k–factores en nubes bicromáticas*

N. Atienza C. Cortés D. Garijo M.A. Garrido C.I. Grima
A. Márquez A. Moreno-González J.R. Portillo P. Reyes R. Robles
E. Suárez J. Valenzuela M.T. Villar †

Abstract

Consideramos una colección de puntos bicromática y nos preguntamos cuántos puntos adicionales son necesarios considerar para asegurar la existencia de un k–factor. Dos tipos de puntos adicionales serán tratados: puntos de Steiner y puntos blancos (con posición prefijada pero no así su color).

1 Introducción

Recientemente, han merecido especial atención diversos problemas relativos a la geometría de nubes de puntos bicromáticas (consúltese a este respecto el survey [6]). Particularmente, cierto esfuerzo se ha dedicado al tema de separación o agrupación en conjunto monocromáticos, llamémoslos rojos y azules (ver [3, 4]) que de alguna forma miden el grado de separación entre los dos conjuntos de puntos. Igualmente, se han tratado en diversos trabajos el tema de los emparejamientos geométricos monocromáticos (donde la palabra geométrico–que omitiremos en el resto del trabajo– hace mención a que dos puntos siempre se unen por el segmento que definen y que no se producen intersecciones entre segmentos salvo en vértices comunes y monocromático se refiere a que cada arista considerada en el emparejamiento tiene ambos extremos del mismo color), pero es sabido que existen configuraciones de puntos rojos y azules donde no es posible encontrar ningún emparejamiento completo, en particular tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.1. *[2] Sea $n = |R| + |B|$ una colección de puntos rojos y azules. Entonces se verifica:*

1. *Existe un emparejamientos monocromáticos que cubren $0.8571n$ puntos de $R \bigcup B$. Además se puede encontrar dicho emparejamiento en tiempo $O(n^2)$.*
2. *Existe una configuración $R \bigcup B$ para la cual cualquier emparejamiento monocromático cubre a lo más $0.9871n$ de los puntos de $R \bigcup B$.*

Inspirándonos en dicho resultado, tratamos de ver cuántos puntos adicionales son necesarios añadir para poder asegurar que, en todas las condiciones, se puede encontrar un emparejamiento completo. Consideraremos dos tipos de puntos adicionales:

1. Puntos de Steiner, esto es: pueden ser colocados en el lugar que consideremos más apropiado y además dotarlo del color que deseemos.
2. Puntos blancos: su situación nos viene dada como dato inicial, pero no así su color, que podemos asignarlo según sea más conveniente.

Tal y como se ha dicho anteriormente todos los emparejamientos (o k–factores cuando llegue el caso) considerados en este trabajo se entenderán que son geométricos. Igualmente, salvo que es especifique lo contrario, todos los emparejamientos serán monocromáticos.

*Parcialmente financiado por MTM2005-08441-C02-01 y FQM-164.

†Dpto. Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla, excepto M.T. Villar, dpto. Geometría y Topología, {natienza,ccortes,dgarijo,vizuete,grima,almar,auxiliadora,josera,preyes,rafarob,emsuarez,jesusv, villar}@us.es

2 Emparejamientos monocromáticos

En primer lugar consideraremos el caso de emparejamientos de nubes bicromáticas.

2.1 Emparejamientos con puntos de Steiner

Tal y como se ha dicho anteriormente, partimos de una colección de $n = |R|+|B|$ puntos azules y rojos y nos preguntamos si al añadir puntos de Steiner podemos garantizar la existencia de emparejamientos monocromáticos. En realidad, el principal resultado es una consecuencia directa del Teorema 1.1:

Corolario 2.1. *Para cualquier nube $n = |R| + |B|$ de puntos rojos y azules, con $1 - 0.8571$ puntos de Steiner siempre se puede conseguir un par de emparejamientos monocromáticos. Además, existen configuraciones que requieren al menos $1 - 0.9871$ puntos de Steiner*

Por lo tanto, el resultado anterior nos garantiza que con una cantidad lineal de puntos de Steiner siempre se puede conseguir un par de emparejamientos completos monocromáticos y que no podemos aspirar a bajar del orden lineal (aunque el hueco entre las constantes de la cota inferior y la superior merecería ser estudiada y mejorada).

