

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



PUCP

Un estudio del proceso de elaboración del tejido quechua en telar
de cuatro estacas. Aportes para la enseñanza de las matemáticas
en la educación básica

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER
EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS**

AUTORA

María del Carmen Bonilla Tumialán

ASESORA

Dra. Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre

Junio, 2019

RESUMEN

El presente trabajo pretende aportar a la solución de la problemática educativa de los estudiantes de Educación Intercultural Bilingüe y de Educación Rural de la Región de Puno, que presentan un bajo desempeño en el logro de sus aprendizajes en el área de Matemática, en comparación con los estudiantes de las zonas urbanas. La búsqueda de la solución está relacionada con el estudio, reconocimiento y revalorización de los saberes matemáticos ancestrales desarrollados por la cultura quechua-collao, en específico aquellos que subyacen en la elaboración de los tejidos en telar de cuatro estacas (TTCE), saberes que han sido sistemáticamente invisibilizados por la cultura oficial desde la invasión española.

Es así como, desde las dimensiones política, antropológica e histórica aportadas por la Etnomatemática, y, considerando la dimensión epistemológica abordada desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), se determina la Organización Praxeológica Personal (OPP) del proceso de elaboración del TTCE realizada por una tejedora informante de Puno, con el propósito de dar a conocer elementos de su dimensión matemática. Se identifican los tipos de tareas, técnicas, tecnologías en las primeras fases del proceso de elaboración del tejido.

Lo que se persigue es develar algunas nociones y propiedades matemáticas que emergen de la OPP del TTCE, con la finalidad futura de dar orientaciones didácticas e incorporarlas en el diseño de procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas de los estudiantes de Educación Básica de la región. La metodología que se utiliza es cualitativa pues se aplica, en primer lugar, el método etnográfico, el trabajo de campo en Puno, la observación participante y entrevistas semiestructuradas a los informantes claves. Posteriormente, se analizan los datos registrados por medios audiovisuales utilizando los elementos teóricos de la TAD para determinar la OPP del TTCE de la informante, por lo cual se puede afirmar que el presente trabajo es un estudio de caso. En tercer lugar, se realiza el análisis de las primeras fases del proceso de elaboración del tejido, y se identifican algunas nociones y propiedades matemáticas que son utilizadas por la tejedora en el proceso, así como nociones matemáticas que pueden visualizarse en el proceso del tejido.

Producto del análisis efectuado, es posible afirmar que las tejedoras quechuas construyen un rectángulo en la fase en que instalan el armazón del telar, utilizando inconscientemente definiciones y propiedades matemáticas. En la fase relacionada al tejido propiamente dicho, las tejedoras quechuas manipulan las urdimbres y los palos, de una manera tal, que tienen un comportamiento semejante a las circunferencias y las tangentes a ellas.

La investigación pone en evidencia que la cultura quechua posee conocimientos matemáticos, transmitidos de generación en generación, y que son utilizados por los pobladores en el proceso de elaboración del tejido en telar.



Fuente: García (s.f.)

«En la medida que el ámbito indígena se difunde y colora a los otros grupos y realidades; en la medida que se proyecta sobre ellos, la diversidad de sangres, cultura e intereses adquiere el frescor rudo de una esperanza inédita, y la sabiduría absorta de quién empieza a reconocer su fortaleza».

*«Existe en el quechua chanka un término sumamente expresivo y muy común; cuando un individuo quiere expresar que **a pesar de todo** aún es, que existe todavía, dice:*

¡Kachkaniraqmi!»

¡Sigo siendo!

José María Arguedas (1911-1969)

Escritor, poeta, traductor, profesor, antropólogo y etnólogo peruano



Dedico este trabajo a mis hijos Iván y Flor de María, a mi nieta Sofía, a los pueblos originarios de mi querido Perú y, en especial, a la Cultura Xauxa.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no se hubiera podido realizar sin el trabajo académico desarrollado con los estudiantes indígenas quechuas y shipibos, becarios de las Carreras de Educación Inicial y de Educación Primaria de la Licenciatura en Educación Intercultural Bilingüe de la Facultad de Educación de la Universidad Peruana Cayetano Heredia, quiénes fueron la fuente de inspiración de las ideas iniciales del proyecto. Quiero agradecer, principalmente, a los estudiantes que participaron en el proyecto Benito, Lourdes, Silvia, Jonasa, Carmen, Alexis, Isai, Pilar y Carlos, también a Vilma, así como a sus familiares, que tanto en Puno como en Ucayali colaboraron en el trabajo de campo e hicieron que la estadía sea lo más acogedora posible.

Así mismo, agradezco a la Facultad de Educación de la UPCH por darme la oportunidad de participar en la formación docente inicial de los estudiantes becarios y por el apoyo recibido en el proyecto, a los profesores coinvestigadores del Proyecto de Etnomatemática, Dra. Olga Bardales, Dr. Oscar Espinosa, Dra. Norma Rubio, Mag. Eduardo Ruiz y Dr. Hernán Neciosup, y al Consorcio de Universidades del Perú por el financiamiento del Proyecto.

Agradezco a la Dra. Cecilia Gaita por la sugerencia de cambiar el tema de la tesis, por la asesoría en su realización, así como por sus enseñanzas en la Maestría. De igual manera, infinitas gracias a la Dra. Corine Castela del Laboratoire de Didactique André Revuz por su participación como coinvestigadora en el Proyecto, por sus enseñanzas y por la posibilidad de realizar una estancia de investigación en Francia con el apoyo de CONCYTEC-FONDECYT, trabajo que posibilitó una mayor comprensión de las categorías de la TAD, a la Dra. Sophie Desrosiers del École des Hautes Études en Sciences Sociales de París por las orientaciones en el trabajo antropológico, y al doctorando de la Universidad París Diderot Leonard Sánchez Vera por todo su apoyo.

También, tengo que expresar que este trabajo no se hubiera podido realizar sin el apoyo de Lucero Pinedo y Wendy Ochoa en el trabajo de campo en Puno y en Ucayali, sin la amable acogida de los habitantes de las comunidades de Llalli, Machacmarca y la ciudad de Ayaviri en Melgar, Puno, y sin la agradable estadía en las comunidades de Curiaca de Caco y Puerto Nuevo en Iparía, Coronel Portillo, en Ucayali. Quiero resaltar la importancia del aporte de los informantes, en especial, agradecer a la Sra. Isidora Velarde por su excelente disposición a compartir sus saberes y a la Municipalidad Distrital de Llalli por su colaboración en la realización del proyecto.

INDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	4
1.1 CONSIDERACIONES INICIALES	4
1.2 ANTECEDENTES.....	5
1.3 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.....	10
1.4 PREGUNTA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.....	12
1.4.1 Pregunta de investigación.....	12
1.4.2 Objetivo general	12
1.4.3 Objetivos específicos.....	13
CAPÍTULO II. ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN	14
2.1 ELEMENTOS TEÓRICOS CONSIDERADOS EN LA INVESTIGACIÓN	14
2.1.1. Elementos de la Etnomatemática	14
2.1.2. Elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.....	17
La Organización praxeológica o Praxeología	18
2.1.3. Articulación Etnomatemática y TAD.....	21
2.2 ELEMENTOS METODOLÓGICOS CONSIDERADOS EN LA INVESTIGACIÓN .	
.....	24
CAPÍTULO III. CONTEXTO EDUCATIVO Y ANTECEDENTES QUE CONTRIBUYERON A DAR ORIGEN A LA INVESTIGACIÓN	26
3.1. CONTEXTO EN EL QUE SE DA ORIGEN A LA INVESTIGACIÓN	26
3.2. PROPUESTA DE UN PROYECTO Y EL PIIM 2015.....	27
3.3. PRINCIPIOS DE LA ETNOGRAFÍA	29
El sentido de la Etnografía	30
La observación participante	31
3.4. EL TRABAJO ETNOGRÁFICO EN EL PROYECTO.....	32
CAPÍTULO IV. IDENTIFICACIÓN DE UNA ORGANIZACIÓN PRAXEOLÓGICA PERSONAL EN EL PROCESO DE ELABORACIÓN DEL TEJIDO EN TELAR.....	34

4.1.	EL PROCESO DE ELABORACIÓN DEL TEJIDO EN TELAR.....	37
4.1.1.	Preparación de la lana para el tejido.....	39
4.1.2.	Construcción de la estructura que soporta el telar.....	40
	Tipo de tarea 1: Clavar las cuatro estacas de acuerdo con el tamaño del producto final. ...	40
	Tipo de Tarea 2. Amarrar las awas (palos) a las estacas	45
4.1.3.	El allwido o urdido	46
	Subtipo de tarea 1: Tender las urdimbres de la pampa.....	47
	Subtipo de tarea 2: Tender las urdimbres del pallay	52
	Elaboración del pallay central	57
	Número total de urdimbres y colores empleados en el tejido	58
	Conteo de las urdimbres	62
	Representación semiótica del allwido	63
	Otra representación que toma en cuenta la dirección del movimiento.....	65
4.1.4.	Preparación del telar para el tejido	67
	Tipo de Tareas 1: Construcción de la illawa	67
	Tipo de Tareas 2: Traspasar las urdimbres de una de las awas a una lana gruesa	71
4.1.5.	Tejido propiamente dicho.....	74
	Tipo de tarea: Tejer utilizando la trama	74
CAPÍTULO V. IDENTIFICACIÓN DE NOCIONES Y PROPIEDADES MATEMÁTICAS QUE EMERGEN DE LA OPP		81
5.1	NOCIONES QUE EMERGEN AL ARMAR LA ESTRUCTURA DEL TELAR.....	82
5.1.1	Construcción de rectángulos al elaborar el armazón del telar.....	83
	Construcción del rectángulo a partir del ancho	83
	Construcción del armazón a partir de la medida del largo	84
	Construcción del rectángulo a partir de las diagonales	85
	Construcción del rectángulo con comprobación al final	87
5.1.2	Definiciones y propiedades matemáticas relacionadas al rectángulo.....	88
5.1.3	Identificación de las definiciones y propiedades matemáticas en los procesos de construcción	89
5.2	TANGENTES INTERIORES Y EXTERIORES A CIRCUNFERENCIAS EN EL PROCESO DEL TEJIDO EN TELAR.....	91
5.2.1	Representación gráfica del allwido inicial	92
	Trazado de dos rectas tangentes interiores comunes a dos circunferencias	93
	Prueba matemática de la técnica de construcción de las rectas tangentes interiores a dos circunferencias	94
5.2.2	Representación gráfica del tejido cuando la illawa está abajo	95
	Construcción de las tangentes exteriores a dos circunferencias.....	96

Prueba matemática de la técnica de construcción de las rectas tangentes exteriores a dos circunferencias	97
5.2.3 Representación gráfica del tejido cuando la illawa está arriba.....	98
5.3 REFLEXIONES PEDAGÓGICAS QUE SURGEN DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO	99
5.4 FUTUROS TEMAS DE INVESTIGACIÓN QUE SURGEN DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO	100
CONSIDERACIONES FINALES Y APORTES PARA LA ENSEÑANZA.....	105
REFERENCIAS.....	108



LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 1.</i> Esquema del proceso de investigación	2
<i>Figura 2.</i> Elaboración propia en base a Resultados ECE (Perú, 2017).....	11
<i>Figura 3.</i> Telar andino común con una illawa. Fuente: (d’Harcourt, 1934; citado por Desrosiers, 2010, p. 266)	35
<i>Figura 4. a.</i> Corte transversal del telar después del alwido. <i>b.</i> Corte transversal del tejido.	36
<i>Figura 5.</i> Diferentes tipos de estructuras y entrecruzamiento de los hilos de urdimbre y trama de los tejidos. Fuente: Desrosiers (1997, p. 326)	36
<i>Figura 6.</i> Tres ejemplos de estructuras para crear una decoración: (a) con los hilos de urdimbre y trama, (b) solo con los hilos de urdimbre, (c) solo con los hilos de trama. Fuente: Desrosiers (2010, p. 266).....	37
<i>Figura 7.</i> Unqhuña	37
<i>Figura 8.</i> Poblador k’antiendo la lana con la pushka	39
<i>Figura 9.</i> Estructura o armazón del telar	40
<i>Figura 10.</i> Dos estacas separadas por dos cuartas y media.....	40
<i>Figura 11.</i> Mide en una soguilla dos cuartas y media.....	41
<i>Figura 12.</i> Duplica la medida en la soguilla.	41
<i>Figura 13.</i> Coloca el palo con la lazada junto a una de las estacas.	41
<i>Figura 14.</i> Jala la soguilla con el palo y la lazada.....	42
<i>Figura 15.</i> Clava la tercera estaca en la intersección del palo y la lazada.	42
<i>Figura 16.</i> Traslada las lazadas a través de los palos para llegar a la segunda estaca ...	43
<i>Figura 17.</i> Clava la cuarta estaca.	43
<i>Figura 18.</i> La distancia de la primera a la tercera es igual a la distancia de la segunda a cuarta estaca, cinco cuartos.	43
<i>Figura 19.</i> Amarra la awa a las estacas	45
<i>Figura 20.</i> Golpea hacia abajo la awa para que sea paralela al piso	45

<i>Figura 21.</i> Armazón del telar terminado.....	46
<i>Figura 22.</i> Zonas del pallay y de la pampa	47
<i>Figura 23.</i> Allwido de las dos primeras urdimbres (una vuelta) en la pampa	48
<i>Figura 24.</i> Allwido de la primera franja blanca de la pampa.....	48
<i>Figura 25.</i> Selecciona cinco ovillos desde el celeste claro al azul oscuro	49
<i>Figura 26.</i> Selecciona cinco ovillos desde el amarillo hasta el rojo granate.....	49
<i>Figura 27.</i> Une las diez lanas de colores en forma ordenada.....	50
<i>Figura 28.</i> Fija las lanas entre las urdimbres y la awa. Los ovillos están junto a la tejedora	50
<i>Figura 29.</i> Pampa con 11 colores.....	50
<i>Figura 30.</i> Posición de los ovillos del otro lado de la awa. Allwido de la franja blanca y diez franjas de colores.	51
<i>Figura 31.</i> Une las puntas de las lanas blanca y azul.....	53
<i>Figura 32.</i> Amarra las lanas blanca y azul a la lana amarilla.....	53
<i>Figura 33.</i> El ovillo azul está debajo del brazo.....	53
<i>Figura 34.</i> Cuando regresa el blanco lo pone debajo del brazo	54
<i>Figura 35.</i> Lanza el ovillo azul por encima de la awa y el asistente no lo devuelve	54
<i>Figura 36.</i> Lanza el ovillo blanco por debajo de la awa	54
<i>Figura 37.</i> Proceso opuesto al aplicado en el urdido de la pampa	55
<i>Figura 38.</i> Sostiene el ovillo blanco debajo del brazo	55
<i>Figura 39.</i> Coloca el ovillo azul devuelto por el asistente y lo pone debajo del brazo..	55
<i>Figura 40.</i> Vista de las urdimbres junto a la awa en la zona del pallay. Se cruzan.	56
<i>Figura 41.</i> Vista de las urdimbres junto a la awa en las zonas de la pampa (izquierda) y del pallay (derecha)	57
<i>Figura 42.</i> Orden de los ovillos antes de tender las urdimbres	57
<i>Figura 43.</i> Urdimbres del pallay central (izquierda).....	58
<i>Figura 44.</i> Tejido dividido en zonas	59

<i>Figura 45.</i> Número impar de urdimbres en el pallay	61
<i>Figura 46.</i> Conteo y enumeración de las urdimbres	62
<i>Figura 47.</i> B ¹ elemento del allwido.....	63
<i>Figura 48.</i> B ⁰ elemento del allwido.....	63
<i>Figura 49.</i> B ¹ B ⁰ unión básica de los elementos del allwido	64
<i>Figura 50.</i> Urdimbre que va de izquierda a derecha	65
<i>Figura 51.</i> Urdimbre que va de derecha a izquierda	65
<i>Figura 52.</i> Unión de urdimbres	66
<i>Figura 53.</i> Urdimbre opuesta que va de izquierda a derecha.....	66
<i>Figura 54.</i> Urdimbre opuesta que va de derecha a izquierda.....	66
<i>Figura 55.</i> Zonas delimitadas por el allwido.....	67
<i>Figura 56.</i> Tubo de PVC en el allwido y desplazamiento de segmento <i>AB</i> de intersección	68
<i>Figura 57.</i> Cábano en el telar para la illawa	68
<i>Figura 58.</i> Escoger las urdimbres de abajo de la zona interior derecha.....	69
<i>Figura 59.</i> Construcción de la illawa en el cruce	69
<i>Figura 60.</i> Lazadas de la urdimbre en la barra delgada	70
<i>Figura 61.</i> La Illawa acciona sobre las urdimbres inferiores de la zona interior derecha	70
<i>Figura 62.</i> Detalle de la Illawa.....	70
<i>Figura 63.</i> Lana blanca amarrada a la chocura que está encima del allwido	72
<i>Figura 64.</i> Se amarra la chocura a la lana blanca utilizando el cordel grueso	72
<i>Figura 65.</i> Cambio del awa por lana en el telar	72
<i>Figura 66.</i> Telar preparado para el tejido.....	73
<i>Figura 67.</i> Urdimbres antes del cambio	73
<i>Figura 68.</i> Corte longitudinal de las urdimbres después del cambio	74
<i>Figura 69.</i> Acerca el cruce del allwido hacia el polo con la ruka	74

<i>Figura 70.</i> Wich'uña	75
<i>Figura 71.</i> Prensa la trama con la wich'uña	75
<i>Figura 72.</i> Representación gráfica de la elevación de la Illawa y la formación de dos cruces	76
<i>Figura 73.</i> Eleva la Illawa y se forman dos cruces	76
<i>Figura 74.</i> Con la ruka empuja el segundo cruce hacia el tocuru	76
<i>Figura 75.</i> Une la illawa al tocuru.....	77
<i>Figura 76.</i> Con ayuda de la ruka empuja el segundo cruce hacia ella	77
<i>Figura 77.</i> Construye la khespa que envuelve el mini o trama	78
<i>Figura 78.</i> Introduce la khespa con el mini entre las urdimbres	78
<i>Figura 79.</i> Allwido cuando la illawa está abajo.....	78
<i>Figura 80.</i> Pasa constantemente la wich'uña encima de las urdimbres.....	78
<i>Figura 81.</i> Ancho AB del rectángulo	83
<i>Figura 82.</i> Puntos A , B y C del paralelogramo	84
<i>Figura 83.</i> Rectángulo construido	84
<i>Figura 84.</i> Largo L del paralelogramo	85
<i>Figura 85.</i> Rectángulo construido a partir del largo	85
<i>Figura 86.</i> Diagonal AC del rectángulo	86
<i>Figura 87.</i> Trazado de una diagonal y un lado.....	86
<i>Figura 88.</i> Trazado de las dos diagonales	86
<i>Figura 89.</i> Construcción de un rectángulo	87
<i>Figura 90.</i> Largo del rectángulo.....	87
<i>Figura 91.</i> Planta las estacas D y C	88
<i>Figura 92.</i> Comprueba que las diagonales son congruentes	88
<i>Figura 93.</i> Definición y propiedades del rectángulo	89
<i>Figura 94.</i> Corte longitudinal del telar cuando la illawa está abajo.....	92

<i>Figura 95.</i> Corte longitudinal del telar cuando la illawa está arriba	92
<i>Figura 96.</i> Corte longitudinal del allwido inicial	92
<i>Figura 97.</i> Construcción de circunferencia de radio $r_1 + r_2$	93
<i>Figura 98.</i> Trazado de rectas tangentes a circunferencia de radio $r_1 + r_2$ que pasen por C_2	93
<i>Figura 99.</i> Trazado de rectas tangentes interiores a dos circunferencias	94
<i>Figura 100.</i> Prueba matemática de la técnica de construcción de la recta tangente interior <i>EF</i> a las dos circunferencias	95
<i>Figura 101.</i> Prueba matemática de la técnica de la construcción de la recta tangente interior <i>HI</i> a las dos circunferencias.....	95
<i>Figura 102.</i> Tangentes exteriores a dos circunferencias	95
<i>Figura 103.</i> Construcción de circunferencias auxiliares	96
<i>Figura 104.</i> Rectas tangentes a circunferencia con radio $r_1 - r_2$	97
<i>Figura 105.</i> Rectas tangentes exteriores a dos circunferencias.....	97
<i>Figura 106.</i> Prueba matemática de la técnica de construcción de las tangentes exteriores a dos circunferencias	98
<i>Figura 107.</i> Construcción de segmentos de la illawa.....	98
<i>Figura 108.</i> Trenza. Fuente: Rodríguez (s.f.).....	101
<i>Figura 109.</i> Tejedora mexicana de Chiapas. Fuente: Camalich (2018).....	102
<i>Figura 110.</i> Telar de cintura maya de Guatemala. Fuente: Rivera (2016).....	102
<i>Figura 111.</i> Telar vertical del norte de África. Fuente: Lefébure (2010)	103
<i>Figura 112.</i> Telar antiguo japonés. Fuente: Ichiki (2018)	103

LISTA DE TABLAS

<i>Tabla 1.</i> Fases del proceso de elaboración del tejido en telar de cuatro estacas _____	38
<i>Tabla 2.</i> Zonas del tejido, número de urdimbres y colores _____	59
<i>Tabla 3.</i> Construcción del rectángulo a partir del ancho _____	89
<i>Tabla 4.</i> Construcción del armazón a partir del largo _____	90
<i>Tabla 5.</i> Construir un rectángulo a partir de las diagonales _____	90
<i>Tabla 6.</i> Construcción de un rectángulo con comprobación _____	91



INTRODUCCIÓN

La población peruana está cambiando, los Censos Nacionales del 2017 (INEI, 2018) han dado a conocer, que ante la pregunta ¿Por sus costumbres y sus antepasados, Ud. se considera?, el 25% de la población peruana se auto identificó como persona originaria, quechua, aimara o nativa de la Amazonía, a pesar de que sólo el 16% tiene una lengua originaria como lengua materna. Eso indica que existe una fuerte tendencia creciente hacia la auto identificación como pueblo originario. Existen tendencias contrarias, una que reivindica un mayor sentimiento de identidad con sus raíces étnicas, y otra más antigua, y todavía vigente, que niega sus orígenes. Fuera de las estadísticas, se siente en el día a día un creciente reconocimiento y revalorización de nuestro pasado histórico, de la conciencia de la defensa de su legado y del papel que los pueblos originarios juegan en él.

En esa línea, el estado peruano ha puesto en la agenda pública a la interculturalidad y al bilingüismo en diversos sectores, en los servicios de salud, en la administración de la justicia, en el periodismo, y por supuesto en la educación. Inclusive, se promueve la investigación sobre los saberes desarrollados y empleados por los pueblos originarios en la solución de los problemas de su entorno, con la finalidad de ponerlos en vigencia por su comprobada eficacia en situaciones cotidianas, procurando articularlos con la ciencia y tecnología oficial.

Desde 1972, los diversos gobiernos han decretado planes, leyes, políticas sectoriales que fomentan la Educación Intercultural y la Educación Intercultural Bilingüe (EIB). El 2016 el Ministerio de Educación (MINEDU) aprobó el Plan Nacional de EIB al 2021 (Perú, 2016) y la Política Sectorial de Educación Intercultural y EIB. Además de tener el objetivo de brindar un servicio educativo relevante y pertinente, que garantice un mejor aprendizaje de la población escolar de los pueblos originarios, implementando una EIB en todas las etapas, formas y modalidades de la educación peruana; se pretende implementar la Educación Intercultural en todo el sistema educativo, incluso en el 100% de las escuelas de la zona urbana, con la finalidad que los escolares peruanos conozcan la diversidad, valoren su riqueza, la respeten y así poder construir una ciudadanía saludable, sin discriminaciones.

La interculturalidad está presente desde hace varias décadas en el sistema educativo peruano, pero no se contaba con orientaciones que permitieran formular propuestas pedagógicas concretas que la pongan en vigencia. En la actualidad, a pesar de ser un enfoque transversal del Currículo Nacional de Educación Básica, las competencias relacionadas a la interculturalidad se restringen al aspecto lingüístico. Es necesario que el enfoque intercultural llegue a otras áreas como las ciencias, y en especial a las matemáticas, a través de la Etnomatemática, que explica los

conocimientos matemáticos teniendo en cuenta la contextualización en el grupo sociocultural de los sujetos productores, como un constructo que no nace al margen de la cultura local.

La presente investigación transita en el mismo camino al procurar identificar conocimientos matemáticos utilizados por las comunidades quechuas en sus diversas actividades de la vida cotidiana. El siguiente esquema explica, de manera general, cuál ha sido el proceso de investigación desarrollado (Fig. 1).

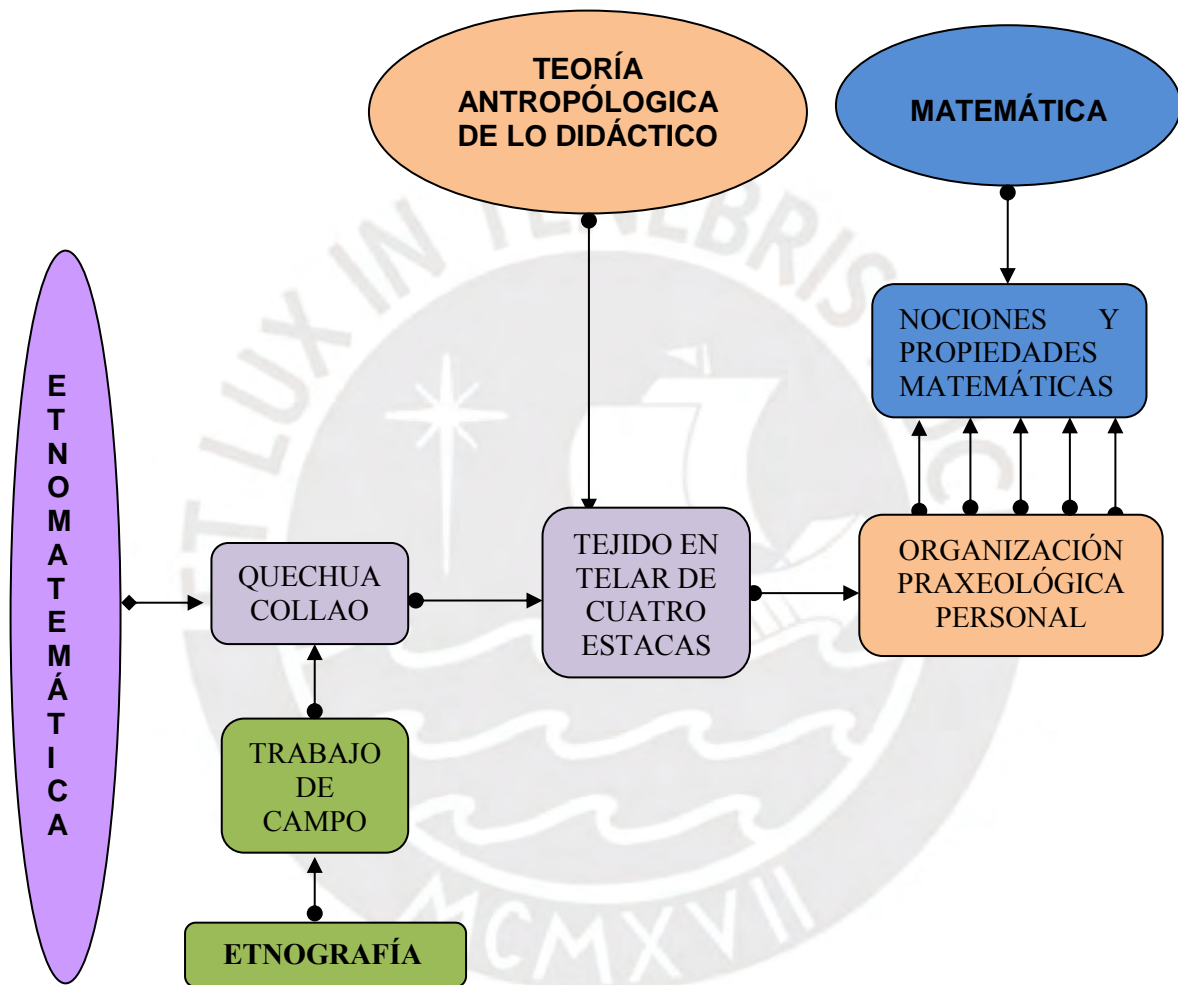


Figura 1. Esquema del proceso de investigación

En el capítulo I se expone el problema de investigación, los estudios que están relacionados a la problemática y que han antecedido al presente trabajo, la justificación, y finalmente, la pregunta y los objetivos de la investigación.

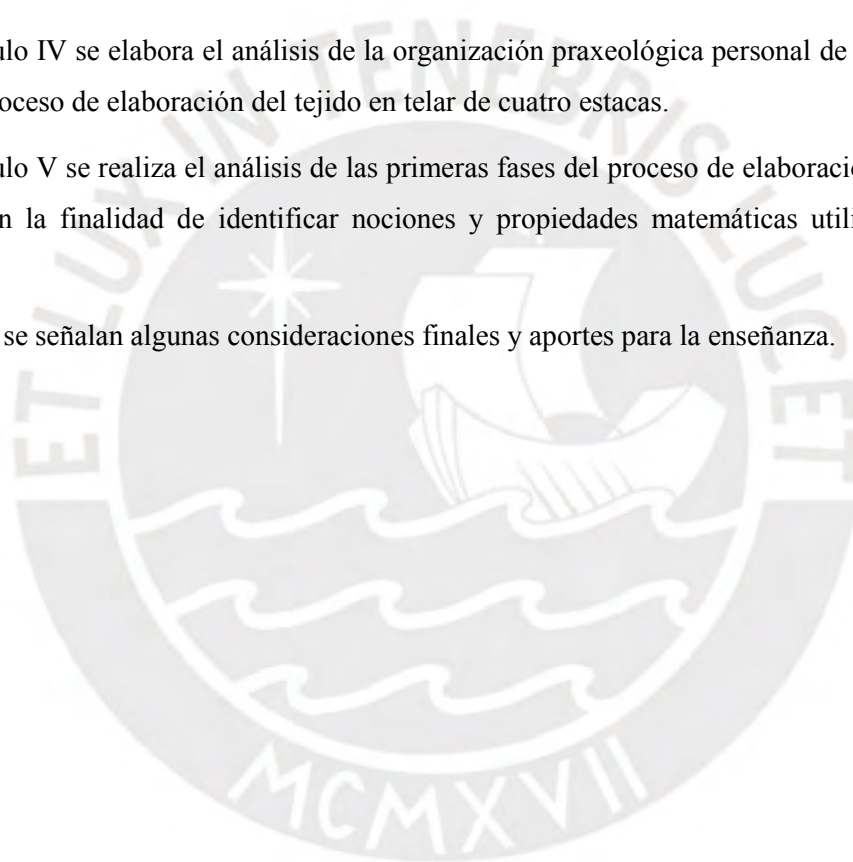
En el capítulo II se encuentran desarrollados los elementos teóricos, la Etnomatemática, la Teoría Antropológica de lo Didáctico y su articulación, así como los elementos metodológicos considerados en la investigación a través de tres etapas.

En el capítulo III se da a conocer el contexto educativo y los antecedentes que contribuyeron a dar origen a la investigación, explicándose de manera detallada la necesidad de utilizar el método etnográfico, en tanto el presente estudio se origina en un proyecto multidisciplinar educativo, antropológico y matemático.

En el capítulo IV se elabora el análisis de la organización praxeológica personal de las primeras fases del proceso de elaboración del tejido en telar de cuatro estacas.

En el capítulo V se realiza el análisis de las primeras fases del proceso de elaboración del tejido en telar con la finalidad de identificar nociones y propiedades matemáticas utilizadas en el proceso.

Finalmente se señalan algunas consideraciones finales y aportes para la enseñanza.



CAPÍTULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El Perú es un país pluricultural y multilingüe en el que conviven 52 pueblos originarios que se expresan en 47 lenguas, esa realidad sociolingüística fomenta la diversidad cultural, fenómeno que es inherente a lo humano. Lo normal es lo diverso, lo extraño es lo homogéneo. A nivel educativo, para atender esa realidad, surge la Educación Intercultural Bilingüe (EIB), modelo que propugna la equidad y respeto de los derechos humanos de las comunidades originarias, y trabaja por brindar a las mencionadas comunidades una educación de calidad, identificando contextos de aprendizaje con pertinencia cultural y lingüística.

1.1 CONSIDERACIONES INICIALES

En los últimos años existe una mayor preocupación por la equidad en la educación, inquietud que se puede apreciar en el objetivo de desarrollo sostenible cuatro, registrado en un documento de las Naciones Unidas (2015, p. 16) “Garantizar una educación inclusiva y equitativa de calidad y promover oportunidades de aprendizaje permanente para todos”. Bajo esa perspectiva, se han desarrollado estudios sobre la incidencia de las cosmovisiones y conceptos culturales indígenas de conocimiento, múltiples y diversos en la política educativa en América Latina.

La diversidad es inherente a la condición humana. En América Latina la diversidad se manifiesta en la existencia de más de seiscientos pueblos originarios (UNESCO, 2017) y otros grupos culturales minoritarios, marginados históricamente por los sistemas educativos y la política social, cuyos estudiantes, a consecuencia de ese abandono, obtienen los peores resultados en logros de aprendizaje en matemáticas. Una forma de remontar esta situación estaría dada si se trabaja por una justicia cognitiva y epistémica, proporcionando oportunidades de aprendizaje que permitan el reconocimiento y la revalorización de la cultura y conocimientos indígenas, y su necesaria inclusión en la política pública.

En el caso específico de la Educación Matemática (EM), la justicia cognitiva y epistémica se expresa en la fuerza reivindicativa del derecho social a la EM de los pueblos indígenas, que defiende la existencia de un paradigma relativista en matemáticas (PRM) (Oliveras, 2015). El PRM representa una crítica a los modelos opresores y colonizadores de los saberes que niegan la existencia del conocimiento múltiple. De Sousa (2010) señala que el colonialismo europeo causó un epistemicidio, una vastísima destrucción de los conocimientos de los pueblos originarios, y que el fin del colonialismo político no significó el fin del colonialismo en las ideas.

Dentro de esa concepción, se da un ‘pensamiento abismal’ entre dos universos, el universo de ‘este lado de la línea’, de lo que es visible (occidental), y el universo ‘del otro lado de la línea’ donde están los que son invisibles y no existentes. Superar el colonialismo significa revalorizar los conocimientos de los pueblos indígenas y reconocer que existe una diversidad cultural y epistemológica, y que esta diversidad genera mayor riqueza pues proporciona recursos no convencionales que contribuyen a la solución de problemas de la sociedad, utilizando conocimientos igualmente válidos, aunque no sean científicos. En este contexto, la revaloración de los conocimientos ancestrales implica en la EM, el diseño de procesos educativos que incorporen los conocimientos matemáticos que existen en los propios pueblos y que corresponden a esa riqueza cultural y cosmovisiones.

Tomando en cuenta la diversidad cultural de sus pueblos, el Ministerio de Educación de Perú (2016) aprobó el Plan Nacional de EIB al 2021, que establece los lineamientos de una Política Sectorial de EIB. Una de sus propuestas es la articulación de la escuela a las dinámicas socioculturales y económicas de la comunidad, lo que implica una participación activa de diversos actores educativos y sociales en la gestión: padres de familia, líderes comunitarios, sabios y sabias, así como la transmisión pedagógica de los conocimientos de la cultura, lo que garantizaría un aprendizaje pertinente y de calidad.

