Università degli Studi di Trieste

Corso di Studi in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Stabilità condizionata per equazioni paraboliche retrograde con coefficienti continui non lipsciziani

Relatore:
Chiar.mo Prof. Daniele Del Santo
Correlatore:
Chiar.mo Prof. Martino Prizzi

Laureando:
Daniele Casagrande

ANNO ACCADEMICO 2016–2017

SOMMARIO

Questa tesi fornisce un contributo allo studio del buon comportamento di un problema di Cauchy relativo agli operatori differenziali parabolici retrogradi; questo problema, come noto, non è ben posto poiché non sempre ammette soluzione. Ciononostante, nei casi in cui la soluzione esiste, si può indagare sulle condizioni che garantiscono l'unicità o la stabilità delle soluzioni.

L'interesse della comunità scientifica per queste indagini è testimoniato dai numerosi lavori disponibili in letteratura, alcuni dei quali sono richiamati nella parte introduttiva della tesi. In una delle piú recenti pubblicazioni sull'argomento, in particolare, si dimostra che la stabilità della soluzione, definita da una precisa maggiorazione, è garantita se i coefficienti della parte principale hanno regolarità Log-Lipscitz. La conferma del significato di questo risultato e la sua estensione a un caso più generale costituiscono l'oggetto principale di questa tesi.

In merito al primo punto è analizzato un controesempio al caso Log-Lipschitz; si dimostra, cioè, che esiste un operatore che gode della proprietà di unicità della soluzione e i coefficienti della parte principale del quale sono Log-Lipschitz ma per il quale non vale la summenzionata maggiorazione. L'estensione del risultato, invece, consiste nella dimostrazione che, pur di far riferimento a un opportuno spazio funzionale, la proprietà di stabilità della soluzione è garantita per tutti gli operatori i coefficienti della cui parte principale hanno la regolarità minima che garantisce l'unicità della soluzione stessa, ovvera la regolarità di tipo Osgood.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Lo studio dei cosiddetti *problemi inversi*, di cui le equazioni differenziali paraboliche retrograde sono un'istanza particolare, ha da sempre interessato la fisica matematica, le scienze applicate e l'ingegneria [18, 20]. In generale, la dicitura *inverso* fa implicito riferimento al fatto che il corrispondente problema *diretto* sia *ben posto*. Nel caso delle equazioni differenziali, una definizione di *buona positura* universalmente accetta è quella di Hadamard [13]: dato un operatore continuo $\mathcal{L}$ da un insieme X, sottoinsieme di qualche spazio di Banach, a un insieme Y, anch'esso sottoinsieme di qualche (altro) spazio di Banach, e dati $x \in X$ e $y \in Y$, l'equazione $\mathcal{L}x = y$ rappresenta un problema *ben posto* (nel senso di Hadamard) se

- per ogni $y \in Y$ c'è al massimo una soluzione $x \in X$ (unicità della soluzione);
- per ogni $y \in Y$ esiste una soluzione $x \in X$ (esistenza della soluzione);
- $\|x - x^*\|_X$ va a zero quando $\|y - y^*\|_X$ va a zero (stabilità della soluzione).

Si consideri, ad esempio, l'equazione del calore e il corrispondente problema di Cauchy, ovvero, il problema di determinare il valore della temperatura per ogni istante di tempo di un dato intervallo $[0, T]$ e per ogni punto di una regione Ω, note che siano la distribuzione della temperatura sul bordo di Ω per ogni istante di tempo t in $[0, T]$ (condizione al contorno) e la distribuzione della temperatura all'istante iniziale $t = 0$ per tutti i punti di Ω (condizione iniziale). Questo problema, come è noto, è ben posto, ovvero la soluzione esiste, è unica (fissate le condizioni al contorno e iniziale) ed è *stabile*, ovvero dipende in maniera continua dai dati, cioè dalla condizione iniziale e dalla condizione al contorno. Il problema retrogrado, invece, cioè il problema di Cauchy associato all'equazione del calore nel quale sia nota la *condizione finale* vale a dire la distribuzione del calore all'istante $t = T$ e non all'istante $t = 0$ è mal posto [18]: non è detto che la soluzione esista. Nonostante ciò, per le soluzioni del problema retrogrado che esistono, è possibile dare una condizione di stabilità che va sotto il nome di *buon comportamento*. L'interesse della comunità scientifica nei confronti di questo tipo di risultati è testimoniato dai numerosi lavori sull'argomento (si vedano, per citarne solo alcuni, [25, 15, 14, 4, 6]).

