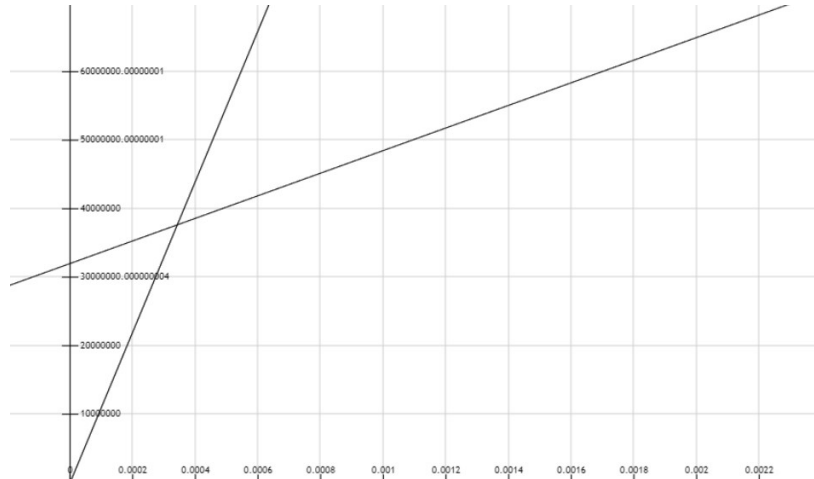


Ilustración 35. Módulo de Young y tangencial del cobre.

Físicas del modelo

Para las físicas del modelo, en primer lugar hay que tener en cuenta que la esta simulación está enfocada únicamente en la flexión radial, pero no en el pandeo. Este punto es importante, dado que las restricciones a aplicar al modelo son diferentes. En el caso del pandeo lineal es necesario restringir únicamente el desplazamiento de los extremos del conductor (zona de los soportes), pero no el giro, algo que Comsol no es posible hacer directamente. Para el caso de la flexión radial, debe restringirse por completo el desplazamiento y el giro de los extremos de la pletina, algo que se consigue de forma sencilla, aplicando una condición de restricción fija a los dos contornos de los extremos.

Para las cargas, respecto de las cargas axiales no hay mayor problema, esta carga tiene una única dirección, vertical hacia arriba o hacia abajo, y siempre en la dirección del eje 'y'. Sin embargo, la carga radial no es de dirección constante, para cada diferencial de longitud del conductor esta carga presenta una dirección diferente, girando a medida que lo hace este, pero siempre en dirección normal. Dada esa dirección normal de la carga,

se emplea el mismo sistema que Geissler en [4]. Multiplicando el valor de la densidad de fuerza que se emplee en la simulación por el espesor de la pletina, se obtiene un valor de fuerza por unidad de superficie que se aplica sobre el contorno exterior de la pletina como una presión repartida uniformemente. Dado que los valores de carga radial obtenidos son negativos, se le cambia el signo a esta presión, de tal forma que se aplique una presión positiva sobre la pletina. Alternativamente se probó a aplicar a mitad de la carga como una presión positiva externa, y la otra mitad como una presión negativa interna, tratando así de aproximar mejor una carga uniformemente repartida en el volumen. Los resultados apenas sí variaban, por lo que por simplicidad se dejó una única carga externa.

Malla

Para la malla no se ha aplicado ninguna condición específica, por lo que toda ella está 'controlada por la física'.

10. RESULTADOS

Fruto de la simulación de la distribución del campo magnético se obtienen los datos de densidad de fuerza en los devanados, para un modelo inicial con 10 alturas para el devanado de baja tensión y cuatro capas en sentido radial.

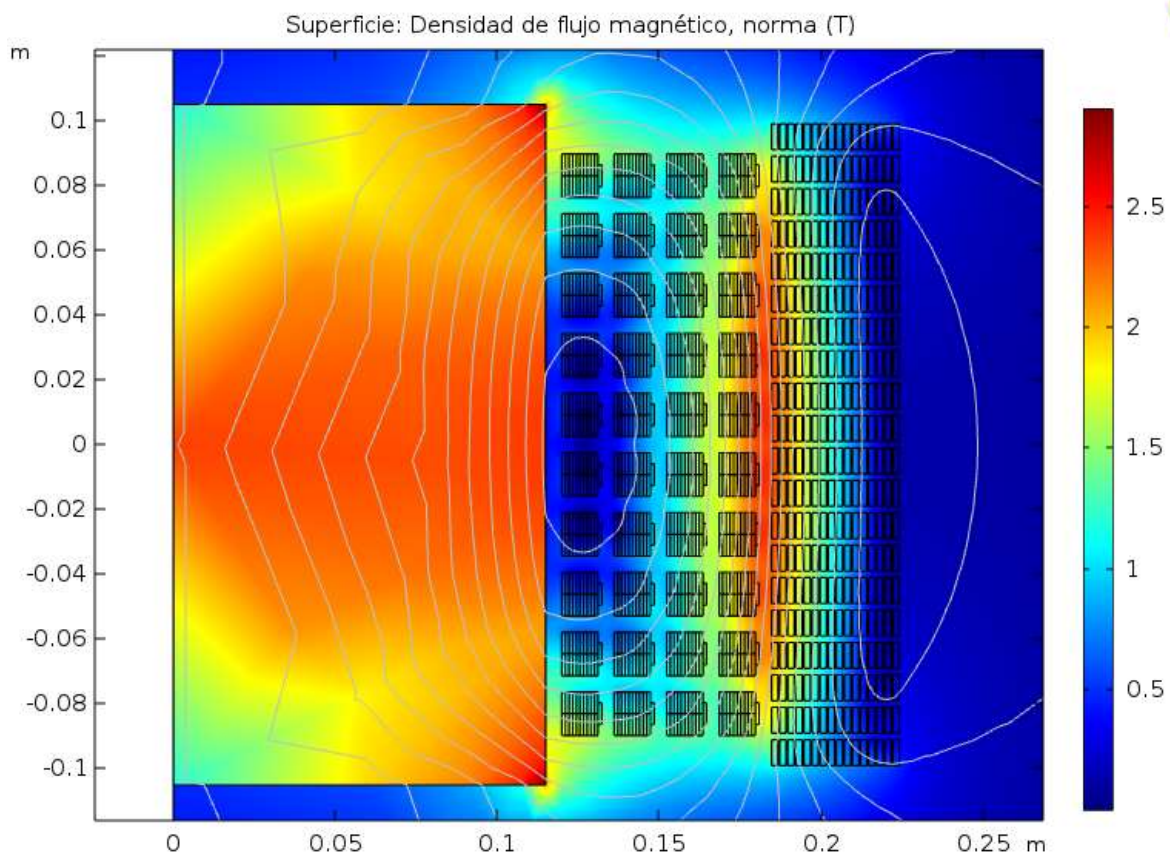


Ilustración 36. Inducción y distribución de campos en el modelo 2D.

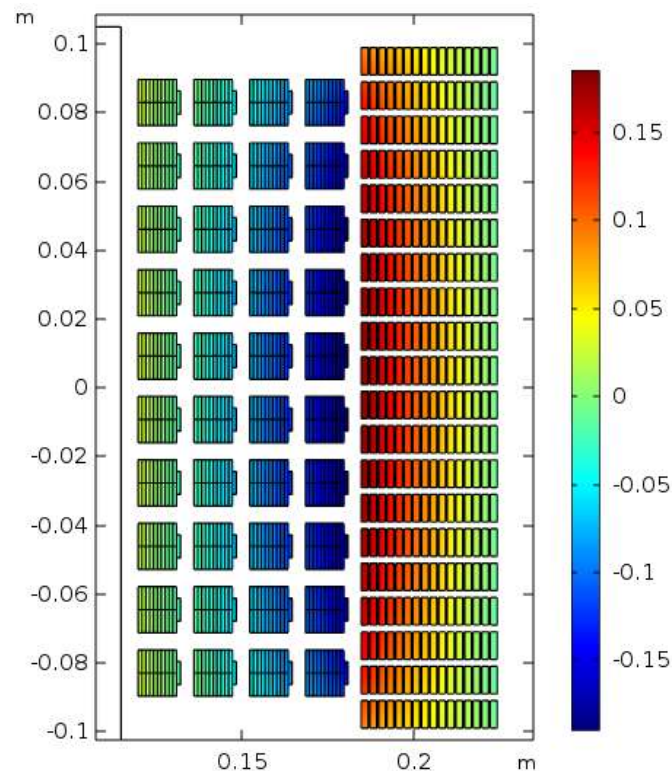


Ilustración 37. Densidad de fuerza en los devanados en sentido radial (N/mm^3).

En la ilustración (37), se observa como la inducción alcanza valores máximos en la zona ubicada entre el devanado primario y el secundario, mientras que en la zona más interna del secundario (pegada al núcleo) y la más externa del primario, la inducción es prácticamente nula.

De acuerdo con la ecuación (38), la fuerza de Lorentz ejercida sobre los devanados depende de la inducción y de la densidad de corriente, por lo tanto, es en la zona entre devanados donde se dan las mayores fuerzas. En el devanado secundario esta fuerza tiene signo negativo, es decir, el devanado se ve comprimido, lo que puede producir el pandeo. En el devanado primario en cambio, las fuerzas son hacia afuera, lo que hará que este esté sometido a tracción.

En los devanados tipo disco como el primario, a diferencia de los devanados constituidos por CTC's, cada arrollamiento de una misma capa carece de espaciadores con los demás. Dado que las fuerzas en la parte más interna

son muy elevadas, mientras que las fuerzas en la parte más externa son prácticamente nulas, el esfuerzo total se reparte de forma más o menos uniforme entre todas ellas, haciendo que la tensión total a tracción que experimentan las secciones no sea tan elevada. Por ello se considera que el devanado externo es estable.

En los devanados constituidos con CTC's en cambio, cada vuelta del devanado cuenta con separadores tanto axiales como radiales, dando lugar a un devanado "en voladizo", por lo que las espiras más externas soportan solas toda la fuerza ejercida sobre ellas, lo que hace que los CTC's deban ser estables ante estas fuerzas por sí mismos.

10.1. CARGAS EN SENTIDO RADIAL

10.1.1. Modelo con 4 Columnas

Para la espira situada en la quinta altura de la capa más externa las fuerzas son las mayores que se ejercen en el devanado, en la ilustración (39) se muestra la distribución de la componente radial de la fuerza.

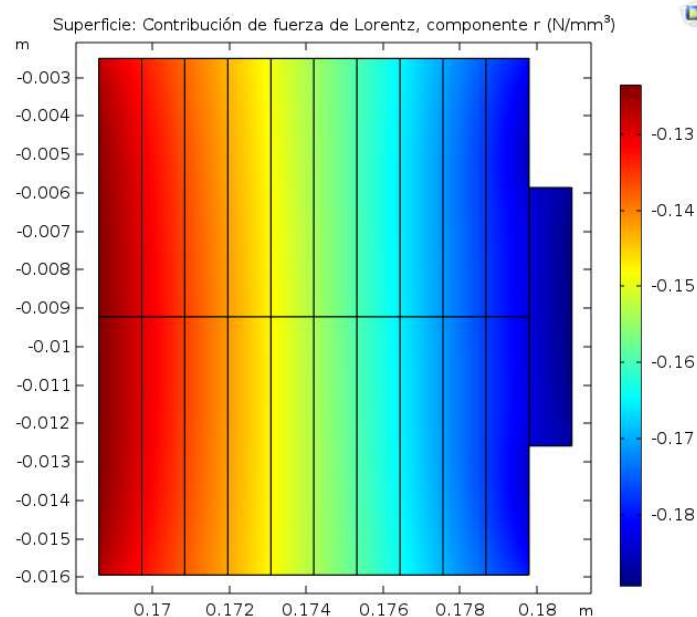


Ilustración 38. Distribución de fuerza en una de las espiras del devanado de baja tensión.