Un factor que contribuiría a garantizar un aprendizaje pertinente y de calidad en la EM, sería la promoción de investigaciones que procuren dar a conocer los saberes matemáticos de los pueblos originarios, con la finalidad que sean utilizados en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica. El presente trabajo forma parte de los resultados de un proyecto de investigación realizado en las regiones de Puno y Ucayali los años 2016 y 2017, que buscó develar la dimensión matemática de las prácticas culturales de las comunidades quechuas y shipibas. En específico, del conjunto de prácticas observadas, se trató de hacer evidente las nociones y propiedades matemáticas utilizadas en el proceso de elaboración del tejido en telar de cuatro estacas de la cultura quechua.

1.2 ANTECEDENTES

La Etnomatemática es una línea de investigación de la EM que está muy poco desarrollada en el Perú. Países como Estados Unidos, Nueva Zelanda, Mozambique, Brasil y Colombia han avanzado más en este campo (Fuentes, 2014). Sin embargo, diversos investigadores en Perú han realizado, en distintos momentos y regiones, proyectos que han contribuido a poner en práctica la Etnomatemática en la EIB, propuestas que a continuación son mencionadas.

Martha Villavicencio dirigió el Proyecto Experimental de Educación Bilingüe de Puno (1978 – 1988) y el Programa de Educación Rural Andina (1989 – 1996) en las zonas rurales quechuas y

aimaras, en base a los cuáles realiza aportes a la implementación de la EIB. Pretendía desarrollar “un estudio sobre el sistema matemático subyacente en diversas manifestaciones socioculturales de comunidades quechuas y aimaras” (Villavicencio, 2011, p. 2). En su trabajo propone la alternativa técnico-pedagógica AMACOS (Aprendizaje de matemáticas a partir del contexto sociocultural) en donde el profesor orienta el proceso y propone situaciones de aprendizaje pertinentes, por medio de dos lenguas y dos culturas (Villavicencio, 2001). La idea es proponer actividades contextualizadas a partir de los saberes etnomatemáticos de los educandos y del uso de la lengua materna de los estudiantes de EIB, fortaleciendo de esa manera su autoestima. En ese sentido, considera que es importante desarrollar las lenguas autóctonas mediante la estandarización de los términos relacionados a las matemáticas. Se rescata, de los planteamientos propuestos en su trabajo, el deseo de estudiar el sistema matemático subyacente en las manifestaciones culturales, así como lo importante que es considerar el contexto en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Avanzando en el mismo camino, Joachim Schroeder con el auspicio de la Cooperación Técnica Alemana (PROFORMA-GTZ) y de la Unidad de Formación Docente de Primaria del Ministerio de Educación (UFOD), dirigió de 1997 hasta el 2002 el proyecto “Matemática Intercultural” (Schroeder, 2005). En el mencionado proyecto participaron profesores de Institutos Superiores Pedagógicos Públicos de diversas regiones del Perú. Tuvo como objetivo general avanzar en la implementación de la interculturalidad en el área de la matemática tanto a nivel conceptual como a nivel de la práctica. Schroeder menciona que en 1991 se señalaron los Lineamientos de la Política Nacional de Educación Intercultural en el Perú, con lo que se dio un cambio de perspectiva, desde entonces la educación intercultural pasó, de ser una orientación intercultural en el marco de la Educación Bilingüe a una orientación intercultural general de la Educación Primaria.

Con el proyecto, Schroeder contribuyó a materializar experiencias concretas derivadas de la formación docente, procurando superar la monoculturalidad, enfoque que privilegia una cultura dominante; así como la biculturalidad, sobre la que se ha desarrollado la Educación Bilingüe Intercultural (EBI), y que entiende a la educación solo como el encuentro de la cultura de un grupo originario con la cultura mestiza. El enfoque de la interculturalidad supera los enfoques precedentes, pues busca representar la diversidad social, cultural y lingüística; reconociendo la diversidad de saberes y perspectivas.

En el proyecto “Matemática Intercultural” se trabajó para elaborar una fundamentación teórica de la didáctica intercultural de la matemática; una metodología del aprendizaje intercultural de la matemática que permita desarrollar modelos, así como, materiales educativos y métodos adecuados para la práctica docente. Se ha podido tener acceso a los materiales producidos en diferentes regiones del país, debido al trabajo investigativo de los profesores de los Institutos

Superiores Pedagógicos, dirigidos por Joachim Schroeder, en el que se ha utilizado el método etnográfico, las entrevistas, los cuestionarios, la observación y otras herramientas para registrar información, experiencias que se ha estudiado para enriquecer la presente investigación.

Otro trabajo importante fue desarrollado el año 2000 por el investigador Paulus Gerdes, quien orientó un seminario sobre Etnomatemática como consultor del Programa Marco de Formación Profesional Tecnológica y Pedagógica en Perú (FORTE-PE) del Instituto Superior Pedagógico Público de Loreto (ISPPL). En el seminario, realizó una exposición sobre métodos de investigación en etnomatemática, dirigida a los docentes, lingüistas y antropólogos asistentes, tratando de incluir ejemplos de las culturas amazónicas, escogiendo el caso particular de los cestos de la cultura Bora. En forma grupal se analizó cada paso de la fabricación de los cestos, tratando de identificar las ideas matemáticas involucradas. Toda esta experiencia sirvió de base para que Gerdes “analizara varios aspectos de la decoración de las paneras y travessas circulares, desde su fabricación a la composición y colorización de patrones finitos y planares, inclusive una reflexión sobre las simetrías involucradas” (Gerdes, 2013, p.11). De igual manera, analiza aspectos geométricos de la fabricación de los cestos y presenta sugerencias para incorporar esos conocimientos de la cestería Bora en la EM. Es importante comprender cómo identifica las ideas matemáticas de la cestería bora y cómo las incorpora en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En la misma región, la Amazonía, el antropólogo Andrés Chirinos Rivera del 2004 al 2011 estuvo a cargo del Proyecto de Educación Intercultural Bilingüe Loreto Amazonas (PEIBLA), que ejecutaron la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID), la Dirección General de Educación Intercultural Bilingüe y Rural, y la Dirección de Educación Intercultural Bilingüe del Ministerio de Educación. En el proyecto, fueron capacitadas autoridades de la UGEL Yurimaguas y maestros de aula en el uso de la yupana para la resolución de las operaciones básicas de matemáticas como la adición, sustracción, multiplicación y división (Mendoza, 2010).

El PEIBLA se desarrolló en siete redes del Alto Amazonas: Integración Cultural Bajo Huallaga, Mashi, Supayacu, Fray Martín, Datem del Marañón, carretera Saramirisa y Samiria, de manera tal que fueron beneficiados más de ochenta comunidades de las etnias cocamas cocamillas, shawis y shiwilas, y fueron formados más de mil trescientos profesionales de la educación. Uno de los aspectos valiosos de esta propuesta es la incorporación de la yupana, herramienta ancestral utilizada por los antiguos peruanos, en la planificación curricular del aula. Eso nos demuestra que es posible articular los conocimientos matemáticos empleados por la cultura andina a los procesos de aprendizaje y enseñanza de la matemática en la educación básica.

Fuera del ámbito nacional, en América Latina hay experiencias en Etnomatemáticas que merecen ser resaltadas, como es el caso del trabajo realizado por el epistemólogo francés André Cauty, en

el marco del Laboratorio de Traducción Kwibi Urraga para la Investigación en Lingüística Cognitiva Aplicada a la Etnoeducación en Colombia. Cauty señala que se ha dado un cambio en la mentalidad de los países latinoamericanos, pues ahora se reconoce la diversidad cultural y la riqueza producida por ella. Es por eso importante promover la EIB y considerar que “la matemática sólo puede tener sentido para los estudiantes, si se aprende en situaciones que permitan articular las nociones matemáticas que hay que enseñar con las nociones naturales familiares ... expresadas en la lengua de los educandos” (Cauty, 2001, p. 50).

Es necesario resaltar que la investigación realizada por Cauty incide principalmente en el tema de las relaciones entre lenguas, lenguajes y matemáticas. Como resultado del proyecto, se deduce que el problema que debe de resolver la EIB es “un problema de frontera, de articulación, de transmisión, de traducción, de compartir contenidos de conocimientos complejos y estructurados entre personas de lenguas y culturas realmente diferentes y aún más diversificadas...” (Cauty, 2001, p. 80). Es importante considerar el aspecto lingüístico y su relación con las matemáticas, pero hay que tener en cuenta que también existen otros registros que se deben analizar, como el gestual, más aun, teniendo en cuenta que hay muchas expresiones que no pueden ser traducidas literalmente o que simplemente no tienen traducción, porque estas expresiones están relacionadas con la cosmovisión de cada pueblo.

De igual manera en Colombia, Aroca (2007) realizó una investigación que tuvo como objeto de estudio el significado social y cultural de las configuraciones geométricas que los indígenas arhuacas emplean al tejer figuras tradicionales en la parte lateral de sus mochilas. El análisis desde la etnomatemática se efectuó en los tres niveles de la significación simbólica, su significado cosmogónico, cosmológico y su cosmovisión. Además, analiza matemáticamente el objeto de estudio, y finalmente propone cómo se puede incluir los resultados obtenidos en otros contextos educativos. De la investigación se puede concluir que es posible “integrar los saberes ancestrales en los currículos actuales y de paso rescatar prácticas autóctonas que han sobrevivido a la depredación simbólica de nuestra cultura hegemónica” (Aroca, 2007, p. 15), resultados que contribuyen a fundamentar la propuesta desarrollada en la presente investigación.

En el ámbito nacional y en un contexto universitario, el 2014 el Ministerio de Educación de Perú, a través del Programa Nacional de Becas, promovió el Programa de EIB en diversas universidades. Es así como, estudiantes quechuas, shipibos y aimaras se matricularon en la Carrera de EIB de la Facultad de Educación de la Universidad Peruana Cayetano Heredia, en las especialidades de Educación Inicial o de Educación Primaria. Los estudiantes tuvieron muchas dificultades en los cursos de Matemática para obtener un nivel de desempeño satisfactorio en el logro de los aprendizajes, así como, para llegar a comprender las nociones y propiedades matemáticas involucradas.

Con la finalidad de conseguir los objetivos de enseñanza propuestos, se introdujeron herramientas de la historia de la matemática y de la informática en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, como es el caso de la yupana en la resolución de las operaciones básicas, la adición, sustracción y multiplicación, y el uso del Software de Geometría Dinámica del Cabri II Plus en el diseño de sus objetos culturales, empleando elementos básicos de la Geometría y las transformaciones geométricas (Bonilla, 2015a, 2015b, 2016).

En el trabajo realizado a lo largo de dos años se pudo tener evidencia que los estudiantes, al elaborar diseños de sus culturas, empleaban nociones y propiedades matemáticas de una manera implícita y no consciente, a través de prácticas sociales y culturales que habían sido enseñadas por sus padres, hermanos o abuelos. Es así como surge la idea de observar las prácticas sociales y culturales de los pueblos originarios para identificar en ellas la utilización de nociones matemáticas, con la finalidad de incorporar ese contexto en el diseño didáctico que tenga como objetivo el logro del aprendizaje de dichas nociones. De esa manera, el proceso de aprendizaje y enseñanza sería pertinente y de calidad, lográndose un mayor éxito en el desempeño satisfactorio del aprendizaje esperado.

La idea se plasmó en el Proyecto de Investigación “Articulación de Saberes etnomatemáticos en procesos de aprendizaje en instituciones educativas primarias quechuas y shipibas” dirigido por docentes de la Universidad Peruana Cayetano Heredia, la Pontificia Universidad Católica del Perú y del Laboratorio de Didáctica André Revuz de Francia, y que ganó el primer puesto del Premio a la Investigación Interuniversitaria y Multidisciplinar 2015 promovido por el Consorcio de Universidades, premio con el que se consiguió el financiamiento. El proyecto realizó el trabajo de campo desde agosto del 2016 hasta enero del 2017, registrándose información audiovisual de diversas prácticas sociales en Puno y Ucayali.

Del análisis de la información hallada se pudo encontrar evidencias que demuestran que los pobladores utilizan nociones y propiedades matemáticas en el proceso de elaboración del tejido en telar de cuatro estacas de la Región de Puno, práctica cultural y social de las comunidades quechuas (Bonilla, 2017). Considerando el marco teórico de la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD) se trabajó en la identificación de la Organización Praxeológica (OP) del proceso de elaboración del tejido quechua en telar de cuatro estacas (TTCE) de Puno, y dentro de ella la dimensión matemática que lleva implícita en la primera fase del proceso.

Investigaciones que pueden considerarse como antecedentes del tema propuesto en la tesis están relacionadas al estudio de los saberes matemáticos de los grupos profesionales, área investigada tanto por la Etnomatemática como por la TAD. Dentro del marco de la TAD se han desarrollado estudios que se han tratado sobre el saber matemático en los escenarios profesionales. Tal es el caso de dos investigaciones que indagaron un entorno laboral: la costura a medida en Argentina

(Castela y Elguero, 2013) y el trabajo de los jornaleros migrantes en México (Solares, 2015). En ellas, el inicio del proceso de invención de los saberes se da en las instituciones profesionales (costureras) o en la vida social (agricultores), con técnicas y tecnologías que buscan solucionar tareas problemáticas que emergen de la práctica, que son validadas empíricamente, que se van construyendo a través de un proceso histórico que no es lineal y es complejo, y que constituyen *etnopraxeologías*, legitimadas e institucionalizadas (Castela, 2016).

En ese contexto, es necesario tener claro que, para investigar sobre las matemáticas en las instituciones culturales, es preciso realizar una indagación epistemológica, tomando en cuenta el principio antropológico que cada institución tiene una actividad cognitiva propia. En otras situaciones, como señalan Castela y Romo (2011), la producción de saberes se origina en la institución matemática académica, de investigación, circulando los saberes a instituciones de utilización (cruzando fronteras), desarrollándose un proceso de transposición que crea un logos con una orientación práctica. Tal es el caso del saber sabio la Transformada de Laplace, que cuando es enseñado en la Ingeniería Automática o de control, la praxeología matemática evoluciona y se adapta a las condiciones que impone la institución en donde se pretende emplear la técnica.

La presente investigación se encuentra en el primer caso, es decir, se realizará una indagación epistemológica en el proceso de elaboración del TTCE, procurando identificar su organización praxeológica y dentro de ella la dimensión matemática que subyace.

1.3 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La propuesta se sitúa en el marco de la estructura del Sistema Educativo Peruano. Este sistema se encuentra dividido en dos etapas, la Educación Básica y la Educación Superior. En la Educación Básica existen las modalidades: Regular, Alternativa, Especial, Intercultural Bilingüe y Técnica Productiva. La Educación Intercultural Bilingüe se ofrece actualmente en los niveles Inicial y Primaria. La EIB busca promover la valoración y enriquecimiento de las culturas de los educandos de los pueblos originarios, sustentados en el aprendizaje en su lengua materna y considerando al castellano como una segunda lengua. Es obligación de los docentes de EIB dominar ambas lenguas. Se tiene como perspectiva implementar progresivamente la EIB en la Educación Secundaria en las zonas donde existan culturas originarias (Osorio et al, 2018).

Dentro del régimen de la EIB, la población escolar involucrada se encuentra principalmente en las zonas rurales. Una forma de estudiar las diferencias que existen entre los estudiantes de las zonas urbanas y los estudiantes de las zonas rurales se podría realizar analizando las Evaluaciones Censales que se aplican todos los años en las instituciones educativas a nivel nacional. Si tomamos

en cuenta el análisis efectuado en los resultados de las Evaluaciones Censales aplicadas a estudiantes de 2° grado de Educación Primaria, realizadas por la Oficina de Medición de la Calidad del Aprendizaje del Ministerio de Educación (2017), se puede apreciar que desde el 2006 hasta el 2016 la curva que describe el nivel de desempeño satisfactorio en matemática en el área rural, a lo largo de ese periodo, se encuentra siempre por debajo de la curva del área urbana, brecha importante que puede ser explicada por las diferencias culturales y por otros aspectos, como el bajo nivel de vida, las deficiencias nutricionales, la falta de servicios públicos y de una infraestructura adecuada.

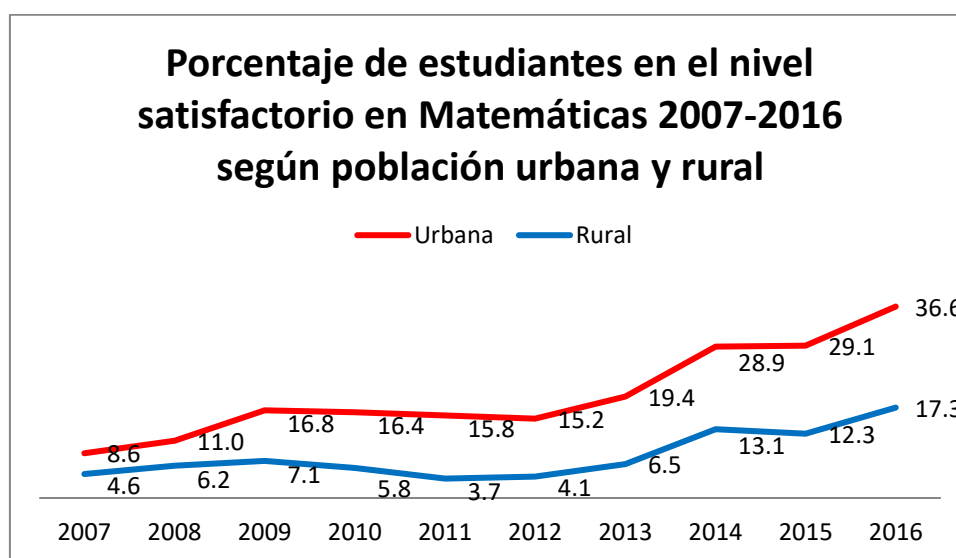


Figura 2. Elaboración propia en base a Resultados ECE (Perú, 2017)

Como se puede apreciar en la Figura 2, en el 2007 un 8,6% de estudiantes urbanos se encontraban en el nivel satisfactorio, frente al 4,6% de estudiantes rurales, siendo la diferencia de cuatro puntos porcentuales. A lo largo de los años, la diferencia continúa, pero se va incrementando, de manera tal que el 2014 los porcentajes son del 28,9% frente al 13,1%, respectivamente, con una diferencia de 15,8 puntos porcentuales. Comparando los resultados de los años 2013 y 2014, se aprecia un mayor crecimiento del nivel satisfactorio en la zona urbana (9,5%) que en la zona rural (6,6%). El 2016 la diferencia porcentual entre el nivel de desempeño satisfactorio en matemática de los estudiantes del área urbana (36,6%) es de 19,3 puntos porcentuales con respecto al mismo concepto del área rural (17,3%).

A pesar de los esfuerzos desarrollados por los organismos del MINEDU encargados de la EIB, actual Dirección General de Educación Básica Alternativa, Intercultural Bilingüe y Servicios Educativos en el Ámbito Rural – DIGEIBIRA, el crecimiento del nivel satisfactorio en el área de comunicación es mayor que en el área de matemáticas. Uno de los factores a tomar en cuenta, y

que podría explicar esa situación, es que, aun considerando que los estudiantes estudiaran en su lengua materna, los procesos de enseñanza y aprendizaje no consideran las nociones matemáticas implícitas en las prácticas cotidianas de sus comunidades (Villavicencio, 2001; Cauty, 2001; Gerdes, 2013) divorciándose así de los saberes matemáticos pertenecientes a sus culturas. De allí que se genera la necesidad de realizar investigaciones que identifiquen las situaciones en que los pobladores de las comunidades utilizan naturalmente nociones matemáticas, para, de esa manera, diseñar en ese contexto los procesos de enseñanza y aprendizaje de las nociones que se desea que los estudiantes aprendan.

La investigación sobre el estudio de la dimensión matemática del proceso de elaboración del tejido en telar de cuatro estacas, por lo tanto, se justifica porque sus resultados develarían saberes ancestrales poco conocidos de una realidad muy poco investigada. Es así como se espera, una vez incorporados los saberes ancestrales, contribuir al diseño de procesos de enseñanza aprendizaje pertinentes y de calidad, que permitirían incrementar el nivel de logro de los aprendizajes, conseguir una mayor comprensión de las nociones matemáticas que se desean enseñar en la educación básica y aportar en el diseño de las políticas educativas en EIB, en la metodología y en la implementación del currículo en aula por docentes de los pueblos originarios.

1.4 PREGUNTA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.4.1 Pregunta de investigación

¿Cuáles son y cómo se describen las fases del proceso de producción del tejido en telar de cuatro estacas (TTCE) de las comunidades quechuas de Puno? ¿Cuál es la OPP del proceso de elaboración del TTCE de una informante? ¿Cuáles son los objetos, nociones y propiedades matemáticas que subyacen a dichas prácticas? ¿Qué sugerencias generales se pueden proponer, a partir de dicho estudio, en el diseño de procesos de aprendizaje y enseñanza de la matemática en la Educación Básica Regular en la Región de Puno?

Con la finalidad futura de incorporar los saberes matemáticos quechuas en el diseño de procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas de los estudiantes de Educación Básica de la región de Puno, trabajo que correspondería a un próximo proyecto de investigación, se plantea el siguiente objetivo:

1.4.2 Objetivo general

Contribuir al estudio, reconocimiento y revalorización de los saberes ancestrales desarrollados por la cultura quechua-collao, en particular, identificar y caracterizar los saberes matemáticos involucrados en la elaboración de los tejidos en telar de cuatro estacas de la región de Puno.

1.4.3 Objetivos específicos

- Determinar la Organización Praxeológica Personal (OPP) del proceso de elaboración del TTCE realizado por una tejedora informante de Puno, con el propósito de identificar elementos de su dimensión matemática.
 - Identificar las fases del proceso de elaboración del TTCE.
 - Identificar los tipos de tareas y las técnicas, que corresponden a la Praxis, así como la tecnología y teoría, pertenecientes al Logos, que conforman la OPP de las fases del proceso de elaboración del TTCE confeccionado por una informante de Puno.
 - Develar algunas nociones y propiedades matemáticas que emergen de la OPP de las fases del proceso de elaboración del TTCE.

Como se puede observar, el objetivo específico se divide en tres subobjetivos. En primer lugar, establecer las fases del proceso de elaboración del TTCE, posteriormente, al interior de cada fase, identificar la OPP de la actividad textil de la informante. De esta manera se estaría respondiendo a la primera y segunda preguntas de investigación. El tercer subobjetivo tratará de resolver la tercera interrogante planteada en el trabajo sobre las nociones y propiedades matemáticas presentes en el tejido en telar. Con respecto a la cuarta pregunta, sólo se darán a conocer algunas sugerencias generales que orienten la dirección que podrían seguir futuras investigaciones relacionadas al tema.

CAPÍTULO II. ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo se describirán los elementos teóricos que guían la investigación, los cuales corresponden a la Etnomatemática y la Teoría Antropológica de lo Didáctico, teorías socioculturales que inciden en dimensiones complementarias. Además, se explicará la metodología de investigación, la etnografía para el trabajo de campo, así como el análisis de la Organización Praxeológica Personal del tejido en telar desarrollado por una tejedora informante, trabajo que constituye un estudio de caso.

2.1 ELEMENTOS TEÓRICOS CONSIDERADOS EN LA INVESTIGACIÓN

A continuación, se expondrán las ideas más importantes de los programas de investigación o teorías que sustentan el presente trabajo, así como la articulación entre las dos teorías que permitirán abordar la problemática planteada.

2.1.1. Elementos de la Etnomatemática

La Etnomatemática es un programa de investigación, en el sentido lakatosiano, de la generación, organización, institucionalización y difusión del conocimiento (D'Ambrosio, 1993), que constituye una alternativa de acción pedagógica. Propone un enfoque epistemológico que parte de la realidad y tiene un carácter histórico, cultural, social, político, cognitivo y pedagógico. Las raíces de la etnomatemática se encuentran en enfoques de la historia de la ciencia, así como de la cognición y cultura. Los Programas de Investigación, tal como propone Lakatos (1983), son unidades descriptivas típicas de los grandes logros científicos, caracterizados por tener un núcleo firme protegido por hipótesis auxiliares y una heurística, poderosa maquinaria para resolver problemas que, con ayuda de técnicas, crea un cinturón protector flexible ante las anomalías.

En el presente trabajo se propone que el objetivo fundamental de la Etnomatemática es la consolidación del *paradigma relativista en matemáticas* (PRM). El PRM se basa en una epistemología cultural, que explica los conocimientos matemáticos teniendo en cuenta la contextualización en el grupo sociocultural de los sujetos productores, como un constructo social

que no puede nacer al margen de la cultura local (Oliveras, 2006). Esta concepción sobre el conocimiento matemático es opuesta al positivismo, paradigma dominante en la cultura occidental, y en donde los principios son absolutos, basados en criterios universales, ubicados en la razón o sujeto genérico o en el objeto de estudio.

Las nuevas concepciones epistémicas permiten llegar a la conclusión de que resulta más significativo aceptar la existencia de la diversidad, en todos los niveles, incluso de la ciencia. Es así como, existen conocimientos científicos, conocimientos profesionales y conocimientos cotidianos, que tienen criterios de validación distintos. Los saberes ancestrales de los pueblos originarios forman parte de los conocimientos cotidianos, que corresponden a distintas áreas del conocimiento y que muchas veces no corresponden a disciplina alguna en específico.

D'Ambrosio (1993) resalta también la importancia de las dimensiones sociocultural y política de la EM. Cuestiona las prioridades científicas eurocéntricas, comparando el proceso de desarrollo del conocimiento científico de los países periféricos que han pasado por el colonialismo y el neocolonialismo, con los objetivos de la EM en el desarrollo científico y tecnológico de los países industrializados. D'Ambrosio percibió que la matemática de las minorías parecía pertenecer a un universo educacional distinto al de la matemática occidental, lo que le llevó a plantear a la etnomatemática como una alternativa epistemológica más adecuada a las diversas realidades socioculturales.

Etimológicamente, se explica el término etnomatemática como el “arte o técnica (techne = tica) de explicar, de entender, la realidad (matema), dentro de un contexto cultural propio (etno)” (D'Ambrosio, op.cit., p.9). Las técnicas para entender la realidad se pueden expresar a través de números, figuras, representaciones. La etnomatemática considera, pues, que los miembros de diversos grupos culturales desarrollan técnicas, métodos y explicaciones matemáticas que los distinguen, las cuales les permiten entender y transformar sus propios contextos sociales.

Desde una perspectiva latinoamericana, la Etnomatemática no aborda exclusivamente problemas relacionados con la enseñanza de las matemáticas escolares. “La Etnomatemática permite comprender otras formas de ser, conocer y relacionarse con el mundo desde una perspectiva descolonizadora, y desde allí es posible problematizar lo que entendemos por conocimiento matemático.” (Peña, Tamayo & Parra, 2015). En las prácticas sociales los conocimientos se movilizan *indisciplinadamente*, por ello los problemas abordados por la Etnomatemática no están restringidos a la Matemática disciplinar ni escolar.

El significado de lo indisciplinar se comprende así (Miguel, 2010 p. 4; citado por Peña et al., 2015):

Indisciplinar no debe ser asumido como sinónimo de no disciplinar o de anti-disciplinar. El término indisciplinar (...) significa aquí un *procedimiento metodológico* que

voluntariamente transgrede las fronteras de campos culturales disciplinares establecidos a fin de reconocer como igualmente legítimas, desde el punto de vista del análisis cultural, actividades humanas y prácticas socioculturales que en ellas se realizan que, por cualquier razón, no alcanzaron el estatuto disciplinar.

Bajo el marco epistemológico y metodológico descrito, la Etnomatemática permite el estudio de los saberes y la cultura de los pueblos, contribuyendo a su reconocimiento y revalorización; da a conocer un nuevo trasfondo epistemológico en el estudio de los conocimientos matemáticos que sustentan la producción de esos saberes; y aporta en el ejercicio del derecho a la equidad en la educación y el respeto a la diferencia y diversidad cultural.

Desde su formulación, como campo de investigación, realizada por Ubiratam D'Ambrosio en el 5to Congreso Internacional de Educación Matemática de 1984, el Programa de Investigación Etnomatemática a nivel internacional ha dejado de ser marginal debido a su constante y creciente desarrollo, tal como se puede apreciar, por la fundación en Estados Unidos en 1985 del Grupo Internacional de Estudio en Etnomatemáticas (ISGEm), por las investigaciones expuestas en diversos foros de discusión académica (ICME, CERME, RELME, etc.) y por la realización de seis Congresos Internacionales de Etnomatemática cada cuatro años desde 1998 (Peña et al, 2015).

A lo largo de más de tres décadas, han sido propuestas diversas definiciones sobre Etnomatemáticas (D'Ambrosio, 2008; Gerdes, 1996; Sebastiani, 1991; Barton, 2007; citados por Peña et al, 2015), se ha transitado por variados focos de investigación, como la justificación de la perspectiva socio cultural de la educación matemática, aspectos epistemológicos y políticos, el estudio de los conocimientos de distintas comunidades y de su posible incorporación en los currículos; han sido empleadas diferentes metodologías, tales como investigación acción, investigación acción participativa, historial oral, etnografía, estudio de casos, historiografía, investigación colaborativa e investigación hermenéutica, metodologías que corresponden a diversas corrientes del pensamiento que van desde lo fenomenológico-hermenéutico hasta lo crítico-dialéctico.

Todo ese derrotero ha llevado a que se planteen diversas tensiones como: el monoculturalismo eurocéntrico y la única forma de ser/hacer vs. la interculturalidad y la multiplicidad epistemológica, un único currículo vs. currículos propios de acuerdo con cada realidad específica, la objetividad vs. la subjetividad en la investigación, disyunción que podría equivaler a lo ético o lo ético, que se identifica principalmente en el método etnográfico.

En resumen, en el presente estudio tomaremos en cuenta el carácter histórico, cultural, social, político, cognitivo y pedagógico de los tejidos andinos, actividad humana desarrollada por los quechuas-collao hace miles de años, que ha generado conocimientos que constituyen parte de sus

saberes ancestrales, transmitidos de generación en generación a través de una práctica pedagógica familiar, que, sin embargo, han sido invisibilizados en la colonia y la república, hecho político que forma parte del epistemicidio cultural. Desde esa perspectiva, se considera que, dentro de los saberes ancestrales relacionados al tejido andino se han desarrollado conocimientos matemáticos, que forman parte de los conocimientos cotidianos y que son válidos desde el Paradigma Relativista de las Matemáticas. Es decir, la construcción de estos conocimientos es eminentemente práctica y su validación no es formal, como en la óptica eurocéntrica, sino empírica, aspectos que podrían ser considerados en la estructura curricular básica de la Región de Puno.

Es así como, se pretende dar a conocer que los quechuas-collao, conocedores de su realidad, elaboraron técnicas propias dentro de un contexto cultural condicionado por las características geográficas de su entorno, y dieron solución al problema del vestido a través de sus tejidos. Es dentro de esta práctica social textil que los conocimientos se movilizan *indisciplinadamente*, esto es, los saberes involucrados en esta actividad humana transgreden los campos culturales disciplinares oficialmente establecidos. Es por ello que, podemos apreciar saberes matemáticos, físicos y de otras áreas, como la química en el teñido, en el proceso de elaboración de los tejidos andinos, analizados desde una visión holística, acorde con la interculturalidad y la multiplicidad epistemológica.

2.1.2. Elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico se basa en una antropología epistemológica, en un enfoque sociocultural que estudia los recursos sociales e históricos que los grupos humanos, organizados en instituciones, han producido para dar solución a los diversos problemas que se han originado al satisfacer sus necesidades, en un trabajo condicionado por el contexto sociocultural en que se han desarrollado (Castela, 2017). Las *instituciones* son organizaciones sociales formadas por *sujetos* que realizan determinadas actividades de acuerdo con ciertas normas. Los sujetos transitan en su vida diaria en varias instituciones (Castela, 2016), por ejemplo, en instituciones escolares, laborales, académicas.

Los recursos materiales, organizativos y cognitivos producidos por los grupos humanos se encuentran estructurados bajo un modelo general llamado *Organización Praxeológica* (OP) o *Praxeología* (Chevallard, 1999), modelo que permite estudiar cualquier actividad humana, y que viene a ser una forma de hacer y pensar en una sociedad. Desde el inicio de la gestación de una OP se dan procesos didácticos como parte de la producción epistemológica de los grupos humanos organizados en instituciones. En el caso de los saberes académicos, para ser enseñados es

necesario que los saberes sean transformados mediante un proceso de *transposición didáctica* (Chevallard, 1998).

La Organización praxeológica o Praxeología

La OP es un modelo que organiza los recursos necesarios para desarrollar las actividades humanas (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997). Se pueden distinguir en ella dos niveles:

- 1) **La praxis o el saber-hacer.** Se representa por $[T, \tau]$, en donde **T** es un tipo de tareas y τ es una técnica, es decir, son los procedimientos necesarios que conducen al logro de alguna tarea.
- 2) **El logos o saber,** representado por $[\Theta, \Theta]$, donde Θ es la tecnología, es el discurso que se expresa sobre la técnica y que la representa, y Θ es la teoría, tecnología de la tecnología, proporciona los argumentos que fundamentan la tecnología.

La praxeología es la unidad mínima de análisis que puede describir toda actividad humana. La TAD considera que las praxeologías son producidas por grupos humanos que forman instituciones y que las OP viven en ellas. Las OP se transforman al cruzar fronteras entre instituciones, desde la institución que las desarrolló hacia aquellas que las emplean o las enseñan (Castela, 2016). Estos cambios se dan a través de procesos institucionales de producción, legitimación e institucionalización de la praxeología.

En la praxis de la OP se describen los aspectos de las maneras de hacer, los cuáles son invariantes y que los hombres van acumulando históricamente al resolver tareas problemáticas de manera eficaz. Por otro lado, un aspecto que determina el logos o saber es que, en este nivel, es necesario elaborar un discurso para que las técnicas sean justificadas, inteligibles y comprensibles. Sin ese discurso o logos las técnicas no podrían vivir en la institución (Bosch, 1994; citada por Castela, 2017).

Es conveniente ver los dos niveles de manera conjunta $[T, \tau, \Theta, \Theta]$, es decir, tener claro que para solucionar problemas es necesario poner en práctica un tipo de tareas, aplicando una técnica, la que será justificada, inteligible y comprensible a través de un discurso o logos o tecnología. Chevallard (1999) señala que las funciones de la tecnología serían, primero, justificar que la técnica produce bien lo que pretende producir, y, en segundo lugar, explicar porque está bien, hacerla inteligible y esclarecerla. Posteriormente, producto de diversas investigaciones, se propone la ampliación de las funciones de la tecnología, tal como se presenta a continuación (Castela & Romo Vázquez 2011, Castela 2016):

- Describir la técnica: estos saberes se transmiten a través de sistemas semióticos utilizando un vocabulario.

- Facilitar la aplicación de la técnica: los usuarios de la técnica dan a conocer los saberes que ayudan a utilizarla con mayor eficacia y comodidad.
- Motivar la técnica y sus componentes: se responde a las preguntas ¿para qué se hace tal acción? ¿Cuál es el efecto buscado? Las respuestas dan a conocer las razones de ser de las acciones, justificándolas racionalmente.
- Evaluar la técnica: se da a conocer cuan eficaz es la técnica y lo que se puede hacer con ella (límites) comparándola con otras técnicas que resuelven la misma tarea. De igual manera se analiza si las condiciones de trabajo se adaptan a las características físicas y psicológicas del trabajador o el usuario (ergonomía de la técnica).
- Validar la técnica: en este caso se analiza si la técnica produce realmente aquello que dice que produce. Se entiende que se justifica la técnica, asegurando que consiga correctamente lo que desea.
- Explicar la técnica: Se responde a las preguntas ¿por qué la técnica hace bien lo que se espera que haga? ¿Cómo es que tal acción produce tal efecto? Se procuran buscar las causas.