Lo scopo di questo lavoro è di dare un contributo allo studio del *buon comportamento*, nel senso che sarà specificato in seguito, di un problema di Cauchy relativo agli operatori differenziali parabolici retrogradi del second'ordine. Ci occuperemo, cioè, di capire quali ipotesi debba soddisfare l'operatore $\mathcal{L}$ e, piú in particolare, i coefficienti che lo definiscono, per garantire che le soluzioni al problema retrogrado limitate a priori siano stabili.

Consideriamo, dunque, un operatore differenziale del second'ordine $\mathcal{L}$ definito da

$$\mathcal{L}u = \partial_t u + \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}(a_{i,j}(t,x)\partial_{x_j}u) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_{x_i}u + c(t,x)u\,, \tag{1.1}$$

sulla striscia $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ e supponiamo che l'operatore sia parabolico retrogrado, ovvero che esista una costante $k_A \in (0,1)$ tale che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$k_A|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t,x)\xi_i\xi_j \le k_A^{-1}|\xi|^2\,. \tag{1.2}$$

Come già detto, per ogni ragionevole spazio funzionale nel quale sia definito l'operatore $\mathcal{L}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f\,, & \text{in } (0,T) \times \mathbb{R}^n\,, \\ u|_{t=0} = u_0\,, & \text{in } \mathbb{R}^n\,, \end{cases} \tag{1.3}$$

è mal posto. Infatti, per le caratteristiche regolarizzanti dell'operatore parabolico (progressivo), il problema (1.3) potrebbe non ammettere soluzione per qualche scelta del dato iniziale u_0. Ammesso che una soluzione esista, l'unicità di tale soluzione in un determinato spazio funzionale dipende dalla regolarità dei coefficienti $a_{i,j}$, b_i e c. Come è prevedibile – e come viene confermato da numerosi risultati disponibili in letteratura, alcuni dei quali sono richiamati nel Capitolo 3 – piú sono regolari i coefficienti e piú è grande lo spazio funzionale nel quale è garantita l'unicità.

Una caratteristica interessante di un problema ben posto è che, in molti casi, l'esistenza di un'unica soluzione a un problema di Cauchy è importante anche dal punto di vista operativo, ovvero per la ricerca della soluzione stessa con metodi computazionali. Per l'operatore parabolico retrogrado, invece, l'unicità della soluzione al problema di Cauchy è una proprietà molto debole, una caratteristica qualitativa della soluzione che non fornisce nessuna informazione computazionale. In altre parole, non è possibile stabilire una dipendenza precisa tra il numero di cifre significative con cui si conosce il dato iniziale e l'accuratezza della soluzione. Nel linguaggio dell'analisi algoritmica potremmo dire con John [19] che un problema ha un *buon comportamento* se "solo una percentuale fissa delle cifre significative deve essere persa nella determinazione della soluzione dai dati". Piú precisamente, un problema ha un buon comportamento se il numero di cifre (della norma L^2) del dato iniziale che bisogna conoscere per determinare la soluzione con una precisione di n di cifre è proporzionale a n. Nel linguaggio dell'analisi funzionale si può dire che un problema ha un buon comportamento se le sue soluzioni in uno spazio $\mathcal{H}$ hanno una dipendenza Hölder-continua dai dati appartenenti a uno spazio $\mathcal{K}$, a patto che soddisfino certe limitazioni.