Para la espira seleccionada, el radio medio es $R_m = 0.175 \text{ m} = 175 \text{ mm}$ aproximadamente, y la densidad de fuerza media, obtenida mediante una sonda de dominio aplicada sobre toda la espira, es $F = -0.15339 \text{ N/mm}^3$.

En última instancia, y suponiendo que esta fuera la distribución final de los devanados, que el devanado de baja tensión fuese o no estable dependería teórica y únicamente de la cantidad de soportes que lo sujeten, soportes estos que impiden la correcta circulación del aceite de refrigeración y, por lo tanto, la propia refrigeración. Teniendo eso en cuenta, la finalidad última de un estudio de este tipo será la de determinar (además de la distribución óptima y aceptable de los devanados) cuál es la cantidad mínima de soportes necesarios y la distancia máxima entre estos.

Junto con los datos del modelo, y con el objetivo de partir de un valor de referencia, se tomará la ecuación para la carga crítica de pandeo de una columna (ecuación 48), para una única pletina del CTC, y se igualará a la carga que soporta el CTC en este modelo en concreto. Por supuesto, el arco formado por el CTC no es una columna y no tiene por qué comportarse como tal, ya que el pandeo es un efecto que depende de las formas de la estructura y el esfuerzo, y al margen del límite elástico del material, por lo que el resultado de esta ecuación no tiene por qué ser relevante.

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 * E_0 * I_z}{L^2}$$

Como se vio en el apartado 6.2.1. ecuación (42), el axil a compresión, fruto del esfuerzo de pandeo, depende únicamente del radio medio de la espira.

$$N = q * R$$

La q hace referencia a una fuerza por unidad de longitud, por lo que para hallarla a partir del dato del modelo se integrará la densidad de fuerza en la sección de la espira.

$$q_p = F * A = 0.15339 * 6.72 * 1.12 = 1.1545 \text{ N/mm}$$

$$N = q_p * R = 1.1545 * 175 = 202.033 \text{ N}$$

Esa fuerza es un axil a compresión, uniforme, por lo que si lo dividimos entre el área obtendremos la tensión a compresión en la pletina.

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{202.033}{6.72 * 1.12} = 26.84 \text{ N/mm}^2$$

Al ser un esfuerzo axil esta tensión es uniforme para toda la sección de la pletina. Por otro lado, el límite elástico del cobre ($R_{p0.2\%}$), indicado por el fabricante (DeAngeli Prodotti), para la aleación básica del cobre parte de los 60 N/mm² hasta los 100 N/mm², por lo que la pletina es capaz de soportar el esfuerzo de compresión sin colapsar y en principio cumple con la normativa, que establece un 35% del límite elástico en la compresión.

$$\sigma_N < R_{p0.2\%}$$

Sustituyendo el axil en la ecuación para la carga crítica de pandeo de una columna, se puede obtener la altura de columna para la cual este axil representa la carga crítica.

$$N_{cr} = 202.033 \text{ N} = \frac{\pi^2 * 1.1 * 10^5 * 6.72 * 1.12^3}{12 * L^2} \rightarrow L = 65.021 \text{ mm}$$

Si tomamos esa longitud como la amplitud del arco entre soportes, se obtendrá el ángulo que según esta formulación debe haber entre ellos.

$$L = \beta * R \rightarrow \beta = 0.3716 \text{ rad} = 21.29^\circ$$

Redondeando a 20°, en adelante se calculará si para esa apertura el CTC es estable ante el pandeo, tanto el lineal como el no lineal.

PANDEO LINEAL

Como ya se vio en el apartado 6, las fuerzas pueden hacer colapsar a un CTC de dos formas diferentes. La primera de ella, llamada por Geissler "lineal", y que en [12] se considera simplemente como pandeo, se va a analizar a continuación para los datos del modelo. A tener en cuenta, en primer lugar, que cuando se trate de pandeo lineal restringido se considerará que, en el caso de CTC's no reforzados con resina, la resistencia

de estos al pandeo será la de cada una de sus pletinas por separado, no presentando el CTC una mayor resistencia por el hecho de estar conformado por varias de estas pletinas. En principio, este se debe a que este pandeo es un método de fallo que provoca que el devanado colapse sin que se haya alcanzado el límite elástico del cobre. Sin embargo, y esto es algo que en este trabajo no se tiene en cuenta, la influencia del papel aislante, cuyas varias capas pueden estar realizadas no solo a base de celulosa, sino que también pueden estar reformadas por fibras de vidrio, así como polímeros de plástico, tiende a homogeneizar esfuerzos dentro del CTC, y puede conferir una resistencia adicional al devanado.

LIBRE

En primer lugar, y aunque no es un dato del todo relevante, según la ecuación (XX), una pletina como la que compone el CTC, formando un arco de radio medio el del CTC, y no sujeta por ningún soporte, presentaría la siguiente resistencia al denominado pandeo libre.

$$q_{crit, P, PL} = \frac{3EI}{R^3} = \frac{3 * 1.1 * 10^5 * 6.72 * 1.12^3}{12 * 175^3} = 0.048 \text{ N/mm}$$

$$q_{crit, P, PL} \ll q_P$$

Esta carga crítica para una única pletina no soportada es mucho menor que la carga por unidad de longitud a la que se ve sometido el CTC de la simulación.

Cabe recordar que, cuando se da el fenómeno de pandeo lineal, en un primer momento el pandeo que se produce siempre es pandeo libre. Sin embargo, al deformarse el arco este presiona contra los soportes haciendo intervenir a estos y convirtiendo el pandeo libre en pandeo restringido.

RESTRINGIDO

Según [12], la carga crítica para el caso del pandeo restringido esta representa por la ecuación (46).

$$q_{crit, P, PR} = \frac{EI}{R^3} * \left[\left(\frac{2 * \pi i}{2\beta} \right)^2 - 1 \right] = \frac{1.1 * 10^5 * 6.72 * 1.12^3}{12 * 175^3} \left[\left(\frac{2 * \pi i}{2 * \frac{20 * \pi i}{180}} \right)^2 - 1 \right]$$

$$= 1.2918 \text{ N/mm}$$

Esta carga es mayor que la que soporta el CTC, por lo que este debería ser capaz de resistir el tipo de deformación producida por el pandeo restringido cuando la separación entre soportes es de 20°. Si ahora se despeja en la ecuación anterior el ángulo β , introduciendo el valor de carga al que se ve sometido nuestro CTC...

$$q_p = 1.1545 \frac{N}{mm} = \frac{EI}{R^3} * \left[\left(\frac{2 * \pi i}{2\beta} \right)^2 - 1 \right] \rightarrow \beta = 0.369 \text{ rad} = 21.141^\circ$$

La carga 'q_p' sobre la pletina representa la carga crítica para una pletina soportada radialmente, con una separación entre soportes ligeramente superior a los 21° lo que, por otro lado, es un valor casi exacto, aunque algo inferior, al obtenido según la formulación para una columna recta sometida a un axil a compresión que pandee. Al fin y al cabo, ambas ecuaciones se parecen en sus términos y seguramente tengan un origen común.

$$Err = \frac{21.29 - 21.141}{21.141} * 100 = 0.705 \%$$

Cabe destacar, según estos resultados, que la resistencia al pandeo, en el caso de soportes separados 20° entre sí, es del orden de 27 veces superior frente al caso del pandeo libre. Así mismo, una separación de 20° supone en este caso un margen de seguridad algo superior al 10%.

$$\frac{q_{crit, P, PR, \beta=20^\circ} - q_p}{q_p} * 100 = 11.893\%$$

Atendiendo ahora a la formulación propuesta por Geissler, algo distinta, pero que en realidad también se basa en [12], que a su vez se basa en [13], se pueden repetir los cálculos anteriores. En este caso, Geissler propone una formulación para todo el CTC, sin embargo, esta se basa en

multiplicar la resistencia de una única pletina por el número total de pletinas; sin añadir ningún coeficiente o término que añada o modifique el valor de la carga.

$$q_{crit, CTC, \beta=20^\circ} = \frac{N_S * EI}{\left(R_0 + N_S * \frac{t_S}{4}\right)^3} * \left[\left(\frac{n * \pi}{\phi}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{21 * 1.1 * 10^5 * 6.72 * 1.12^3}{12 * \left(168.5 + 21 * \frac{1.12}{4}\right)^3} * \left[\left(\frac{2 * \pi}{\frac{40 * \pi}{180}}\right)^2 - 1\right] = 27.42 \text{ N/mm}$$

Dado que ϕ se refiere a la separación entre dos soportes cualesquiera y que, en la práctica, cada soporte marca el principio y el final de la semionda (a menos que la separación entre soportes sea muy grande), para $\phi = 40^\circ$ por ejemplo, entonces $n = 2$, por lo que ambas formulaciones son la misma, si bien Geissler detalla y explica desde otro punto de vista de donde salen los términos de su formulación.

Si multiplicamos el valor de la carga por unidad de longitud para una única pletina, por el número total de pletinas...

$$N_S * q_P = 21 * 1.1545 = 24.2445 \frac{N}{mm} \rightarrow q_{crit, CTC, \beta=20^\circ} > N_S * q_P$$

El CTC resiste el pandeo restringido para una separación de soportes de 20° .

PANDEO NO LINEAL (FLEXIÓN RADIAL)

Para el cálculo del pandeo no lineal, que es en realidad flexión radial, se toman las ecuaciones propuestas por [12], y explicadas en el apartado 6. Como ya se ha explicado, esta forma de deformación debida a la fuerza radial se da cuando las deformaciones producidas por el pandeo libre ejercen fuerza sobre los soportes, haciendo que estos le devuelvan al devanado una reacción, considerándose para el cálculo solo las tensiones producidas por el momento ejercido por los soportes ya que, en comparación, las ejercidas por los esfuerzos cortantes son despreciables.

También se sigue teniendo en cuenta el esfuerzo axial fruto del pandeo que, si bien y como veremos se reduce, sigue siendo de una magnitud importante.

Al igual que en el caso anterior, este estudio se centra en una única pletina del CTC, si bien experimentalmente se conoce que la resistencia de los conductores transpuestos es equivalente a la de un conductor uniforme de espesor aproximadamente el doble del de la pletina. Sin embargo, las ecuaciones empleadas no permiten estas consideraciones.

Las ecuaciones para el axial y el momento son las (50) y (51).

$$N(\varphi) = qR * \left[\frac{\cos \varphi}{2 * \sin \alpha} \left(\frac{1}{f_1(\alpha) + \frac{AR^2}{I} f_2(\alpha)} \right) - 1 \right]$$

$$M(\varphi) = \frac{qR^2}{2} * \left(\frac{\cos \varphi}{2 * \sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{1}{f_1(\alpha) + \frac{AR^2}{I} f_2(\alpha)} \right)$$

Siendo las dos funciones (52) y (53)

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{4 \sin^2 \alpha} \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)$$

$$f_2(\alpha) = \frac{1}{4 \sin^2 \alpha} \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2\alpha}$$

Existe una diferencia fundamental respecto del cálculo del pandeo lineal. En este caso el ángulo considerado es el existente entre soportes, mientras que el representado en estas ecuaciones es la mitad de ese; a diferencia del caso anterior, en que se consideraba la separación entre cada dos soportes. Por lo tanto:

$$\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ = 0.1745 \text{ rad}$$

En el apartado anterior se le daba el visto bueno a una separación entre soportes de 20°, por ello se harán los cálculos para esa separación en primer lugar.

$$f_1(0.1745) = \frac{1}{4 \sin^2(0.1745)} \left(+ \frac{\sin(2 * 0.1745)}{2} \right) = 2.865$$

$$f_2(0.1745) = \frac{1}{4 \sin^2 0.1745} \left(0.1745 + \frac{\sin(2 * 0.1745)}{2} \right) - \frac{1}{2 * 0.1745} = 5.94 * 10^{-5}$$

Los dos puntos de mayor interés en cuanto a los esfuerzos se encuentran justo en los soportes para $\alpha=\beta$, y también en el punto medio entre ellos, para $\alpha=0$.

$$\text{Para } \varphi = \alpha; N(\varphi) = 1.1545 * 185 * \left[\frac{\cos \varphi}{2 * \sin \alpha} \left(\frac{1}{f_1(\alpha) + \frac{AR^2}{I} f_2(\alpha)} \right) - 1 \right] = -176.26 \text{ N}$$

$$\text{Para } \varphi = 0; N(\varphi) = 1.1545 * 185 * \left[\frac{\cos \varphi}{2 * \sin \alpha} \left(\frac{1}{f_1(\alpha) + \frac{AR^2}{I} f_2(\alpha)} \right) - 1 \right] = -173.76 \text{ N}$$

Como se ve, el axil es negativo, es decir, a compresión, lo que casa con la dirección en que se aplica el esfuerzo. Además, apenas sí varía a lo largo del CTC, lo cual también casa con el tipo de esfuerzo que es, ya que este debe ser igual a lo largo de todo el CTC, y así es.