En cada una de las funciones de la tecnología señaladas anteriormente hay saberes que muchas veces no se consideran pero que son importantes en un trabajo de tipo antropológico, y que es necesario tomar en cuenta en las entrevistas a los informantes de la presente investigación. En todo este análisis se identifican las necesidades que satisface la técnica, tanto las objetivas como las normativas, establecidas institucionalmente. Castela (2011) señala que de este conjunto de procesos se desprende la legitimación institucional de la técnica, representada por la flecha del esquema [T, τ, Θ, ⊕] ← I. La flecha indica como la institución incrementa su capital praxeológico a través de los procesos de producción, legitimación e institucionalización.

Chevallard (1999), dentro de los planteamientos de la TAD, considera que es posible construir Organizaciones Praxeológicas para cada actividad humana, por ello, además de la Organización Matemática y la Organización Didáctica, se puede elaborar la OP del tejido en telar, cuyos elementos más importantes serán desarrollados en la presente propuesta.

Señala, además, que existen niveles de OP, que van de una complejidad menor a una mayor. Es así como existen OP puntuales, que analizan un único tipo de tareas con técnicas y tecnología propias. Un conjunto de OP puntuales, que poseen diversas técnicas caracterizadas por una sola tecnología, conforman una OP local. De igual manera, el conjunto de OP locales respaldadas por una Teoría común producen una OP regional. Finalmente, de la agrupación de diversas OP regional bajo la integración de diversas teorías surgen OP globales.

Teniendo en cuenta la tensión que existe entre lo personal y lo institucional, la TAD distingue las OP personales de la OP institucionales. Chaachoua (2011, p. 91) escribe al respecto:

Cette définition est une extension de la notion de praxéologie comme modélisation de pratiques institutionnelles à la modélisation des pratiques d'un élève en tant que sujet d'une institution.

Nous reprenons cette définition, mais nous préférons utiliser le terme de praxéologie personnelle à la place de praxéologie-en-acte par analogie à la notion du rapport personnel.

Ainsi, le rapport institutionnel $RI(e,O)$ du sujet en position élève à l'objet O au sein d'une institution I est décrit par les praxéologies institutionnelles. Et le rapport personnel $Rp(e^*/I,O)$ d'un élève e^* , assujetti à une institution I , à l'objet O est décrit par des praxéologies personnelles.

Nous rejoignons l'hypothèse de recherche validée dans (Croset, 2009) selon laquelle le découpage en type de tâches institutionnels ne correspond pas toujours à celui de l'élève.

Esta definición es una extensión de la noción de praxeología como modelo de las prácticas institucionales para modelizar las prácticas de un estudiante en tanto sujeto a una institución.

Volvemos a usar esta definición, pero preferimos usar el término praxeología personal en lugar de praxeología en el acto por analogía a la noción de relación personal.

Por lo tanto, la relación institucional $RI(e, O)$ de un sujeto en posición de estudiante con el objeto O en el seno de una institución I se describe mediante las praxeologías institucionales. Y la relación personal $Rp(e^*/I, O)$ de un estudiante e^* , sujeto a una institución I , con el objeto O se describe mediante las praxeologías personales.

Estamos de acuerdo con la hipótesis de investigación validada en (Croset, 2009) según la cual la división en tipos de tareas institucionales no siempre corresponde a la del estudiante.

En el presente trabajo vamos a analizar la OP personal del proceso de elaboración del tejido en telar desarrollado por la informante, en tanto, no encontramos información sobre el tejido en telar quechua a faz de urdimbre como institución. Es evidente que existen muy pocas investigaciones que podrían dar información al respecto, por lo que nuestra fuente primaria es la informante quechua que ha sido seleccionada. Posteriormente, en el transcurso del análisis de los datos recogidos, se ha podido tener acceso a investigaciones realizadas por un instituto de investigación aimara de Bolivia que ayudan a tener una visión más amplia de este tipo de actividad textil, pero sería difícil a partir de esos datos analizar la OP institucional del tejido en telar (Arnold & Espejo, 2011, 2013).

2.1.3. Articulación Etnomatemática y TAD

La presente investigación pretende articular la Etnomatemática y la TAD en el estudio del TTCE con la finalidad de contribuir, en el futuro, en el diseño de procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas de la educación básica en la región de Puno. Ambas teorías son consideradas socioculturales y tienen un carácter antropológico, pero se va a tomar de cada una de ellas funciones distintas. Como señala Artigue (2018), los marcos teóricos pueden ser ensamblajes de varias teorías, o elementos de ellas, desarrollados con la finalidad de abordar problemas de investigación. Estos ensamblajes, necesarios y coherentes en su combinación, deben respetar el sentido profundo de esta construcción y la función real de cada teoría en esta construcción. Las combinaciones son posibles, incluso en visiones diferentes, cuando se utilizan en diferentes niveles teóricos. No se podría utilizar dos teorías con la misma función. Sería necesario elegir y ver las complementariedades que podrían darse entre las diferentes teorías.

Basándonos en los fundamentos de la Etnomatemática, sustentada en el paradigma relativista de las matemáticas (PRM), se parte de la premisa que los pueblos originarios de la puna o jalca andina peruana desarrollaron conocimientos matemáticos, saberes en general, de una forma particular, natural y propia, con la finalidad de poder enfrentar y solucionar los problemas que se presentaban en su constante adaptación a la naturaleza, para satisfacer sus necesidades básicas de alimentación, vivienda y vestido, utilizando los recursos propios de su entorno, la puna o jalca andina, región natural de los Andes peruanos que se encuentra entre los 4 000 y 4 800 msnm.

Es en ese proceso de ocupación y adaptación humana al ecosistema de la puna o jalca andina, que los pobladores se relacionan con los camélidos sudamericanos (llama, alpaca, vicuña, guanaco), animales que fueron domesticados entre los 4 000 a 3 500 A.C. (Wheeler, 1988), y que están cubiertos de una preciada lana, material que sirvió como materia prima para el tejido de sus prendas. Debido a las inclemencias del tiempo, con una temperatura media anual que oscila entre los 7 y 0° C, y una temperatura mínima que varía entre -9 y -25° C, era necesario cubrirse con vestidos gruesos y tupidos que les permitiera conservar el calor del cuerpo humano.

Al menos desde el Horizonte Temprano (900-200 A.C.), etapa de la historia del Perú Antiguo, los habitantes de la zona altoandina elaboraron progresivamente *el Tejido en telar* para satisfacer las necesidades básicas de vestido y también como expresión artística (Desrosiers, 2013), saber que posteriormente llega a la costa y, probablemente, a la selva utilizando como materia prima el algodón. La actividad textil, desarrollada por las culturas preincaicas e incaica, ocupó un lugar importante en la sociedad, situación que fue registrada por diversos cronistas y estudiosos mestizos y europeos como Guamán Poma de Ayala, Ludovico Bertonio, Diego González de Holguín, entre otros (Desrosiers, 1986, 2013; Arnold & Espejo, 2013).

Sin embargo, debido al pensamiento hegemónico colonial que ha persistido, y persiste inclusive después de la independencia, y principalmente después de la Rebelión de Túpac Amaru, los saberes de los pueblos originarios han sido invisibilizados, sistemáticamente destruidos y no tomados en cuenta, produciéndose un *epistemicidio* (De Souza, 2010) promovido por la cultura occidental en América, que atenta contra los derechos de los pueblos originarios, como el respeto a sus saberes, el derecho a una identidad, así como a la pertinencia y equidad en la educación. Es por este motivo que la presente investigación tiene como objetivos el estudio, el reconocimiento y la revalorización de los saberes ancestrales relacionados a la actividad textil quechua, con la finalidad de proponer en el futuro su uso pertinente en procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, objetivos que corresponden a las *dimensiones histórica, antropológica y política de la Etnomatemática*, y que son tomadas en cuenta en la presente investigación.

La Etnomatemática considera que los pueblos desarrollan sus conocimientos matemáticos de una manera propia y particular, condicionada por el entorno y el contexto en que se desenvuelven. Una forma de entender dicho proceso de desarrollo es a través del estudio *histórico* del tejido en telar, así como también es conveniente realizar un estudio *etnográfico* en las comunidades quechuas, trabajo que corresponde a la visión *antropológica* de la investigación. El tejido en telar es un símbolo de la resistencia indígena frente al epistemicidio, pues representa la escritura, componente invaluable de la cosmovisión andina que los españoles no pudieron destruir, y que en esencia se mantuvo inalterable a pesar del proceso de aculturación promovido desde la invasión europea. Estos elementos corresponden a la dimensión *política*, que es la que ha promovido, motivado, el presente trabajo, como una expresión de la reivindicación de los saberes de la cultura dominada que ha resistido cerca de 500 años.

Desde la TAD, se considera que el *tejido en telar* es una actividad humana que puede ser descrita con el modelo praxeológico, tal como señala Chevallard,

Le postulat de base de la TAD fait violence à cette vision particulariste du monde social: on y admet en effet que *toute* activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle *unique*, que résume ici le mot de *praxéologie*. (Chevallard, 1999, p. 222)

El postulado de base de la TAD es contrario a esta visión particularista del mundo social: se admite en efecto que *toda* actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo *único*, que se resume aquí con la palabra de *praxeología*. (Chevallard, 1999, 222)

Además, se analizará la actividad o dimensión matemática que se desarrolla en la actividad textil quechua, basándonos en lo señalado por Chevallard,

... la TAD situe l'activité *mathématique*, et donc l'activité d'*étude* en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales. Or ce parti pris épistémologique conduit qui s'y assujettit à *traverser* en tous sens – ou même à *ignorer* – nombre de frontières institutionnelles à l'intérieur desquelles il est pourtant d'usage de *se tenir*, ... (Chevallard, 1999, p. 221)

... la TAD sitúa la *actividad matemática*, y en consecuencia la actividad del *estudio* en matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. Ahora bien, esta postura epistemológica conduce a cualquiera que se someta a ella a *atravesar* en todos los sentidos -e incluso a ignorar- muchas fronteras institucionales en cuyo interior debe sin embargo *mantenerse*, ... (Chevallard, 1999, p. 221)

Desde esa misma visión, la TAD señala (Bosch & Chevallard, 1999; citado por Chaachoua, 2011, p. 3):

Le *savoir mathématique*, en tant que forme particulière de connaissance, est donc le fruit de l'action humaine institutionnelle: c'est quelque chose qui se produit, s'utilise, s'enseigne ou, plus généralement, se transpose dans des institutions. Mais le mathématique reste encore un terme primitif, *hypostase* de certaines pratiques institutionnelles – les *pratiques sociales à mathématiques*. Ce qui fait défaut, c'est l'élaboration d'une méthode d'analyse des pratiques institutionnelles qui en permette la description et l'étude des conditions de réalisation.

El *saber matemático*, como forma particular de conocimiento, es, por lo tanto, el fruto de la acción humana institucional: es algo que se produce, se utiliza, se enseña o, más generalmente, se transpone en las instituciones. Pero las matemáticas siguen siendo un término primitivo, *hipóstasis* (verdadera realidad) de ciertas prácticas institucionales – las *prácticas sociales para las matemáticas*. Lo que falta es la elaboración de un método de análisis de las prácticas institucionales que permita la descripción y el estudio de las condiciones de realización.

Lo que se desea es realizar el estudio de las prácticas sociales desde una perspectiva matemática, utilizando la Organización Praxeológica como unidad de análisis. El análisis que se realizará considerando la TAD corresponde a la *dimensión epistemológica* de la presente investigación, por lo tanto, el trabajo utiliza ambas teorías, la Etnomatemática y la TAD, cada una enfocándose en distintas dimensiones o funciones (Artigue, 2018), de una manera complementaria (Trigueros, 2018) no superpuesta.

2.2 ELEMENTOS METODOLÓGICOS CONSIDERADOS EN LA INVESTIGACIÓN

La metodología que se va a utilizar es cualitativa pues se aplicará, en primer lugar, el método etnográfico, y posteriormente, se analizarán los datos obtenidos con elementos teóricos de la TAD. Teniendo en cuenta los postulados de la Etnomatemática, que propone el PRM y que se basan en una epistemología cultural que explica los conocimientos matemáticos desde la contextualización del grupo sociocultural de los sujetos productores, como un constructo social que no puede nacer al margen de la cultura local (Oliveras, 2006), y considerando que desde una perspectiva similar, “la TAD situe l’activité *mathématique*, et donc l’activité d’étude en mathématiques, dans l’ensemble des activités humaines et des institutions sociales”, “la TAD sitúa la actividad *matemática*, y por lo tanto la actividad de *estudio* en matemáticas, en el conjunto de las actividades humanas e instituciones sociales” (Chevallard, 1999, p. 221), es necesario señalar que “le point de départ méthodologique que nous adoptons est un principe épistémologique: pour identifier des connaissances mathématiques, *il est nécessaire de caractériser les situations* dans lesquelles ces connaissances sont mobilisées”, “el punto de partida metodológico que adoptamos es un principio epistemológico: para identificar el conocimiento matemático, *es necesario caracterizar las situaciones* en que se moviliza este conocimiento” (Solares, 2015, p. 518). De allí es que se plantea la necesidad de desarrollar un estudio etnográfico.

En una primera etapa, la presente investigación utiliza metodologías propias de la antropología social y cultural, privilegiando el método etnográfico. Se realiza el trabajo de campo en comunidades quechua del distrito de Llalli y Cupi de la provincia de Melgar de la región de Puno, en donde se identifican cuatro personas que trabajan el tejido tradicional en telar de cuatro estacas, informantes claves de la investigación. Se registra la información por medios audiovisuales, videos que son transcritos y traducidos del quechua al castellano, cuando es necesario (Solares, 2015; Knijnik, 2003; Covián, 2005).

En una segunda etapa, se selecciona a una de las cuatro informantes, por haber proporcionado más información, ya que se comunica más en castellano que en quechua, situación que la convierte en la informante principal. En base a los datos proporcionados por la informante se realiza el análisis del proceso de elaboración del tejido en telar en cuatro estacas, identificándose varias fases, así como el estudio de la organización praxeológica personal, señalando los tipos de tareas, técnicas y tecnología presentes en cada fase. Por lo expuesto, se puede afirmar que en la presente fase se realiza un estudio de caso. Para desarrollar el análisis praxeológico se tomará como referencia el trabajo realizado por Covián & Romo (2014), relacionado con la construcción de una vivienda maya y el levantamiento y trazo topográfico en la cultura egipcia, así como la investigación de Castela (2015) sobre la confección personalizada en Argentina.

A continuación, en una tercera etapa se realiza el análisis de las primeras fases del proceso de elaboración del tejido, tratando de identificar nociones y propiedades matemáticas que son utilizadas por la tejedora en el proceso, conocimientos que podrían ser enseñados en la Educación Básica en el contexto del tejido en telar. Las investigaciones de Castela y Covián & Romo servirán de referencia para el análisis, además del trabajo que publicó Solares (2015) al estudiar una actividad agrícola ejecutada por familias inmigrantes de trabajadores agrícolas en la que se usa la escritura y el cálculo numérico, todo ello con la finalidad de identificar los conocimientos matemáticos involucrados y recoger elementos que permitan establecer relaciones entre los conocimientos matemáticos extraescolares y los conocimientos enseñados en la escuela.



CAPITULO III. CONTEXTO EDUCATIVO Y ANTECEDENTES QUE CONTRIBUYERON A DAR ORIGEN A LA INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo se dará a conocer cómo se originó la investigación. Además, se explicará cuál fue la motivación que promovió el desarrollo del trabajo de campo en el que se aplicó el método etnográfico en comunidades indígenas de la zona rural peruana. En ese contexto, es importante entender lo que se entiende por etnografía.

Para comprender esta aventura intelectual es necesario relatar los sucesos más trascendentes del trabajo de campo realizado, hechos que condicionan la elección del tipo de análisis de la información registrada, el cual se efectúa en los capítulos posteriores.

3.1. CONTEXTO EN EL QUE SE DA ORIGEN A LA INVESTIGACIÓN

El gobierno del Perú otorgó, a través del Programa Nacional de Becas (PRONABEC), becas a jóvenes de pueblos originarios de las zonas andina y amazónica para que estudien Educación Intercultural Bilingüe (EIB) en universidades de Lima. En ese contexto, ingresantes de origen quechua, shipibo y aimara inician el 2014 sus estudios en la Facultad de Educación de la Universidad Peruana Cayetano Heredia, en las especialidades de Educación Inicial y de Educación Primaria.

El 2014 se desarrolla el curso “Matemática y Etnomatemática” en el primer año de nivelación de la Carrera de EIB. Con la finalidad de lograr los objetivos del curso en el área de geometría, se plantea la siguiente interrogante, ¿Cómo conseguir que los estudiantes quechuas, shipibos y aimaras, utilicen los elementos y conceptos fundamentales de la geometría para reproducir los diseños que pertenecen a sus culturas? Pensando encontrar una solución a la problemática planteada, se emplea la Geometría Dinámica del software Cabri II Plus como medio didáctico a través del cual los estudiantes de EIB utilizan elementos y conceptos de la Geometría para dibujar sus diseños (Bonilla, 2015a, 2015b).

Lo que se espera con el Sistema de Geometría Dinámica, como medio didáctico, es que se den condiciones favorables para que el estudiante adquiera conocimientos y habilidades matemáticos,

en este caso en el área de Geometría. Con mucha rapidez los estudiantes aprendieron a utilizar los comandos del Cabri II Plus. A lo largo del trabajo realizado, se pudo percibir que los estudiantes poseen conocimientos matemáticos que habían sido transmitidos por sus familiares y que eran utilizados en las actividades prácticas en sus comunidades. Por ello, se vio la necesidad de identificar los conocimientos matemáticos relacionados al trabajo que estaban realizando y que los estudiantes poseían, con la finalidad de articularlos con las nociones y propiedades que se deseaba que ellos aprendieran.

Desde el marco teórico de la Etnomatemática, resolver el problema planteado implica hacer emerger conceptos matemáticos que pertenecen a los cuerpos de conocimientos de cada cultura, a través de la construcción de los diseños, en este caso, en el medio didáctico dinámico e interactivo que ofrece la Geometría Dinámica, elevándose la actividad práctica a un nivel teórico, lo que implica un cambio epistemológico y un nuevo aprendizaje.

Por estudios históricos y educativos (De Bock & Zuidema, 1991; Schroeder, 2001; Mamani, 2009) se sabe que las comunidades quechua, aimara y shipibo elaboran diseños en los que están implícitos rectas, segmentos, polígonos, aplican transformaciones geométricas, todo esto sin tener un conocimiento teórico, sólo por haber aprendido en forma práctica las enseñanzas de sus padres y abuelos. Ese proceso de hacer emerger los conceptos y propiedades fue desarrollado por los estudiantes utilizando el software Cabri II Plus. La actividad permitió que los estudiantes identificaran los conceptos básicos de la Geometría y algunas transformaciones geométricas, y, además, que se dieran cuenta de la funcionalidad de esos conocimientos, pues sin ellos no podrían ser construidas sus diseños.

Pero unos de los logros más importantes se ubican en el campo afectivo y emocional. El solo hecho de solicitarles que elaboren diseños de sus culturas reafirma su identidad, revalorizando sus objetos culturales, dignos de ser investigados y difundidos. Además, la aprobación que han recibido de sus trabajos eleva su autoestima, inyectándoles entusiasmo en el desarrollo de nuevos proyectos de su formación académica. Han podido ser conscientes de la potencialidad que poseen. Esos logros no tienen precio ni pueden ser evaluados de una forma tradicional. Imágenes de los trabajos que elaboraron los estudiantes se encuentran en un repositorio de la Facultad de Educación de la Universidad Particular Cayetano Heredia (UPCH, 2014).

3.2. PROPUESTA DE UN PROYECTO Y EL PIIM 2015

Por la experiencia adquirida en el trabajo con los estudiantes de EIB de la UPCH en los cursos de Matemática desarrollados el 2014 y 2015, se pudo observar que, si ellos utilizaban algunos conocimientos matemáticos subyacentes en sus prácticas, era porque habían sido enseñados por sus padres y familiares. Sin embargo, presentaban muchos problemas en el aprendizaje de las

matemáticas, debido a deficiencias en su formación en la Educación Básica. Por lo que se concluyó que, si se deseaba que ellos comprendieran y aprendieran con mayor efectividad las nociones matemáticas, era necesario identificar esas nociones en las prácticas cotidianas de sus comunidades a través de un trabajo de campo, para enseñarlas en ese contexto.

Es así como surge el Proyecto “*Articulación de saberes etnomatemáticos en procesos de aprendizaje en instituciones educativas primarias quechuas y shipibas*”, ganador del primer puesto del Concurso “Premio a la Investigación Interuniversitaria y Multidisciplinar 2015” convocado por el Consorcio de Universidades del Perú, organismo conformado por la Universidad Peruana Cayetano Heredia, la Pontificia Universidad Católica del Perú, la Universidad del Pacífico y la Universidad de Lima. El Consorcio financió el proyecto. Por su carácter interuniversitario y multidisciplinar trabajaron en el proyecto la psicóloga Olga Bardales y la educadora matemática María del Carmen Bonilla de la UPCH, la matemática Corine Castela del Laboratoire de Didactique André Revuz de Francia, el antropólogo Oscar Espinosa, el educador Eduardo Ruiz y los matemáticos Norma Rubio y Hernán Neciosup de la PUCP. El trabajo en conjunto demostró la importancia de la confluencia de varias disciplinas para realizar investigaciones que permitan innovar y producir conocimiento en Etnomatemática.

El proyecto, en el aspecto metodológico, es una investigación cualitativa que utiliza el método etnográfico, propio de la Antropología. Se realiza un estudio exploratorio a través de un trabajo de campo que aplica como técnicas las observaciones participante y no participante, y las entrevistas a informantes claves, en un contexto bilingüe. La metodología es participativa pues se realizaron reuniones con grupos de la comunidad. En un inicio se pensó que los estudiantes de EIB de la UPCH serían asistentes de investigación, pero lamentablemente no pudo ser posible. Sin embargo, se encargaron de la traducción del audio de las filmaciones.

El trabajo de campo se realizó desde agosto del 2016 hasta enero del 2017 en comunidades indígenas quechua-collao de los distritos de Llalli y Cupi de la provincia de Melgar de la región de Puno y en comunidades nativas shipibo-conibo del distrito de Iparía de la provincia de Coronel Portillo de la región de Ucayali. Las comunidades seleccionadas son los pueblos de donde provienen los estudiantes de la Carrera de EIB de la UPCH que colaboraron con el proyecto. Si bien es cierto los estudiantes de la UPCH no participaron en el trabajo de campo, los padres de ellos sirvieron de guías y estuvieron presentes en el estudio, situación que facilitó el trabajo y el acceso a la información que brindaron los miembros de las comunidades, por la confianza que tienen a los padres.

El objetivo general del proyecto pretendía develar las nociones y propiedades matemáticas de las culturas shipibo y quechua que subyacen en sus prácticas cotidianas, para posteriormente incorporarlas en procesos de aprendizaje y enseñanza que permitan incrementar el nivel de

desempeño satisfactorio en el logro de los aprendizajes matemáticos en estudiantes quechuas y shipibos. Con ese fin se consideró que, en lo específico, era necesario identificar y analizar las prácticas culturales realizadas por los miembros de las comunidades quechua y shipibo, con la finalidad de hallar en ellas nociones y propiedades matemáticas.

Con el proyecto se buscaba probar que es posible identificar elementos de los cuerpos de conocimientos matemáticos de los pueblos quechua y shipibo, que funcionan a través de una racionalidad interna diferente a la de la matemática occidental, y que pueden ser visualizados a través de las prácticas culturales realizadas por los miembros de las comunidades. Para poder trabajar en las comunidades era necesario obtener cartas de autorización de los directores de las Instituciones Educativas de las comunidades que fueron visitadas; también gestionar cartas emitidas por las autoridades de las comunidades nativas en las que señalaban su conformidad con la ejecución del proyecto en sus poblaciones. Al momento de iniciar las entrevistas y la observación se aplicó el protocolo relacionado al consentimiento informado, registrándose en medios audiovisuales.

3.3. PRINCIPIOS DE LA ETNOGRAFÍA

Una parte importante del proyecto corresponde a la etapa de recolección de los datos. Para tal efecto se realizó el trabajo de campo aplicando el método etnográfico de la Antropología, cuyos rasgos más importantes han sido estudiados y expuestos en un minicurso del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (Bonilla, 2017).

A mediados del siglo XIX nace la Antropología como disciplina, impulsada por los trabajos de científicos naturales y el desarrollo del evolucionismo. Los primeros antropólogos fueron funcionarios coloniales, realizando una labor de gabinete. El desarrollo inicial de la Antropología estuvo vinculado a los intereses del colonialismo europeo. En los años 20 y 30 del siglo XX se consolida la etnografía como enfoque y método de la antropología. Malinowsky (1973) en Gran Bretaña, Boas en Estados Unidos (Guber, 2001), entre otros, institucionalizaron y profesionalizaron la Antropología en Europa y EE. UU., desarrollando el modelo antropológico clásico, anglosajón, positivista, expresado en etnografías producidas en América, Oceanía y África antes de 1960.

A partir de mediados del siglo XX se da una crítica al modelo clásico, una reorientación del enfoque y sus métodos, y una consolidación del campo de la antropología de la educación, además del trabajo en todos los ámbitos de la cultura y sociedad. El objeto de estudio es el “otro” (Guber, 2001), tanto en lo rural como en lo urbano. Pero no es estático, el otro va cambiando. Además, hay un interés por la diversidad humana, por sus manifestaciones físicas y simbólicas, que serán estudiadas mediante la etnografía.

En particular, lo que se persigue es descubrir lógicas y racionalidades donde otros encuentran irracionalidad y desorden. Para ello se estudia la cultura y sus patrones, buscando descubrir los significados de las acciones a través de estudios intensivos. Con ese fin se utilizan varias herramientas, entre ellas la observación participante y la entrevista no dirigida a informantes claves.

El sentido de la Etnografía

Vista como un enfoque, la Etnografía es un proceso inductivo de construcción teórica, con una óptica no etnocéntrica, que trata de entender al otro, dentro de un proceso de involucramiento en el que es necesario participar, no observar desde lejos. En el proceso se establece una tensión epistemológica entre la objetividad, la subjetividad y la neutralidad.

Al respecto, De Souza (2010) propone una crítica a la distinción entre el sujeto que investiga y el objeto que es estudiado. Esta crítica viene de la mecánica cuántica, de Werner Heisenberg, quien señala, al igual que los físicos de esta corriente, que al observar los fenómenos los cambiamos. Por eso, desde esa perspectiva, no puede haber una distinción absoluta entre sujeto y objeto. Es un elemento importante que hay que considerar en la presente investigación, ya que eso implicaría tener presente que al momento de entrevistar u observar a los pobladores de las comunidades, estamos modificando su desempeño, situación que es percibida con mucha claridad y que únicamente confirma una apreciación que estuvo presente en el trabajo etnográfico.

Considerándola como método, la Etnografía es un estudio en contexto en el que se dan reacciones cara a cara, con una intensa presencia de la vida cotidiana. La información es recogida de diversas fuentes y es procesada correctamente cuando se establece la unidad entre el recolector y el analista. Se utiliza como estrategia la triangulación de la información. Producto de la Etnografía se elaboran textos escritos de distintos estilos narrativos, imágenes, videos, audios, que transmiten conocimientos dirigidos a un público específico.

Para Guber (2001) la etnografía es el conjunto de actividades realizadas durante la residencia prolongada con los sujetos de estudio, que se designa como "trabajo de campo", en donde se recolecta información que será empleada como evidencia para la descripción. En ella, como método abierto de investigación en terreno, se desarrollan encuestas, técnicas no directivas - la observación participante y las entrevistas no dirigidas. El instrumento viene a ser el investigador con sus características socioculturales como género, nacionalidad, raza, etc., en una relación social de campo.

Los principios centrales de la Etnografía son:

- Es una aproximación descentrada del “otro”, *ethnos* es una raíz griega que significa “los otros”.
- Se trata de volver familiar lo extraño y extraño lo familiar.
- Es un estudio de la vida cotidiana en contextos reales.
- Tiene una perspectiva holística y ecléctica, ha tomado sus técnicas de muchas disciplinas (Rockwell, 2009).
- El investigador tiene un rol activo y participativo.
- El producto es una descripción, que requiere un análisis teórico previo, y que es analizada.
- Se busca obtener una mirada detallada sobre lo que se hace, cómo y por qué se hace, lo que constituye el ‘conocimiento local’ (Geertz 1973, citado por Guber, 2001) o la ‘visión de los nativos’ (Malinowski, 1973).

La etnografía tiene limitaciones, como la demanda de tiempo para el trabajo de campo y que no se puede generalizar a partir de un caso. Se tendría que lograr la saturación de la información para poder identificar tendencias o regularidades, comparando los casos.

La observación participante

La observación participante consiste en dos actividades principales: observar sistemáticamente lo que se desea estudiar, participando en forma simultánea en una o varias actividades con la población. La participación implica procurar desempeñar el mismo rol que las personas que son observadas, aprendiendo a desarrollar las actividades que ellos realizan. La idea es que el investigador “esté adentro” de la sociedad que se está estudiando (Guber, 2001).

Algunos investigadores señalan que la observación y la participación son actividades que se contraponen, una de carácter externo y la otra es interna. Siguiendo esa lógica, el involucramiento y la separación son dos posturas que corresponden a la relación deseable entre el investigador y los sujetos de estudio que existe en cada actividad, por un lado, el involucramiento con (participación) los pobladores o la separación de (observación) los pobladores (Reygadas, 2014). Consideramos que, en el caso de la presente investigación, participar en la elaboración del tejido en telar de cuatro estacas ha permitido observar desde adentro la actividad y comprender con mayor facilidad el proceso. El registro de la información ha sido audiovisual, no escrita. De esa manera se puede tener una mayor información de las representaciones lingüísticas y gestuales de las tejedoras, que no se hubieran podido registrar si sólo se escribiera lo observado, supeditando a la fragilidad de la memoria aquellos datos que no se han podido escribir.

3.4. EL TRABAJO ETNOGRÁFICO EN EL PROYECTO

Utilizando como herramientas las observaciones participante y no participante, así como las entrevistas a informantes claves, se ha podido obtener información sobre algunas prácticas culturales de los pobladores de las comunidades de ambas regiones, prácticas determinadas de antemano en el protocolo del proyecto de investigación, como por ejemplo, la construcción de casas y el tejido en telar de cuatro estacas en la Región de Puno; el bordado y pintado del diseño kene, la construcción de casas y el tejido de trampas de pescar en la Región de Ucayali. Pero, en este momento de la investigación, se hace necesario seleccionar un aspecto puntual del conjunto de la información registrada, con la finalidad de profundizar en él.

Del conjunto de actividades observadas, después de realizar una evaluación de la información registrada, se determinó que el análisis se iba a centrar en el estudio de la información recogida en el proceso de elaboración de los tejidos quechua en telar de cuatro estacas (TTCE) de la región de Puno. Se tomó esta decisión porque se pudo obtener más información sobre los tejidos, por el mayor grado de colaboración de las madres tejedoras. Además, los informantes quechuas dominan más el castellano que los pobladores shipibos y pudo haber más interacción en el momento del registro de la información. En estos casos el dominio del idioma es un factor clave para obtener información. No se pudo contar con intérpretes ni traductores en el trabajo de campo.

En el momento de la observación participante del proceso de elaboración del tejido es necesario que el que investiga aprenda a tejer, guiado por la tejedora experta como profesora. Cuando un experto enseña, elabora un discurso que va describiendo con detalle la técnica que se utiliza. Ese discurso constituye la tecnología dentro de una organización praxeológica, herramienta propuesta por la TAD para el análisis de los procesos didácticos. El análisis de la información obtenida se ha efectuado bajo el marco de la TAD, identificándose los tipos de tareas y técnicas que corresponden a la praxis, así como las tecnologías y teoría dentro del logos, conformando la praxis y el logos la organización praxeológica, trabajo que será expuesto en el Capítulo IV.

El proceso de elaboración del tejido en telar de cuatro estacas tiene diversas fases, en cada una de ellas se procurará identificar nociones y propiedades matemáticas utilizadas por las tejedoras, conocimientos que serán expuestos en el Capítulo V. Para llegar a ellas es imprescindible observar el proceso de elaboración paso a paso. Las propiedades matemáticas se representan a través de gestos, acciones que pueden ser justificadas utilizando un discurso.

El fin pedagógico que se persigue es el de diseñar, en propuestas futuras, procesos de aprendizaje y enseñanza de las nociones y propiedades matemáticas que se han visualizado en las actividades observadas, utilizando los objetos culturales en el contexto de la práctica.

En el presente capítulo se ha expuesto cómo surgió la investigación en las aulas universitarias de estudiantes de formación docente inicial en Educación Intercultural Bilingüe. Se aprovechó una

oportunidad sui generis en Perú. Que jóvenes de poblaciones indígenas estudien en Lima, es como si a un investigador que quiere conocer la realidad educativa peruana le trajeran parte de esa realidad a las aulas. Los estudiantes son poseedores de conocimientos riquísimos que muchas veces, por prejuicios urbanos, no queremos reconocer que existen en las comunidades indígenas. Fue un acierto del gobierno peruano el otorgar becas a los estudiantes de bajos recursos, en especial a los jóvenes de las poblaciones indígenas, principalmente, porque el derecho a la educación de calidad corresponde a todos los peruanos.

Las múltiples interrogantes que han surgido como producto del trabajo realizado del 2014 al 2015 en la UPCH motivaron la investigación. En el trabajo de campo se registraron datos sobre diversas actividades observadas, de las cuáles sólo se analizó la información relacionada a los tejidos en telar quechua. Se pudo concluir que las tejedoras utilizan propiedades matemáticas y construyen rectángulos cuando arman la estructura que soporta el telar.

El allwido de las urdimbres sigue un patrón repetitivo que puede representarse simbólicamente, ha sido expuesto en la representación semiótica esbozada en el Capítulo IV y que constituye una especie de álgebra. Cuando se escogen las urdimbres para el pallay o diseño se siguen patrones que obedecen a la figura que se desea representar. Por otro lado, es evidente que el allwido crea superficies formadas por urdimbres y que el entrecruzamiento de la urdimbre y la trama produce el tejido. Desde diversos campos de la matemática se ha tratado de identificar el modelo matemático que podría sustentar dicha actividad. Parece ser que los problemas matemáticos que hay que solucionar tienen carácter topológico.

CAPITULO IV. IDENTIFICACIÓN DE UNA ORGANIZACIÓN PRAXEOLÓGICA PERSONAL EN EL PROCESO DE ELABORACIÓN DEL TEJIDO EN TELAR

En el trabajo de campo se pudo recoger información audiovisual sobre los tejidos en telar a través de cuatro informantes, siendo seleccionada una de ellas. En este capítulo se realizará el análisis de la Organización Praxeológica Personal del proceso de elaboración del tejido en telar desarrollado por la tejedora seleccionada, determinando, en primer lugar, las fases del proceso de elaboración, y dentro de cada una de las fases, los tipos de tarea y las técnicas empleadas que forman parte de la praxis, así como, se analizará la tecnología que corresponde al logotipo de la OPP del proceso producido por la informante. Con respecto a la teoría, componente de segundo nivel del logotipo o saber que justifica y explica la práctica (Castela, 2017), esta noción no necesariamente tiene el sentido científico que se le da en una organización de saberes, estando presente en la presente OP subyacentemente. Castela (2017, p. 12) señala al respecto:

Frecuentemente la teoría es evanescente o ausente, quedando institucionalmente escondida. Por ejemplo, cuando indagamos la organización praxeológica del tejido de una familia quechua, el discurso que sale para justificar el conjunto de técnicas y elementos tecnológicos asociados que recogemos se reduce a: “Mi mamá me lo enseñó”. Este fragmento de discurso explicita poco, pero representa mucho de la cultura indígena; la TAD atribuye un valor a este tipo de discurso, no es de menor interés para indagaciones de corte etnomatemático.