2.2 Emparejamientos con puntos blancos

La variación ahora con respecto a la subsección anterior es que la posición de los puntos adicionales (a los que llamaremos blancos) está fijada en los datos iniciales y la única posibilidad es que le asignemos el color que sea más conveniente. Al igual que antes, partimos de una colección de $n = |R| + |B|$ puntos azules y rojos y nos preguntamos si al añadir puntos blancos podemos garantizar la existencia de emparejamientos monocromáticos. Así el principal resultado de esta sección nos garantiza que si tenemos un suficiente número de tales puntos blancos, siempre podemos conseguir el objetivo de un par de emparejamientos monocromáticos:

Teorema 2.2. *Para cualquier nube $n = |R|+|B|$ de puntos rojos y azules, n puntos blancos son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para conseguir un par de emparejamientos monocromáticos.*

Demostración. Para la condición necesaria utilizaremos el conocido resultado [7] de que si $|R| = |B|$, entonces siempre es posible encontrar un emparejamiento completo heterocromático.

Por lo tanto, emparejamos todos los puntos coloreados con los blancos y damos a cada punto blanco el color de su pareja.

Para ver que a veces son necesarios basta con considerar la configuración que aparece en la Figura 1, como hay menos puntos blancos que la unión de los rojos y los azules, de existir un emparejamiento completo tendrá que existir un par de puntos con color emparejados, la arista que definen dichos puntos aísla una cantidad de puntos impares del otro color de los blancos imposibilitando el emparejamiento de alguno de ellos.

□

2.3 Emparejamientos con puntos blancos y con puntos de Steiner

Por último, concluimos esta sección considerando el caso en el que combinamos puntos de las dos naturalezas anteriores y obtenemos un resultado que, de alguna forma, contiene a todos los enunciados anteriormente.

Teorema 2.3. *Para cualquier nube $n = |R| + |B|$ de puntos rojos y azules, $n - k$ puntos blancos y $1 - (0.8571)k$ puntos de Steiner son siempre suficientes para conseguir un par de emparejamientos monocromáticos.*

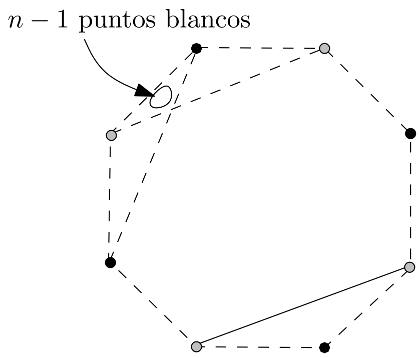

Figura 1: Si existe un emparejamiento monocromático en esta figura, debe existir una arista entre dos vértices coloreados que aisla a una cantidad impar de vértices del otro color.

Demostración. La demostración se realiza por reducción al absurdo considerando una configuración mínima (en cuanto al número de puntos) que no verifique el enunciado y llegando a una contradicción estudiando los puntos de la envolvente convexa. □

3 k–factores

Recordemos que un k–factor es un grafo regular de valencia k (por tanto un emparejamiento es un 1–factor). En esta sección nos preguntamos hasta qué punto podemos extender los resultados de la sección anterior. En primer lugar nos preguntamos sobre la existencia de 2–factores con puntos de Steiner.

Teorema 3.1. *Para cualquier nube $n = |R| + |B|$ de puntos rojos y azules $\lfloor n/2 \rfloor$ puntos de Steiner son siempre suficientes y a veces necesarios para conseguir un 2–factor.*

Demostración. Para la condición necesaria basta con considerar una colección de puntos en posición convexa alternada.

Para la condición suficiente ordenamos angularmente los puntos de la nube a partir de un punto cualquiera del plano p y construimos los dos polígonos monocromáticos (Figura 2 a)) resultantes de dicho orden y consideramos de los dos conjuntos siguientes el de menor cardinal:

1. La unión de puntos rojos en el exterior del polígono azul con los puntos azules en interior del polígono rojo.
2. La unión de puntos rojos en el interior del polígono azul con los puntos azules en exterior del polígono rojo.