En cuanto al momento flector:

$$\text{Para } \varphi = \alpha; M(\varphi) = \frac{qR^2}{2} * \left(\frac{\cos \varphi}{2 * \sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{1}{f_1(\alpha) + \frac{AR^2}{I} f_2(\alpha)} \right) = -50.83 \text{ Nm}$$

$$\text{Para } \varphi = 0; M(\varphi) = \frac{qR^2}{2} * \left(\frac{\cos \varphi}{2 * \sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{1}{f_1(\alpha) + \frac{AR^2}{I} f_2(\alpha)} \right) = 25.454 \text{ Nm}$$

En el punto medio, el momento flector es de signo contrario a los extremos, sin embargo, esto también generará, en una mitad de la pletina, un esfuerzo de compresión, que sumado al del axil pueda ser superior al límite elástico del cobre.

La tensión máxima que se dará en la pletina lo hará en los soportes, ya que el momento flector es muy superior en esa zona. Su valor:

$$\sigma_{max} = \frac{N(\varphi = \alpha)}{A} + \frac{M(\varphi = \alpha)}{I} * y = \frac{-173.76}{6.72 * 1.12} + \frac{-50.83}{\frac{6.72 * 1.12^3}{12}} * \frac{1.12}{2} = -59.28 \frac{N}{mm^2}$$

El límite elástico del cobre indicado por DeAngeli Prodotti en su catálogo parte de los 60 y hasta los 100 N/mm². Por lo tanto, esos niveles de tensión calculados no son aceptables, pues están justo en el límite. Por otro lado, la normativa aplicable (Aenor 60076 – Parte 5) [9], indica que la sollicitación máxima a compresión sobre los arrollamientos, para el caso de CTC's no debe superar el 35% del límite elástico (Rp_{0.2%}), esto es, entre 21 y 35 100 N/mm². Es decir, los resultados obtenidos, si bien podrían indicar un devanado estructuralmente estable, pero justo en su límite elástico, indican claramente una situación de riesgo, y por otro lado la normativa no avala los resultados.

Con el objetivo de meter esos resultados dentro de los límites legales se hacen los cálculos para valores inferiores del ángulo de apertura entre soportes. Los resultados, presentados en la siguiente tabla, no son los esperados. Los cálculos incluyen una apertura de 21° entre soportes.

Apertura (B)	Nmax (N)	Mmax (N)	σmax (N/mm ²)
B = 15°; α = 7'5°	-132.59	-69.29	-76.165
B = 18°; α = 9°	-161.84	-58.43	-63.09
B = 20°; α = 10°	-173.76	-50.84	-59.28
B = 21°; α = 10'5°	-178.26	-47.24	-57.31
B = 30°; α = 15°	-195.86	-25.37	-44.08

Tabla 8. Distribución de esfuerzos y tensiones máximas en la pletina e función del ángulo de apertura entre soportes.

La solución más lógica, a priori, habría sido cerrar el ángulo entre soportes, acercándoles entre sí. Sin embargo, al hacerlo las tensiones en el devanado aumentan, introduciéndose cada vez más en la zona superior al límite elástico. En cambio, al aumentar la distancia entre soportes se puede ver que el axil aumenta, previsiblemente hasta al alcanzar el valor máximo dado por N = q*R (N) = 202.033 N y calculado anteriormente. Sin embargo, el momento flector disminuye, y así lo hace también la tensión

máxima, en la que parece que tiene mayor influencia este flector que el axil.

Por lo tanto, mientras que los cálculos realizados para el pandeo lineal indicaban que a menor ángulo mayor resistencia, estos indican que cuanto mayor es el ángulo, menores son las tensiones debidas al esfuerzo de flexión y menor es también la tensión máxima, con un límite inferior esperable igual al calculado para el axil del pandeo puro.

Es decir, que si para lograr un devanado estructuralmente estable es necesario que este sea capaz de resistir ante el pandeo lineal y también ante la flexión radial; lo que debe lograrse es una conciliación entre el ángulo cuanto más cerrado mejor para el pandeo lineal, y un ángulo cuanto más abierto mejor para la flexión radial.

En cualquier caso, una distribución con 4 capas para el devanado de baja tensión no es viable.

Resultados Modelo 3 Dimensiones

En primer lugar, se hacen dos tipos de simulaciones, la primera de ellas considera el cobre de la pletina como un material elástico lineal, es decir, la característica tensión-deformación es lineal basado en el módulo de Young. Esta simulación es válida siempre que no se supere la tensión para la cual se considera que se ha sobrepasado la zona de comportamiento lineal. En este caso, esa tensión se ha fijado para 37.65 MPa, llamada tensión de fluencia inicial. Este límite, correspondiente al módulo de Young típico ($1.1 \cdot 10^5$ MPa) y al límite elástico también más usual para el cobre (65 MPa = 0.2% de deformación), es el que en este trabajo se considera debería ser el límite legal aceptable en el devanado de transformadores. Por debajo de ese límite no se produce deformación plástica, por lo que no hay deformación permanente, y más importante, la no fluencia implica que

las tensiones no se propagaran desde el punto donde se alcancen los máximos hacia el resto del conductor.

En la segunda simulación, se incluye la característica de plasticidad de material, que agrega un módulo de deformación tangencial a partir del punto en que se supera la tensión de fluencia inicial. Este, de valor $1.65 \cdot 10^{10}$ Pa, supone que las deformaciones aumentan mucho más rápidamente a medida que lo haga la tensión, sin embargo, no es un modelo apto para la simulación de deformaciones. El objetivo es correr ambas simulaciones para cada caso, de tal forma que solo cuando el resultado de ambas sea idéntico se pueda considerar que este resultado es favorable.

Dado que este segundo modelo no tiene implementada una característica tensión-deformación completa y realista, no tiene sentido llevar a cabo una simulación completa pretendiendo hallar estas deformaciones. Sin embargo, y a la vista de los resultados del estudio analítico, si tiene sentido correr la simulación. En primer lugar, para comprobar si existe una correlación entre los datos que avale la simulación como método de cálculo, y en segundo lugar para tratar de confirmar la progresión de los resultados a medida que cambia el ángulo entre soportes. Debe recordarse que la simulación se realiza exclusivamente de cara a la flexión radial, no así para el pandeo lineal.

El modelo en tres dimensiones para una pletina, con sus dos contornos laterales restringidos completamente (simulando así el empotramiento) muestra los siguientes resultados.

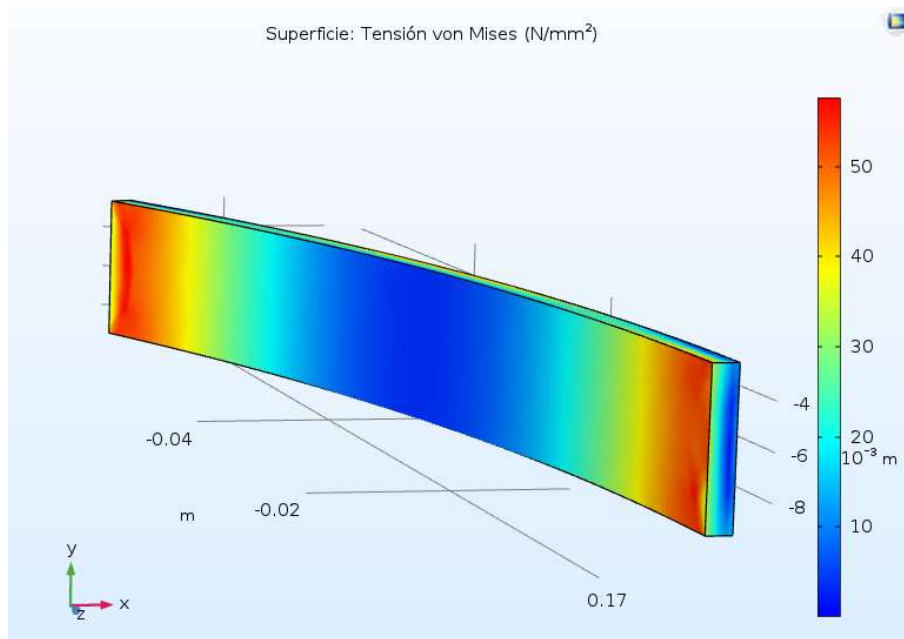


Ilustración 39. Distribución de tensiones en la pletina (cara interna).

Los resultados del modelo muestran que, efectivamente, las mayores tensiones se dan cerca de los soportes; mientras que visto desde atrás (41), en la parte central también se dan unas tensiones elevadas, aunque no del valor de las vistas cerca de los soportes.

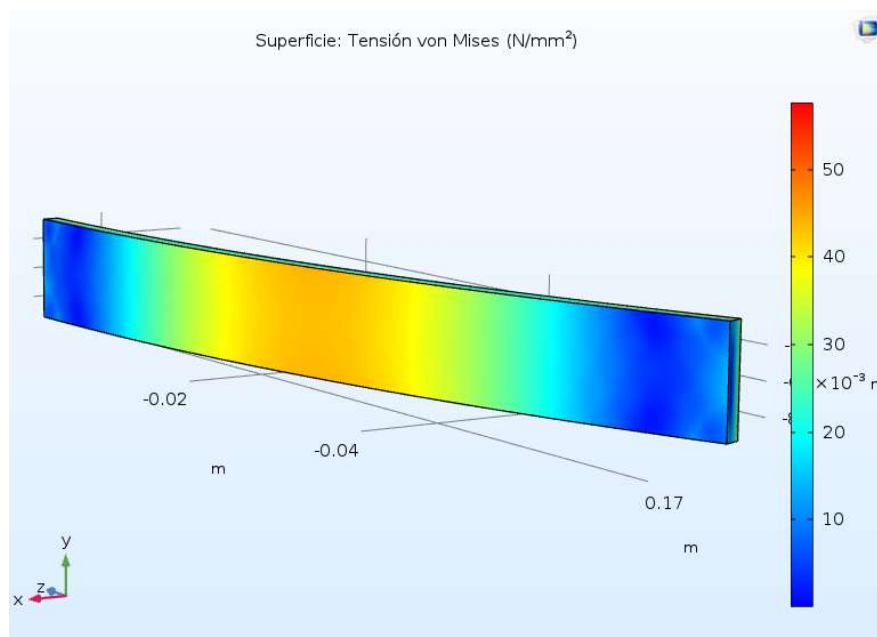
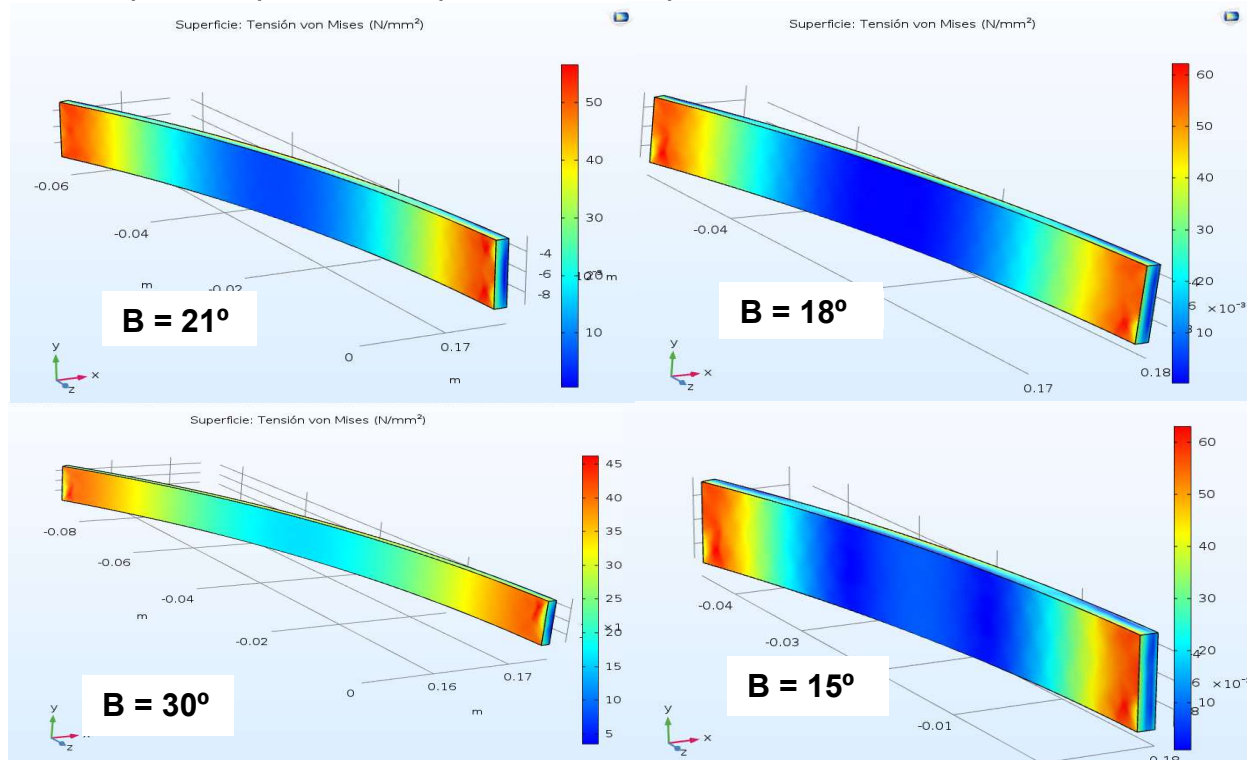