Antes de iniciar el análisis de la OPP, es conveniente dar a conocer algunas características del contexto social que enmarca la investigación. La informante seleccionada en el presente capítulo es una tejedora experta de la Comunidad de Llalli de la provincia de Melgar en Puno. Tiene aproximadamente 49 años y mantiene a su familia exclusivamente con la elaboración de tejidos. Estudió hasta segundo grado de Educación Primaria pero no puede escribir su nombre. Aprendió a tejer cuando era niña gracias a las enseñanzas de su tía y abuelita, pues no vivía con su mamá, pero el aprendizaje fue muy duro ya que recibía castigos físicos cuando no lograba tejer. Señala que aprender para ella fue muy difícil en tanto no comprendía la técnica. El tipo de técnica que

domina la informante, que es la predominante en la región de Puno, es *de faz de urdimbre*, una “de las técnicas textiles más complejas de la región y posiblemente del mundo” (Arnold & Espejo, 2011, p. 436).

Los elementos más comunes que se utilizan en la técnica de faz de urdimbre del tejido en telar de cuatro estacas son los siguientes:

- 1) La lana, que puede ser de auquénido, de oveja o sintética.
- 2) La *pushka*, rueca que se usa para k’antir o torcer el hilo (Fig. 8).
- 3) Cuatro estacas, se clavan en la tierra y pueden ser de madera o metal.
- 4) Dos *awas* o palos, se amarra cada uno a dos estacas (Fig 3).
- 5) *Allwido* o urdido, tensar las urdimbres, lanas que se despliegan a lo largo del tejido y que se cruzan formando ocho (Fig 3).
- 6) *El mini* o la trama, lana que atraviesa las urdimbres (Fig 3).
- 7) La *khespa* es el palo pequeño y delgado en donde se envuelve el mini o la trama.
- 8) La *chek’oña* o soguilla para amarrar las awas a las estacas.
- 9) Los palos travesaños, tocuro, ruka, chocura se utilizan para separar las urdimbres o para ajustar la trama (Fig 3).
- 10) La *illawa*, dispositivo que eleva las urdimbres de manera tal que pueda pasar el mini o trama. (Fig 3).
- 11) La *wich’uña*, instrumento que selecciona los colores y junta las tramas del tejido para que no haya aberturas. Está hecha del cuerno de venado o del hueso de la alpaca.

En la Figura 3 se puede apreciar el dibujo de un telar desplegado en forma vertical.

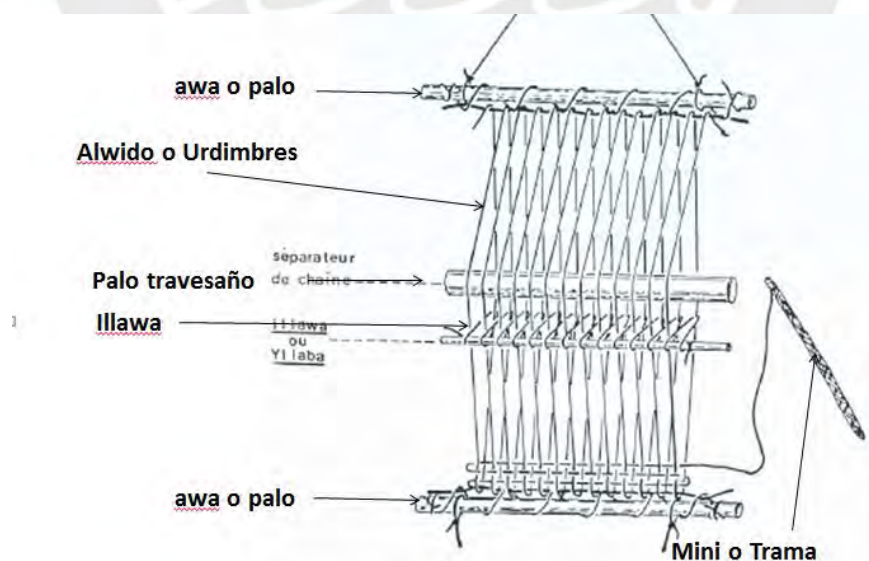


Figura 3. Telar andino común con una illawa. Fuente: (d’Harcourt, 1934; citado por Desrosiers, 2010, p. 266)

El entrecruzamiento de las urdimbres y la trama es el que va produciendo el tejido, situación que a la vez se configura en una situación problemática. Esta situación es la que da pie a la formulación de la *pregunta fundamental del tejido andino de faz de urdimbre*:

¿Cómo construir una superficie plana a partir del entrecruzamiento de dos superficies formadas por urdimbres utilizando la trama como un dispositivo para garantizar la permanencia (estabilidad, rigidez) de los cruces? Ver Figura 4 a y 4 b.

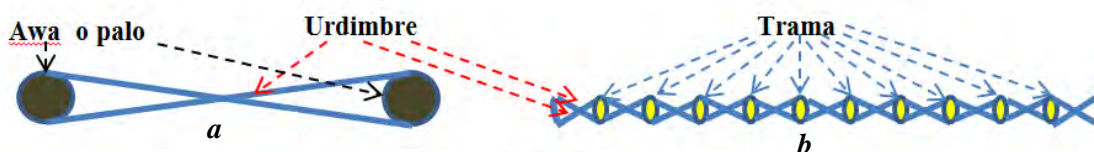


Figura 4. a. Corte transversal del telar después del alwido. b. Corte transversal del tejido.

Nos preocupamos sólo de la producción de la tela sin diseño. Los diseños no responden a esta pregunta.

En los tejidos podrían entrecruzarse la urdimbre y la trama de muchas maneras, como se da en distintas partes del mundo. Según señala Desrosiers (1997), se pueden distinguir los siguientes tipos de entrecruzamiento en los tejidos: estructura recta (a), gasa (b), encordado de urdimbre (c), encordado de trama (d) y trama envolvente (e) (Figura 5).

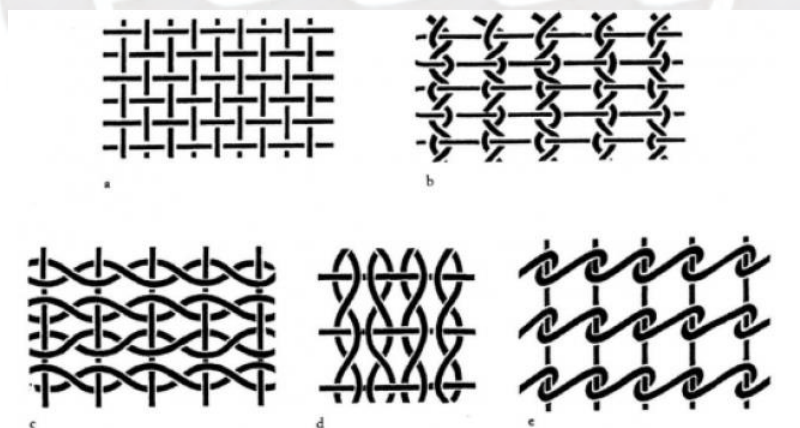


Figura 5. Diferentes tipos de estructuras y entrecruzamiento de los hilos de urdimbre y trama de los tejidos. Fuente: Desrosiers (1997, p. 326)

En la presente investigación los tejidos que vamos a estudiar son de estructura recta, que proceden del cruce simple –arriba abajo– de los hilos de urdimbre y de trama colocados perpendicularmente. Sin embargo, si bien es cierto los tejidos a estudiar son de estructura recta, en los tejidos andinos de Puno registrados no se visualiza la trama, sino únicamente las urdimbres, por ello se llaman *de*

faz de urdimbre (Figura 6.b), a diferencia del ejemplo de la Figura 6.a, en donde se visualizan las urdimbres y la trama. En la Figura 6 se puede ver con claridad los tres tipos de estructura que permiten crear una decoración. La figura 6.c corresponde al tipo tapiz en donde se visualiza principalmente la trama.

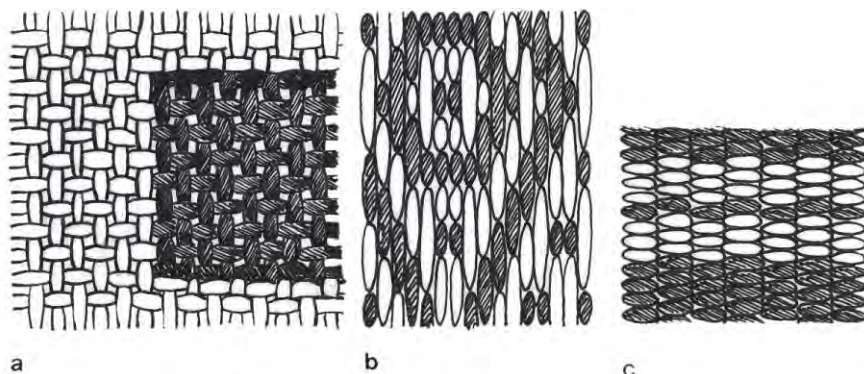


Figura 6. Tres ejemplos de estructuras para crear una decoración: (a) con los hilos de urdimbre y trama, (b) solo con los hilos de urdimbre, (c) solo con los hilos de trama. Fuente: Desrosiers (2010, p. 266)

4.1. EL PROCESO DE ELABORACIÓN DEL TEJIDO EN TELAR

El proceso que se va a describir a continuación es empleado por la tejedora experta, informante del proyecto, y responde a la pregunta de investigación relacionada a identificar y describir las fases del proceso de producción del tejido en telar de cuatro estacas (TTCE). En la mencionada actividad el término *awar* es equivalente a tejer en un telar. La informante señala que va a tejer dos *unqhuñas* (Fig. 7) en el mismo telar. La *unqhuña* es un paño cuadrangular mediano que sirve para transportar las hojas de coca para el *chacchado* (masticado). No es un tejido reversible (dos caras), tiene una cara y un revés. En este caso la *unqhuña* mide dos cuartas y media de lado. La cuarta es una unidad de medida tradicional, determinada por la longitud de la mano extendida desde la punta del pulgar hasta la punta del meñique.



Figura 7. Unqhuña

En el proceso de elaboración de la unghuña en el telar se ha podido distinguir las *fases*, y dentro de ellas *tipo de tareas* y *subtipo de tareas* resumidos en la Tabla 1:

Tabla 1. Fases del proceso de elaboración del tejido en telar de cuatro estacas

	Fases del proceso de elaboración del tejido en telar de cuatro estacas	Tipo de tareas	Subtipo de Tareas
1	Preparación de la lana para el tejido	K'antir o torcer la lana.	
2	Construcción de la estructura que soporta el telar	Clavar las cuatro estacas de acuerdo con el tamaño del producto final	
		Amarrar las awas (palos) a las estacas	
3	El Allwido o urdido	Allwido o tender las urdimbres (pita o lana) en las awas	Tender las urdimbres de la pampa
			Tender las urdimbres del pallay
4	Preparación del telar para el tejido	Construcción de la illawa	
		Traspasar las urdimbres de una de las awas a una lana gruesa	
5	El Tejido propiamente dicho	Tejer utilizando la trama	

Con respecto a las técnicas y las tecnologías no pueden resumirse en un cuadro pues la explicación es extensa. Es preciso tener claro que existen dos niveles de tecnología, uno es proporcionado por el discurso de la tejedora que explica, justifica o motiva la técnica. La investigadora también produce una tecnología con la finalidad de explicar con mayor claridad la técnica empleada, proporcionar justificaciones o motivaciones más profundas y elaboradas con un mayor sustento teórico, para representar simbólicamente el proceso a través de signos semióticos, como en el caso del allwido de la pampa y del pallay, o para representar gráficamente el proceso de elaboración. En realidad, el investigador también produce un modelo de OPP.

4.1.1. Preparación de la lana para el tejido

Es imprescindible *k'antir* o torcer la lana con la *pushka* (Fig. 8), de lo contrario se hace muy difícil tejer. Es un trabajo que lleva mucho tiempo. La informante utiliza lana sintética que sólo tiene que torcer. Si hubiera sido lana de auquérido o de oveja, hubiera sido necesario previamente trasquilar al animal, doblar la lana formando madejas, después, lavarla y teñirla con tintes naturales o anilina.

Tipo de tarea: *k'antir* o torcer la lana.

Técnica: se utiliza la *pushka*, herramienta de madera similar a una rueca, y madejas de lana sintética que tienen un peso exacto o lanas de oveja. Se amarra la lana a la *pushka*, dejándola caer y en forma simultánea va dando vueltas, subiendo y bajando. A medida que se va *k'antiendo* se va enrollando la lana en la *pushka*. Una vez que esté llena la *pushka*, se guarda la lana en un ovillo.

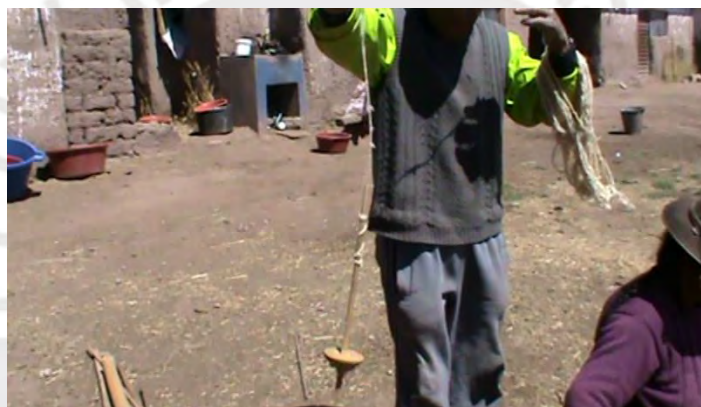


Figura 8. Poblador *k'antiendo* la lana con la *pushka*

Tecnología

En este nivel de la OP, se va a presentar, en algunas oportunidades, dos dimensiones de la Tecnología. Por un lado, la Tecnología producida por la informante, y, sobre el mismo tema, la tecnología producida por el investigador en tanto elabora un modelo de OPP.

La tejedora al señalar que es necesario *k'antir* o torcer la lana realiza la *función de explicar*. “Después se hace estas cosas, no de frente con lana ... torcido todavía ... no se hace con madeja, no se puede pasar, como va a poder pasar ... se hace ... desata ... se hace otra clase...no se puede ... está torcido, no es igual ... por eso cuesta también... no es fácil”

Cuando la tejedora señala que la lana se desata, coge la lana que no está *k'antida* y abre sus hebras. Después del *k'antido* la lana se tuerce y eso impide que las hebras se abran. Si no se tuerce la lana, las hebras se pueden abrir y esto llevaría a que se atasque el tejido en el proceso. Este argumento tiene la *función de motivar* el *k'antir*. Al decir que el tejido cuesta y no es fácil, da a

entender que el k'antido es un tipo de tarea que demora varios días, semanas. Por el tiempo empleado, el tejido cuesta más.

4.1.2. Construcción de la estructura que soporta el telar

Para poder tejer es necesario colocar las urdimbres y pasar la trama entre las urdimbres. Estos elementos se desplazan sobre una estructura formada por estacas y awas o palos, estructura que está fija en el suelo (Figura 9).

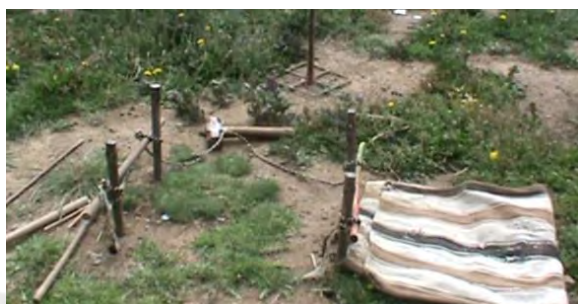


Figura 9. Estructura o armazón del telar

Tipo de tarea 1: Clavar las cuatro estacas de acuerdo con el tamaño del producto final.

Técnica:

La tejedora clava en la tierra dos estacas separadas por dos cuartas y media, que es la medida de la unghuña (Fig. 10). Traslada la distancia entre las dos estacas a la *soguilla* (Fig. 11). La unghuña tiene forma cuadrangular.



Figura 10. Dos estacas separadas por dos cuartas y media



Figura 11. Mide en una soguilla dos cuartas y media

Duplica la medida en la soguilla porque va a tejer dos unqhuñas en el mismo telar (Fig. 12). Forma lazadas en los dos extremos de la soguilla que mide cinco cuartas y en cada lazada introduce un palo o awa.



Figura 12. Duplica la medida en la soguilla.



Figura 13. Coloca el palo con la lazada junto a una de las estacas.

Coloca uno de los palos junto a las dos estacas y ubica la lazada en la intersección del palo y la primera estaca (Fig. 13). Jala la pita con el otro palo, la pone en tensión (Fig. 14) y clava la tercera estaca en la intersección de la otra lazada y el palo (Fig. 15), señalando al mismo tiempo que *hay que hacer ese rectito*.



Figura 14. Jala la soguilla con el palo y la lazada



Figura 15. Clava la tercera estaca en la intersección del palo y la lazada.

Posteriormente, traslada las lazadas a través de los palos, hasta llegar a la segunda estaca (Fig. 16), preservando la medida de la pita de cinco cuartas y la perpendicularidad al primer palo o awa. Clava la cuarta estaca en la intersección del segundo palo con la lazada (Fig. 17). La distancia de la primera a la tercera estaca es de cinco cuartas, al igual que la distancia de la segunda a la cuarta (Fig. 18).



Figura 16. Traslada las lazadas a través de los palos para llegar a la segunda estaca



Figura 17. Clava la cuarta estaca.

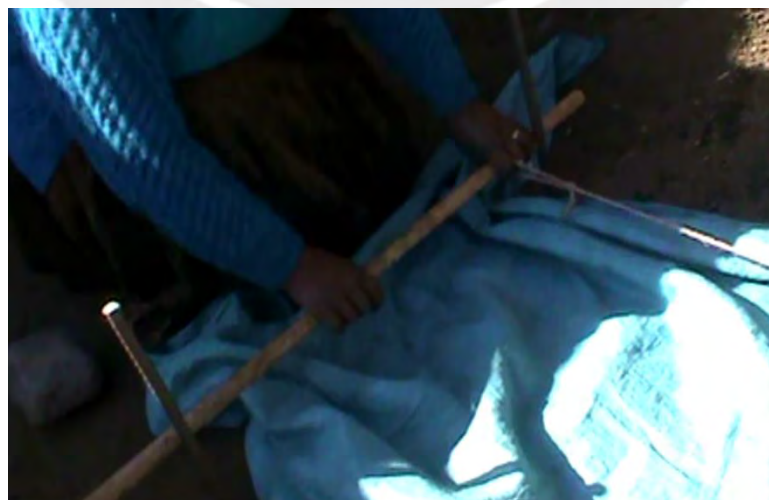


Figura 18. La distancia de la primera a la tercera es igual a la distancia de la segunda a cuarta estaca, cinco cuartos.

Tecnología

Las awas o palos cumplen la función de sostener las urdimbres y las estacas proporcionan resistencia cuando se ejerce fuerza al momento de allwir y al tejer, argumentos que tienen la *función de motivar* el uso de la técnica.

A medida que la informante construye la estructura del telar, en su relato está presente la *función de describir* la técnica:

“...ya medidanta urqusunsi, estacata takaspa y cuateasunchis, las medidas vamos a sacar y luego vamos a poner las estacas golpeándolas...”

“...kunan qallarishanchisña kayta takashaniña (ahora ya estamos empezando, estoy plantando una estaca)”

“...chayta takashaniña estakata (esto estoy golpeando, la estaca estoy golpeando)”

“... Ahora su medida vamos a sacar, medidanta urqusunchis ankaywan...”

“...Esto es su medida, dos unqhuñas (mantas pequeñas) va a salir...”

“...Otra estaca vamos a machucar también aquí. En cuatro estacas se hace...”

“...Hay que hacer eso rectito...”

Establece la cuarta como unidad de medida. El uso de la soguilla para clavar las dos últimas estacas indica que existe una idea de segmento recto. Cuando la tejedora señala “su medida vamos a sacar” se refiere a obtener el largo del tejido a partir del ancho utilizando la soguilla. Como dice que va a tejer dos unqhuñas y duplica la medida del ancho, se deduce que la unqhuña es un cuadrado. Decide que técnica emplear de acuerdo con el tiempo de producción (tejer dos unqhuñas al mismo tiempo para economizar esfuerzo), aplicando la *función de evaluar* que tiene la tecnología. Además, otro aspecto que obliga a tejer dos unqhuñas al mismo tiempo está determinado por la necesidad de tener mayor espacio para poder maniobrar con la *illawa*, es decir, si sólo se teje una unqhuña no sería fácil subir y bajar las urdimbres con la *illawa* para que se cruce la trama entre ellas. Esta característica de la técnica asociada a la *función de facilitar* la aplicación de la técnica, la hace más *eficiente*.

“... dos vamos hacer, mira de aquí hasta aquí vamos a cortar y lo juntamos y sale dos, va ser chiquito entendido...” “... unito no se puede hacer, es muy chiquito ...”

Otro aspecto importante a considerar es que en el momento que la tejedora dice “...Hay que hacer eso rectito...”, mueve la soguilla de derecha a izquierda o viceversa tratando que forme un ángulo recto con el palo, de tal manera que se establezca una relación de perpendicularidad entre la awa y la soguilla de una manera intuitiva, produciéndose una estimación del ángulo recto.

Es necesario utilizar las estacas en la construcción del armazón, como se ve en la figura 9 de la página 40, porque brindan resistencia y estabilidad cuando se ejerce fuerza al momento de allwir y cuando se teje. Estos argumentos cumplen la *función de motivar* la técnica empleada.

Tipo de Tarea 2. Amarrar las awas (palos) a las estacas

Técnica

Con una soguilla amarra una awa a las dos primeras estacas colocándola paralela al piso, a una altura de 20 cm. aproximadamente (Fig. 19). Repite el mismo procedimiento con la otra awa y las otras dos estacas. Al momento de amarrar la segunda awa, la golpea con la mano hacia abajo en uno de los amarres y así los dos amarres quedan a la misma distancia del piso (Fig. 20). De esta manera queda terminado el armazón del telar sobre el cual se van a tender las urdimbres (Fig. 21).



Figura 19. Amarra la awa a las estacas



Figura 20. Golpea hacia abajo la awa para que sea paralela al piso



Figura 21. Armazón del telar terminado.

Tecnología

En el momento que amarra las awas la informante señala: “Vamos allwir ... cuando amarras así, vamos allwir ahí”. Allwir quiere decir atar dos objetos, en este caso va a atar el palo a las estacas (Fig. 19). Amarra las awas con la *chek'oiña*, un cordel trenzado hecho de alpaca o llama, de colores blanco, marrón y negro, y con una sogá de cabuya.

El gesto que realiza al golpear hacia abajo la awa en el amarre (Fig. 20) indica que ese lado de la awa está muy arriba y que es necesario que los dos amarres estén a la misma altura, a la misma distancia del piso, colocando a la awa en una posición paralela con respecto al piso. En caso contrario, si las awas no estuvieran en una posición paralela al piso, al tenderse las urdimbres, aquellas que están más cerca del piso tendrían mayor longitud que aquellas que están más lejos del piso, lo que produciría una deformación en el tejido. El resultado del tejido no sería una superficie rectangular. El argumento explicado cumple la *función de motivar* esta parte de la técnica.

“Igualito aquí abajo también, con eso vas a tender allá me vas a arrojar ese después”. Sus palabras indican que se repite el mismo procedimiento con el otro palo y las otras dos estacas. Se utilizan las dos awas para sostener las urdimbres arrojando el ovillo de lana de un extremo a otro del telar. Para realizar esta actividad es necesario que participen dos personas, cada una colocada en un extremo del telar, junto a las awas.

4.1.3. El allwido o urdido

Es una fase importante en el tejido pues un error en ella puede llevar a que no se construyan los diseños tal como se han planeado. El allwido generalmente debe realizarse en un día de trabajo. En el proceso, la tejedora continuamente consulta una unqhuña como referencia para saber con

exactitud el color y el número de urdimbres que debe colocar. En este caso, el color blanco es el principal y es el color de fondo de la unqhuña.

Tipo de Tareas: Allwido o tender las urdimbres (pita o lana) en las awas.

En este tipo de tarea se pueden distinguir dos subtipos de tarea, una que corresponde al allwido o urdido de la pampa, zona del tejido donde se ven franjas de colores sin dibujo, y el subtipo de tarea que corresponde al allwido del pallay, dibujo o figurita. En este último caso, tanto el allwido como el tejido, son más complejos y difíciles. Los dos subtipos de tarea se van alternando en el allwido de acuerdo con el diseño de la unqhuña. En la figura 22 se pueden apreciar tres zonas de pallay, una central más ancha y dos laterales; además, cuatro franjas blancas y 10 franjas delgadas con colores en degradé o matizado, en palabras de la informante, que están a ambos lados de los pallay, las franjas corresponden a la pampa.

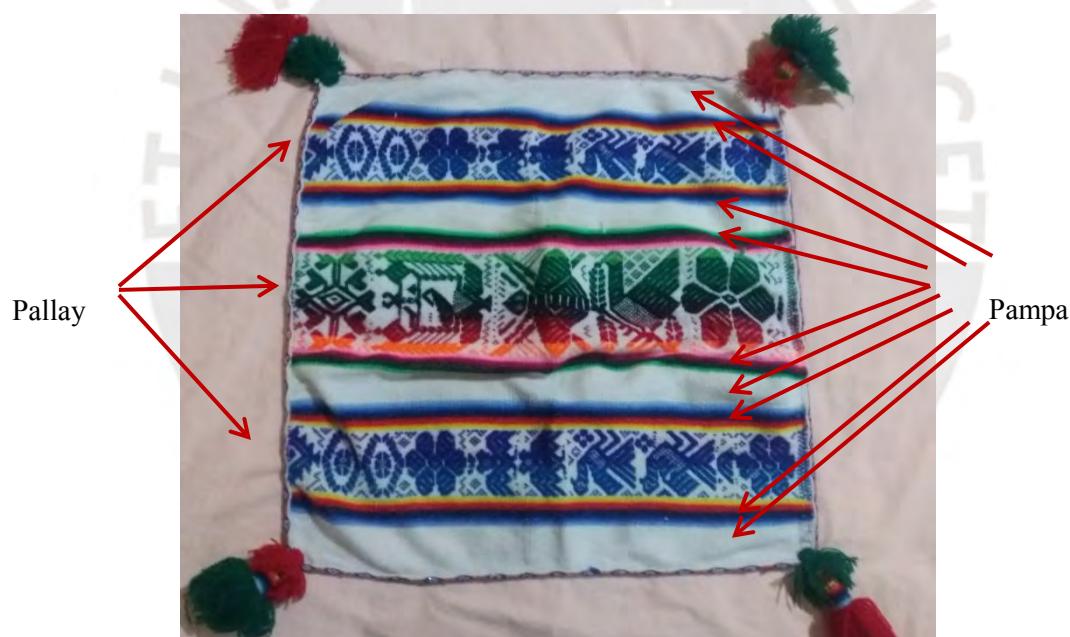


Figura 22. Zonas del pallay y de la pampa

Subtipo de tarea 1: Tender las urdimbres de la pampa

Técnica

Para urdir la pampa se utiliza un solo color en cada franja. En este caso se comienza a urdir con el color blanco que es el fondo del tejido. La tejedora inicia el tendido de las urdimbres sentada frente a una awa. Al frente tiene que estar un asistente sentado frente a la segunda awa, mirando a la tejedora. La tejedora amarra la lana con una lazada suelta en el lado izquierdo de la awa, junto

a la estaca. Lanza el ovillo de lana que es recibido por la asistente, quién pasa el ovillo por debajo de la awa y lo regresa por encima, lanzando el ovillo a la tejedora, quién lo recibe.

En la presente investigación se va a considerar que la lana ha dado una vuelta desde el momento en que la tejedora lanza el ovillo hasta que lo vuelve a recibir, es decir, en este caso se han colocado dos urdimbres (Fig. 23). Para poder visualizar el proceso se ha elaborado una gráfica con Cabri 3D, obviándose el dibujo de las estacas. Se ve con claridad que se produce un cruce, se intersecan las dos urdimbres formando un ocho.

Siempre que regresa la urdimbre, la tejedora jala la lana y la presiona sobre la awa para que no se enrede y se tiemple. La lana se quiere enredar porque ha sido k'antida, torcida. Se repite este proceso 41 veces (Fig. 24) formándose la primera franja blanca de urdimbres de la pampa. La tejedora tiene mucho cuidado que las urdimbres estén ordenadas, una detrás de la otra, de izquierda a derecha, sin embargo, si se desordenara, cuando se *illawa* se arregla, es decir, cuando se escoge las urdimbres para construir el dispositivo que eleva las urdimbres para facilitar el cruce del mini o trama, si se hubieran desordenado un poco las urdimbres, se pueden ordenar. Nótese que en la pampa hay franjas formadas por urdimbres de un solo color.



Figura 23. Allwido de las dos primeras urdimbres (una vuelta) en la pampa



Figura 24. Allwido de la primera franja blanca de la pampa

La tejedora detiene el allwido y selecciona los ovillos de los colores que corresponden a las franjas de la pampa que están al costado del pallay. Primero selecciona cinco ovillos de colores en degradé, desde el celeste claro hasta el azul marino, y los coloca uno al costado del otro (Fig. 25).



Figura 25. Selecciona cinco ovillos desde el celeste claro al azul oscuro

Posteriormente selecciona cinco ovillos de colores que van desde el amarillo claro hasta el rojo granate (Fig. 26).

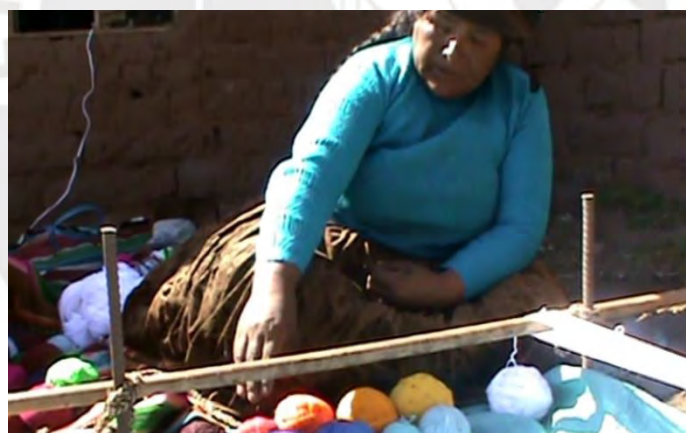


Figura 26. Selecciona cinco ovillos desde el amarillo hasta el rojo granate

Una vez que ha reunido los diez ovillos une el inicio de las lanas en forma ordenada comenzando por el último, es decir, primero el rojo granate, rojo, naranja, amarillo oscuro, amarillo claro, y continúa con el azul marino, azul oscuro, azulino, celeste oscuro y celeste claro (Fig. 27). Las diez lanas las fija en forma ordenada entre las urdimbres y la awa (Fig. 28). Los ovillos están fuera del telar, junto a la tejedora.



Figura 27. Une las diez lanas de colores en forma ordenada



Figura 28. Fija las lanas entre las urdimbres y la awa. Los ovillos están junto a la tejedora

Realiza el allwido de las lanas de colores comenzando en orden inverso, esto es, desde el celeste claro hasta el azul marino, después continúa con el rojo granate hasta el amarillo claro. A cada color le da dos vueltas, o sea tiende cuatro urdimbres. En total serán 40 urdimbres (Fig. 29).



Figura 29. Pampa con 11 colores

En la pampa la primera franja blanca de izquierda a derecha tiene 41 vueltas (82 urdimbres). Las franjas de colores son de 2 vueltas en cada color (4 urdimbres). Las dos franjas blancas del interior tienen 41 vueltas (82 urdimbres). El número de urdimbres de la pampa siempre es par.

Tecnología

Cuando la tejedora da las indicaciones para realizar el allwido, se cumple *la función de describir* la técnica.

“Ya ahora vamos a comenzar ahora ... arrojas ... si, agarrando con dos manos me vas a arrojar ... agarras así, asisito vas a agarrar”. Está dando instrucciones al asistente sobre la manera cómo va a pasar el ovillo para el urdido.

“... si así nomás si, cuando *illawamos* se va a arreglar”. Se refiere a que, si las urdimbres se desordenan un poco, cuando se construya la *illawa*, se va a arreglar.

“Dos líneas nomás vamos a poner, todo dos es”. Se hará dos vueltas con cada uno de los diez colores, en total se tenderán 40 urdimbres.

“De ahí arriba fácil, de aquí es más difícil allwir, estás cruzando todavía pe”. Aquí indica que el trabajo del asistente es fácil, si se compara con el trabajo de la tejedora, porque tiene que combinar los colores ordenadamente y lidiar con once ovillos contando con el blanco. Por ello, cada vez que utiliza un ovillo lo cambia de posición, colocándolo dentro del telar, para no volverlo a usar en el urdido y trabajar solo con los que le falta. Al final solo deja junto a ella el ovillo amarillo (Fig. 30).

Para urdir la pampa se utiliza una lana más delgada, a diferencia del pallay. La informante explica “... aquí haces pallay, grueso tapas este ... su pallay es grueso su pampita es delgado ... si, parece pero delgadito, delgado puro no parece ... pallay nomá todo es grueso, matizado de pampa todo es delgado”



Figura 30. Posición de los ovillos del otro lado de la awa. Allwido de la franja blanca y diez franjas de colores.

En todo el proceso no se ve un cuaderno con algo escrito que haga recordar la técnica sino, se utiliza un objeto de referencia. El objeto de referencia es el tejido guardado que se quiere reproducir. En la TAD se habla de un ostensivo, una manera de representar las cosas. Aquí lo que representa el número es el objeto. Esta característica es un elemento de la técnica porque no solamente transmite sino recuerda la técnica, se debe producir una referencia y guardarla. La *función de describir* la técnica no solamente consiste en decir los gestos. El gesto primero es de guardar la referencia, sino no se puede utilizar esta técnica. Es una parte de la técnica tener un tejido de referencia.

Con respecto al uso de los ovillos de colores para el tendido de las urdimbres que forman las franjas de colores de la pampa, un aspecto importante de la técnica se refiere al hecho que la tejedora no corta la lana de un color para tender lana de otro color, como si lo hacen otras tejedoras. La informante coloca todos los hilos de colores entre las urdimbres y el palo, y va alternando los colores de acuerdo con la franja que tiene que *allwiir*. No realiza nudos pues señala que si se amarra uno por uno se hace *chhancha* (los hilos salen del tejido), es más difícil de trabajar y no se ve bonito. La informante *evalúa* las dos técnicas, se da cuenta que con la primera es más fácil trabajar y se produce un mejor acabado. En este momento se produce la *función de evaluar* las dos técnicas, y a su vez sus argumentos cumplen las *funciones de motivar y facilitar* la técnica.

“... sí, cuando amarramos uno por uno difícil también es pues, para no hacer eso se pone todo así.”

“... si amarrando, amarrando, todo *chhancha* (los hilos salen del tejido) se hace aquí, no es bonito, cuando pones aquí en su *polito* nomás, todo ...”.