Riguardo all'unicità per il problema (1.3), un primo risultato è dovuto a Lions e Malgrange [21]. Essi hanno dimostrato che l'operatore $\mathcal{L}$ gode della proprietà di unicità della soluzione se i coefficienti $a_{i,j}$ sono *sufficientemente regolari* rispetto a x e *lipsciziani* rispetto a t. In seguito, Agmon e Nirenberg [1] hanno dimostrato che, nelle stesse ipotesi di Lions e Malgrange, ovvero quando i coefficienti $a_{i,j}$ sono *sufficientemente regolari* rispetto a x e lipsciziani rispetto a t, il problema ha un buon comportamento in un certo spazio $\mathcal{E}$ (si veda il Capitolo 3). Nello stesso anno, Glagoleva [12] ha ottenuto un risultato analogo per un operatore con coefficienti *indipendenti dal tempo.* Qualche anno dopo, Hurd [17], estese la tecnica di Glagoleva al caso di coefficienti *lipsciziani rispetto a t.* In questi risultati la lipscizianità dei coefficienti gioca un ruolo fondamentale.

Piú di recente, Del Santo e Prizzi [9] hanno dimostrato che affinché l'operatore $\mathcal{L}$ goda della proprietà di unicità della soluzione non è necessario che i coefficienti $a_{i,j}$ siano lipsciziani ma è sufficiente che la loro regolarità sia governata da un modulo di continuità che soddisfa la condizione di Osgood (si veda il Capitolo 2). Sarebbe, perciò, logico congetturare che anche il buon comportamento, in $\mathcal{E}$, del problema di Cauchy retrogrado fosse garantito nel caso di coefficienti che godono della regolarità *alla Osgood.* Tuttavia gli stessi Del Santo e Prizzi hanno dimostrato, in un lavoro successivo [10], che non è cosí. In particolare se la regolarità dei coefficienti $a_{i,j}$ è associata a un modulo di continuità *Log-Lipschitz*, che, comunque, soddisfa la condizione di Osgood, (si veda il Capitolo 2) non si può concludere una dipendenza *lineare* tra il numero di cifre note del dato iniziale e il numero di cifre note della soluzione ma soltanto una dipendenza *polinomiale* del primo rispetto al secondo. In altre parole, per conoscere la soluzione con una precisione di n cifre, bisogna conoscere il dato iniziale con una precisione di $m(n)$ cifre dove $m(n)$ è un polinomio in n.

Il lavoro descritto qui di seguito è una generalizzazione dei risultati di Del Santo e Prizzi. Anziché ipotizzare, per i coefficienti della parte principale dell'operatore $\mathcal{L}$, una regolarità di tipo Log-Lipschitz, è stata presa in considerazione la regolarità minima che garantisce l'unicità di una soluzione al problema di Cauchy, ovvero la regolarità governata da un modulo di continuità di tipo Osgood. In queste ipotesi, e nell'ipotesi semplificativa che i coefficienti dipendano solo da t (e non da x), si sono ottenuti due risultati.

Il primo risultato riguarda la costruzione di un controesempio per i risultati ricavati da Del Santo e Prizzi [10]; si è dimostrato che esistono degli operatori i coefficienti della parte principale dei quali non godono della regolarità Log-Lipschitz (ma sono comunque Osgood-regolari) e per i quali non si può controllare la norma delle soluzioni con la norma dei dati iniziali secondo la regola stabilita in [10]; per la costruzione di questo controesempio si è seguita la metodologia introdotta da Pliś [26].

Il secondo risultato è la prova del fatto che è possibile la stabilità della soluzione anche per gli operatori i cui coefficienti della parte principale hanno regolarità "solamente" di tipo Osgood, come precisa l'enunciato del seguente teorema che dimostreremo nel Capitolo 4.