Ilustración 40. Distribución de tensiones en la pletina (cara externa).

Por otro lado, el valor de estas tensiones es similar a las de los cálculos analíticos, alcanzando cerca de esos soportes valores entorno a los 60 N/mm². Concretamente el valor máximo de tensión que se da en el modelo son 64.507 N/mm².

$$Err = \frac{64.507 - 59.28}{59.28} * 100 = 8.08 \%$$

Aunque el error es algo elevado puede valer para avalar el uso del modelo como método de cálculo. Más abajo, en la tabla (9), se muestra la comparación de los resultados de la simulación con los de los cálculos de la tabla (8), para todas las aperturas de ángulos calculadas anteriormente. Aunque la diferencia es bastante mayor en los dos casos más extremos, sí que se corrobora la progresión de los datos, que muestran que la tensión aumenta a medida que disminuye la distancia entre soportes. Por otro lado, cabe recordar que se están comparando los dos datos para la tensión máxima, tanto de los resultados analíticos como del modelo, y que esta está muy próxima al límite elástico y por encima de la tensión de fluencia inicial, por lo que más representativo que los valores exactos serán los



valores en los que estos se muevan y como varíen en función del ángulo entre soportes.

Apertura (B)	σ_{\max} (N/mm ²)	$ \sigma_{\text{COMSOL}} $ (N/mm ²)	Err (%)
B = 15°; $\alpha =$	-76.165	67.990	12.02
B = 18°; $\alpha =$	-63.09	66.878	5.6
B = 20°; $\alpha =$	-59.28	64.507	8.08
B = 21°; $\alpha =$	-57.31	62.02	8.2
B = 30°; $\alpha =$	-44.08	50.294	14.1

Tabla 9. Comparativa entre las tensiones máximas de los cálculos y de las simulaciones.

Hay que recordar que estas tensiones no son reales, dado que para el cálculo se ha empleado únicamente la relación lineal del módulo de Young. Las tensiones de la simulación con módulo tangencial se muestran en la siguiente tabla.

Apertura (B)	$ \sigma_{\text{COMSOL - MÓDULO TANGENCIAL}} $ (N/mm ²)
B = 15°; $\alpha = 7'5^\circ$	42.707
B = 18°; $\alpha = 9^\circ$	42.438
B = 20°; $\alpha = 10^\circ$	40.648
B = 21°; $\alpha = 10'5^\circ$	40.902
B = 30°; $\alpha = 15^\circ$	39.408

Tabla 10. Resultados del modelo con característica plástica y módulo tangencial.

Al establecer una tensión de fluencia inicial de 37.65 N/mm², al alcanzar ese punto las tensiones ya no aumentan tan rápidamente, y en cambio se propagan más a lo largo del material, como se puede ver en la ilustración (43).

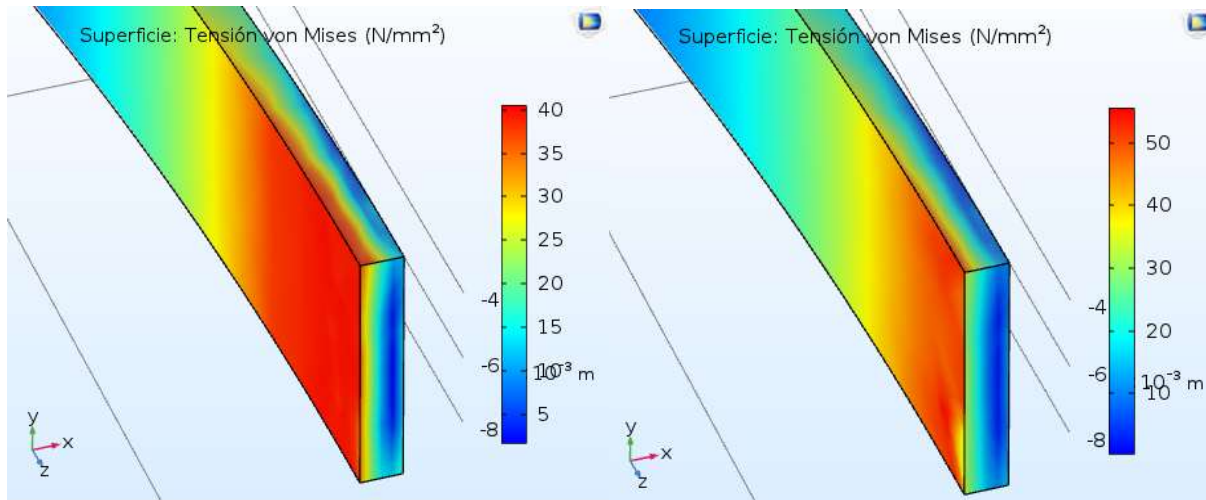


Ilustración 42. Comparación tensiones en una pletina de la simulación con 4 columnas y separación de 20° entre soportes. Material elasto-plástico (derecha) y material lineal (izquierda).

Cambio en la distribución del modelo

No pudiendo aumentar ni disminuir el ángulo con el objetivo de hacer funcionar esta distribución, las opciones restantes son:

- 1) Conformar el CTC a base de pletinas con un mayor módulo de inercia o diferente sección, más resistente.
- 2) Emplear una aleación de cobre endurecido, con un límite elástico superior.
- 3) Modificar la distribución del arrollamiento de baja tensión, limitando el número de columnas de este a 3 o, en función de los cálculos, incluso a 2.

Todas estas opciones presentan desventajas.

La primera de ellas, en primer lugar, suponen modificar la resistencia eléctrica por unidad de longitud de los devanados, reduciéndola y reduciendo con ello la impedancia equivalente del transformador, la cual debe por ley, y como se vio anteriormente, representar unos valores mínimos.

La segunda opción es la más sencilla, pues no supone la repetición de cálculos. Además, esta distribución se eligió con el objetivo de reducir al mínimo el volumen del transformador, reduciendo así sus costes de materiales, fabricación, transporte... Sin embargo, el cobre endurecido será previsiblemente más caro, además de que los elementos aleados pueden modificar su conductividad, con lo que la contrapartida es la misma del caso anterior.

Por último, la tercera opción es la más certera. Supone un transformador más alto y por lo tanto más grande y pesado, también más caro. Sin embargo, los problemas de resistencia frente a cortocircuitos quedan definitivamente solventados.

10.1.2. Modelo con 3 columnas

Con el objetivo de encontrar una distribución que sea estable ante las fuerzas electromagnéticas de cortocircuito, se reduce el número de columnas del devanado de baja tensión a tres. Como se puede ver en la ilustración (44), la densidad de fuerzas es algo menor que en el modelo con 4 columnas, siendo la densidad media de fuerza en la espira ubicada en la posición más externa del devanado de baja tensión y a media altura igual a $Q_r =$

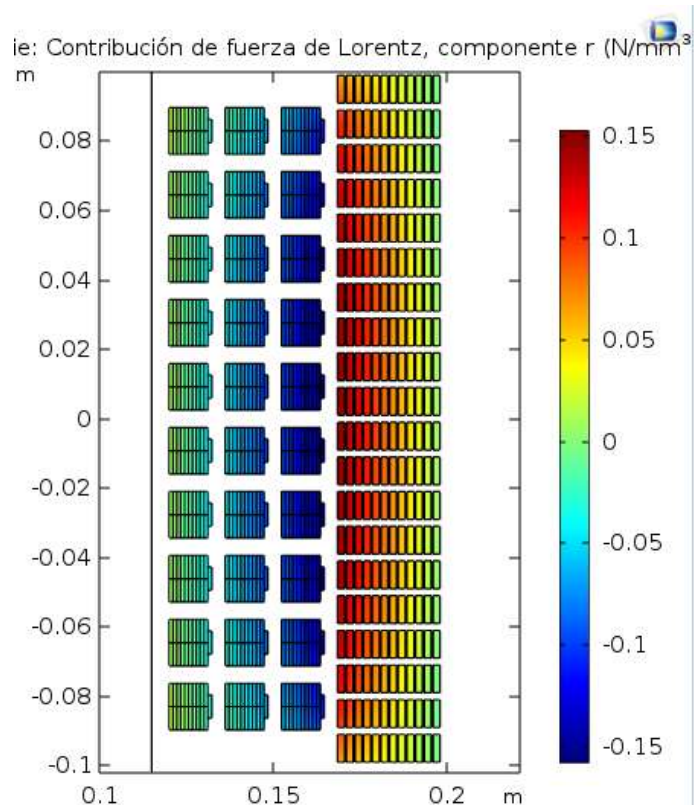


Ilustración 43. Densidad de fuerza en los devanados de un modelo con 3 columnas.

-0.12398 N/mm^3 , lo cual es considerablemente inferior a la densidad de

fuerza del modelo con 4 columnas, que era de 0.15339 N/mm^3 . Además, el radio medio para esta espira es de 158 mm , frente a los 175 mm de la pletina más externa para el modelo con 4 columnas. Introduciendo ahora el dato de fuerza en la ecuación (48) para el pandeo de una columna se obtendrá la distancia crítica para la cual esa carga representa la carga crítica, y con ese dato y el del radio una primera aproximación al ángulo entre soportes. Hay que recordar que en el primer caso esta fórmula supuso una muy buena aproximación al valor óptimo.

$$N_{cr} = q * R = 0.12398 * 1.12 * 6.72 * 158 = 147.43 = \frac{\pi^2 * E_0 * I_z}{L^2} \rightarrow L = 77.116 \text{ mm}$$

$$L = \beta * R \rightarrow \beta = 0.4817 \text{ rad} = 27.60^\circ$$

Resultado algo superior al obtenido para el caso del modelo con 4 columnas, coherente con una menor fuerza y también un menor radio medio de la espira.