Evidentemente el conjunto de menor cardinal tiene, a lo más $\lfloor n/2 \rfloor$ puntos. Suponiendo que sea la primera de las opciones la de menor cardinal, para cada punto rojo en el exterior del polígono azul situamos un punto de Steiner (representados como cuadrados en la Figura 2 b)), que utilizaremos para el ciclo azul, en la línea que une p con dicho punto y dejando al punto rojo en la posición intermedia y un punto de Steiner (que utilizaremos para el ciclo rojo) por cada punto azul en el interior del polígono rojo (de tal forma que ahora es el punto de Steiner el que queda en la posición intermedia).

□

Un par de comentarios con respecto a la demostración anterior: en primer lugar, obsérvese que al añadir puntos de Steiner para conseguir un ciclo a partir de ciertos puntos, podría ocurrir que los puntos de Steiner estuvieran muy alejados de la nube de puntos original, sin embargo hemos demostrado el siguiente resultado:

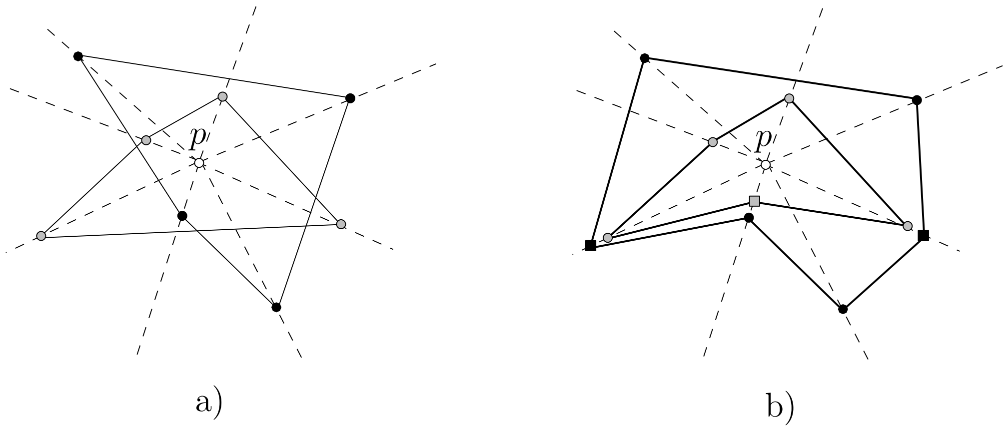

Figura 2: Los dos pasos principales de la demostración.

Teorema 3.2. *Para cualquier nube $n = |R| + |B|$ de puntos rojos y azules incluida dentro de un abierto conexo O $\lfloor n/2 \rfloor$ puntos de Steiner son siempre suficientes y a veces necesarios para conseguir un 2–factor incluido en O.*

El segundo comentario es que en el teorema anterior se ha conseguido no sólo un 2–factor, sino un par de ciclos monocromáticos, si nos formulamos la misma pregunta con respecto a puntos blancos en vez de puntos de Steiner, podemos encontrar configuraciones en las que por muchos puntos blancos que pongamos no sea posible encontrar ciclos monocromáticos tal y como muestra la figura 3. Sin embargo, si la pregunta es sobre la existencia de 2–factores, obtenemos el siguiente resultado:

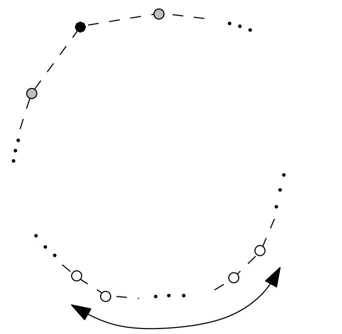

Figura 3: Cualquier ciclo que contenga al punto negro aisla a los dos puntos grises.

Teorema 3.3. *Para cualquier nube $n = |R|+|B|$ de puntos rojos y azules, $2n$ puntos blancos son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para conseguir un par de emparejamientos monocromáticos.*

Demostración. Evidentemente, si los puntos están en posición convexa y en la parte superior aparecen todos los coloreados de forma alternada y en la inferior todos los blancos, no podemos utilizar dos del mismo color para ningún ciclo. Por lo tanto, en este caso son necesarios $2n$ blancos.