La palabra *polito* se refiere al *polo*, a las primeras pasadas de la trama, cuando se inicia el tejido.

Subtipo de tarea 2: Tender las urdimbres del pallay

Técnica

Inicia con el tejido del pallay lateral. Siempre que se tiende las urdimbres del pallay tienen que haber un mínimo de dos colores. En este caso la tejedora escoge dos ovillos, uno blanco igual al anterior y un ovillo azul de lana más gruesa. Une las dos puntas de los dos ovillos (Fig. 31) y las amarra a la lana amarillo claro que está junto a la awa y que utilizó anteriormente (Fig. 32).



Figura 31. Une las puntas de las lanas blanca y azul.



Figura 32. Amarra las lanas blanca y azul a la lana amarilla

La tejedora reinicia el allwido primero con una vuelta de la lana blanca de la misma manera que en el allwido de la pampa. Al mismo tiempo, antes que regrese el oville blanco, coloca el oville azul entre su cuerpo y el brazo izquierdo, templando la lana y presionando el oville (Fig. 33). Cuando regresa el oville blanco, saca el oville azul y pone entre el cuerpo y el brazo al blanco, cuidando que pase el oville azul por debajo de la lana blanca (Fig.34). Aquí se produce un cruce entre las lanas. Presiona con el dedo el cruce de las dos lanas en la awa y lanza el oville azul por encima (Fig. 35). El asistente recoge el oville azul pero no lo devuelve.



Figura 33. El oville azul está debajo del brazo



Figura 34. Cuando regresa el blanco lo pone debajo del brazo



Figura 35. Lanza el ovillo azul por encima de la awa y el asistente no lo devuelve



Figura 36. Lanza el ovillo blanco por debajo de la awa

La tejedora lanza el ovillo blanco por debajo de la awa (Fig. 36). El asistente lo recibe, pasa el ovillo por encima de la awa y lo regresa por debajo, es decir, aplica un proceso opuesto al que se aplicó en el urdido de la pampa (Fig. 37).

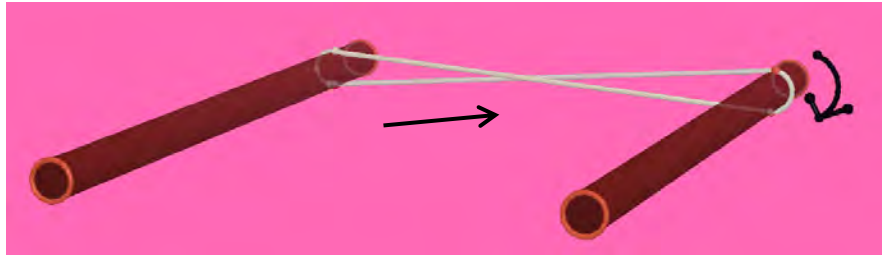


Figura 37. Proceso opuesto al aplicado en el urdido de la pampa

La tejedora recibe el ovillo blanco, lo hace pasar por encima de la awa y lo sostiene debajo de su brazo (Fig.38). El asistente devuelve el ovillo azul por encima, como se realiza en la pampa. La tejedora pasa el ovillo azul por debajo de la awa y por encima de la lana blanca, coloca el ovillo azul debajo del brazo. En este momento se produce un cruce entre las dos lanas. Ahí termina este pequeño ciclo. Comienza un nuevo ciclo lanzando el ovillo blanco como se hizo en el urdido de la pampa (Fig. 39).



Figura 38. Sostiene el ovillo blanco debajo del brazo



Figura 39. Coloca el ovillo azul devuelto por el asistente y lo pone debajo del brazo

En este ciclo se aprecia que el ovillo blanco ha ido y regresado dos veces, la primera como en la pampa y la segunda en sentido opuesto, pero en medio de esas dos vueltas se ha lanzado el ovillo azul como en la pampa, pero no ha regresado sino hasta que primero regrese la segunda vuelta inversa del ovillo blanco. En cada ciclo se han tendido dos urdimbres azules y 4 urdimbres blancas. En todo el proceso la tejedora ha mantenido presionado el dedo pulgar en la awa, cuidando el cruce de las lanas azul y blanca. Se repite el ciclo 16 veces en total de tal manera que al final se cuentan 33 urdimbres azules.

Siempre los pallay tienen un número impar de urdimbres de color. Varios tejedores entrevistados dijeron lo mismo. Para apreciar la diferencia entre el urdido de la pampa y el urdido del pallay, nótese el detalle del cruce de las urdimbres azul y blanca junto a la awa en la zona del pallay (Fig. 40), y las urdimbres junto a la awa en la zona de la pampa, en donde las urdimbres no se cruzan (Fig. 41). Las dos vistas se aprecian desde fuera del telar. Las urdimbres de color del pallay terminan siempre en el lado del asistente porque de esa manera las urdimbres de color son impares, es decir, la lana azul va y viene 16 veces (32 urdimbres), finalmente la tejedora lanza el ovillo azul pero ya no regresa. Como ya son 33 urdimbres azules el asistente corta las dos lanas, azul y blanca, y se amarran en la awa.

Si se repite el ciclo 16 veces y se tienden 6 urdimbres en cada ciclo, se colocan 96 urdimbres. Posteriormente se aumenta una vuelta de la lana blanca, media vuelta de la azul y media vuelta más de la blanca, en total serían 100 urdimbres que se han colocado en cada pallay lateral, de las cuáles 33 de ellas son azules y 67 urdimbres son blancas.



Figura 40. Vista de las urdimbres junto a la awa en la zona del pallay. Se cruzan.



Figura 41. Vista de las urdimbres junto a la awa en las zonas de la pampa (izquierda) y del pallay (derecha)

Elaboración del pallay central

Al igual que en los pallay laterales, en el pallay central se reproducen ciclos de urdimbres formados por cuatro urdimbres blancas, dos en un sentido y las otras dos en sentido opuesto, y dos urdimbres de color. En total serán 31 ciclos (186 urdimbres) más una vuelta blanca (2 u), media vuelta de color y media vuelta blanca (2 u), 190 urdimbres de las cuales 63 son urdimbres de color y 127 son blancas. En este caso, en el pallay central se combina el ovillo de color blanco con 8 ovillos de lana más gruesa, ordenados por colores en degradé: guinda oscuro, guinda claro, fucsia, rosado, amarillo, naranja, rojo claro y granate (Figuras 42 y 43).

En los vídeos se observa que la informante cuenta en la unqhuña de referencia las urdimbres de color del pallay central. Señala que son siete por color. Sin embargo, se aprecia que tiene 7 urdimbres guinda oscuro, 8 guinda claro, 7 urdimbres fucsia, 7 urdimbres rosadas, 8 amarillas, 9 naranjas, 9 rojo claro y 8 granate, todas combinadas con el color blanco.



Figura 42. Orden de los ovillos antes de tender las urdimbres

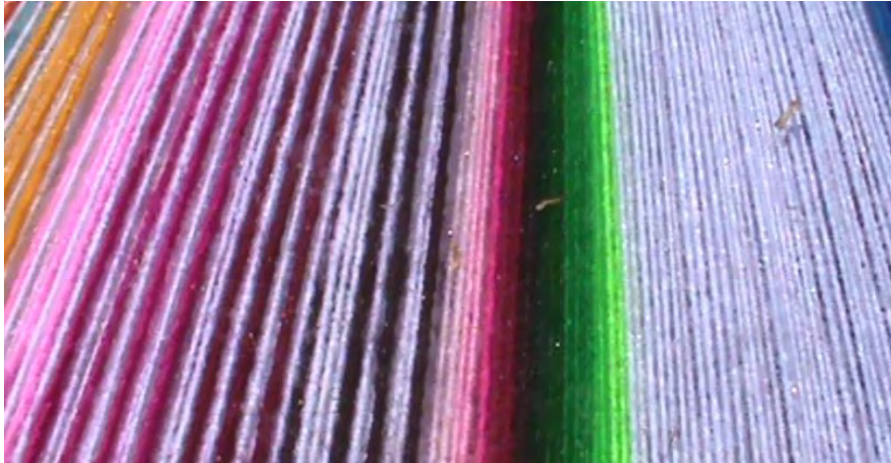


Figura 43. Urdimbres del pallay central (izquierda)

En el caso de otra unqhuña, a la que se ha tenido acceso, se pudo contar 63 urdimbres de color en el pallay central formado por grupos de 7 urdimbres de cada color. Sin embargo, como se utilizan 8 colores, en uno de ellos se registró 14 urdimbres. Esta situación escapa de la regularidad que se ha observado en el número de urdimbres de colores contadas en diversas zonas del tejido. Por ejemplo, en la pampa formada por franjas de 10 colores, cada uno de los colores tiene 4 urdimbres. Si se quiere construir un pallay con 63 urdimbres de color y con grupos de 7 urdimbres por color, procurando mantener la regularidad, lo correcto sería utilizar 9 colores distintos. Sin embargo, se utilizan ocho colores. No se encuentra una explicación.

En el video se escucha claramente que la tejedora cuenta las urdimbres en el pallay y dice: son siete. Se refiere al número de urdimbres de cada color. A pesar de ello el número de urdimbres de cada color varía, de 7 a 9. Se podría explicar esa imprecisión por el apuro que ella tenía de terminar rápido el allwido pues tenía que hacer una diligencia, y tal vez no pudo poner mucho cuidado en el número exacto de urdimbres de cada color, pero eso sí, el pallay tenía que ser de 63 urdimbres.

Número total de urdimbres y colores empleados en el tejido

Ambos subtipos de tarea, el allwido de la pampa y el allwido del pallay, se alternan al tender las urdimbres. Para facilitar la comprensión del allwido, se ha dividido la unqhuña en zonas (Fig. 44). A continuación, en la Tabla 1, se muestran el número de urdimbres y los colores en cada franja desde las zonas Z1 hasta Z7.



Figura 44. Tejido dividido en zonas

Tabla 2. Zonas del tejido, número de urdimbres y colores

Zona del tejido	Número de urdimbres	Colores
Z1 Pampa	41 vueltas (82 u.)	Blanco
Z2 Pampa	20 vueltas (40 u.)	Franjas de celeste claro, celeste oscuro, azulino, azul oscuro, azul marino, rojo granate, rojo, naranja, amarillo oscuro, amarillo claro. Dos vueltas de cada color, 4 u. de cada uno.
Z3 Pallay laterales	1 ciclo = 6 urdimbres 16 ciclos = 96 u. 1 vuelta blanca, media vuelta azul y media vuelta blanca. En total 100 u.	Blanco y azul, se tienden alternadamente. 33 urdimbres azules y 67 urdimbres blancas. Figura 40.
Z4 Pampa	20 vueltas (40 u.)	Franjas de amarillo claro, amarillo oscuro, naranja, rojo, rojo granate, azul marino, azul oscuro, azulino, celeste oscuro y celeste claro. Dos vueltas de cada color, 4 urdimbres de cada uno.
Z5 Pampa	20 vueltas (40 u.)	Franjas de verdes desde el más claro al más oscuro (4 franjas), guinda, rojo oscuro, rojo claro, fucsia, rosado oscuro, rosado claro. Dos vueltas de cada color, 4 urdimbres de cada uno.
Z6 Pallay central	1 ciclo = 6 urdimbres 31 ciclos = 186 u. 1 vuelta blanca, media vuelta de color y media vuelta blanca. En total 190 u.	El blanco se combina con cada color sucesivamente: guinda oscuro, guinda claro, fucsia, rosado, amarillo, naranja, rojo claro, granate. Urdimbres de color = 63. Urdimbres blancas = 127. Figuras 42 y 43.
Z7 Pampa	20 vueltas (40 u.)	Franjas de rosado claro, rosado oscuro, fucsia, rojo claro, rojo oscuro, guinda, cuatro verdes desde el más oscuro al más claro. Dos vueltas de cada color, 4 u. de cada uno.

Tecnología

Para el urdido del pallay el relato de la tejedora cumple las *funciones de explicar y describir* al asistente el proceso:

“Ay nomá esto vas agarrar no me vas arrojar” (cuando se refiere al ovillo azul que no se devuelve).

“No, esto así más bien encimita saca, ... no, no, no encima, encima, así.... De dentro... arrójame, así ... ahora al revés vamos a hacer” (el asistente tiene que allwir el ovillo blanco en sentido opuesto cuando se urdió la pampa).

“Uno ha ido por arriba y por abajo, ahora es al revés” (primero el ovillo blanco se allwii igual que en la pampa, la siguiente vez en sentido opuesto).

“Ahora arrójame el de color por arriba, eso más bien normal” (normal es igual que en la pampa).

“Cuando viene también esto (se refiere al blanco) normal, no vas a sacar nada”.

“Cuando viene ese color (se refiere al azul) hay más bien vas a variar, ese (el azul) vas a agarrar (no lo devuelves) y ese (el blanco) de encima vas a arrojar (sentido opuesto)”.

“Ya arrójame... fácil, ¿estás entendiendo o no? ... en pallay nomás se varía, después igual nomás”.

“Tiene que ser igualito (mira la unqhuña), treinta y tres creo. Vamos a hacer ver (cuenta y verifica el número de urdimbres azules contándolas en la unqhuña, que es el objeto de referencia). Siempre treinta y tres”.

“Cuenta los azules de arriba y abajo...” (Dice al asistente que cuente las urdimbres de arriba y abajo)

“Veintitrés con el que estás agarrando... impares, no pares” (siempre es así)

“Corta los dos (la tejedora indica al asistente que corte las lanas azul y blanca), amarra los dos, arranca, amarra ... (el asistente tiene que amarrar las lanas a la awa). Una pallay hemos hecho ya”.

El número de urdimbres de los pallay siempre es un número impar. La noción de simetría axial tiene *la función de motivar* la característica del número impar de urdimbres, ya que para elaborar el diseño sería necesario que exista una urdimbre central, en este caso el eje de simetría que divide al pallay en dos grupos de urdimbres de igual número (Fig. 45).

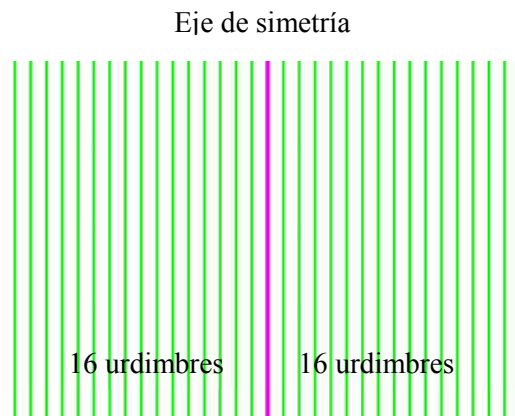


Figura 45. Número impar de urdimbres en el pallay

Se ha mencionado que en el urdido o allwido del pallay la tejedora ha repetido ciclos compuestos por el tendido de cuatro urdimbres blancas, dos urdimbres blancas en un sentido similar al de la pampa y las otras dos en sentido opuesto, además dos urdimbres de color. En ese proceso se ve que las urdimbres blancas y las de color se están cruzando.

La informante dice: “... si, está cruzando, por eso está saliendo sin nudito ... así como esto salería pues (señala las urdimbres que han sido cortadas y amarradas en la awa) ...”. Este discurso tiene *las funciones de motivar y explicar* que la finalidad de este cruce es para evitar cortar la lana, porque si no se diera el cruce, las urdimbres blancas no podrían sostenerse en el allwido, pues ambas o van por abajo o van por arriba, no forman un ocho. Con el cruce se evita cortar la lana, no hay amarre y no se hacen nuditos. También se impide que la lana salga del tejido.

Con respecto a la tecnología otro aspecto que es importante señalar está relacionado con el grosor de las lanas de la pampa y del pallay. La lana de la pampa, ya sea blanca o el matizado de colores en degradé, es más delgada que la lana de colores del pallay. Esa misma característica fue descrita por diversos tejedores. La necesidad de resaltar el pallay en el conjunto del tejido *motiva* el grosor del pallay. La pampa es el fondo del tejido, en este caso de color blanco o el matizado de colores. Lo que el tejedor desea resaltar en su trabajo es el diseño, la figurita, el pallay, y esta idea tiene la *función de motivar* el grosor del tejido del pallay. Es un problema de estética, de belleza y de arte, aspectos muy importantes en el tejido andino.

La informante señala: “.... Aquí haces pallay también, grueso tapas este ... su pallay es grueso, su pampita es delgado ... si parece pero delgadito, delgado puro no parece ... pallay nomá todo es grueso, matizado de pampa todo es delgado ... ese matizado no, este pallay noma pue es matizado ...”. Hace una distinción entre el matizado del pallay y el matizado de la pampa.

Conteo de las urdimbres

La informante toma como referencia el tejido para recordar el número de urdimbres que debe colocar en cada franja, por ello constantemente realiza el conteo de las urdimbres en el tejido. En el ejemplo que se menciona a continuación, está contando las urdimbres azules de la zona del pallay lateral. El término *minido* se refiere a la urdimbre que está atravesada por la trama.

“... estoy contando los azules, está *minido* (las urdimbres de dos colores están alternadas por la trama) ¿no es cierto? Aquí también en abajito ya también ¿no es cierto? otro no es igual, ¿no es cierto? aquí está t’akadito (separado), ¿no es cierto?, entonces aquí está ¿no es cierto? ¿estás viendo? ...”

“...entonces de ahí vamos a contar 1, 2, 3... 15 y 16, ¿no es cierto? (cuenta la primera hilera), aquí también otro filita 17, 18, ...aquí está otro 33, ¿no es cierto? (cuenta la segunda hilera)” (Fig. 46).

“... no es par, siempre unito sobra.” “En general, todas los dibujos se hacen contando, por eso demora...”. Los dibujos se hacen contando porque es necesario tender el número exacto de urdimbres para que el diseño o pallay se pueda reproducir. Este argumento tiene la *función de explicar* la causa del permanente conteo de las urdimbres en estos tejidos.

Tomar en cuenta que lo que se realiza no solamente es contar, sino enumerar. La enumeración es un proceso mental complejo porque no se debe pasar dos veces por el mismo hilo, y es lo que la informante realiza permanentemente en todo el tejido. Aquí hay un elemento muy importante de la matemática, no solamente conocer la lista de los números, sino tener un proceso para verificar la manera de contar. Tanto la informante como el asistente cuentan para verificar que las cantidades sean las mismas.



Figura 46. Conteo y enumeración de las urdimbres

Representación semiótica del allwido

Así como la informante produce un discurso que cumple con las funciones de la tecnología, de igual manera el investigador puede elaborar dibujos, códigos que ayuden a representar la técnica y que corresponden a otra dimensión de un discurso racional, como representación abstracta del proceso, que formaría parte de la OPP del investigador. Representan la técnica sin hacer la técnica, por lo tanto, este discurso forma parte de la tecnología y hace posible que la técnica sea entendida por personas ajenas al entorno andino y textil. Este modo de representación simbólica facilita la comprensión de la técnica, y puede ser utilizado para entender cosas sin hacerlo.

Para poder comprender con mayor facilidad la técnica empleada en el allwido o urdido, entonces es posible utilizar una representación semiótica que describa el proceso de una manera más económica. Es una forma de álgebra o representación literal que no está presente en la actividad quechua, pero que sirve para representar y entender. Esta representación viene a ser un discurso racional, un código abstracto, que utiliza símbolos en un entorno escrito distinto al natural, compuesta por un significante, un significado y un referente (Ogden & Richards, 1923), y que forma parte de la tecnología del investigador.

Consideremos a B^1 (Figura 47) y a B^0 (Figura 48) como elementos del allwido, definidos de la siguiente manera:

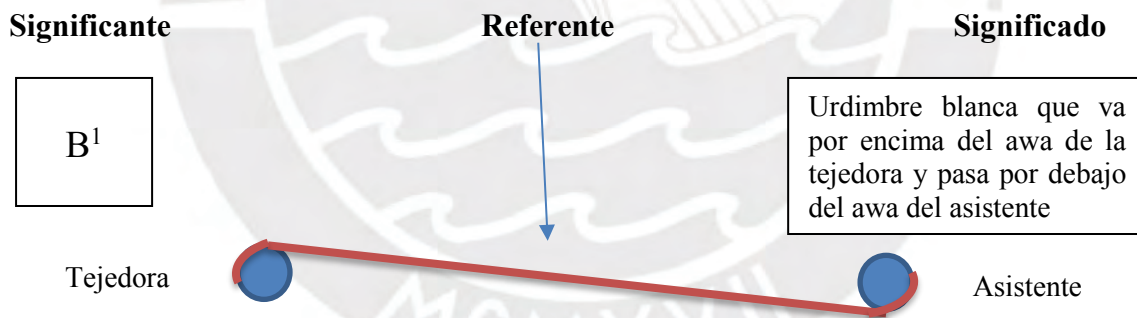


Figura 47. B^1 elemento del allwido

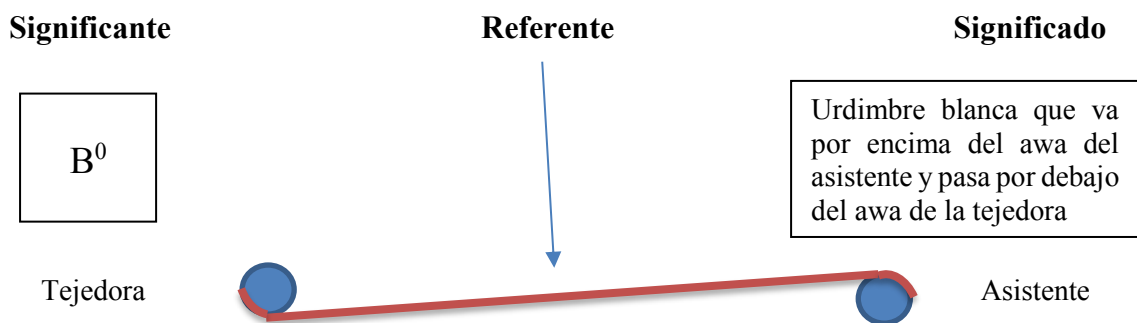


Figura 48. B^0 elemento del allwido

En esta representación no se toma en cuenta la dirección del movimiento del ovillo. Esta representación semiótica tiene la *función de describir* la técnica.

$B^1 B^0$ (Figura 49) es la unión de B^1 y B^0 , viene a ser una vuelta en la que se han tendido dos urdimbres que forman un ocho.



Figura 49. $B^1 B^0$ unión básica de los elementos del allwido

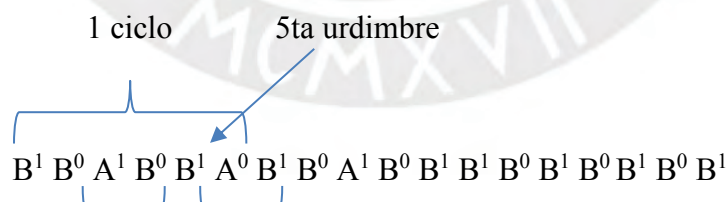
El tendido de las urdimbres de la pampa puede ser expresada como un múltiplo de $B^1 B^0$. Por ejemplo, la franja blanca de la pampa, zona 1 de la fig. 44, se representaría de la siguiente manera:

$$B^1 B^0 B^1 B^0 B^1 B^0 B^1 B^0 B^1 B^0 B^1 B^0 B^1 B^0 B^1 B^0 B^1 \dots \text{ en total } 41(B^1 B^0)$$

Si consideramos que los colores del matizado de la pampa: celeste claro, celeste oscuro, azulino, azul oscuro, azul marino, rojo granate, rojo, naranja, amarillo oscuro, amarillo claro, están representados por las siguientes letras: CC, CO, A, AO, AM, RG, R, N, AO, AC, respectivamente, el allwido del matizado de la pampa puede representarse así:

$$4(CC^1 CC^0) 4(CO^1 CO^0) 4(A^1 A^0) 4(AO^1 AO^0) 4(AM^1 AM^0) 4(RG^1 RG^0) 4(R^1 R^0) 4(N^1 N^0) \\ 4(AO^1 AO^0) 4(AC^1 AC^0)$$

En el caso de las urdimbres del pallay, las urdimbres blancas B^1 y B^0 , y las azules A^1 y A^0 se alternan de la siguiente manera:



A diferencia del allwido de la pampa, en el cual $B^1 B^0$ se suceden en ese orden consecutivamente, se puede apreciar en el allwido del pallay que después de $B^1 B^0$ sigue $B^0 B^1$, pero con A^1 en el medio. De igual manera, la quinta urdimbre es B^1 y la séptima también es B^1 , estando A^0 entre las dos. ¿Qué pasaría si no estuvieran esas dos urdimbres azules? Simplemente las urdimbres blancas no podrían tenderse, colocarse en las awas, porque las dos urdimbres tienen la misma posición en el telar, tanto la segunda como la cuarta, así como la quinta y la séptima. Las

urdimbres se tienden cuando las dos urdimbres consecutivas tienen distinta posición. A^1 y A^0 cumplen la función de cruzar las urdimbres blancas y sostenerlas en la awa. Esa es la *motivación* que hace indispensable la presencia de las urdimbres azules entre los pares de urdimbres.

Dentro de la TAD la introducción de las urdimbres azules (podrían ser de color blanco) corresponde a un *gesto* de la técnica (*geste* en francés), un momento de la técnica que es elaborado por la informante para dar solución a un problema a resolver, evitar que las dos urdimbres consecutivas que tienen la misma posición se caigan, se suelten. Ese dispositivo, el cruce de los hilos, sujeta a las urdimbres, las sostiene. Pero no solo resuelve ese problema, sino también evita que se tengan que amarrar las urdimbres y hacer nuditos, porque sin realizar el cruce, la única forma de sostener dos urdimbres de similar posición sería amarrándolas en las awas.

Otra representación que toma en cuenta la dirección del movimiento

Considérese a U como la urdimbre, elemento básico del allwido. En el caso de esta representación, la flecha superior indica la dirección del movimiento del ovillo. La tejedora se encuentra a la izquierda y el asistente a la derecha. El subíndice indica el color. B corresponde al color blanco, A es el color azul.

Cuando U comienza en la tejedora en dirección al asistente, se denominará \vec{U}_B (Fig. 50).

Cuando U se inicia en el asistente en dirección a la tejedora se denominará \overleftarrow{U}_B (Fig. 51).

Siempre U se inicia por encima de la awa del emisor y termina por debajo del awa del receptor. Tener en cuenta que el elemento U está formado por dos componentes, la dirección y el color de la lana.

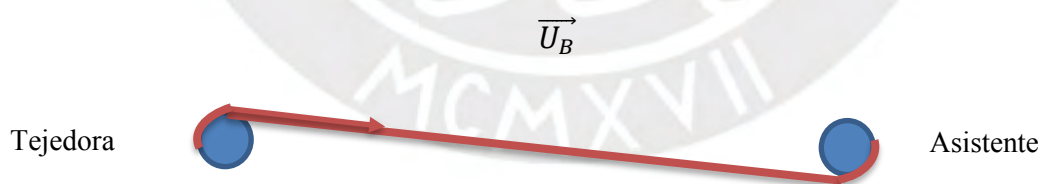


Figura 50. Urdimbre que va de izquierda a derecha

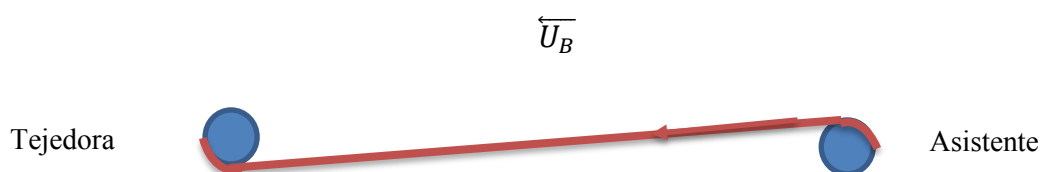


Figura 51. Urdimbre que va de derecha a izquierda

La unión de $\overrightarrow{U_B}$ y $\overleftarrow{U_B}$ se expresa como $\overrightarrow{U_B} \overleftarrow{U_B}$ (Figura 52).



Figura 52. Unión de urdimbres

Si se elabora un tejido simple sin pallay, el urdido puede ser expresado como un múltiplo de $(\overrightarrow{U_B} \overleftarrow{U_B})$.

$$\underbrace{\overrightarrow{U_B} \overleftarrow{U_B}}_{1 \text{ vuelta}} \overrightarrow{U_B} \overleftarrow{U_B} \overrightarrow{U_B} \overleftarrow{U_B} \overrightarrow{U_B} \overleftarrow{U_B} \overrightarrow{U_B} \overleftarrow{U_B} \overrightarrow{U_B} \overleftarrow{U_B} \overrightarrow{U_B} \overleftarrow{U_B} \overrightarrow{U_B} \overleftarrow{U_B} \dots$$

En el caso del pallay, se consideran dos movimientos más. $\overrightarrow{U_B^{-1}}$ se denomina a la urdimbre que se inicia en la tejedora, pero pasa por debajo del awa y termina por encima de la otra awa (Fig. 53).

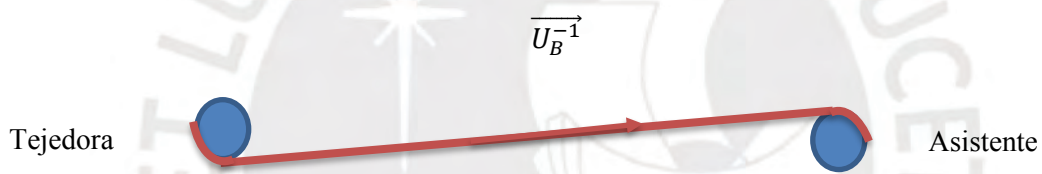


Figura 53. Urdimbre opuesta que va de izquierda a derecha

$\overleftarrow{U_B^{-1}}$ se denomina a la urdimbre que se inicia en el asistente, pero pasa por debajo de la awa y termina encima de la awa de la tejedora (Figura 54).

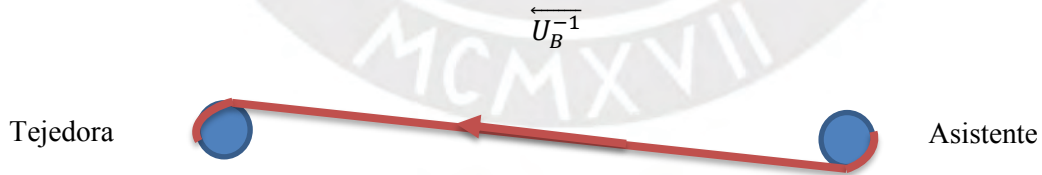


Figura 54. Urdimbre opuesta que va de derecha a izquierda

$\overleftarrow{U_B}$ es el opuesto $\overrightarrow{U_B^{-1}}$, así como $\overrightarrow{U_B}$ es el opuesto de $\overleftarrow{U_B^{-1}}$

$\overleftarrow{U_B} \overrightarrow{U_B^{-1}} = 0$, es decir se llega a una situación anterior a $\overleftarrow{U_B}$, las urdimbres se deshacen y no se avanza en el urdido. Lo mismo sucede con $\overrightarrow{U_B} \overleftarrow{U_B^{-1}} = 0$.

En el caso del allwido del pallay la combinación del urdido de urdimbres blancas y azules $\overrightarrow{U_A}$ y $\overleftarrow{U_A}$ se escribiría de la siguiente manera:

$$\underbrace{\overrightarrow{U_B} \overrightarrow{U_B} \overrightarrow{U_A} \overleftarrow{U_B^{-1}} \overleftarrow{U_B^{-1}} \overleftarrow{U_A}}_{1 \text{ ciclo}} \underbrace{\overrightarrow{U_B} \overrightarrow{U_B} \overrightarrow{U_A} \overleftarrow{U_B^{-1}} \overleftarrow{U_B^{-1}} \overleftarrow{U_A}}_{1 \text{ ciclo}} \underbrace{\overrightarrow{U_B} \overrightarrow{U_B} \overrightarrow{U_A} \overleftarrow{U_B^{-1}} \overleftarrow{U_B^{-1}} \overleftarrow{U_A}}_{1 \text{ ciclo}} \dots\dots$$

La presente representación semiótica permite observar que las urdimbres se tienden en las awas con movimientos del ovillo que van de derecha a izquierda y de izquierda a derecha. De igual manera, en el caso del pallay se puede ver que la urdimbre azul va de la tejedora al asistente, pero no regresa, se queda, mientras el ovillo blanco va y viene, pero en sentido opuesto, y finalmente regresa cerrando el ciclo.

4.1.4. Preparación del telar para el tejido

Tipo de Tareas 1: Construcción de la illawa

Técnica

Una vez terminado el allwido o urdido de las urdimbres del tejido se procede a construir la illawa. La illawa es equivalente al *lizo* en la actividad textil. Es un dispositivo del telar que hace bajar y subir los hilos de la urdimbre para que entre ellos pase la trama. Para construir la illawa la informante realiza el proceso que se describe a continuación.

Al terminar el allwido las urdimbres forman dos superficies finitas que se cruzan dibujando un ocho desde una vista lateral. El allwido divide el espacio en cuatro zonas: dos exteriores, una superior y otra inferior, y dos zonas interiores, derecha e izquierda, ubicándose la informante junto a la zona interior izquierda del allwido (Figura 55).

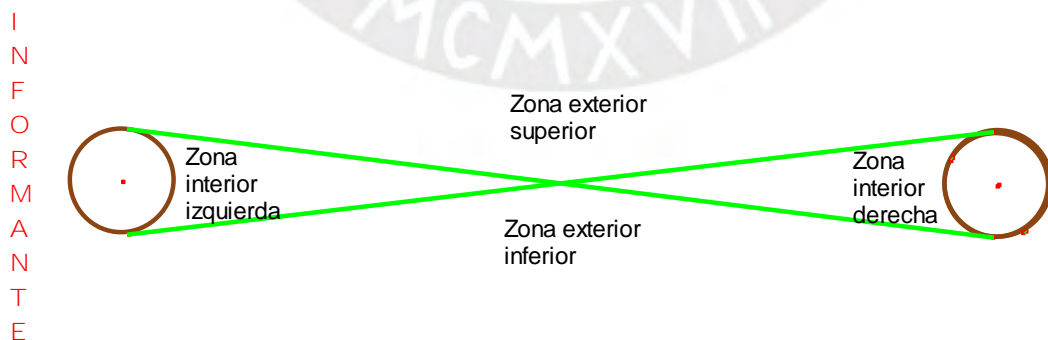


Figura 55. Zonas delimitadas por el allwido



Figura 56. Tubo de PVC en el allwido y desplazamiento de segmento \overline{AB} de intersección

La informante coloca un tubo grueso de PVC de 4", al que llama *toкуро*, en la zona interior derecha. Mueve el tubo trasladando el segmento \overline{AB} , producido por el cruce de las superficies, del centro del allwido hacia ella (Figura 56).



Figura 57. Cáñamo en el telar para la illawa

Una vez que el segmento \overline{AB} se encuentra cerca de la informante, introduce un cordel de cáñamo en la zona interior izquierda, de derecha a izquierda (Figura 57). El cordel de cáñamo pasa por encima de la primera urdimbre, pero por debajo de todas las demás.

La informante coloca el cordel junto al segmento que se ha llamado \overline{AB} , cruce de las superficies. Coloca sus manos sobre el cruce y comienza a escoger una por una las urdimbres que están abajo en la zona interior derecha abriendo las que están arriba (Figura 58). Comienza por la izquierda y continua hacia la derecha. Como está en el cruce de las superficies (Figura 59), aquellas urdimbres que están arriba antes del cruce bajan después de él. Con ayuda del dedo índice de la mano

derecha, jala el cordel de cáñamo maniobrando desde las urdimbres inferiores de la zona interior derecha hacia las urdimbres superiores de la zona interior izquierda, formando lazadas con el cordel que son colocadas en el dedo índice de la mano izquierda.