Si se hace lo mismo para la ecuación del pandeo restringido el resultado es muy similar.

$$q_p = 0.9331 \frac{N}{mm} = \frac{EI}{R^3} * \left[\left(\frac{2 * \pi i}{2\beta} \right)^2 - 1 \right] \rightarrow \beta = 0.4761 \text{ rad} = 27.28^\circ$$

Dado que debe haber un número entero de soportes el ángulo de 27.28 grados, que equivale a algo más de 13 soportes, se aumenta el ángulo a 27.69° para obtener esos 13 soportes, dado que ya se ha visto que un mayor ángulo reduce el valor de las tensiones.

Se procede a correr directamente una nueva simulación en Comsol para esta pletina, en lugar de realizar como anteriormente los cálculos, ya que la simulación ha demostrado arrojar una solución bastante aproximada a la de estos.

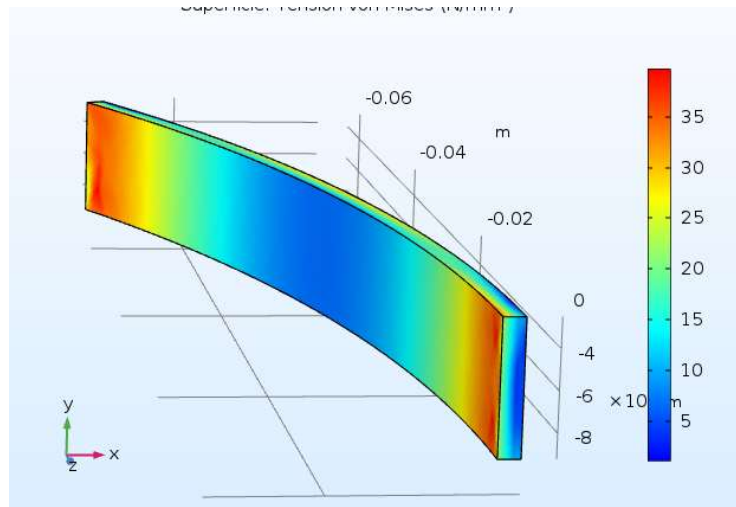


Ilustración 44. Resultado de la simulación del modelo de deformación para un transformador con 3 columnas. Separación entre soportes de 27.69°.

El límite elástico del cobre partía de 60 N/mm², y la norma aplicable reduce la tensión máxima a compresión que se puede dar en los arrollamientos a un 35% de ese valor, es decir, 21 N/mm². El valor máximo de tensión en la simulación es de 40.308 N/mm². Este valor supera con creces el límite permitido por la normativa, sin embargo, está muy próximo al valor de tensión de fluencia inicial. A la vista de un resultado ajustado se realizan también los cálculos analíticos.

$$Qr = 0.12398 \frac{N}{mm^2}; Rm = 158 mm; \beta = 27.69^\circ \rightarrow \alpha = 13.845^\circ = 0.2416 rad$$

$$f_1(\alpha) = 2.07; f_2(\alpha) = 1.5845 * 10^{-4};$$

$$N(\alpha) = -139.94 N/mm^2; M(\alpha) = -23.595 N/mm^2$$

$$\sigma_{max} = \frac{N(\varphi = \alpha)}{A} + \frac{M(\varphi = \alpha)}{I} * y = -35.39 N/mm^2$$

$$Err_{Comsol-Cal} = \frac{40.308 - 35.39}{35.39} * 100 = 13.89 \%$$

En primer lugar, el error entre el resultado de Comsol y el de los cálculos es considerable y, en segundo lugar, el valor de los cálculos de 35 N/mm² está por debajo del valor inicial de fluencia. La normativa en cualquier caso no lo admite, pero teóricamente esta distribución, de acuerdo a este cálculo podría ser estable frente a la flexión radial.

Teniendo en cuenta que esta apertura para la que se han realizado los cálculos y la simulación es de $27'69^\circ$, y que el valor máximo de apertura entre soportes hallado para el pandeo lineal restringido es de $27'28^\circ$; se tienen dos ángulos muy próximos entre sí, por lo que estaría justificado un estudio más detallado. Una posibilidad para tratar de hacer funcionar esta distribución podría ser jugar con la anchura de los soportes. Este es un punto que en este trabajo no se aborda, sin embargo, y a la vista de un resultado ajustado, podría ser interesante.

De cara a este trabajo, y dado que la normativa establece ese límite del 35% de $R_{p0.2\%}$, se debe reducir el número de columnas del devanado secundario a solamente dos.

10.1.3. Modelo con 2 columnas

El resultado de la simulación de un modelo con 2 columnas arroja una densidad de fuerza en la pletina más solicitada de -0.082033 N/mm^3 . Tomando este valor, se vuelven a realizar los cálculos para el pandeo de una columna recta y para el pandeo lineal restringido.

$$N_{cr} = q * R = 0.082033 * 1.12 * 6.72 * 142 = 87.67 = \frac{\pi^2 * E_0 * I_z}{L^2} \rightarrow L = 98.7 \text{ mm}$$

$$L = \beta * R \rightarrow \beta = 0.695 \text{ rad} = 39.42^\circ$$

$$q_P = 0.6174 \frac{N}{mm} = \frac{EI}{R^3} * \left[\left(\frac{2 * \pi i}{2\beta} \right)^2 - 1 \right] \rightarrow \beta = 0.6786 \text{ rad} = 38.89^\circ$$

Una vez más los resultados son muy similares, por lo que la ecuación básica para el pandeo de columnas supone una buena aproximación. Los resultados apuntan a algo más de 9 soportes en total, por lo que se redondea a alza, 10 soportes y un ángulo entre ellos de 36° .

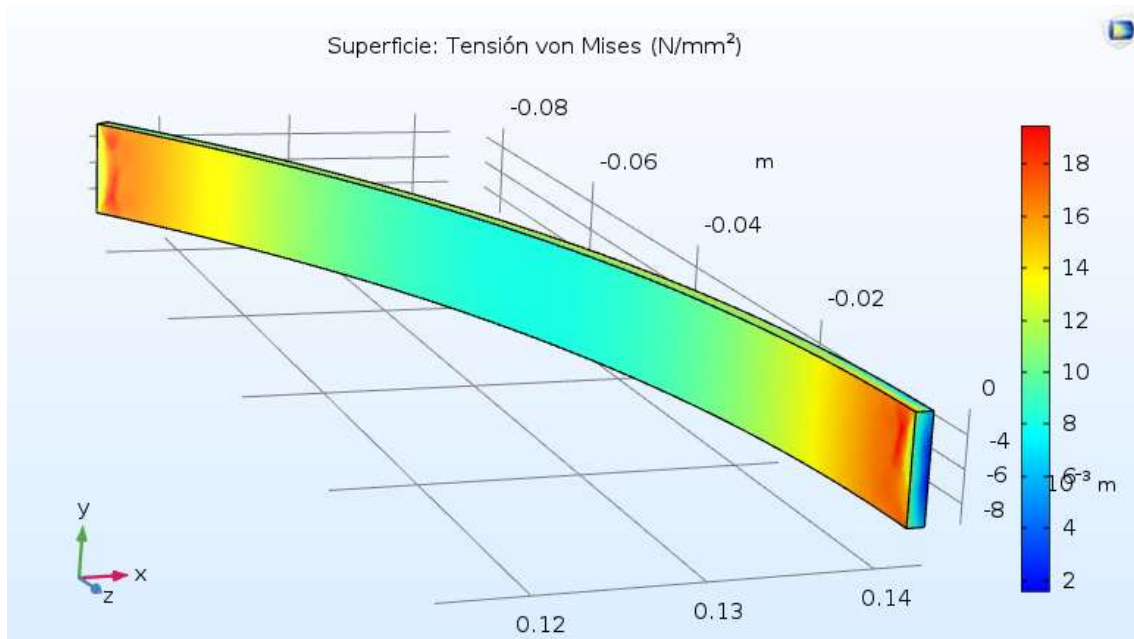


Ilustración 45. Resultado de la simulación del modelo de deformación para un transformador con 2 columnas. Separación entre soportes de 36°.

$$\text{Tensión máxima en la espira } (\beta = 36^\circ) = 21.644 \text{ N/mm}^2$$

Los valores finalmente se aproximan al límite necesario 21 N/mm². El valor máximo de tensión que arroja la simulación es de 21.644 N/mm².

Si se quisiera reducir aún más el número de soportes no se podría. Reducirlo a 9 aumentaría demasiado el ángulo entre ellos, haciendo que el devanado fuese inestable frente al pandeo lineal. Por el contrario, si se quisiera o necesitara aumentar el número de soportes o en algún punto del devanado se hiciera necesario un soporte adicional, si bien el valor máximo de tensión está en el límite de lo permitido por la norma (el límite elástico del cobre se encuentra entre 60 y 100 N/mm², por lo que el límite que permitiría la norma se encontraría entre 21 y 35 N/mm²), sí que existiría aún cierto margen.

10.2. CARGAS EN SENTIDO AXIAL

A diferencia de lo que ocurriría con las cargas en sentido radial, las cargas en sentido axial se dan en una parte diferente del devanado. En la ilustración (47), puede verse que las mayores cargas en sentido axial se dan en las partes superior e inferior del devanado, algo que lógicamente es coherente con la dirección del campo magnético en cada zona del arrollamiento. Concretamente la carga axial es de signo positivo o hacia arriba en la parte baja del arrollamiento, y de signo negativo o hacia abajo en la parte alta. Sin embargo, y debido a la simetría, los valores son los mismos para ambas partes, con lo que el estudio de una de ellas será suficiente.

10.2.1. Modelo con 2 columnas

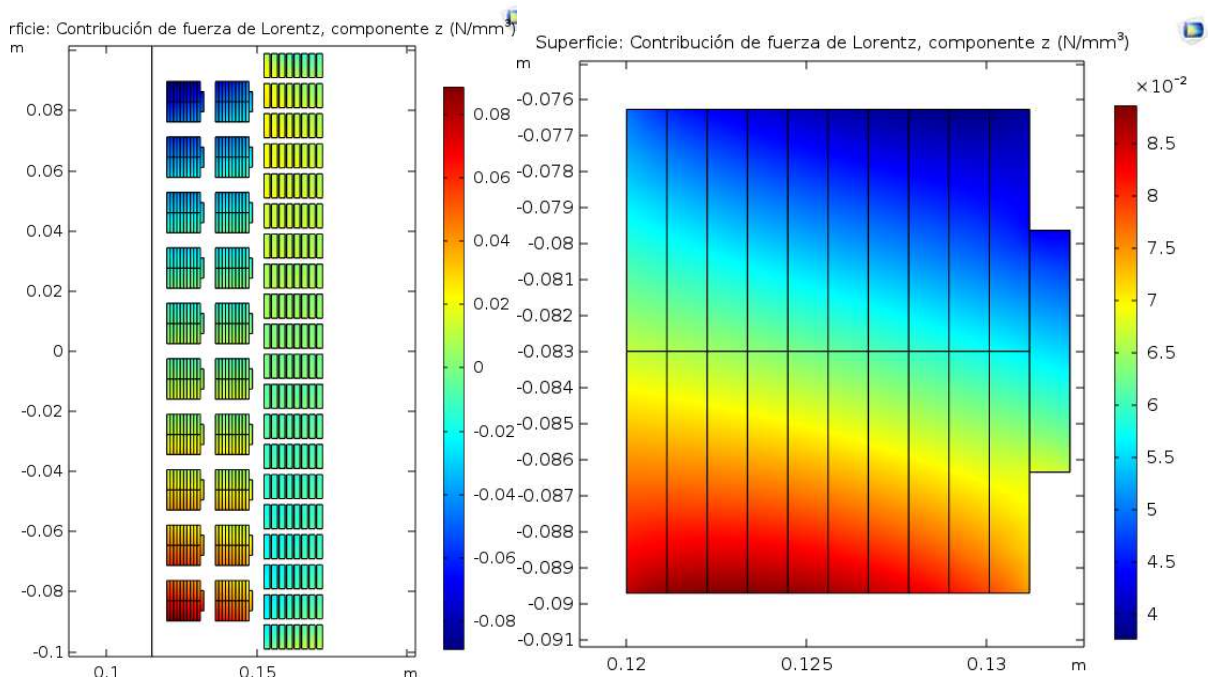


Ilustración 46. Densidad de fuerza axial en la espira más solicitada para cargas en sentido axial. Devanados completos (derecha) y detalle de la pletina 1x1, la más solicitada (izquierda).