Para la condición suficiente utilizamos el teorema de la subdivisión igualitaria ([1, 5, 8]) que dice que para $a \geq 1$, $b \geq 1$ y $g \geq 2$, si R es un conjunto que contiene ag puntos rojos y B contiene bg puntos azules, entonces existe una subdisión del plano en g polígonos convexos disjuntos tal que cada uno de ellos contiene exactamente a puntos rojos y b azules.

Pues si consideramos dicho teorema para $a = 1$, $b = 2$ y $g = n$ conseguimos n convexos de tal forma que en cada uno de ellos hay exactamente un punto coloreado y dos blancos que nos dan lugar a un 2–factor. $\square$

Obsérvese que en realidad se ha probado un resultado ligeramente superior, más concretamente se ha probado que para cualquier nube de n de puntos rojos, $2n$ puntos blancos son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para conseguir un emparejamiento monocromático.

Sin embargo podemos comprobar que no es posible extender el resultado anterior a 3–factores (con $3n$ puntos blancos) ya que si todos los puntos están en posición convexa podríamos dividir el plano en regiones convexas con un punto coloreado y tres blancos, pero, en este caso, los cuatro puntos estarían en posición convexa y por tanto el K_4 correspondiente no sería geométrico en el sentido de tener intersección entre dos lados disjuntos. Por lo tanto la pregunta natural sería si son posibles los k–factores pero con puntos de Steiner. A este respecto hay un resultado trivial que merece ser mencionado:

Teorema 3.4. *Para cualquier nube $n = |R|$ de puntos rojos, una cantidad lineal de puntos de Steiner son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para conseguir un k–factor para $1 \leq k \leq 5$.*

Demostración. Puesto que sabemos que para el 2–factor necesitamos una cantidad lineal de puntos de Steiner, la necesidad queda demostrada.

Naturalmente el 3–factor se podría conseguir añadiendo tres puntos de Steiner alrededor de cada punto rojo (para conseguir un K_4). Para conseguir un 4–factor se pueden añadir 7 puntos alrededor de cada punto rojo para conseguir un octoedro. Y el 5–factor añadiendo 11 puntos alrededor de cada punto para conseguir un icosaedro). No cabe preguntarse sobre 6–factores puesto que ningún grafo 6–regular es plano.

$\square$

Evidentemente en la demostración anterior se utiliza para el 3–factor $3n$ puntos de Steiner y es fácil probar que las constantes involucradas pueden ser mejoradas.

Referencias

[1] S. Bespamyatnikh, D. Kirkpatrick and J. Snoeyink, *Generalizing ham sandwich cuts to equitable subdivisions*, Discrete Comput. Geom. 24 (2000) 605–622.

[2] A. Dumitrescu and R. Kaye, *Matching colored points in the plane: Some new results*, Comput. Geom. 19 (2001) 69–85.

[3] A. Dumitrescu and J. Pach, *Partitioning colored point sets into monochormatic parts*, LNCS 2125 (2001), 264-275.

[4] F. Hurtado, M. Noy, P.A. Ramos and C. Seara, *Separating objects in the plane by wedges and strips*, Discrete Math. 109 (2001) 109-138.

[5] H. Ito, H. Uehara, and M. Yokoyama, *2-dimensional ham-sandwich theorem for partitioning into three convex pieces*, Discrete Comput. Geom. LNCS 1763 (2000) 129-157.

[6] A. Kaneko and M. Kano, *Discrete geometry on red and blue points in the plane —a survey-*. in Discrete and Computational Geometry, The Goodman-Pollack Festschrift, vol. 25 of Algorithms and Combinatorics, Springer, (2003) 551–570.

[7] L.C. Larson, *Problem-Solving Through Problems*, (Springer, New York), (1983) 200–201.

[8] T. Sakai, *Balanced Convex Partitions of Measures in R^2*, Graphs and Combinatorics 18 (1) (2002) 169-192.