Figura 58. Escoger las urdimbres de abajo de la zona interior derecha

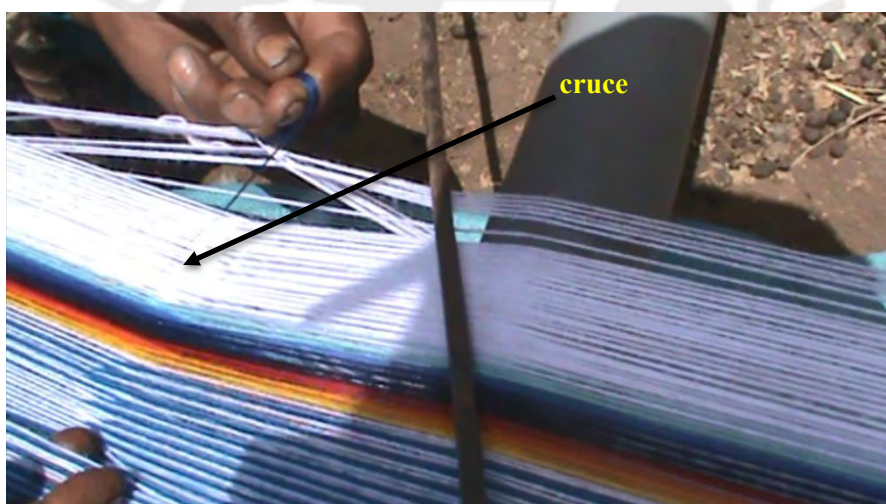


Figura 59. Construcción de la illawa en el cruce

Cada cierto tramo, cuando hay suficientes lazadas en el dedo, las traslada a una barra cilíndrica delgada de metal (Figura 60). Este trabajo lo realiza a lo largo de todo el allwido. Producto de esta acción el cordón levanta las urdimbres que están abajo en la zona interior derecha (Figura 61).

Una vez terminada la illawa amarra el cáñamo sobrante en un costado y ata una pita gruesa del tamaño de la barra en sus dos extremos. En las figuras 61 y 62 se ve con claridad como el tubo de 4" de PVC abre las dos superficies de urdimbre y la illawa acciona sobre las urdimbres de abajo.

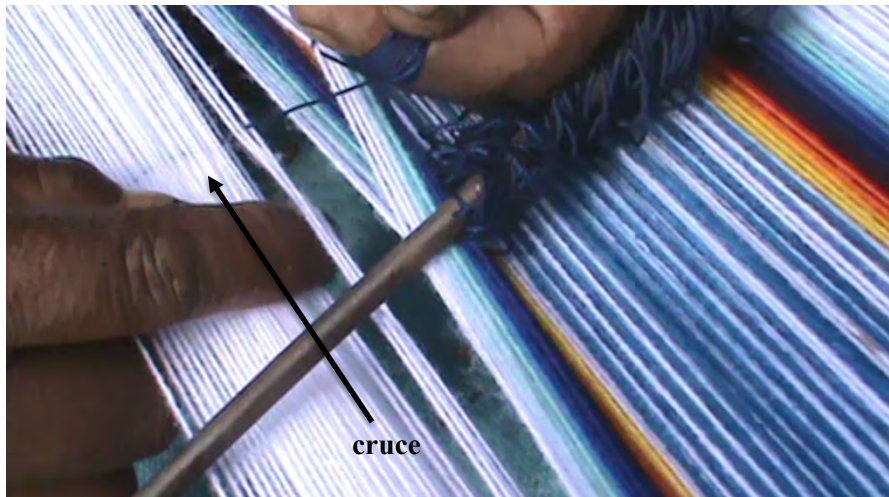


Figura 60. Lazadas de la urdimbre en la barra delgada



Figura 61. La Illawa acciona sobre las urdimbres inferiores de la zona interior derecha



Figura 62. Detalle de la Illawa

Tecnología

La necesidad de separar más a las urdimbres de la zona interior derecha y de acercar el segmento \overline{AB} , creado por la intersección de las urdimbres, a la tejedora, para construir la illawa con mayor facilidad, ambas situaciones cumplen con *la función de motivar* la introducción del tubo de 4" de PVC o *toкуро* en la zona interior derecha del telar. El discurso de la tejedora tiene *la función de explicar*: "... illawa, vamos a illawar ahora... vamos a illawar para hacer katete ... cuando allwimos ponemos kata. ...ahora vamos a hacer illawa para tejer ... uno por uno illawas también no fácil también es ... así illawas uno por uno sí, de abajo ... de aquí kata está, ¿no es cierto? de arriba va a ver ... de abajo se agarra ...".

Se illawa encima del cruce de las superficies del allwido porque en ese lugar cambian de posición las urdimbres. Las que estaban arriba junto a la tejedora, pasan a estar abajo, y con las que estaban abajo sucede lo contrario. Al final la illawa se ha construido en la zona interior derecha del telar. Se ha utilizado el cordel de cáñamo porque, además de ser resistente, es sedoso y permite que las fibras de la lana pasen sin ofrecer resistencia.

Cuando la informante construye la illawa se da cuenta que algunas urdimbres no están bien allwidadas. Dice: "... hemos malogrado, ahora, ¿cómo hemos hecho? ... cómo será, voy arreglar ... si, ahorita arreglamos ¿ya? ... en illawa sabes pues todo, está mal o no está mal ... si, en su casita noma mira sale ...". En ese sentido, la construcción de la illawa cumple con *la función de evaluar* fallas que se pudieran haberse cometido en el allwido. En ese caso lo que se hace es cortar y corregir las urdimbres para rectificar los errores. Además, cuando se construye la illawa, si hubiera urdimbres fuera de lugar, se ordenan.

Tipo de Tareas 2: Traspasar las urdimbres de una de las awas a una lana gruesa

Técnica

La informante teje con la lana blanca una más gruesa que tiene una longitud mayor al doble del ancho del allwido. Utiliza lazadas grandes de lana blanca y la teje con sus manos. La lana gruesa está formada por tres hebras de lana. Coloca la lana dentro de la zona interior izquierda junto a la awa, de tal manera que la mayor cantidad de lana sobrante está en el lado derecho de la informante. Sobre el allwido, cerca de la awa que tiene las urdimbres, coloca otro palo llamado chocura que estará encima del cordel blanco. Amarra la lana blanca en los extremos de la chocura, sobrando más lana por lado derecho (Figura 63).

Se utiliza un cordel más grueso y oscuro para amarrar la chocura a la lana blanca, pasando el cordel grueso entre las urdimbres del allwido y dando vueltas alrededor de la chocura. (Figura 64). El cordel grueso y oscuro debe quedar bien ajustado en la chocura.



Figura 63. Lana blanca amarrada a la chocura que está encima del allwido



Figura 64. Se amarra la chocura a la lana blanca utilizando el cordel



Figura 65. Cambio del awa por lana en el telar

Una vez que se ha terminado de amarrar el cordel grueso y oscuro alrededor de la chocura, se desatan las soguillas que atan la awa a las estacas, y se va subiendo el allwido de tal manera que la awa se separa de las estacas y queda libre entre las dos superficies de urdimbre. La tejedora jala

el allwido con la chocura y, al colocarlo junto a las estacas, se da cuenta que éstas no ajustan ni tiemplan el urdido. Por ello saca las estacas y las vuelve a clavar un poco más lejos. Finalmente, amarra con una soguilla ambos extremos de la chocura a las estacas (Figura 66).



Figura 66. Telar preparado para el tejido

Tecnología

El relato de la tejedora tiene la *función de describir* “... este blanquito que está aquí está agarrando ... sino dónde vamos agarrar pue ...”. Se refiere a que no hay otra manera de actuar. Es necesario sacar la awa para comenzar el tejido, entonces reemplaza la awa por la lana blanca más gruesa. Con esa lana blanca gruesa se comenzará el *mini* o la trama. Las primeras hileras de la trama se harán con esa lana blanca. A esas primeras líneas de la trama se le llama *polo*. Para reemplazar la awa por la lana utiliza la *chocura* que amarrará a la lana blanca con el cordel oscuro, y la chocura será atada a las estacas.

Tomando en cuenta un corte longitudinal, el tejido se veía así antes del cambio (Figura 67):

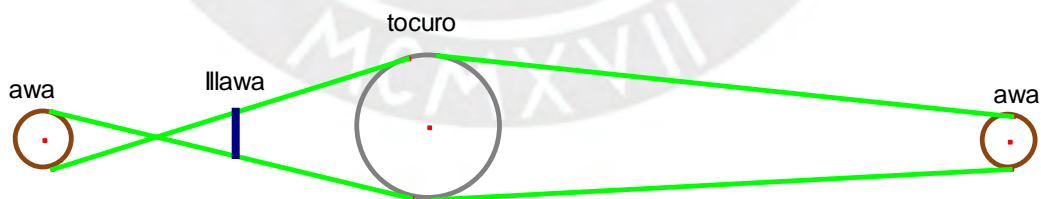


Figura 67. Urdimbres antes del cambio

Después del cambio del awa por la lana, las urdimbres se ven así (Figura 68):

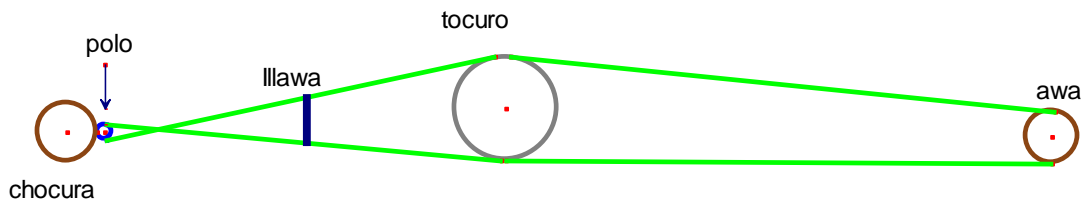


Figura 68. Corte longitudinal de las urdimbres después del cambio

Estas dos representaciones gráficas tienen la *función de describir* los cambios que se han producido en el allwido, viene a ser una representación gráfica de la técnica que permite visualizar los cambios de una manera muy económica, pues ayuda a comprender el proceso de elaboración con mayor rapidez.

4.1.5. Tejido propiamente dicho

Tipo de tarea: Tejer utilizando la trama

Técnica

La tejedora ha tejido la primera trama al poner el polo con la lana blanca. Con ayuda de la *ruka*, un palo redondo de madera, pero con los extremos planos y en punta, acerca el cruce de todo el allwido hacia el polo (Fig. 69). Con la punta de la *wich'uña* prensa, comprime, junta la trama para que el tejido sea lo más tupido posible. La *wich'uña* está hecha de cuerno del venado o taruca (Figuras 70 y 71).



Figura 69. Acerca el cruce del allwido hacia el polo con la ruka



Figura 70. Wich'uña



Figura 71. Prensa la trama con la wich'uña

La informante desata la lana blanca que había amarrado a ambos lados de la chocura y pasa el lado más largo entre las urdimbres de derecha a izquierda, y el lado más corto de izquierda a derecha, en el espacio que deja la ruka. Posteriormente, levanta la illawa con la mano izquierda y con la mano derecha golpea con el puño el allwido de tal manera que ayuda a subir las urdimbres que están abajo y a bajar las urdimbres que están arriba (Figuras 72 y 73). La illawa hace como un “cerrito” en el allwido. Acerca el tocuero hacia ella y por la abertura formada por la illawa hace pasar la ruka entre las urdimbres. Con ayuda de la ruka empuja el segundo cruce hacia el tocuero y une la illawa con el tocuero (Figuras 74 y 75).

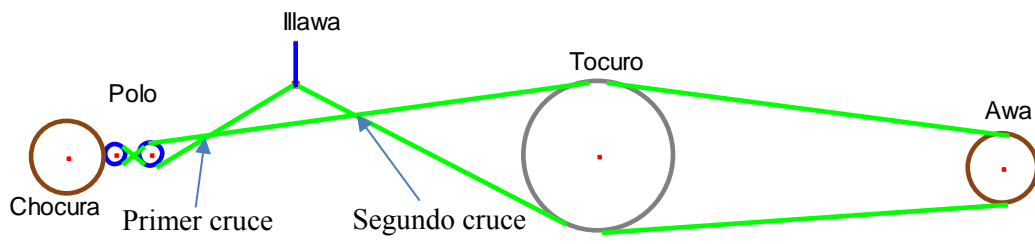


Figura 72. Representación gráfica de la elevación de la Illawa y la formación de dos cruces

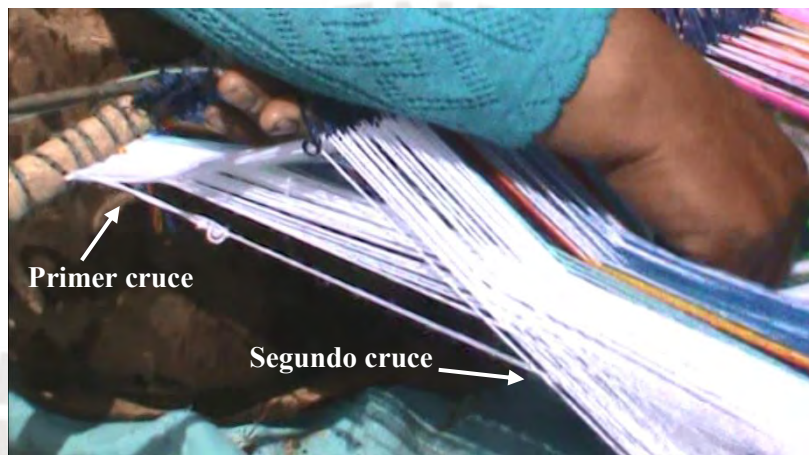


Figura 73. Eleva la Illawa y se forman dos cruces



Figura 74. Con la ruka empuja el segundo cruce hacia el tocuro



Figura 75. Une la illawa al tocuero

Con la ruka la informante empuja el primer cruce hacia el polo y utiliza la wich'uña para ajustarlo. Desata la lana gruesa blanca inicial que quedó a su lado izquierdo y la pasa entre las urdimbres de izquierda a derecha. Con ayuda de la ruka empuja el segundo cruce hacia el polo y siempre prensa la trama inicial o polo con la wich'uña (Figura 76).



Figura 76. Con ayuda de la ruka empuja el segundo cruce hacia ella

Una vez que se ha acabado la lana del polo, con ayuda de un palo pequeño construye la *khespha*, palo pequeño y delgado en donde se envuelve la trama (Fig. 77). Se repite el ciclo señalado en la figura 72, introduciéndose el mini con la *khespa* de derecha a izquierda y de izquierda a derecha (Figs. 78) siempre acercando los cruces con la ruka. Una vez que los dos cruces se han acercado al mini la illawa queda abajo (Fig. 79), se vuelve a levantar la illawa para crear dos nuevos cruces. Continuamente se utiliza la wich'uña para prensar los minis, ajustarlos, y para pasarla encima de las urdimbres (Fig. 80)



Figura 77. Construye la khespa que envuelve el mini o trama

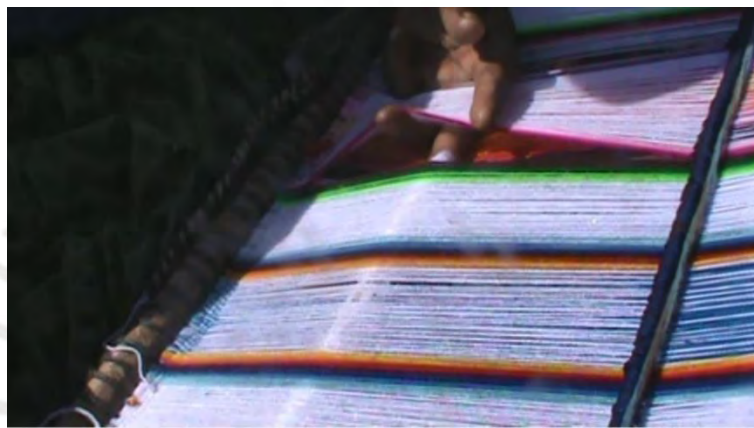


Figura 78. Introduce la khespa con el mini entre las urdimbres

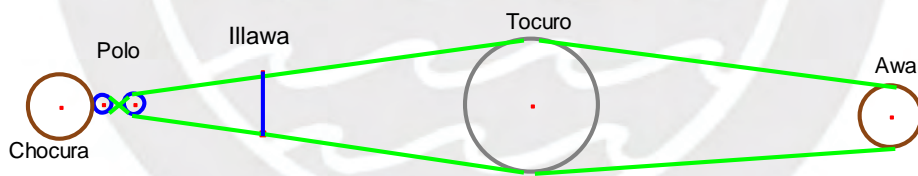


Figura 79. Allwido cuando la illawa está abajo



Figura 80. Pasa constantemente la wich'uña encima de las urdimbres

Para poder realizar los pallay la informante constantemente cuenta las urdimbres de colores en la otra unqhuña, el modelo de referencia. En el presente estudio no se va a analizar el proceso seguido para elaborar los pallay. Es una labor más compleja y difícil que requiere más trabajo de campo y experimentación. Tampoco se va a abordar el momento del acabado en tanto no se pudo registrar información sobre esta parte del proceso.

Tecnología

El discurso de la tejedora cumple la *función de describir* cómo se va a realizar el tejido:

“... vamos hacer pasar esto, ya vas a ver, se illawa adentro dentro, entonces vamos hacer así ...”

En el momento que pasa la lana blanca, el polo, recuerda que había errores en el allwido. “... no ahorita estoy haciendo esto nomá. Fácil nomá se arregla eso, ya ves arregla fácil más bien, está torcido nomá pue...”. Lo que hace es cortar una de las urdimbres que estaba como enredada, la pasa entre otras urdimbres, le hace un nudo para unirla y la deja como las demás.

En el inicio del tejido se utiliza la lana blanca gruesa, “... así nomá se hace ... ya está hacer polo es ... es esta parte del inicio, se llama polo tiyachiy ... bien ajustadito ya está ...”. La lana gruesa será el borde del tejido, el polo viene a ser las primeras tramas del tejido que reemplaza a la awa, por ello tiene que ser gruesa para que el borde del tejido sea resistente. Es el inicio del tejido el que tiene la *función de motivar* el cambio de la awa por la lana gruesa.

Un instrumento que se utiliza es la khespa. “... hacer pasar la khespa ... khespa es para hacer así (envuelve la lana en el mini) ... cuando hacemos mini, entonces khespa se llama pe... si, ay que khespar y hay que minir ...”. En la khespa se envuelve el mini que va pasando dentro de las urdimbres en forma lateral, de derecha a izquierda y de izquierda a derecha, dentro de los “cerritos” que forma la illawa al levantar las urdimbres. En caso contrario no se produciría el tejido, el entrecruzamiento de las urdimbres y la trama o mini producen el tejido. El relato de esta parte del proceso es crucial en el proceso de elaboración del telar, ya que cumple con la *función de explicar* la esencia del tejido.

El mini o trama es presionado por la wich’uña, que proviene de la alpaca o el venado. “... sí, cacho de venado, hueso de alpaca, con eso hacemos pe ...”. Pero en este caso es de cacho de venado. La wich’uña prensa, ajusta el mini porque es necesario que el tejido sea tupido. De esa manera, al no haber aberturas entre las fibras del tejido, el calor del cuerpo se mantiene pues es menos posible la salida del calor humano, muy necesario para soportar las bajas temperaturas de la zona. Este argumento tiene la *función de motivar* el uso de la wich’uña. Además, se sabe que ese tipo de tejido es impermeable, es decir no se moja con facilidad cuando llueve.

La wich'uña, además, se usa constantemente para rasgar las urdimbres para que cumpla con la *función de facilitar y motivar* la técnica, para que las urdimbres no se atasquen y la illawa corra rápido. Esta acción se explica porque ese gesto de rasgar las urdimbres las ordena, las separa, de manera tal que cuando se utilice la illawa para crear los cruces, o cuando se pase la ruka para mover los cruces, las urdimbres estén libres y no se produzcan atoros o enredos.

El tejido se produce por el entrecruzamiento de las urdimbres y de la trama. Eso explica porque desde el inicio se tienden las urdimbres en el allwido trazando un ocho. Como en el tejido de *faz de urdimbre* no se ve la trama, solo se ven las urdimbres, la trama podría ser de cualquier color pues no se notaría a simple vista. Los cruces producidos por la illawa son importantes en la técnica, así como el desplazamiento de estos cruces a lo largo del allwido producido por la ruka.

Es necesario señalar que existen otros tejidos más complejos que el que hemos explicado y analizado a lo largo de la exposición, en ellos se utilizan más illawas y otros aditamentos. Por otro lado, también se pudo registrar información sobre tejidos reversibles, de dos caras, que la informante llama *k'anapallay* (diseño de Canas, Cusco). Si bien es cierto hay aspectos similares en la técnica, también hay diferencias sustanciales. Es por ello que se ha presentado la Organización Praxeológica Personal de la informante, pues a partir de esta referencia no se puede generalizar. Sin embargo, hay aspectos comunes a todos los tejidos.

Como se ha podido apreciar en la exposición anterior se han utilizado gráficos que tienen una dimensión geométrica. Es fácil notar que en el tejido en telar hay objetos matemáticos que subyacen. En el siguiente capítulo se expondrán las ideas que sustentan dicha afirmación.

CAPITULO V. IDENTIFICACIÓN DE NOCIONES Y PROPIEDADES MATEMÁTICAS QUE EMERGEN DE LA OPP

En el presente capítulo se tratará de responder a la tercera interrogante planteada en la investigación, es decir, se van a dar a conocer algunas nociones y propiedades matemáticas que subyacen en el proceso de elaboración del tejido en telar de cuatro estacas, en específico, las nociones y propiedades matemáticas que emergen de la segunda fase, armar la estructura que soporta el telar, y de la quinta fase relacionada al tejido propiamente dicho.

En el caso del armado de la estructura que soporta el telar, producto de la observación y el análisis de la información registrada en los audiovisuales, se puede afirmar que las tejedoras emplean técnicas parecidas a las técnicas matemáticas relacionadas a la construcción de rectángulos, actividad que les permite armar la estructura que soporta el telar y, de esa manera, elaborar sus tejidos con mayor facilidad.

Ellas no saben que están utilizando propiedades matemáticas y construyendo un rectángulo, pero lo están haciendo. Esos saberes han sido transmitidos por sus padres, abuelos y antepasados. Se puede afirmar que las nociones que emergen en el armado de la estructura del telar son saberes de la cultura andina, quechua en particular. De cualquier modo, es importante seguir descubriendo los saberes matemáticos de la cultura andina.

La implicancia del develamiento de los saberes matemáticos de los pueblos originarios tiene diversas consecuencias. Por un lado, desde un punto de vista político, expresa la importancia del reconocimiento, la revalorización y la reivindicación de la cultura quechua en particular, y de los pueblos originarios en general, como componente valioso de la cultura peruana. En lo académico, demuestra que los pueblos originarios han desarrollado saberes matemáticos, una matemática de una manera distinta, con un carácter empírico, no formal, diferente a los procesos desarrollados por algunas culturas occidentales y orientales, pero, no por ello menos valiosa. En lo pedagógico, es necesario identificar las situaciones de la vida diaria, la práctica social en que esos saberes son utilizados por los pobladores, para incorporar los contextos y los saberes en los procesos de aprendizaje – enseñanza de la matemática de la educación básica, situación que corresponde al

derecho que tienen los educandos indígenas a recibir una educación pertinente y que atienda a la diversidad étnica.

En el caso de la matemática presente en la fase del tejido propiamente dicho, a partir del trabajo antropológico sobre el tejido se ha podido percibir que el movimiento de las urdimbres y las awas tienen un comportamiento similar a las rectas tangentes comunes a dos circunferencias. A diferencia del caso anterior, en que se construye un rectángulo cuando se arma la estructura del telar, estos saberes matemáticos no pertenecen a las tejedoras, surgen de la observación etnográfica y se utilizan en el presente trabajo cuando se necesita representar gráficamente una parte del proceso de elaboración de los tejidos, y de esa manera ayudar a la comprensión. Se construye un modelo matemático cuyo objetivo es alcanzar un entendimiento real de lo que se hace.

A veces en el proceso de la investigación se dan resultados que escapan de los objetivos propuestos, como es el caso de la identificación de las rectas tangentes a una circunferencia en el movimiento de las urdimbres y las awas, pero que es necesario señalar, porque son saberes matemáticos que emergen del proceso de elaboración del tejido en telar y porque son aprendidos y enseñados en cuarto año de educación secundaria (Matemática 4, 2016). Estos resultados fueron expuestos por la Dra. Corine Castela en la Escola de Altos Estudos em Campo Grande-Brasil el 11 de abril del 2019.

5.1 NOCIONES QUE EMERGEN AL ARMAR LA ESTRUCTURA DEL TELAR

El proceso de armado del telar empleado por la informante principal es similar a los procedimientos realizados por las otras tres tejedoras observadas en la provincia de Melgar, aunque se pueden encontrar algunas diferencias significativas entre ellos. Sin el ánimo de llegar a una generalización del proceso, a continuación, se explicarán los pasos empleados por las cuatro tejedoras desde una perspectiva matemática. La idea es partir, desde una visión antropológica, de la descripción de los gestos realizados por las informantes cuando arman la estructura del telar, posteriormente, señalar las definiciones y propiedades relacionadas al rectángulo y, finalmente, relacionar los gestos con las definiciones y propiedades, representándolos simbólicamente.

Es preciso señalar que los cuatro videos fueron observados por los investigadores del proyecto de investigación de la UPCH-PUCP, y hubo consenso en señalar que se podía apreciar que las tejedoras están construyendo un rectángulo. El Dr. Hernán Neciosup expresó: “Es increíble que estas personas, sin haber recibido ningún tipo de instrucción educativa, estén usando propiedades de la geometría elemental para construir un rectángulo.”

5.1.1 Construcción de rectángulos al elaborar el armazón del telar

En el análisis vamos a distinguir cuatro procesos distintos, dos de ellos cuando el rectángulo se construye comenzando por el ancho, considerados en el primer y cuarto casos, el segundo caso se construye a partir del largo y, finalmente, el tercer caso se construye a partir de las diagonales.

Construcción del rectángulo a partir del ancho

La informante principal planta las dos estacas A y B en la tierra con una distancia de dos cuartas y media (Fig. 81), fijándose el lado \overline{AB} .

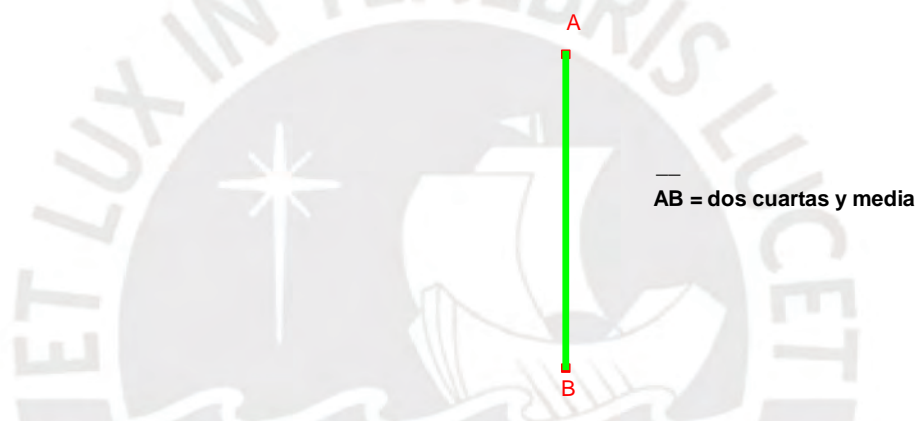


Figura 81. Ancho \overline{AB} del rectángulo

A continuación, traslada la medida de dos cuartas y media a la soguilla, duplicándola, pues va a tejer dos unquñas. Hace una lazada en cada extremo de la soguilla. En el proceso utiliza dos palos o awas P1 y P2 que tienen las mismas dimensiones. Coloca los extremos del palo P1 junto las estacas A y B. En un extremo de P1, junto a B, introduce la lazada de la soguilla de 5 cuartas. En la otra lazada de la soguilla introduce un extremo de P2 que se encuentra en una posición paralela a P1. Con ayuda de P2 extiende la soguilla procurando de manera intuitiva que la soguilla sea perpendicular a P1, moviéndola de derecha a izquierda o viceversa hasta encontrar la perpendicularidad. Con P2 tensa la soguilla y clava la tercera estaca C en la intersección de la soguilla y P2 (Fig. 82).

En los procesos descritos en los cuatro vídeos se puede observar que las tejedoras emplean intuitivamente el paralelismo y la perpendicularidad entre palos y sogas, pero no se utilizan instrumentos que permitan verificar la exactitud de dichas construcciones.

$\overline{AB} = 5$ cuartas
 medida de P1 = medida de P2 $\overline{AB} \parallel P1 \parallel P2$ $\angle ABC = 90^\circ$ $\overline{BC} = 5$ cuartas

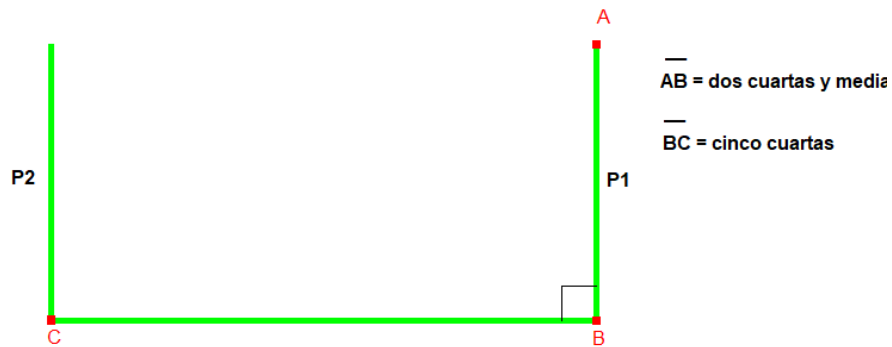


Figura 82. Puntos A, B y C del paralelogramo

A través de P1 y P2 traslada los extremos de la soguilla que mide cinco cuartas, en un extremo desde B hasta A, y el otro extremo desde C hasta un punto donde intuitivamente se aprecie que la soguilla preserva la perpendicularidad con respecto a P1. De esa manera determina la posición de la estaca D en la intersección de P2 y la soguilla (Fig. 83).

$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ $\angle DAB = 90^\circ$ $\overline{BC} = \overline{AD}$

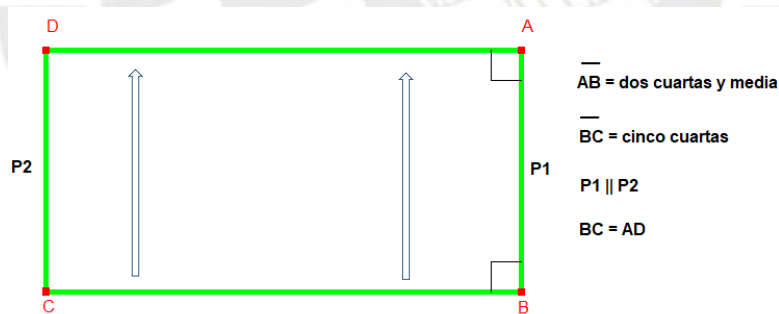


Figura 83. Rectángulo construido

Construcción del armazón a partir de la medida del largo

La segunda informante comienza a construir el paralelogramo determinando en primer lugar la medida L del largo en una soguilla. Planta la estaca A. La soguilla L tiene lazadas en los dos extremos, y por cada lazada introduce los palos P1 y P2 que tienen la misma medida P . Intuitivamente coloca a P1 en una posición paralela a P2, cuidando que ambos sean perpendiculares a la soguilla. Coloca la unión de P1 y una lazada en la estaca A. Desde esa posición jala la soguilla L y en la unión de P2 y la otra lazada, planta la estaca B (Fig. 84).

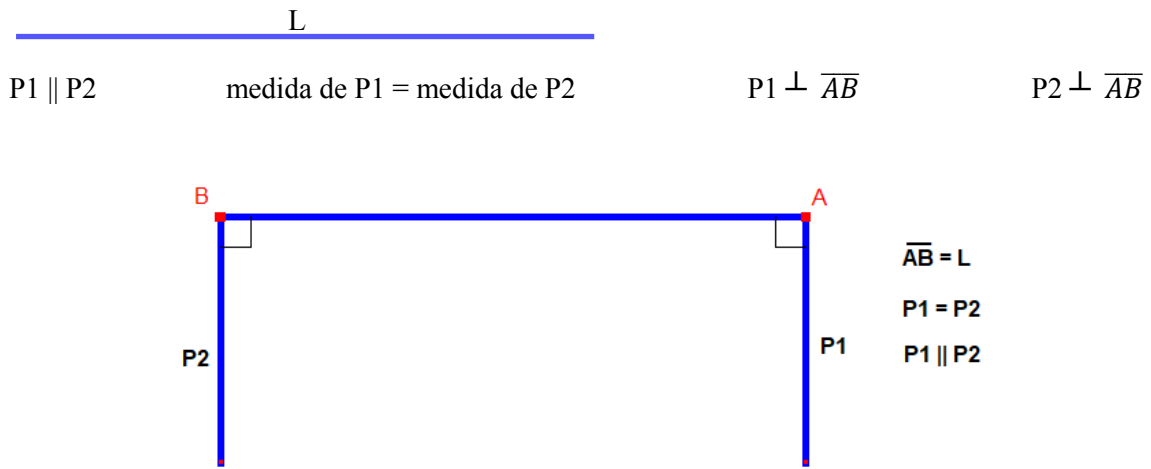


Figura 84. Largo L del paralelogramo

Eleva $P1$ y cogiéndolo por el medio le da un giro de 180° de tal manera que junto a la estaca A deja el extremo de $P1$ que no tiene lazada. Realiza el mismo gesto con el palo $P2$ y junto a la estaca B deja el extremo de $P2$ que no tiene lazada. La medida del ancho del rectángulo está determinada por la medida P de los palos. Extiende la soguilla L con las lazadas que están introducidas en los palos. La soguilla sigue siendo perpendicular a los palos. Planta la estaca D en la unión de la lazada y $P1$, y la estaca C en la unión de $P2$ y la otra lazada (Fig. 85).

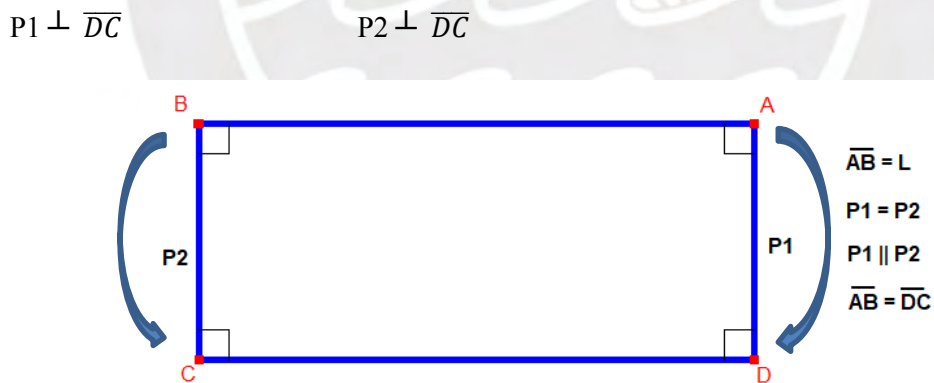


Figura 85. Rectángulo construido a partir del largo

Construcción del rectángulo a partir de las diagonales

Los informantes colocan una frazada rectangular en el suelo como modelo, viene a ser el objeto de referencia. Coloca las estacas midiendo con la soguilla. En un punto exterior a la frazada plantan la primera estaca A y desde ese punto trazan una de las diagonales del rectángulo en construcción con una soguilla. Fijan la medida de las diagonales como d y clavan la segunda estaca C (Fig. 86).