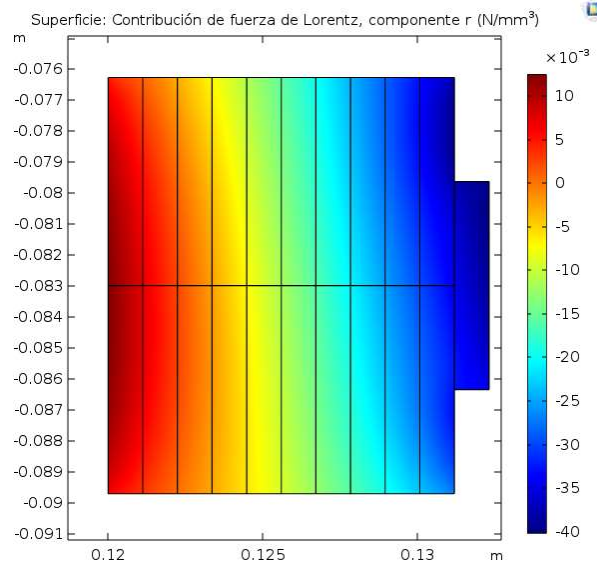


Ilustración 47. Densidad de fuerza radial en la pletina más solicitada axialmente (1x1).

Como se ve en las ilustraciones (47) y (48), la sollicitación axial es considerablemente superior a la sollicitación radial. Concretamente, los valores medios en toda la espira son:

$$\rho_{\text{Axial}} = 0.061825 \text{ N/mm}^3.$$

$$\rho_{\text{Radial}} = -0.013468 \text{ N/mm}^3.$$

Por lo que por el momento se despreciará la sollicitación radial, y en caso de que la tensión derivada de la sollicitación axial sea muy elevada se tendrá en cuenta también la radial.

Como se vio en el apartado 6, existen dos posibles consideraciones respecto de los soportes axiales, bien que estos se tomen como empotramientos o bien que se consideren apoyos que permitan un cierto giro de la espira en el apoyo. Según las ecuaciones (52) y (54) las leyes de momentos para esta 'viga' son:

- Empotramiento $M_{FZ} = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qLx}{2} - \frac{qL^2}{12}$
- Apoyo Fijo $M_{FZ}(x) = \frac{1}{2}(qx^2 - qLx)$

Siendo la tensión máxima aceptable el 35% de $R_{p0.2\%}$, es decir entre 21 y 35 N/mm^2 , y hallándose esta mediante Navier para el momento flector, se despeja este valor de tensión y el valor de la carga por unidad de longitud para hallar la longitud máxima entre apoyos.

$$\rho_{Axial} = 0.061825 \frac{N}{mm^3} \rightarrow q_{Axial} = \rho_{Axial} * A = 0.4653 N/mm$$

Para el supuesto del empotramiento (se calcula la máxima tensión en los apoyos, dado que ya se conoce que es ahí donde se da la máxima tensión):

$$\begin{aligned} \text{Empotramiento: } M_{FZ, Max}(x = 0) &= -21 \frac{N}{mm^2} = \frac{-\frac{qx^2}{2} + \frac{qLx}{2} - \frac{qL^2}{12}}{\frac{1.12 * 6.72^3}{12}} * \frac{6.72}{2} \rightarrow L \\ &= 67.57 mm \end{aligned}$$

Para el supuesto del apoyo fijo no se producen momentos en los apoyos, por lo que calculamos en la parte media entre apoyos.

$$\text{Apoyo Fijo: } M_{FZ, Max}\left(x = \frac{L}{2}\right) = -21 \frac{N}{mm^2} = \frac{\frac{1}{2}(qx^2 - qLx)}{\frac{1.12 * 6.72^3}{12}} * \frac{6.72}{2} \rightarrow L = 55.17 mm$$

En ambos casos se define la tensión negativa, de compresión, ya que para el caso de la sollicitación a tracción la norma es mucho más permisiva, tolerando hasta el 90% del valor del límite elástico.

$$\text{Empotramiento: } L = 67.57 mm (R = 126 mm) \rightarrow \beta = \frac{L}{R} = 0.5362 rad = 30.73^\circ$$

$$\text{Apoyo Fijo: } L = 55.17 mm (R = 126 mm) \rightarrow \beta = \frac{L}{R} = 0.4379 rad = 25.09^\circ$$

En la práctica podemos dar por hecho que el caso que aplica es el del empotramiento. Dado que todas las secciones se ven igualmente sollicitadas, es razonable considerar que la zona en los apoyos se encuentra en equilibrio, sin decantarse más de un lado que del otro, por lo que no habría giro en esa zona y el apoyo podría ser considerado como un empotramiento.

Una simulación para una única pletina ubicada en esa zona de la espira, con los valores de fuerza axial a que se ve sometida esa espira arroja los siguientes resultados.

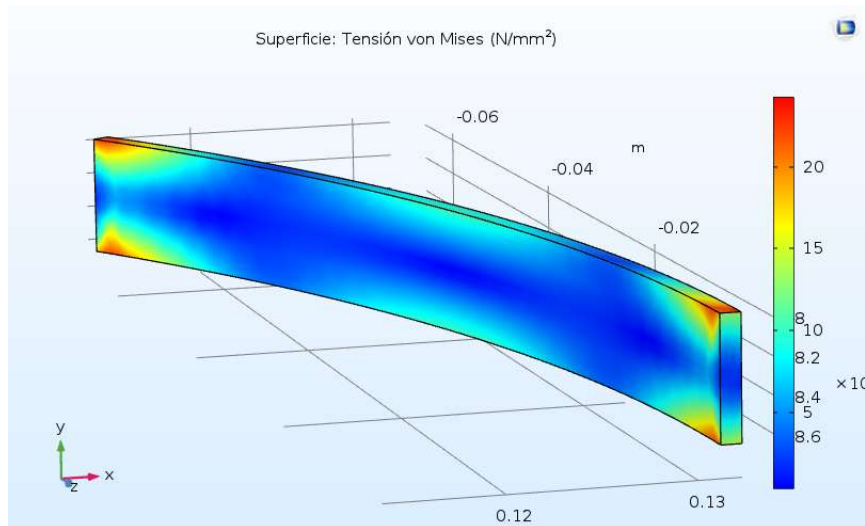


Ilustración 48. Simulación de pletina 1x1 y apertura 30° sometida únicamente a la carga axial de un modelo con 2 columnas.

$$\text{Tensión máxima en la espira } (\beta = 30^\circ) = 25.600 \text{ N/mm}^2$$

Ese valor de la tensión puede ser considerado demasiado alto, por lo que los 30° se reducen a 27'69°, lo que equivale a añadir un soporte al devanado en toda su circunferencia.

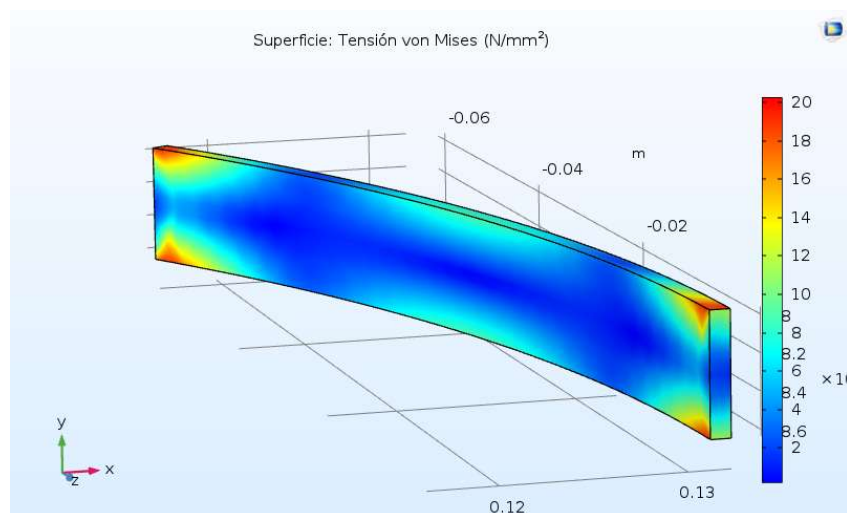


Ilustración 49. Simulación de pletina 1x1 y apertura 27.69° sometida únicamente a la carga axial de un modelo con 2 columnas.

$$\text{Tensión máxima en la espira } (\beta = 27.69^\circ) = 21.563 \text{ N/mm}^2$$

Podría pensarse que existe la posibilidad de que la carga axial produzca, al igual que la radial, el pandeo del conductor. El pandeo solo se da cuando existe un axil a compresión, en el caso de la carga axial (vertical) no existe axil en el devanado, por lo que el CTC no puede pandear verticalmente. Solo existe el esfuerzo de flexión (y el de cortante, el cual se ha despreciado de cara a los cálculos analíticos).

10.3. SUMA DE ESFUERZOS

Por último, y para comprobar que las distribuciones calculadas son correctas para las espiras seleccionadas, se suman a ambos modelos (el de cargas radiales y el de cargas axiales) el esfuerzo que no se había tenido en cuenta.

Para el caso de la espira situada en la parte más externa del devanado secundario y a media altura, el ángulo entre soportes es de 36° , la carga radial de -0.082033 N/mm^3 , y la axial de 0.0035426 N/mm^3 .

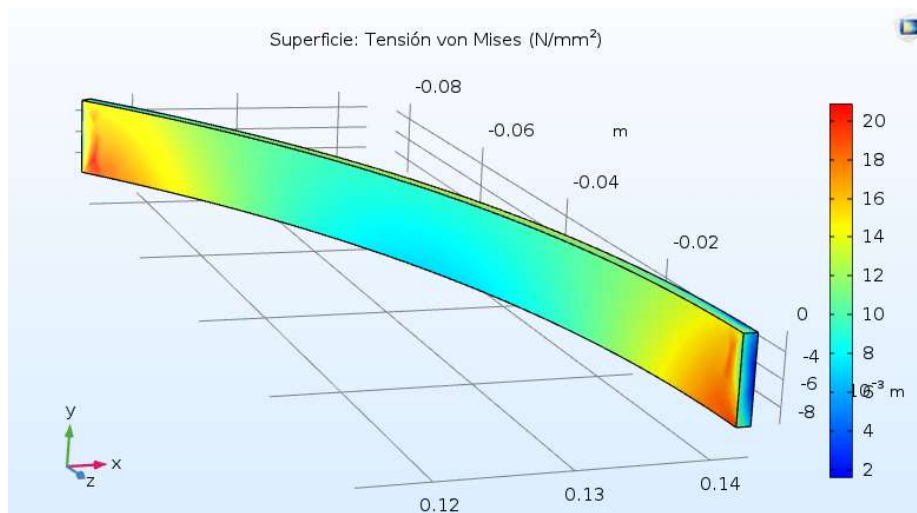


Ilustración 50. Pletina en posición 2x5, modelo con 2 columnas, pletina sometida a carga axial y radial.

$$\text{Tensión máxima en la espira } (\beta = 36^\circ) = 23.284 \text{ N/mm}^2$$

La tensión máxima es algo mayor que la obtenida en la simulación de carga solo radial, la cual era de 21.644 N/mm^2 , pero el valor se puede seguir considerando aceptable.

Para el caso de la espira situada en la parte más interna del devanado secundario, posiciones superior o inferior, el ángulo entre soportes es de 36° , la carga radial de -0.082033 N/mm^3 , y la axial de 0.0035426 N/mm^3 .

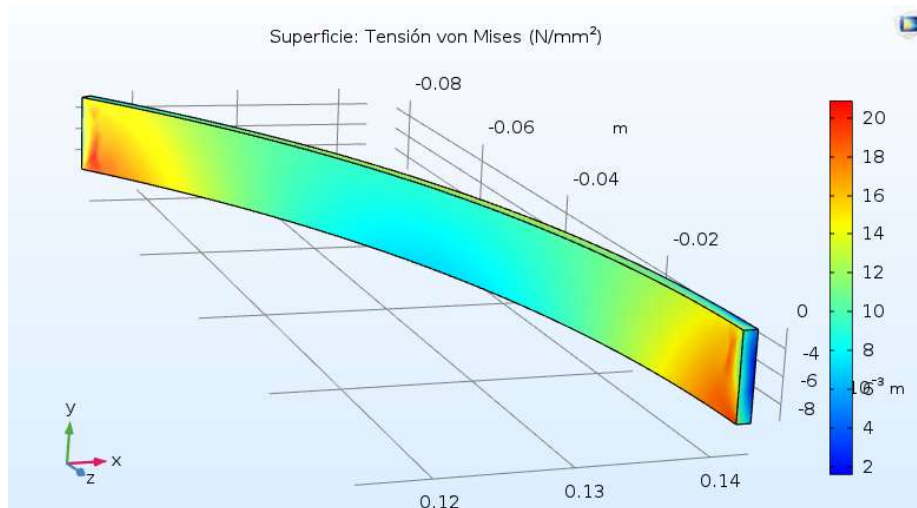


Ilustración 51. Pletina en posición 2x5, modelo con 2 columnas, pletina sometida a carga axial y radial.

$$\text{Tensión máxima en la espira } (\beta = 30^\circ) = 26.753 \text{ N/mm}^2$$

La tensión máxima es algo mayor que la obtenida en la simulación de carga solo axial, la cual era de 25.600 N/mm^2 , aunque el incremento es pequeño, y sigue dentro del límite del 35% de valor máximo del límite elástico ($R_{p0.2\%}$) de 100 N/mm^2 , que indica el fabricante para el cobre básico.

En cuanto a los soportes para el resto de las espiras del devanado secundario, bien podrían mantener la misma disposición hallada para las dos espiras en base a las cuales se han realizado los cálculos. La espira 2x5 es la más solicitada radialmente, por lo que los 10 soportes son suficientes para cualquier otra espira en una posición diferente. Por su parte, la espira r1-h1 es la más solicitada axialmente y ocurre lo mismo con sus 12-13 soportes. O bien podría escogerse intentar reducir al máximo el número de soportes en cada espira, aunque por lo general la refrigeración en los transformadores discurre a través de canales conformados por los devanados y por sus soportes, por lo que estos soportes suelen ser los mismos a lo largo y ancho del devanado.

Por último, las simulaciones con módulo tangencial arrojan unos resultados idénticos a los de las simulaciones con relación lineal única basado en el módulo de Young. En ningún caso se alcanza el punto de fluencia inicial, por lo que ambas simulaciones son iguales en todas sus condiciones de contorno.

10.4. RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES TEMPORALES

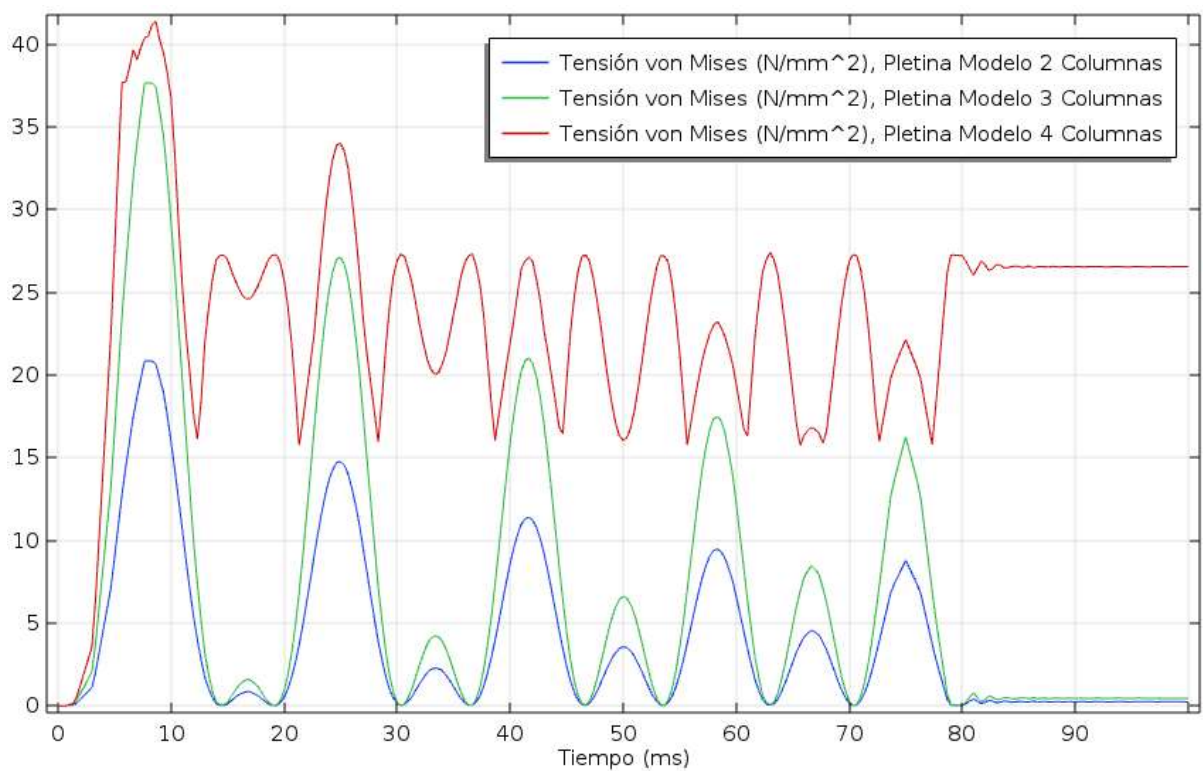


Ilustración 52. Tensiones internas de la simulación temporal.

Las simulaciones temporales no muestran un comportamiento diferente de las deformaciones (aunque al no estar indicado el módulo tangencial cinético ni la función de endurecimiento es normal). Sin embargo, en la ilustración (52), sí que se puede ver como en la pletina del modelo de 4 columnas, al retirar la carga se mantienen unas tensiones internas superiores a 25 N/mm². Estas tensiones residuales se deben a las deformaciones plásticas producidas. Mientras que en las pletinas de los

modelos de 2 y 3 columnas, al retirar la carga, las tensiones de von Mises se reducen a cero; al no haber deformaciones plásticas no aparecen tensiones a recuperarse la deformación elástica.

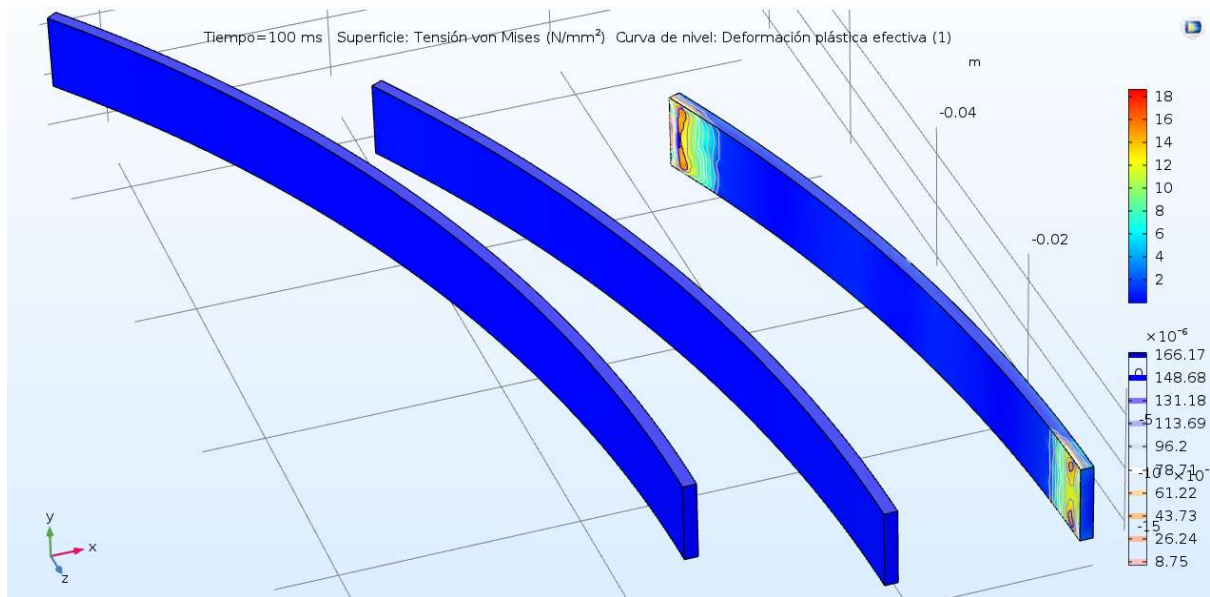


Ilustración 53. De izquierda a derecha, simulación temporal de las pletinas de los modelos de 2, 3 y 4 columnas, aplicando solo la carga radial.

Las ilustraciones (53) y (54) muestran gráficamente como únicamente se producen deformaciones plásticas en la pletina del modelo de 4 columnas, siendo estas muy severas. En la ilustración (55) se muestran estas deformaciones exageradas. Mientras en las pletinas de los modelos de 2 y 3 columnas esta deformación no solo es mucho menor, sino que es lineal, en la pletina del modelo de 4 columnas la deformación resulta muy destructiva.

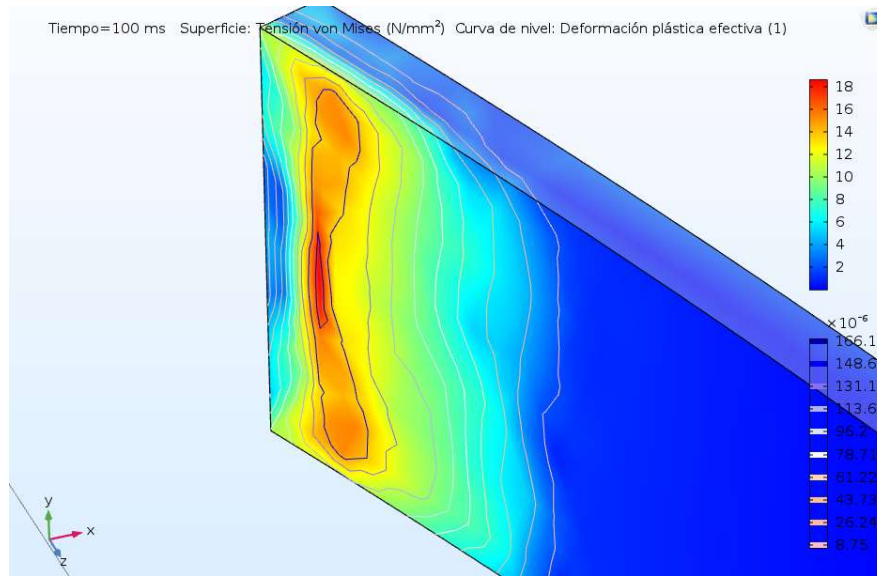


Ilustración 54. Detalle de la deformación plástica en la pletina del modelo con 4 columnas.