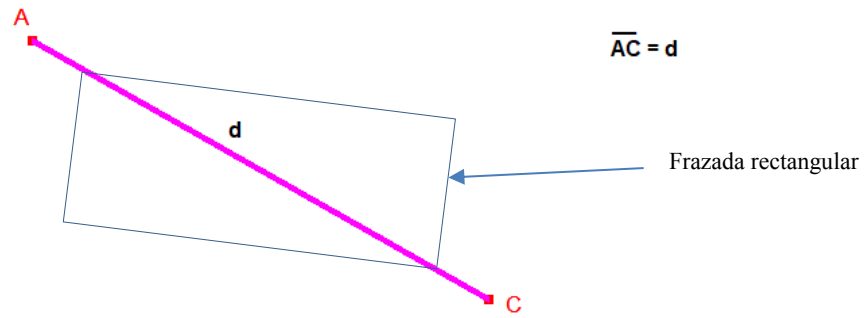


Figura 86. Diagonal AC del rectángulo

Posteriormente, tomando en cuenta la longitud f que va a tener uno de los lados del rectángulo en construcción, colocan una tercera estaca B a partir de C (Fig. 87), conservando en la soga la medida d de la diagonal.

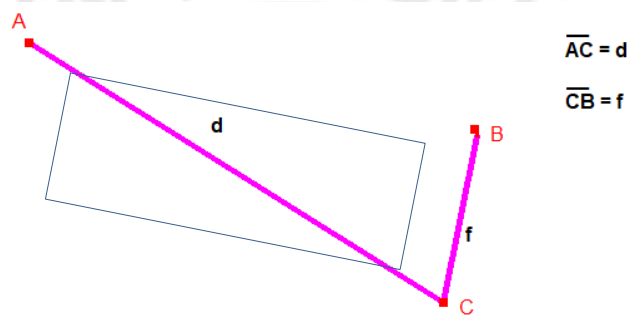


Figura 87. Trazado de una diagonal y un lado

Siempre conservando la medida d en la soga, desde la tercera estaca B, trazan con la soga la segunda diagonal, asegurándose de esa manera que la medida d se preserve. Intuitivamente han considerado la medida f del ancho, desde A hasta D (Fig. 88).

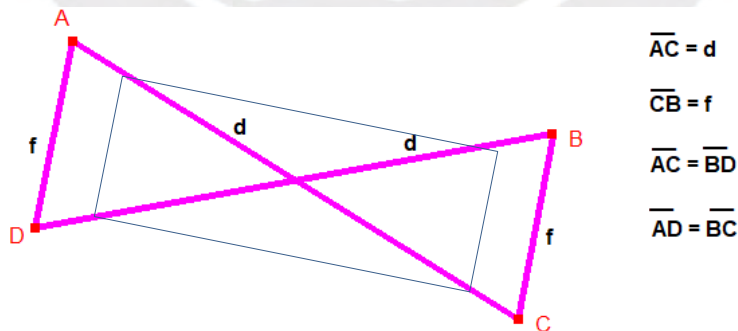


Figura 88. Trazado de las dos diagonales

Para poder comprobar que la construcción realizada es la correcta, verifican que los otros dos lados tengan la misma medida. Con la soga toman la medida desde C hasta D y comprueban que le medida de B hasta A es la misma. De esta manera han construido una figura que tiene dos

diagonales congruentes y dos lados paralelos congruentes. El resultado final es un armazón del telar que tiene la forma de un rectángulo, necesario para tejer una nueva frazada rectangular (Fig. 89).

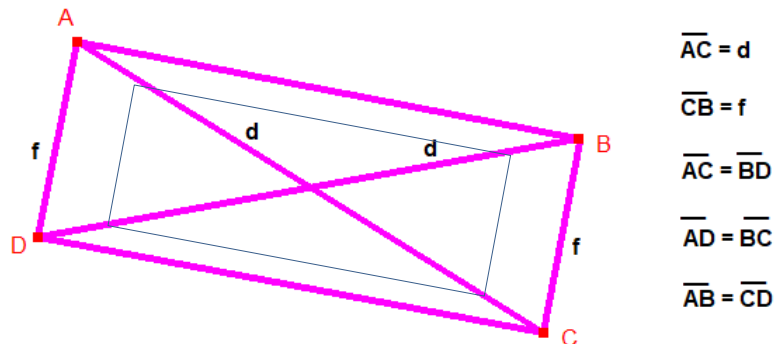


Figura 89. Construcción de un rectángulo

Construcción del rectángulo con comprobación al final

La informante planta la estaca A. Determina en una soguilla la medida e del largo del armazón del telar. Introduce en el extremo del palo P una lazada de la soguilla que mide e y coloca la lazada con el palo P junto a la estaca A. La soguilla con el palo forma un ángulo de 90° . En el otro extremo de la soguilla clava la estaca B (Fig. 90).

La tejedora da un giro de 180° al palo P. En la intersección del extremo del palo con la lazada planta la estaca D. Desde la estaca D extiende la soguilla, que forma un ángulo de 90° con la awa o palo, y en el extremo de la soguilla planta la estaca C (Fig. 91).

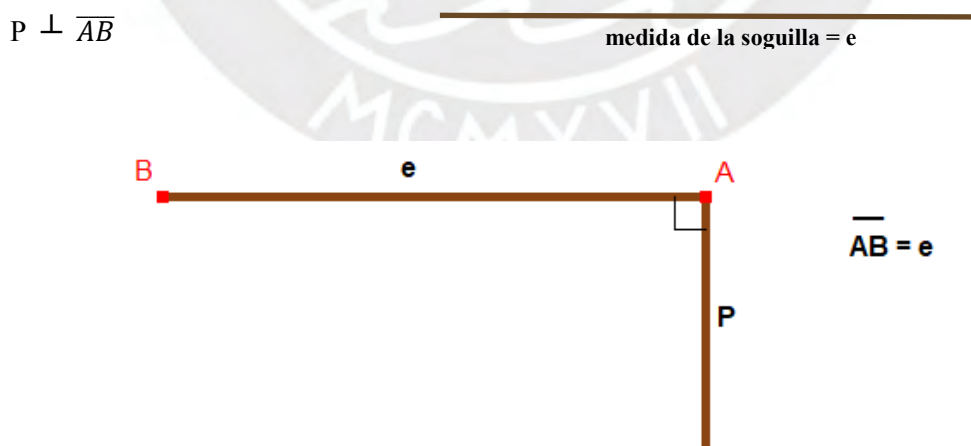


Figura 90. Largo del rectángulo

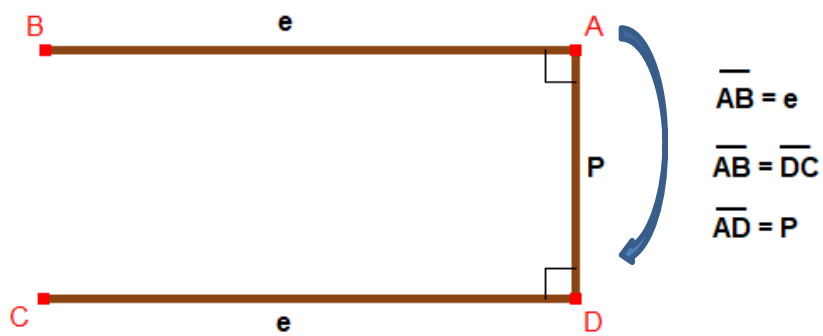


Figura 91. Planta las estacas D y C

Por último, comprueba que las diagonales \overline{BD} y \overline{CA} tiene la misma medida (Fig. 92) con la finalidad de estar segura de que el armazón está bien construido.

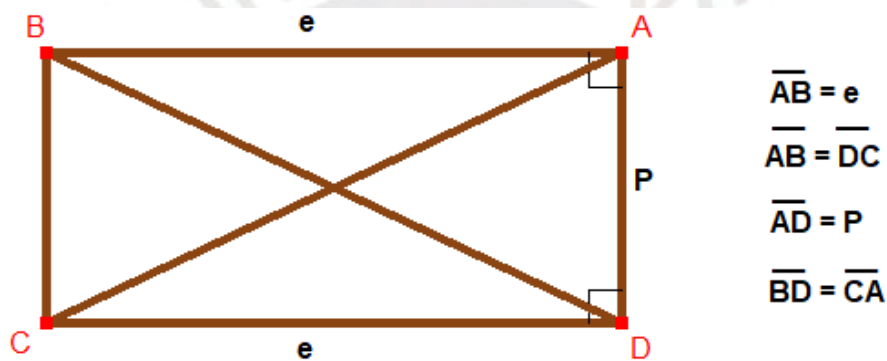


Figura 92. Comprueba que las diagonales son congruentes

5.1.2 Definiciones y propiedades matemáticas relacionadas al rectángulo

En la anterior sección se ha podido apreciar que las cuatro tejedoras han construido rectángulos, que a su vez son paralelogramos. Las siguientes definiciones y propiedades de los rectángulos y paralelogramos (Fig. 93) han sido extraídas de un manual de didáctica de la geometría para maestros de Educación Básica (Godino & Ruiz, 2002, p. 472).

Definición 1: “Se llama rectángulo al paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos”.

Definición 2: “Los paralelogramos son los cuadriláteros que tienen paralelos los dos pares de lados opuestos”.

Como el conjunto de los rectángulos está incluido en el conjunto de los paralelogramos, las siguientes propiedades de los paralelogramos también le corresponden:

Propiedad 1: “Los lados opuestos son congruentes”.

Propiedad 2: “Los ángulos opuestos son congruentes”.

Propiedad 3: “Las diagonales se cortan mutuamente en partes congruentes”.

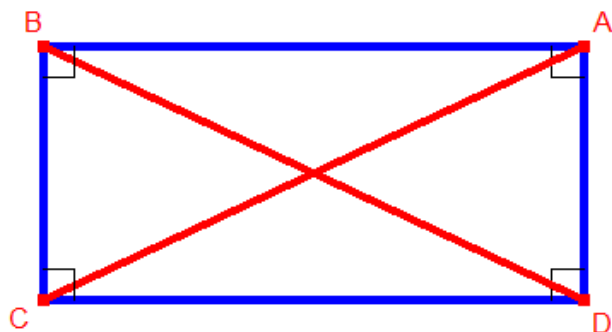
Pero, además, “el rectángulo tiene una propiedad que le es característica:”

Propiedad 4: “Las diagonales de un rectángulo son congruentes”.

$$\angle BAD = \angle ADB = \angle DCB = \angle CBA = 90^\circ$$

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$$



$$\overline{AD} = \overline{BC}$$

$$\overline{AB} = \overline{DC}$$

$$\overline{BD} = \overline{CA}$$

Figura 93. Definición y propiedades del rectángulo

5.1.3 Identificación de las definiciones y propiedades matemáticas en los procesos de construcción

A continuación, se va a señalar como cada gesto efectuado por las tejedoras puede ser representado mediante símbolos matemáticos y justificado con las definiciones y propiedades señaladas en el ítem 5.1.2. Los pasos realizados en los procesos, su representación simbólica y las definiciones y propiedades matemáticas que sustentan la construcción del rectángulo se explicarán en las tablas 2, 3, 4 y 5 que corresponden a cada uno de los cuatro presentados en el ítem 5.1.1.

Tabla 3. Construcción del rectángulo a partir del ancho

Gestos	Representación simbólica	Justificación
Planta las estacas A y B con una distancia de dos cuartas y media entre ellas.	\overline{AB}	Construcción
Coloca la awa P1 junto a A y a B. En la unión de P1 con B pone una lazada de la	$P1 = P2$ $\overline{AB} \parallel P1 \parallel P2$	Construcción Definición 2

soguilla que mide 5 cuartas. La otra lazada va en la awa P2 paralela a \overline{AB} .		
Tensa la soguilla buscando que sea perpendicular a la awa P1.	$\angle B = 90^\circ$	Definición 1
Planta la estaca C en la intersección de la soguilla y la awa P2	$\overline{BC}, \angle C = 90^\circ$	Definición 1
Traslada la soguilla a través de P1 y P2 utilizando las lazadas hasta que llegue hasta la estaca A, preservando el paralelismo a \overline{BC} . Planta la estaca D en la intersección de P2 y la soguilla, cuidando que la soguilla sea “rectita” o sea perpendicular a \overline{AB} .	$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ $\overline{BC} = \overline{AD}$ $\angle D = 90^\circ$ $\overline{AB} = \overline{DC}$	Definición 2 Propiedad 1 Definición 1 Propiedad 1
	$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$	Propiedad 2

Tabla 4. Construcción del armazón a partir del largo

Gestos	Representación simbólica	Justificación
L es la medida de la soguilla que tiene lazadas en sus extremos. Planta la estaca A y coloca en A el palo P1 junto a la lazada. Jala la soguilla con la lazada en el palo P2, que es paralelo a P1. En esa intersección clava la estaca B. La soguilla con los palos P1 y P2 forman dos ángulos rectos.	$\overline{AB} = L$ $P1 \parallel P2$ $\angle A = \angle B = 90^\circ$	Construcción Definición 2 Definición 1
Gira 180° los palos P1 y P2, colocando la soguilla en una posición paralela a \overline{AB} . Planta las estacas D y C	$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ $\overline{AB} = \overline{DC}$ $\angle D = \angle C = 90^\circ$ $\overline{AD} = \overline{BC}$	Definición 2 Propiedad 1 Definición 1 Propiedad 1

Tabla 5. Construir un rectángulo a partir de las diagonales

Gestos	Representación simbólica	Justificación
Planta las estacas A y C que tienen la distancia d entre ellas. A partir de C y con la longitud f del ancho del armazón, planta la estaca B.	$\overline{AC} = d$ $\overline{CB} = f$	Construcción
A partir de B y con la medida d traza la segunda diagonal hasta D, de tal manera que la distancia de D hasta A es equivalente a f .	$\overline{AC} = \overline{BD}$ $\overline{BC} = \overline{AD}$	Propiedad 4 Propiedad 1
Para estar seguros de que la construcción es correcta, verifican que la medida del segmento \overline{AB} es igual al de \overline{DC}	$\overline{AB} = \overline{DC}$	Propiedad 1

Tabla 6. Construcción de un rectángulo con comprobación

Gestos	Representación simbólica	Justificación
Planta la estaca A. Coloca junto a A el extremo de la awa con una lazada de un cordel de medida e . El cordel con la awa forma un ángulo de 90° . En el extremo opuesto del cordel se clava la estaca B.	$\overline{AB} = e$ $\angle A = 90^\circ$	Construcción Definición 1
Gira la awa 180° . En la intersección de la awa y la lazada del cordel clava la estaca D. El cordel y la awa forman un ángulo de 90° .	$\angle D = 90^\circ$	Definición 1
Desde D tensa el cordel y en el extremo opuesto clava la estaca C.	$\overline{AB} = \overline{CD}$ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	Propiedad 1 Definición 2
Con el cordel comprueba que la distancia que hay de B hasta D y de A hasta C es la misma.	$\overline{BD} = \overline{AC}$	Propiedad 4

5.2 TANGENTES INTERIORES Y EXTERIORES A CIRCUNFERENCIAS EN EL PROCESO DEL TEJIDO EN TELAR

En el Capítulo IV, en los tipos de tareas “Traspasar las urdimbres de una de las awas a una lana gruesa” y “Tejido propiamente dicho” se han utilizado gráficos realizados en Cabri II Plus para describir la técnica. La visualización constante del proceso de elaboración del tejido en telar de cuatro estacas y la necesidad de dar a conocer, de la manera más clara posible, la técnica y la tecnología que utilizan llevó a buscar un medio que facilite la comprensión.

Cuando se teje la pampa y el pallay, la mitad de las urdimbres se eleva por la acción de la illawa, como parte de un proceso que se realiza en forma alternada, correspondiendo la siguiente vez que la otra mitad de urdimbres esté arriba. Buscando la representación gráfica del proceso se pudo percibir que, considerando un corte longitudinal del telar, las awas podrían verse como circunferencias y las urdimbres serían rectas o segmentos de recta tangentes a las circunferencias. Inclusive, se pudo modelar gráfica y dinámicamente el movimiento de la illawa cuando sube y baja las urdimbres. Todo ello se ha realizado en dos dimensiones, graficando únicamente el corte longitudinal del tejido (Figuras 94 y 95).

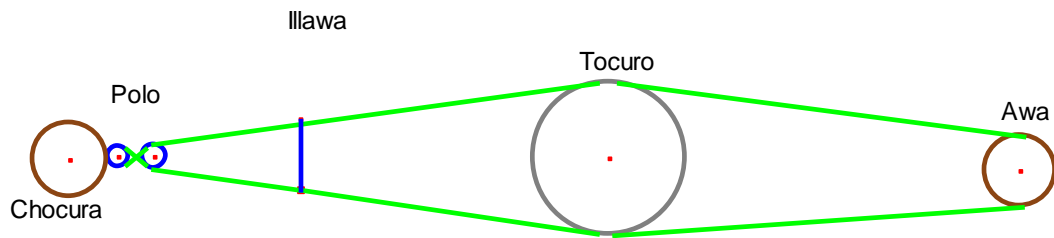


Figura 94. Corte longitudinal del telar cuando la illawa está abajo

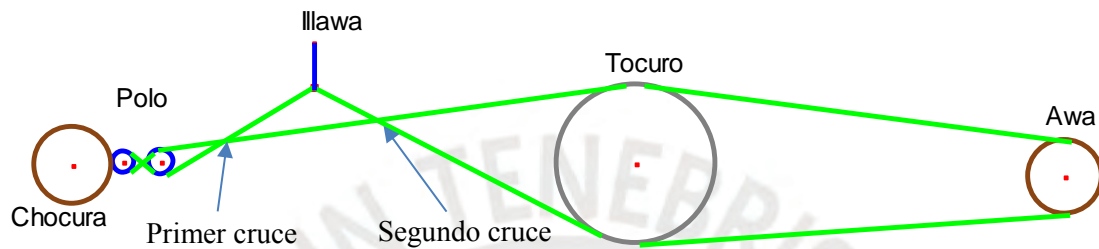


Figura 95. Corte longitudinal del telar cuando la illawa está arriba

Es por ese motivo que, para realizar la representación gráfica de los dos momentos, es posible recurrir a la construcción de una recta tangente a una circunferencia, la construcción de dos rectas tangentes interiores a dos circunferencias y la construcción de dos rectas tangentes exteriores a dos circunferencias.

5.2.1 Representación gráfica del allwido inicial

Para lograr una mayor comprensión del proceso de elaboración del tejido, en este caso para entender el movimiento de las urdimbres y de los palos, se vio que era importante representarlo gráficamente. En la tercera fase el allwido o urdido se tienen dos awas y las urdimbres tendidas encima de ellas forman dos superficies que se cruzan formando ocho (Fig. 96).



Figura 96. Corte longitudinal del allwido inicial

Considerando un corte longitudinal del telar, es fácil visualizar que las awas cumplen el papel de circunferencias y las urdimbres vienen a ser segmentos de rectas tangentes a dos circunferencias. Las gráficas se han realizado utilizando el Cabri II Plus. Para poder realizar el gráfico es necesario aplicar la técnica del trazado de las dos rectas tangentes interiores comunes a dos circunferencias.

Trazado de dos rectas tangentes interiores comunes a dos circunferencias

Consideramos dos circunferencias con centros C_1 y C_2 y con radios r_1 y r_2 , respectivamente. El radio r_1 corta a la circunferencia C_1 en A. Tomando como centro A se traza un arco con radio r_2 prolongándose el radio r_1 hasta que se interseque con el arco trazado en el punto B. Se construye una circunferencia con centro C_1 , que pase por B y que tiene como radio $r_1 + r_2$ (Fig. 97).

Posteriormente se trazan las dos rectas tangentes a la circunferencia con centro en C_1 y radio $r_1 + r_2$ que pasen por el punto exterior C_2 (Fig. 98). En las circunferencias con centros C_1 y C_2 y radios r_1 y r_2 se trazan radios perpendiculares a las dos rectas tangentes. La intersección de los radios perpendiculares con las circunferencias con centros C_1 y C_2 y radios r_1 y r_2 son los puntos de tangencia de las rectas tangentes interiores a ambas circunferencias (Fig. 99).

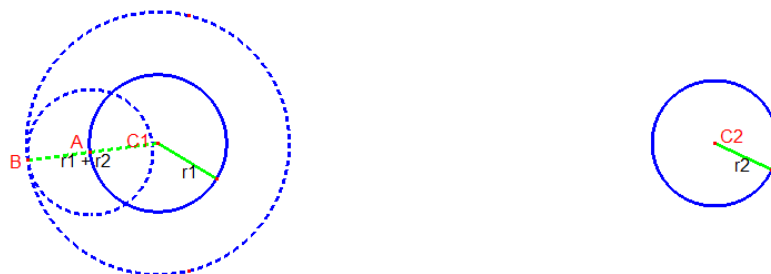


Figura 97. Construcción de circunferencia de radio $r_1 + r_2$

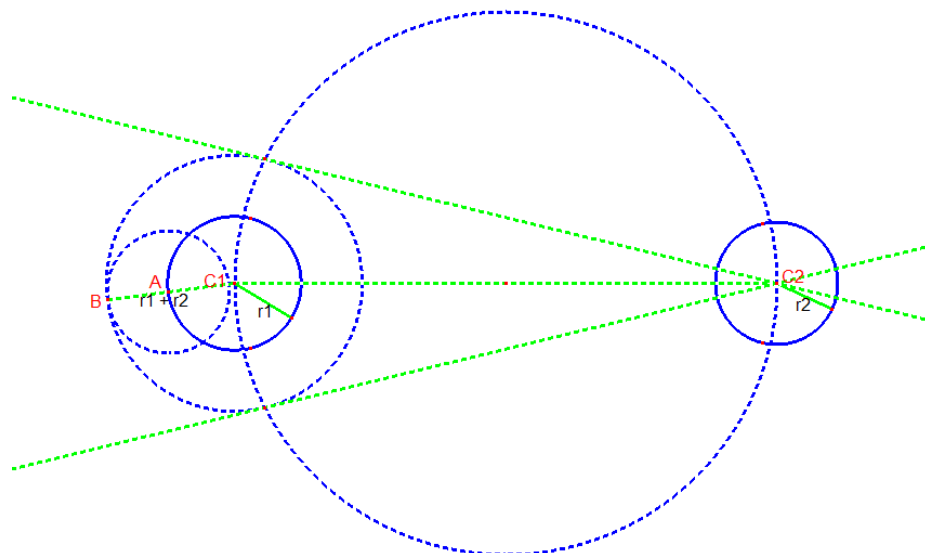


Figura 98. Trazado de rectas tangentes a circunferencia de radio $r_1 + r_2$ que pasen por C_2

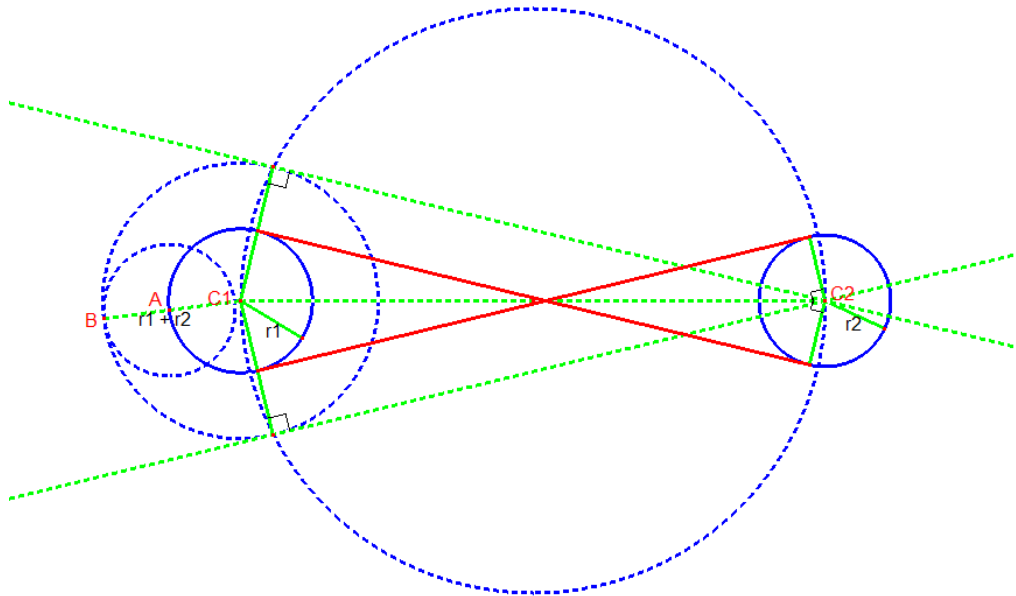


Figura 99. Trazado de rectas tangentes interiores a dos circunferencias

Prueba matemática de la técnica de construcción de las rectas tangentes interiores a dos circunferencias

Primero se probará que \overline{EF} es una recta tangente a las dos circunferencias. Sea D el punto de tangencia de la circunferencia con centro en C_1 y radio $r_1 + r_2$, y la recta tangente $\overline{DC_2}$. E es el punto de intersección del radio $\overline{C_1D}$, perpendicular a $\overline{DC_2}$, y la circunferencia con centro C_1 y radio r_1 . F es punto de intersección de la circunferencia C_2 y el radio perpendicular a la tangente $\overline{DC_2}$.

El $\angle EDC_2$ es recto porque $\overline{C_1D}$ es un radio perpendicular a la recta tangente $\overline{DC_2}$, así como el $\angle DC_2F$ es recto porque $\overline{C_2F}$ es un radio perpendicular a la recta tangente $\overline{DC_2}$. Por construcción \overline{ED} mide r_2 . El cuadrilátero EDC_2F es un rectángulo por tener dos ángulos rectos y dos lados opuestos congruentes y paralelos. Por lo tanto, los ángulos $\angle C_2FE$ y $\angle FED$ son rectos (Fig. 100). El $\angle C_1EF$ mide 90° y como $\overline{DC_2}$ es perpendicular a $\overline{C_1D}$, \overline{EF} también lo es por ser paralelo a $\overline{DC_2}$. por lo tanto, la recta \overline{EF} es tangente a la circunferencia con centro C_1 y radio r_1 . De igual manera, al ser $\angle C_2FE$ recto, el radio $\overline{C_2F}$ es perpendicular a \overline{EF} y a la recta \overline{EF} , que viene a ser tangente a la circunferencia con centro en C_2 y radio r_2 .

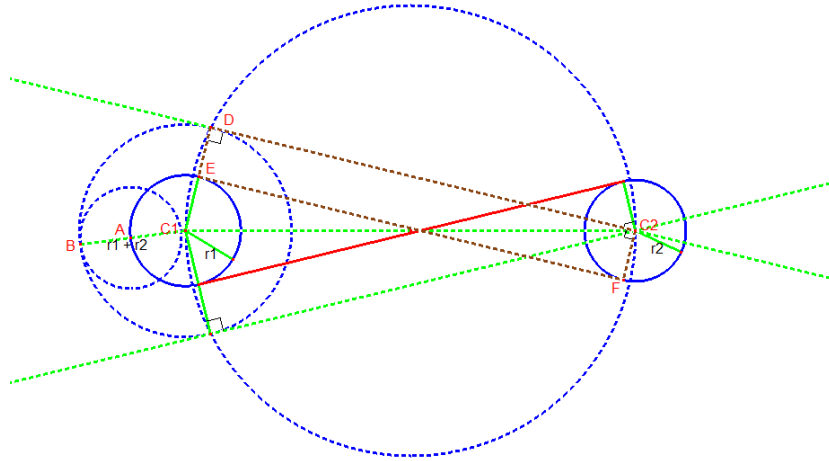


Figura 100. Prueba matemática de la técnica de construcción de la recta tangente interior \overline{EF} a las dos circunferencias

Para probar la construcción de la recta tangente interior \overline{HI} se considera el rectángulo HIC_2G utilizando argumentos similares a la prueba anterior (Fig. 101).

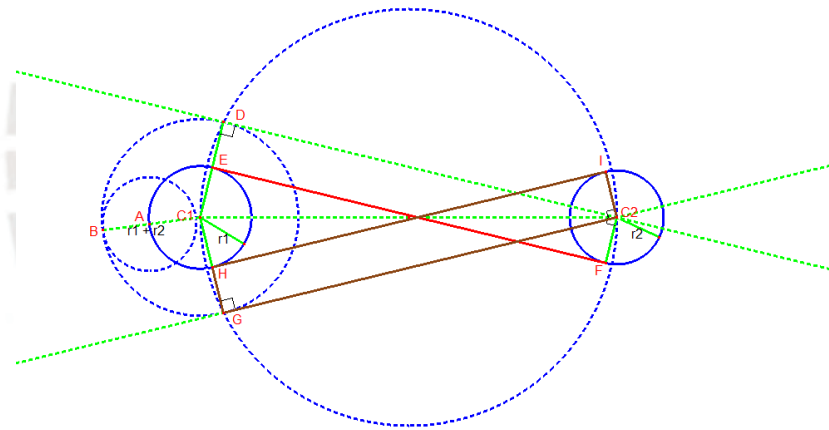


Figura 101. Prueba matemática de la técnica de la construcción de la recta tangente interior \overline{HI} a las dos circunferencias

5.2.2 Representación gráfica del tejido cuando la illawa está abajo

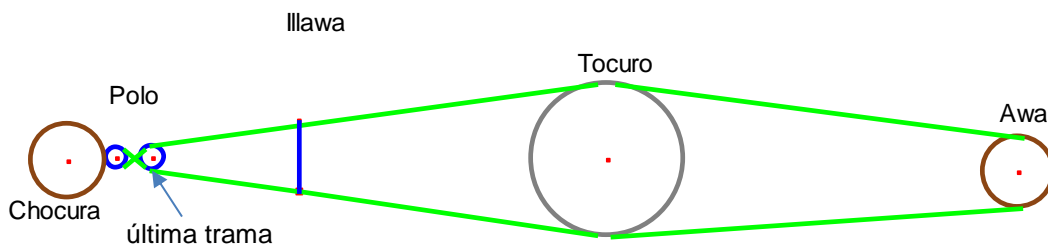


Figura 102. Tangentes exteriores a dos circunferencias

Dentro del allwido se ha introducido el tocuero con la intención de acercar la intersección de las urdimbres a la tejedora. Como se mencionó anteriormente, una vez construida la illawa, el proceso del tejido propiamente dicho tiene dos momentos principales, cuando la illawa está abajo y cuando la illawa está arriba. Cuando la illawa está abajo (Ver Fig. 102), las urdimbres, desde la última trama hasta la awa, se comportan como las tangentes exteriores a las dos circunferencias, viendo a la trama o lana como una circunferencia con un diámetro milimétrico. En la figura 102 se aprecia, en realidad, cuatro tangentes, dos tangentes exteriores desde la última trama hasta el tocuero y otro par de tangentes exteriores desde el tocuero hasta la awa.

Construcción de las tangentes exteriores a dos circunferencias

Dadas dos circunferencias con centros C_1 y C_2 y radios r_1 y r_2 , respectivamente. El radio r_1 corta a la circunferencia en el punto A. Desde A se traza un arco con medida r_2 que corta al radio r_1 en B. Se traza la circunferencia con centro en C_1 que pasa por el punto B, cuyo radio será $r_1 - r_2$ (Fig. 103).

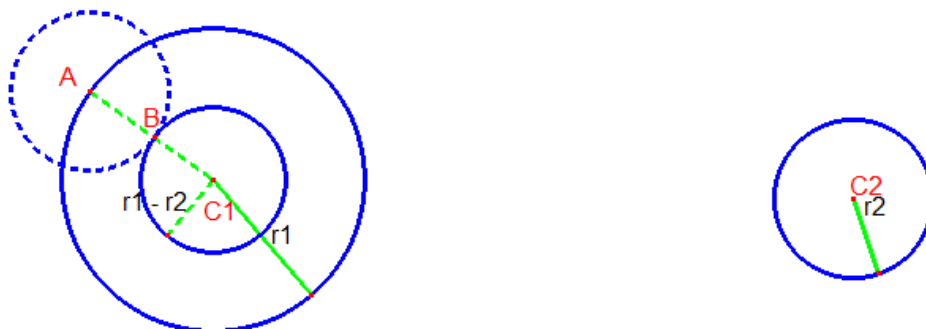


Figura 103. Construcción de circunferencias auxiliares

Se trazan las rectas tangentes a la circunferencia con centro en C_1 y radio $r_1 - r_2$ que pasan por el punto C_2 (Fig. 104). Posteriormente, se trazan los radios de las circunferencias con centros C_1 y C_2 perpendiculares a las rectas tangentes, y que cortan a las circunferencias en los puntos de tangencia. Se unen las parejas de puntos de tangencia para trazar las tangentes exteriores a las dos circunferencias (Fig. 105).

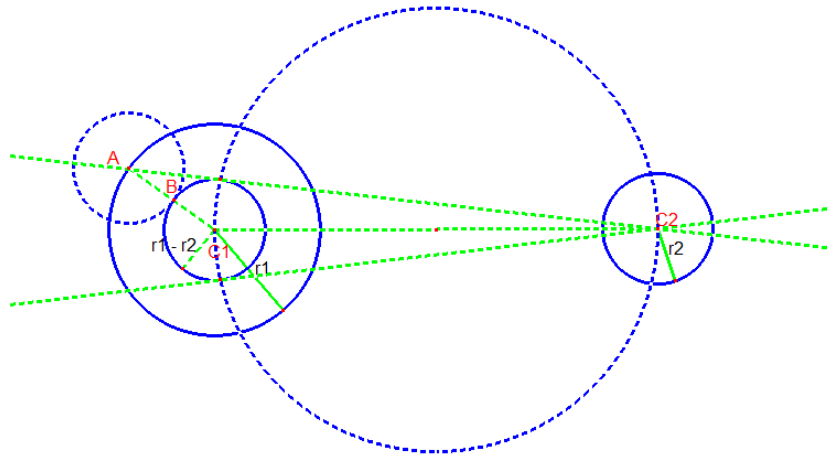


Figura 104. Rectas tangentes a circunferencia con radio $r_1 - r_2$

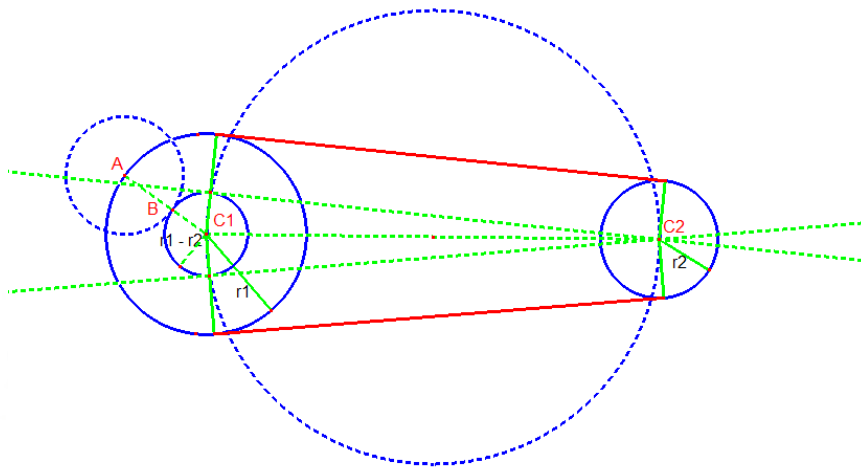


Figura 105. Rectas tangentes exteriores a dos circunferencias

Prueba matemática de la técnica de construcción de las rectas tangentes exteriores a dos circunferencias

En el caso de la prueba de la técnica de construcción de la recta tangente exterior superior se considera el cuadrilátero DEC_2I (Fig. 106). Por construcción se sabe que \overline{DI} y $\overline{EC_2}$ son perpendiculares a la recta tangente $\overline{IC_2}$, por lo que los $\angle C_2ID$ y $\angle EC_2I$ son rectos. Además, \overline{DI} y $\overline{EC_2}$ miden r_1 . Por lo tanto, DEC_2I es un rectángulo, los ángulos $\angle IDE$ y $\angle DEC_2$ son rectos y la recta \overline{DE} es tangente a las circunferencias que tienen centros C_1 y C_2 y radios r_1 y r_2 , respectivamente.