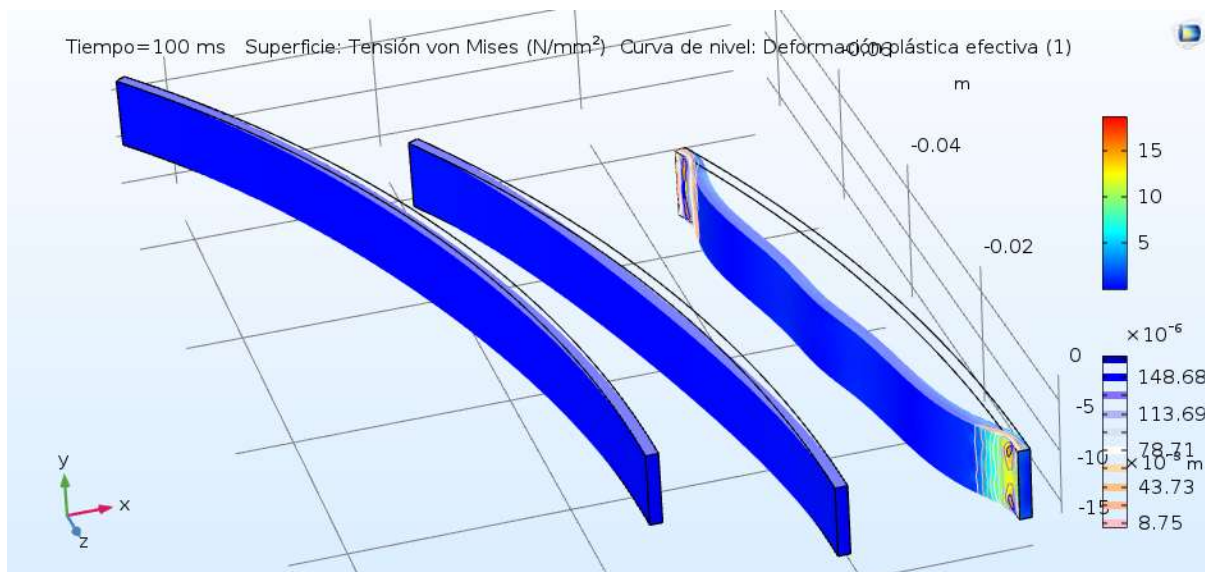


Ilustración 55. Deformaciones exageradas en las pletinas.

11. CONCLUSIONES

- Devanados con un radio mayor suponen mayores fuerzas radiales, mientras que aquellos más estrechos, pero necesariamente más altos experimentan menores fuerzas electromagnéticas. En la práctica será interesante reducir el tamaño de los transformadores, hacerlos más compactos y baratos, a la vez que menos pesados y difíciles de transportar. Este tipo de estudios pueden ayudar en las fases de diseño a apurar los límites, a la vez que reducen costes y dan lugar a productos más competitivos.
- Para lograr un devanado estructuralmente estable es necesario que este sea capaz de resistir ante el pandeo lineal y también ante la flexión radial. Sin embargo, las condiciones para lograr la estabilidad son inversas. Por un lado, un devanado estable frente al pandeo requiere una menor distancia entre soportes. Por otro lado, un devanado estable frente a la flexión radial requiere una mayor distancia entre soportes, por ilógico que pueda parecer. Por lo tanto, lo que debe lograrse es una conciliación entre el ángulo cuanto más cerrado mejor para el pandeo lineal, y un ángulo cuanto más abierto mejor para la flexión radial. El punto en que ambos ángulos se encuentran será el límite del diseño.
- La normativa AENOR para transformadores establece que el valor máximo de la tensión a compresión que puede darse en los conductores que conforman los devanados es del 35% del límite elástico ($R_{p0.2\%}$). Con este límite, se asegura que el devanado interno es estable frente al pandeo lineal y frente a la flexión radial. Sin embargo, solo la flexión radial se da cuando se produce una deformación plástica de los conductores. En este sentido, se puede establecer otro valor de tensión, aquel para el que comienza la

fluencia del material (deformación plástica), que es superior al 35% del límite elástico, y por debajo del cual no se produce una propagación de las tensiones. De esta forma se apuran los límites del material, así como los de la normativa, se mantiene la seguridad en que los devanados sean capaces de resistir los esfuerzos mecánicos del cortocircuito y se pueden lograr transformadores más compactos y baratos.

- La fuerza electromagnética depende directamente de la densidad de corriente. Simulaciones con modelos mucho mayores y corrientes de cortocircuito también mucho mayores muestran unas fuerzas no tanto más grandes que las que se dan para este transformador, cuya potencia de 10 MVA no es demasiado elevada. Por lo tanto, y llegado el caso, es posible que transformadores de muy grandes potencias deban recurrir a arrollamientos con densidades de corriente menores para hacer frente a estas fuerzas.
- Las mayores fuerzas se dan en la zona entre los arrollamientos primario y secundario, aumentar la distancia entre estos no disminuye la densidad de fuerza, mientras que seguramente sí reduzca la inductancia mutua y el rendimiento.
- Por regla general, hay más soportes radiales que axiales, el doble para transformadores de gran potencia. Sin embargo, y en este caso, los soportes axiales ha resultado necesario colocarlos más próximos entre sí. Esto podría explicarse debido al comportamiento como arco funicular del devanado frente a la fuerza radial. A menor número de soportes radiales esta se traduce en una mayor carga axial, la cual se distribuye uniformemente entre la sección del CTC, por lo que las tensiones resultantes son menores.

- Tal y como describe Geissler en [4], para que se produzca el pandeo restringido a cada 'semionda' de pandeo debe seguirla otra de signo contrario, por lo que a lo largo de toda la circunferencia debe haber un número par de segmentos. Sería interesante ver que ocurre si el número de segmentos es impar.

11.1. INSUFICIENCIAS DEL ESTUDIO

- **Falta de un cálculo iterativo en las simulaciones electromagnéticas.** Tal y como se hace referencia en [13], la relación entre el campo magnético y la inducción es no lineal (curva de histéresis). Ello conlleva que en este tipo de simulaciones los resultados obtenidos puedan no corresponderse con la realidad. En [13] se emplea un proceso iterativo que a cada paso calcula los valores de permeabilidad relativa e inducción magnética. Las simulaciones de este trabajo no cuentan con dicho proceso iterativo, por lo que los resultados pueden ser incorrectos o arbitrarios. Sin embargo, el trabajo trata de establecer una metodología más allá de obtener resultados 100% confiables y, por otro lado, tal proceso iterativo supera el alcance de un TFG, por lo que el trabajo realizado se considera suficiente.
- **Falta de la característica tensión-deformación completa del cobre.** De forma similar a lo que ocurre entre el campo y la inducción, la relación entre la tensión y la deformación tampoco es lineal. Esto se debe a que cuando se alcanza la zona de deformaciones plásticas de un determinado material estas aumentan drásticamente para incrementos muy limitados de la tensión. El modelo en tres dimensiones para el cálculo de las tensiones y las deformaciones que aquí se ha presentado emplea únicamente el módulo de Young como



característica tensión deformación y, a partir de una determinada tensión (tensión de fluencia inicial) un módulo tangencial que trata de aproximar la característica real. Pero no cuenta con la característica completa del cobre. Es por ello que este modelo únicamente se ha empleado para corroborar los volares de las tensiones halladas analíticamente, una vez que éstas se encontraban por debajo del límite elástico. Por lo tanto, y sin esa característica completa, el modelo es incapaz para la simulación de condiciones que lleven a la deformación, es decir, para simular deformaciones reales. Si embargo, la normativa establece unos valores de seguridad estrictos y muy por debajo del límite elástico, y más allá de la normativa, el objetivo será siempre mantener las tensiones por debajo de esa tensión de fluencia, por lo que el modelo sí es capaz dentro de ese rango.

- **La no simulación de secciones completas del CTC.** Una parte importante de un estudio de CTCs es el comportamiento desigual que pueda darse entre una única pletina y el CTC completo. Uno de los factores diferenciadores de este punto es el rozamiento entre pletinas. Aunque se intentó realizar simulaciones para más de una pletina, introduciendo pares de contacto entre ellas y diferentes valores del coeficiente de rozamiento, finalmente no se consiguió realizar simulaciones en que se lograra la convergencia. Además, estas simulaciones resultan ser muy pesadas (las configuraciones probadas solo contaban con dos pletinas), por lo que simular un CTC completo requeriría un ordenador más potente, dada especialmente la necesidad de realizar repetidas simulaciones para lograr un amplio conjunto de datos del que poder sacar conclusiones.
- **La no simulación temporal.** En un primer momento se dedicó mucho tiempo a realizar los pasos y cálculos necesarios para llevar a

cabo simulaciones en el dominio del tiempo. Sin embargo, estas simulaciones han resultado ser más complejas de lo previsto inicialmente. Por un lado, están los factores relacionados con los propios mecanismos físicos por los que estas deformaciones se producen. A parte de que las simulaciones empleadas no cuenten con la característica completa de deformación del cobre, las deformaciones plásticas no se producen instantáneamente. En este sentido, por ejemplo, es necesario indicar el módulo tangencial cinético o la función de endurecimiento (proceso por el cual el material al deformar plásticamente gana dureza). Existen varios factores, descubiertos a medida que se avanzaba, que finalmente imposibilitaron el estudio. Por otro lado, están los factores relacionados con las simulaciones computacionales. Este tipo de simulaciones resultan muy pesadas, al igual que las que introducen pares de contacto, y una única simulación requiere de demasiado tiempo dado el hardware disponible. Problemática a parte la de realizar configuraciones correctas de los modelos cuyas simulaciones logren la convergencia.

12. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Gustavo Jiménez Araya y Gustavo Adolfo Gómez Ramírez (2016). Comportamiento de los aislamientos sólidos de transformadores de potencia en condiciones ambientales no controladas.
- [2] Normativas Aenor UNE-EN – 60076. *Transformadores de Potencia*.
- [3] Daniel Geissler y Thomas Leibfried (2015). Mechanical breakdown of aged insulating paper around continuously transposed conductors for power transformers under the influence of short-circuit forces - Analysis by numerical simulation.
- [4] Daniel Geissler y Thomas Leibfried (2015). Simplified simulation model of continuously transposed cable for linear and nonlinear buckling analysis
- [5] Daniel Geissler y Thomas Leibfried (2017). Short-Circuit Strength of Power Transformer Windings-Verification of Tests by a Finite Element Analysis-Based Model
- [6] Theodore Wildi, traducción Rodolfo Navarro Salas, Revisión Luis Mauro Ortega Gonzalez (2007). Máquinas Eléctricas y Sistemas de Potencia (6ª Edición). PEARSON Education, México.
- [3] J.N. Reddy (2006). An Introduction to the Finite Element Method (3ª Edición).
- [4] O.C. Zienkiewicz. El Método de los Elementos Finitos.
- [6] D. José Ramírez Vázquez (1991). Estaciones de Transformación y Distribución. Protección de Sistemas Eléctricos (8ª Edición) Ediciones CEAC S.A.

- [7] Miguel Ángel Rodríguez Pozueta Dr. Ingeniero Industrial. Transformadores. Universidad de Cantabria – Departamento de Ingeniería Eléctrica.
- [8] Miguel Ángel Rodríguez Pozueta Dr. Ingeniero Industrial. Regímenes Transitorios en Transformadores. Universidad de Cantabria – Departamento de Ingeniería Eléctrica.
- [9] Normativas Aenor UNE-EN – 60076. *Transformadores de Potencia*.
- [10] Francisco Ignacio Sánchez Blazquez. Proyecto Fin de Carrera – Diseño de un transformador de 5 MVA, 33/11 kV Dyn11.
- [11] COMSOL Multiphysics Reference Manual. COMSOL 1998-2017. COMSOL 5.3^a
- [12] Robert M. Del Vecchio & cia (2010). Transformer Design Principles. Taylor and Francis Group, LLC.
- [13] Fausto Valencia, Mentor Póveda. Fuerzas eléctricas en Devanaos de Transformadores de Potencia debidas a Fallas en el Sistema Eléctrico (2014). Jornadas en Ingeniería Eléctrica y Electrónica (Vol. 25).