Para la demostración de la recta tangente exterior inferior a las dos circunferencias se toma en cuenta el rectángulo HC_2FG con argumentos similares a los expuestos líneas arriba.

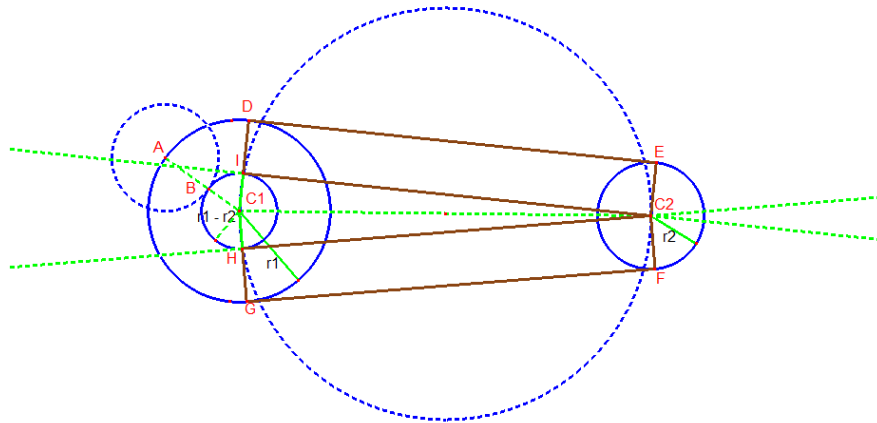


Figura 106. Prueba matemática de la técnica de construcción de las tangentes exteriores a dos circunferencias

5.2.3 Representación gráfica del tejido cuando la illawa está arriba

En el proceso del tejido se elevan las urdimbres con la illawa para formarse los cruces por los cuáles pasará la trama (Fig. 95). Para poder graficar la elevación de las urdimbres con la illawa, se parte, en primer lugar, de haber graficado las tangentes exteriores comunes de las circunferencias observadas en la Figura 102. Se puede observar dos pares de tangentes exteriores comunes, dos ellas desde la última trama hasta el tocuero, las otras dos desde el tocuero hasta la awa. La illawa eleva las urdimbres entre la última trama y el tocuero.

En primer lugar, se oculta la tangente exterior inferior. Considerando un punto exterior I colocado encima de la tangente exterior superior, se traza la tangente a la última trama que pasa por debajo de ella y por I. De la misma manera se traza la tangente al tocuero que pasa por debajo de él y por I (Fig. 107). Se une el punto de tangencia de la última trama con I y el punto de tangencia del tocuero con I, esos segmentos vienen a ser parte de las urdimbres cuando se elevan.

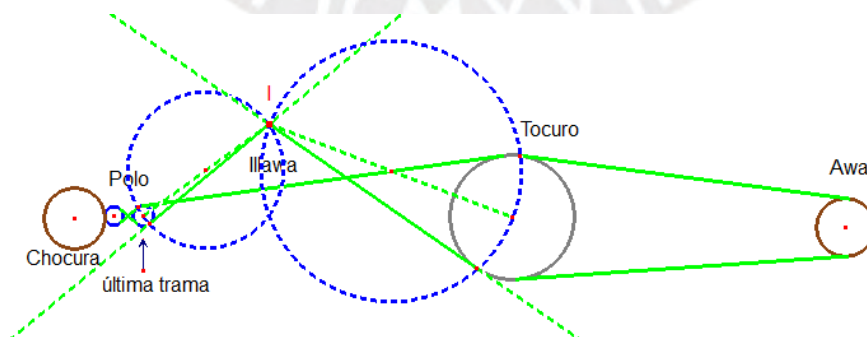


Figura 107. Construcción de segmentos de la illawa

Como se mencionó anteriormente, la construcción de las tangentes comunes a dos circunferencias no ha sido realizada por las informantes, estos saberes no son conocidos por los quechuas, a diferencia de la construcción de los rectángulos donde las tejedoras utilizan técnicas parecidas a las técnicas matemáticas relacionadas a la construcción de los rectángulos. Se trata de situaciones matemáticas que se encuentran detrás de la actividad textil, es decir, subyacen en el movimiento de las urdimbres y las awas del proceso de elaboración del tejido andino. La construcción de las tangentes comunes, interiores y exteriores, a dos circunferencias nos permite entender el funcionamiento del telar y, principalmente, de la illawa.

5.3 REFLEXIONES PEDAGÓGICAS QUE SURGEN DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

El motivo que originó el presente trabajo fue el de identificar nociones matemáticas que se utilicen de forma natural en la práctica textil de los pobladores quechuas, con la finalidad de incorporar ese contexto en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en la educación básica, dándoles así el carácter de ser pertinentes y de calidad. Este objetivo corresponde al derecho que tienen los estudiantes de recibir una educación inclusiva, intercultural, que corresponda a su realidad y a su cosmovisión, contribuyéndose, de esta manera, a que se incrementen los logros en los aprendizajes esperados.

En el proceso de investigación han surgido saberes, unos conocidos por las tejedoras y otros no conocidos, que están considerados en el Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB), como es el caso de los rectángulos y sus propiedades, así como las rectas tangentes a las circunferencias (Matemática 4, 2016), sin embargo, no se van a elaborar propuestas pedagógicas ni diseños de clase que promuevan el aprendizaje de las nociones identificadas en el estudio. Únicamente se está proponiendo formas de abordar, orientaciones que podrían ser útiles en la planificación del proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas realizada por las autoridades centrales, regionales, locales o por docentes de aula.

En el caso de la elaboración del armazón del telar y la construcción de los rectángulos, sería pertinente y motivador que se lograra diseñar procesos de aprendizaje y enseñanza que involucren a los sabios de la comunidad, en este caso a las tejedoras, para que los estudiantes de educación primaria y secundaria puedan darse cuenta de los saberes matemáticos que ha logrado la cultura andina, de cómo la matemática está presente en toda actividad humana y, por lo tanto, tiene funcionalidad. Sería un primer encuentro del estudiante con el rectángulo y sus propiedades.

Este abordaje concreto y activo motivará en ellos el gusto por las matemáticas, así como contribuirá al reconocimiento y revaloración de su cultura, su lengua y sus saberes, elevando su autoestima, tan venida a menos por la discriminación de la cultura oficial. Es necesario destacar

que es importante salvar del olvido a la práctica ancestral del tejido en telar andino, actividad que tiene cada vez menos usuarios en todas las regiones del Perú.

Con el objetivo de modelizar el movimiento de las urdimbres y los palos en el telar se ha realizado una representación gráfica utilizando rectas tangentes a las circunferencias, objetos matemáticos que permiten facilitar la comprensión de diversos aspectos de la actividad textil. A partir de esa representación, los estudiantes del 4to año de educación secundaria de las regiones andinas podrían tener una mejor idea de la circunferencia y las rectas tangentes a ella, situación que podría iniciar el estudio de dichas nociones en un ámbito propicio y que es cercano a ellos.

Si bien es cierto estos conocimientos no son desarrollados por las tejedoras, sin embargo, a partir del trabajo antropológico que se ha realizado sobre el tejido, se podría introducir a los estudiantes en un trabajo geométrico sobre la tangente y la construcción de la tangente a una circunferencia que pasa por un punto dado. Inclusive el desafío sería proponer a los estudiantes un trabajo de representación utilizando la Geometría Dinámica. Además, se podría trabajar otros temas como las magnitudes y las unidades de medida.

Este caso nos puede ilustrar el hecho de que las matemáticas proporcionan modelos de la realidad, que ayudan a los estudiantes a comprender lo que se desea que aprendan.

5.4 FUTUROS TEMAS DE INVESTIGACIÓN QUE SURGEN DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

Una cosa es plantearse preguntas de investigación al inicio de ésta y otra cuándo se ha trabajado algo en ella. A lo largo de todo el proceso de observación y análisis de los datos registrados, siempre estaba en mente el tratar de identificar el modelo matemático presente en la actividad textil, y por ello se planteó la cuestión fundamental del tejido, formulada así en la página 36:

¿Cómo construir una superficie plana a partir del entrecruzamiento de dos superficies formadas por urdimbres utilizando la trama como un dispositivo para garantizar la permanencia (estabilidad, rigidez) de los cruces?

Téngase presente que la respuesta a esta pregunta no es exclusivamente matemática, se han identificado nociones físicas en el proceso, y, de hecho, otras disciplinas también intervienen como es el caso de la química en el teñido de la lana natural.

Desde la matemática, la pregunta intenta responder la problemática relacionada al tejido de la pampa, sin diseño o dibujo, en donde las urdimbres tienen el mismo comportamiento, y se puede hablar de una superficie homogénea formada por ellas. Sin embargo, en este momento, después de la discusión, del análisis y de una mayor investigación, las cosas se ven con mayor claridad. El entrecruzamiento no sería de una superficie formada por urdimbres, sino solo de urdimbres.

Es decir, el elemento básico de análisis sería la urdimbre, que sufriría diversos tipos de deformaciones de acuerdo con la función que realiza en el tejido. De esa manera, para que también pueda responder al tejido del diseño o pallay, la cuestión fundamental del tejido se podría reformular de la siguiente manera:

¿Cómo construir una superficie plana a partir del entrecruzamiento de urdimbres y tramas de tal manera que se garantice la permanencia (estabilidad, rigidez) de los cruces?

Desde esa perspectiva, si se desea identificar el modelo matemático que resuelve el problema antes indicado, es claro que el problema no es de una geometría métrica, ni rígida ni afín. Se presentan problemas de posición en el espacio, de cómo la lana, o el objeto construido con lanas, se puede deformar. Mas aun teniendo en cuenta que en el pallay las urdimbres suben y bajan, se deforman para formar los dibujos. El problema es del *topos*, el lugar en el que se encuentran las cosas sin tomar en cuenta las medidas. Hay aspectos puramente topológicos en las acciones y en el discurso de la informante.

Se ha llegado a encontrar información, imágenes (Fig. 108), que de forma intuitiva permiten plantear la hipótesis de que ese entrecruzamiento de urdimbres y tramas podría estar relacionado con la Teoría de las Trenzas (Artin, 1947). Esta teoría matemática apoyaría la hipótesis del carácter matemático del problema resuelto por los tejedores quechuas, el problema de cómo construir una superficie plana a partir del entrecruzamiento de urdimbres y tramas de tal manera que se garantice la permanencia (estabilidad, rigidez) de los cruces.

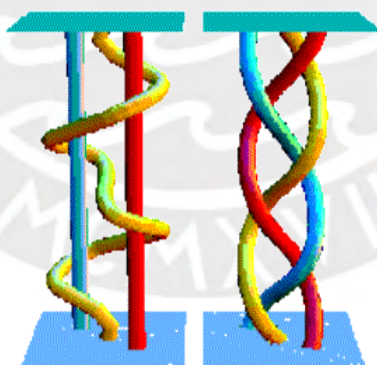


Figura 108. Trenza. Fuente: Rodríguez (s.f.)

No hay que olvidar que, si bien es cierto el problema tiene un carácter matemático, también tiene un carácter antropológico y social, la necesidad del vestido viene a ser la cuestión generatriz, necesidad básica de la especie humana y que está presente en todas las culturas del mundo.

La investigación también ha permitido observar que la manera como tejen los andinos es muy similar al tejido en México (Fig. 109), Centroamérica (Fig. 110), África (Fig. 111) y Japón (Fig. 112). Se podría decir que, ante la necesidad del vestido, los hombres elaboraron técnicas muy parecidas, pero utilizando materiales presentes en su entorno geográfico.



Figura 109. Tejedora mexicana de Chiapas. Fuente: Camalich (2018)



Figura 110. Telar de cintura maya de Guatemala. Fuente: Rivera (2016)

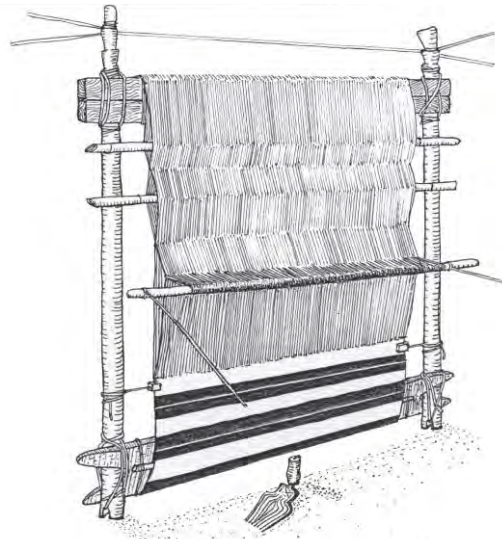


Figura 111. Telar vertical del norte de África. Fuente: Lefébure (2010)



Figura 112. Telar antiguo japonés. Fuente: Ichiki (2018)

En realidad, desde la TAD se está lejos de agotar todo el potencial académico que existe en los vídeos de la informante. Hay que considerar que el trabajo realizado es rico en datos, sustancioso, y que cuando se analizan más de cerca las praxeologías, las técnicas y el logos, más se pueden resaltar los problemas de naturaleza matemática planteados y resueltos.

Las ideas están puestas sobre la mesa. Como se señaló anteriormente, es necesario e importante llegar a descubrir los saberes matemáticos de los antiguos peruanos, ya sea a través del estudio de

los restos arqueológicos, o a través de las prácticas sociales actuales, pues la cosmovisión y el pensamiento andino-amazónico persisten de forma subyacente en sus actividades diarias.

También es necesario tener en claro, que a su vez existen modelos matemáticos en las actividades humanas desarrolladas por los antiguos peruanos, que si bien es cierto no han sido desarrollados por ellos, subyacen en los procesos de elaboración de los productos de esas actividades. En el caso de la actividad textil, la Teoría de las trenzas podría resolver el problema de la construcción de una superficie plana a partir del entrecruzamiento de urdimbres y tramas de tal manera que se garantice la permanencia (estabilidad, rigidez) de los cruces. Es una cuestión que no se encuentra dentro de los objetivos de la presente investigación, pero ha surgido de ella. Estos planteamientos han sido expuestos por la Dra. Corine Castela en la Escola de Altos Estudos en Campo Grande-Brasil el 11 de abril del 2019.



CONSIDERACIONES FINALES Y APORTES PARA LA ENSEÑANZA

A lo largo del trabajo realizado se ha podido comprobar que, como se intuía, los pobladores de las comunidades quechuas, en el caso del tejido en telar, emplean nociones matemáticas implícitamente para elaborar sus tejidos. Se ha visto con claridad que utilizan propiedades de los cuadriláteros durante el proceso del tejido para garantizar la correcta construcción del armazón de la estructura que soporta el telar. Esta condición es necesaria pues sus tejidos tienen formas rectangulares o cuadrangulares.

Existen diversos trabajos desde la Etnomatemática y la Teoría Antropológica de lo Didáctico que han dado luces a la investigación realizada, principalmente los trabajos de Corine Castela (2011, 2015, 2016, 2017), Avenilde Romo (Covián & Romo, 2014) y Diana Solares (2015) que han investigado sobre los objetos matemáticos producidos durante la actividad laboral de algunos trabajadores en distintos ámbitos y países.

El presente trabajo confirma lo planteado, que los grupos sociales, las comunidades en distintos ámbitos, al momento de realizar sus actividades cotidianas, van construyendo conocimientos, saberes, en los cuáles se interrelacionan diversos tipos de conocimientos, matemáticos, físicos, etc., de una manera no evidente, que subyace a los tipos de tareas y técnicas que utilizan. Pero, en su mayoría, no son saberes generados por ellos, sino por sus antepasados, pues son transmitidos, generalmente, de forma oral por sus padres y abuelos. Son en realidad saberes de su cultura, que no son evidentes pues no han sido sistematizados y registrados simbólicamente, pero existen.

De igual manera, los resultados encontrados han permitido contribuir al reconocimiento y a la revalorización de los saberes matemáticos de la cultura andina peruana, en específico de las comunidades quechua-collao. Ha sido posible dar a conocer y hacer visibles saberes que fueron sistemáticamente relegados y destruidos desde la invasión española hace casi 500 años. Todo esto nos permite reivindicar la cultura de los pueblos originarios peruanos, dar validez a un tipo de conocimientos que no son científicos desde la óptica occidental, pero son igualmente valiosos, pues su validez se comprueba empíricamente, en el día a día.

Con la elaboración de la Organización Praxeológica Personal del Tejido en Telar de cuatro estacas de una informante de la cultura quechua-collao, se comprueba la amplitud de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, y su validez en describir y analizar la praxis y el logos de toda actividad humana. Se han podido identificar tipos de tareas, técnicas y tecnologías en el proceso

de elaboración del tejido en telar. Lo que corresponde a la teoría está señalado en la expresión que señalaban las tejedoras, “mi mamá, mi tía o mi abuelita me enseñó” (Castela, 2017). La teoría está en esa tradición oral transferida de una generación a otra, que no es posible de identificar claramente porque no está registrada simbólicamente en la cultura originaria de una manera visible, o al menos, hasta ahora no se ha encontrado evidencias de ello.

Con respecto a la metodología empleada, se ha podido comprobar que para el caso de investigaciones en las que se desea analizar los objetos matemáticos que emergen de las actividades cotidianas, es muy efectivo realizar investigaciones etnográficas, participando en las actividades, observando, pero principalmente aprendiendo a elaborar el producto final. En diversas investigaciones sobre actividades sociales, realizadas desde diversos marcos teóricos, en las que se desea descubrir las matemáticas que hay en ellas, los investigadores han tenido que aprender a elaborar esas actividades. De otra manera no se pueden descubrir los objetos matemáticos, pues, metafóricamente hablando, están “escondidos” en medio de los gestos o expresiones de los informantes, es decir, subyacen a las prácticas sociales.

Los tejedores han aprendido a realizar las actividades, pues se las han enseñado, muchas veces con dificultad por la complejidad del tejido, pero no son conscientes de las propiedades matemáticas que están involucradas en la actividad. La tarea del investigador es introducirse en la tarea, observando, haciendo y preguntando, para tratar de “sacar a la luz” los saberes matemáticos que los informantes tienen, pero que ellos no saben que tienen.

Para realizar un exhaustivo y riguroso análisis de la información recogida, es importante utilizar un registro audiovisual, pues muchos de los datos salen de los gestos, a veces imperceptibles, que los informantes realizan. Para el caso de las comunidades originarias, en específico quechua-collao, es necesario, además, considerar el registro lingüístico, es decir contar con traductores e intérpretes de la lengua quechua que se encuentren presentes en el momento de la entrevista o la observación participante. De esa manera se pueden absolver en el momento dudas sobre las intervenciones realizadas por el informante en lengua originaria. En el presente caso se tuvo que transcribir y traducir la información registrada en los audios, quedando algunas dudas por resolver.

El motivo que llevó a desarrollar la investigación está relacionado con la necesidad de identificar los conocimientos matemáticos implícitos que son utilizados por los pobladores de los pueblos originarios en sus actividades diarias. De la observación y análisis realizados se pudo concluir que las tejedoras emplean técnicas parecidas a las técnicas matemáticas, como por ejemplo la construcción del rectángulo en el armado de la estructura sobre la que descansa el telar.

Por lo tanto, a partir del contexto textil, se pueden diseñar procesos de aprendizaje y enseñanza pertinentes, que correspondan a la realidad del estudiante y que contribuyan a una mejor

comprensión de los saberes matemáticos que se desea que ellos aprendan. En el caso específico del presente trabajo, si se desea que los estudiantes quechuas de Educación Intercultural Bilingüe comprendan las propiedades de los paralelogramos y los rectángulos, una alternativa de contexto didáctico sería que el proceso de aprendizaje y enseñanza se realice observando y aprendiendo a construir paralelogramos o rectángulos como lo realizan las tejedoras, en tanto es una actividad que todavía es realizada por su cultura, pero que lamentablemente se está perdiendo. Para ello sería recomendable, tal como indica el Ministerio de Educación (Perú, 2016), involucrar a los sabios y sabias de las comunidades en la dinámica de la escuela.

De igual manera, si se desea que los estudiantes de educación secundaria de la Región de Puno comprendan los saberes relacionados a la circunferencia y sus rectas tangentes, sería pertinente realizarlo partiendo de la visualización del proceso de elaboración del tejido en telar andino, en donde las urdimbres y las awas trabajan con un comportamiento similar a dichos objetos matemáticos.

Se desprende del presente trabajo la necesidad de impulsar investigaciones que contribuyan a dar a conocer los saberes matemáticos que son empleados por los miembros de los diversos pueblos originarios peruanos en sus actividades cotidianas. A lo largo del proceso de recolección de información en Puno y Ucayali, observando las diversas actividades registradas por medios audiovisuales, se ha podido tener certeza de lo mucho que hay que investigar al respecto. La utilización de conocimientos matemáticos puede ser percibida no con mucha dificultad, brota de manera evidente a simple vista, únicamente observando con mayor dedicación. Pero hay saberes más profundos, complejos y difíciles de analizar. Para poder llegar a ellos es necesario el compromiso de un trabajo multidisciplinar, de educadores matemáticos, matemáticos, antropólogos, etc. Se espera que con este trabajo se logre despertar el interés en investigaciones de este tipo, y de esa manera activar el compromiso de la comunidad académica peruana.

REFERENCIAS

- Arnold, D. & Espejo, E. (2011). Hacia una terminología andina de las técnicas textiles. En: V. Solanilla (Ed.), *Actas de las V Jornadas Internacionales de Textiles Precolombinos*, pp. 435-451, Barcelona: Grup d'Estudis Precolombins, Departament d'Art i Musicologia, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Arnold, D. & Espejo, E. (2013). *El textil tridimensional: la naturaleza del tejido como objeto y como sujeto*. La Paz, Bolivia Instituto de Lengua y Cultura Aymara.
- Aroca, A. (2007). *Una Propuesta de enseñanza de Geometría desde una perspectiva cultural. Caso de estudio: Comunidad Indígena Ika – Sierra Nevada de Santa Marta*. Tesis de Maestría en Educación con énfasis en Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Artigue, M. (2018). *Construcción y uso de marcos teóricos en la investigación didáctica*. Conferencia del 1er Coloquio de doctorado en Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional Cicata Legaria. Recuperado el 01 de octubre del 2018 de <https://www.facebook.com/promecicata/videos/168580300732660/UzpfSTEwMDAwNzY2NDkxMTQ4NzoyMTE3ODY3OTY4NDc4Njgw/>
- Artin, E. (1947). Theory of braids. *Annals of Mathematics*, 2nd Ser. 48 (1), 101-126
- Bonilla, M. (2015a). Etnomatemática y geometría dinámica. Patrick, R. y Ruíz, A. (Eds.). *Educación Matemática en las Américas. Talleres y minicursos, 17*, 169-176. República Dominicana: Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM).
- Bonilla, M. (2015b). *Etnomatemática y geometría dinámica*. Póster en las XX Jornadas Científicas de la Universidad Peruana Cayetano Heredia. Recuperado el 15 de mayo del 2017 de http://www.upch.edu.pe/faedu/images/noticias/2015/sep/poster_bonilla.pdf
- Bonilla, M. (2016). Articulation of mathematical notions with quechua notions across History of Mathematics and Dynamic Geometry. En: L. Radford, F. Furinghetti & T. Hausberger (Eds.). *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 326-335. Montpellier, France: IREM de Montpellier.
- Bonilla, M. (2017). El Método etnográfico en una investigación etnomatemática en comunidades indígenas peruanas. *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*.

- Minicursos*, 144-152. Madrid, España: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
- Camalich, S. (2018). Zinacatán, México. Hanoi, Vietnam: *Trover, discover the best of everywhere*. <https://www.trover.com/d/cnfy-zinacant%C3%A1n-mexico>
- Cauty, A. (2001). Matemática y lenguajes. ¿Cómo seguir siendo amerindio y aprender la matemática de la que se tiene y se tendrá necesidad en la vida? En: A. Lizarzaburu y G. Zapata (comps), *Pluriculturalidad y aprendizaje de las matemáticas en América Latina. Experiencias y desafíos*. Madrid: Ediciones Morata S.L.
- Castela, C. (2011). *Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets / Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot. Recuperado de <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00683613>
- Castela, C. (2015). When Praxeologies move from an Institution to Another one: the Transpositive Effects. En D. Huillet, (Ed.), *Mathematics, Science and Technology Education for Empowerment and Equity*, 23rd Annual meeting of the SAARMSTE (Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education), 6-19. Maputo (Mozambique): Pedagogical University and Eduardo Mondlane University.
- Castela, C. (2016). Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del “boundary crossing”. *Educación Matemática*, 28(2), 9-29.
- Castela, C. (2017). La Teoría Antropológica de lo Didáctico: Herramientas para las ciencias de la educación. *Acta Herediana*, 59, 8-15.
- Castela, C., Elguero, C. (2013). "Praxéologie et institution, concepts clés pour l'anthropologie épistémologique et la socioépistémologie". *Recherches en Didactique des Mathématiques* 33(2), 79-130.
- Castela, C., Romo Vázquez, A. (2011). "Des mathématiques à l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 79-130.
- Chevallard Y. (1998). *La transposición didáctica*. Del saber sabio al savoir enseñado (Tercera edición). Buenos Aires: Aique Grupo Editor.
- Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

- Chevallard Y, Bosch M, Gascón J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.
- Chaachoua, H. (2011) La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas: la modélisation des connaissances des élèves. En M. Abboud-Blanchard, A. Flückiger (Eds). *Séminaire national de didactique des mathématiques*, 81-102. París, Francia.
- Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: el caso de la cultura Maya*. Tesis de Maestría. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.
- Covián, O. & Romo, A. (2014). Modelo Praxeológico Extendido una Herramienta para Analizar las Matemáticas en la Práctica: el caso de la vivienda Maya y levantamiento y trazo topográfico. *Bolema*, 28(48), 128-148.
- D'Ambrosio, U. (1993). Etnomatemática: Um programa. *Educação Matemática em Revista*, 1(1), 5-11.
- De Bock, E. & Zuidema, R. (1991). Coherencia matemática en el arte andino. En *Los Incas y el antiguo Perú. 3000 años de historia*, 454-463. España: Centro Cultural de la Villa de Madrid.
- De Sousa, B. (2010). *Descolonizar el saber, reinventar el poder*. Montevideo: Trilce.
- Desrosiers, S. (1986). Une expérience de technologie: la reconstruction d'une ceinture précolombienne à partir d'un texte codé du XVIIe siècle. *Techniques & Culture* [En ligne], 6. DOI: 10.4000/tc.936
- Desrosiers, S. (1997). Lógicas textiles y lógicas culturales en los Andes. En: T. Bouysse (Dir.), *Saberes y Memorias en los Andes*, 325-349, París: Éditions de l'IHEAL.
- Desrosiers, S. (2010). Les techniques de tissage ont-elles un sens ? Un mode de lecture des tissus andins. *Techniques & Culture*, 54-55, 1, 263-285.
- Desrosiers, S. (2013). El textil como matriz para el desarrollo de las artes plásticas en los Andes. *Revista Española de Antropología Americana*, 43(2), 477-514.
- Fuentes, C. (2014). Algunos enfoques de investigación en Etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(1), 155-170.
- García, M. (s. f.). *Tonalpohualli: Count of days*. Recuperado de https://www.mexinsta.com/media/1937269058061598326/Brij_G4Hf52.
- Gerdes, P. (2013). *Geometría y cestería de los Bora en la Amazonía Peruana*. Lima: Ministerio de Educación. Recuperado de

<http://www.historiacienciaytecnologia.com/ARCHIVOS/GCPG-2013179.pdf>

- Godino, J. & Ruiz, F. (2002). *Geometría y su Didáctica para Maestros*. Granada, España: ReproDigital.
- Guber, R. (2001). *Etnografía. Método, campo y reflexividad*. Bogotá: Ed. Norma.
- Ichiki, N. (2018). *Cortesía de Naotoshi Ichiki*.
- Knijnik G. (2003). Educación de personas adultas y etnomatemáticas. Reflexiones desde la lucha del Movimiento sin Tierra de Brasil. *Decisio* 4(1), 8-12.
- Lakatos, I. (1983). *La metodología de los programas de investigación científica*. Madrid: Alianza Universidad.
- Lefébure, C. (2010). Linguistique et technologie culturelle : L'exemple du métier à tisser vertical berbère. *Techniques & Culture* [En ligne], 54-55.
- Mamani, H. (2009). *Etnomatemática aimara*. Lima, Perú: Asamblea Nacional de Rectores.
- Malinowski, B. (1973). Introducción: objeto, método y finalidad de la investigación. En: *Los argonautas del pacífico occidental: un estudio sobre comercio y aventura entre los indígenas de los archipiélagos de la Nueva Guinea melanésica*, 19-42. Barcelona: Planeta-De Agostini.
- Matemática 4. (2016). *Cuaderno de Trabajo para el cuarto grado de Secundaria*. Lima, Perú: Editorial Santillana.
- Mendoza, S. (2010). A orillas del Huallaga. La Yupana y una nueva forma de aprender. En: D. Becerra (Dir.), *Variedades*, 103(201).
- Perú. Instituto Nacional de Estadística e Informática. (2018). *Censos Nacionales 2017: XII de Población, VII de Vivienda y III de Comunidades Indígenas*. Sistema de Consulta de Base de datos. Recuperado en <http://censos2017.inei.gob.pe/redatam/>
- Perú. Ministerio de Educación de Perú, Dirección General de Educación Básica Alternativa, Intercultural Bilingüe y de Servicios Educativos en el Ámbito Rural (2016). *Plan Nacional de Educación Intercultural Bilingüe al 2021*. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe/campanias/pdf/eib-planes/rm-629-2016-minedu-plan-nacional-eib.pdf>
- Perú. Ministerio de Educación. Oficina de Medición de la Calidad del Aprendizaje (2017). *Resultados de la Evaluación Censal de Estudiantes 2016 (ECE 2016)*. Recuperado de <http://umc.minedu.gob.pe/resultadosece2016/>

- Oliveras, M. (2006). Etnomatemáticas: de la multiculturalidad al mestizaje. En J. Goñi (coord.), *Matemáticas e interculturalidad*. España: Editores Graó.
- Oliveras, M. L. (2015). El pensamiento creativo, la crítica y la comunicación en el ICEm5. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 8(2), 4-10.
- Ogden, C. & Richards, I. (1923). *The Meaning of Meaning: A Study of the Influence of Language upon Thought and of the Science of Symbolism*. Orlando, Florida, USA: Harcourt Brace Jovanovich, Publishers.
- Organización de las Naciones Unidas (2015). *Transformar nuestro mundo: la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible*. Recuperado de http://unctad.org/meetings/es/SessionalDocuments/ares70d1_es.pdf
- Osorio, A., Aredo, M., Bonilla, M., Castro, O., Isidro, L. & Quintanilla, C. (2018). Report on Mathematics Teacher Preparation in Perú. En: Y. Yamamoto & U. Malaspina (Eds.), *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay*, 75-103. Switzerland: Springer Nature.
- Peña-Rincón, P., Tamayo-Osorio, C. & Parra, A. (2015). Una Visión Latinamericana de la Etnomatemática: Tensiones y desafíos. *RELIME*, 18(2), 137-150. México.
- Reygadas, L. (2014). Todos somos etnógrafos. Igualdad y poder en la construcción del conocimiento antropológico. En: C. Oemichen (Ed), *La Etnografía y el trabajo de campo en Ciencias Sociales*, 91-118. México: Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Investigaciones Antropológicas.
- Rivera, K. (2016). Valor a los tejidos, es valor a las personas. Guatemala: *Brujula*. <http://brujula.com.gt/valor-a-los-tejidos-es-valor-a-las-personas/>
- Rockwell, E. (2009). El sentido de la etnografía. *La experiencia etnográfica. Historia y Cultura en los procesos educativos*, 17-39. Buenos Aires: Paidós.
- Rodríguez, J. (s.f). Trenzadas. *Virtual and manipulative geometrical and topological games*. Recuperado de <https://topologia.wordpress.com/2008/10/17/trenzadas/>
- Schroeder, J. (2001). *Matemática andina*. Lima, Perú: Tarea Asociación Gráfica Educativa.
- Schroeder, J. (2005). Más allá de los platos típicos: el proyecto matemática intercultural en el Perú. *Cuadernos Interculturales* [en línea], 3.
- Solares D. (2015). Écritures numériques et calcul en plein champ. En: L. Theis (Ed.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage - Actes Espace Mathématique Francophone 2015 – GT5*, 517 – 526.

- Trigueros, M. (2018). *Interpelación entre el marco y la investigación en la Educación Matemática*. Conferencia en el 1er Coloquio de doctorado en Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional - Cicata Legaria. Recuperado el 03 de octubre del 2018 de <https://www.facebook.com/promecicata/videos/279751866081398/UzpfSTEWMDAwNzY2NDkxMTQ4NzoyMTE4NzQ3MTc1MDU3NDI2/?q=programa%20de%20matem%C3%A1tica%20educativa>
- UNESCO, (2017). *Conocimiento Indígena y Políticas Educativas en América. Análisis exploratorio de cómo las cosmovisiones y conceptos culturales indígenas de conocimiento inciden, y pueden incidir, en la política educativa en la región*. Recuperado de <http://unesdoc.unesco.org/images/0024/002477/247754S.pdf>
- Universidad Peruana Cayetano Heredia. Facultad de Educación. (2014). *Etnomatemática y Geometría Dinámica*. Recuperado de <https://www.flickr.com/photos/63485986@N02/sets/72157649003841112/with/15464648217/>
- Velasco, A (2017). En el Museo Textil de Oaxaca, tejido en telar de cintura. *NVI Noticias*. Recuperado de <https://www.nvinoticias.com/nota/68372/en-el-museo-textil-de-oaxaca-tejido-en-telar-de-cintura>
- Villavicencio, M. (2001). El aprendizaje de las matemáticas en el Proyecto Experimental de Educación Bilingüe de Puno y en el proyecto de Educación Bilingüe Intercultural del Ecuador: Reflexiones sobre la práctica y experiencias relacionadas. En: A. Lizarzaburu y G. Zapata (comps), *Pluriculturalidad y aprendizaje de las matemáticas en América Latina. Experiencias y desafíos*. Madrid: Ediciones Morata S.L.
- Villavicencio, M. (2011). Las etnomatemáticas en la educación intercultural bilingüe de Perú: avances y cuestiones a responder. *Memorias de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recuperado de <http://www.etnomatematica.org/publica/articulos/peru.pdf>
- Wheeler, J.C. (1988). Nuevas evidencias arqueozoológicas acerca de la domesticación de la alpaca y la llama y el desarrollo de la ganadería autóctona. En: J.A. Flores Ochoa (Ed), *Llamicheros y Paqocheros*, 45-57. Cusco, Perú: Editorial UNSAAC.