Teorema 1.1 *Si consideri un operatore $\mathcal{L}$ definito come in (1.1) e tale che i coefficienti $a_{i,j}$, b_i e c dipendono solo da t e, inoltre,*

- *per ogni $i, i = 1, \dots, n$ e per ogni $t \in [0,T]$, $a_{i,j}(t) = a_{j,i}(t)$ e $a_{i,j} \in \mathscr{C}^\omega([0,T])$, dove ω è un modulo di continuità che verifica la condizione di Osgood; $b_i \in L^\infty([0,T])$ e $c \in L^\infty([0,T])$,*

- *vale la (1.2) ed esistono k_B e k_C tali che, per ogni $t \in [0,T]$, $|b_i(t)| < k_B$, per ogni $i = 1, \dots, n$, e $|c(t)| < k_C$.*

Se $u \in \mathcal{E}$, con

$$\mathcal{E} = \mathscr{C}^0([0,T], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap \mathscr{C}^0([0,T), H^1(\mathbb{R}^n)) \cap \mathscr{C}^1([0,T), L^2(\mathbb{R}^n)),$$

è soluzione dell'equazione $\mathcal{L}u = 0$*, allora esistono* σ*,* C *e* $\widehat{C}$*, dipendenti da* k_A*, da* k_B*, da* k_C*, da* ω*, da* T *e da* n*, ed esiste* $\bar{\sigma} < \sigma$ *tali che, se*[1] $\|u(0,\cdot)\|^2_{H^0_{\nu,\epsilon}} < 1/(k_A\widehat{C})$ *per qualche* $\nu > 0$ *e per qualche* $\epsilon > 1$ *allora*

$$sup_{z\in[0,\bar{\sigma}]}\|u(z,\cdot)\|_{H^1} \leq Ce^{-\sigma g\left(\|u(0,\cdot)\|_{H^0_{\nu,\epsilon}}\right)}\left[1 + \|u(\sigma,\cdot)\|_{H^1}\right] .$$

dove $g : [0, 1/k_A] \to [0, +\infty]$ *è una funzione strettamente decrescente e tale che* $\lim_{y\to 0} g(y) = +\infty$*.* □

La dimostrazione si basa su stime alla Carleman [5, 16] della norma della soluzione.

Nel prossimo capitolo si richiamano alcuni concetti e risultati accessori, utili nell'ottenimento dei risultati principali. Nel Capitolo 3 si fa una panoramica storica sui principali lavori disponibili in letteratura. Il Capitolo 4 si occupa dettagliatamente dei due punti sopra citati, mentre il capitolo conclusivo riassume i risultati e traccia le linee per possibili estensioni future.

[1] $H^0_{\nu,\epsilon}$ è uno spazio di Gevrey-Sobolev (si veda il Capitolo 2).

Capitolo 2

Definizioni preliminari

2.1 Modulo di continuità e condizione di Osgood

In questa sezione è definito il modulo di continuità e ne sono richiamate alcune proprietà.

Definizione 2.1 *Si definisce* modulo di continuità *una funzione* $\omega : [0,1] \to [0,1]$ *che ha le seguenti proprietà: è continua, concava e crescente e* $\omega(0) = 0$*.*

Proprietà 2.2 *Essendo il modulo di continuità una funzione concava e crescente, la funzione* $\omega(s)/s$ *è decrescente e, per ogni* $s \in (0,1]$ *si ha*

$$\frac{\omega(s)}{s} > \lim_{t \to 1^-} \frac{\omega(t)}{t} = c \in (0, +\infty) \,.$$

Un modulo di continuità cosí definito può essere utilizzato per definire il seguente concetto di regolarità.

Definizione 2.3 *Si dice che una funzione* $f : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$ *ha regolarità* ω*, e si indica con* $f \in \mathscr{C}^\omega$ *se*

$$\sup_{0<|t-s|<1} \frac{|f(t) - f(s)|}{\omega(|t-s|)} < +\infty \,.$$

Nel seguito faremo riferimento a moduli di continuità che soddisfano le seguenti due condizioni.

Definizione 2.4 *Per un modulo di continuità* ω *la* condizione di Osgood *è definita da*

$$\int_0^1 \frac{1}{\omega(s)} ds = +\infty \,. \tag{2.1}$$

Definizione 2.5 *Sia ω un modulo di continuità che verifica la condizione di Osgood. Diremo che ω è* olderiano di qualunque ordine *se*

$$\mathscr{C}^{\omega} \subset \bigcap_{\alpha<1} \mathscr{C}^{0,\alpha} . \tag{2.2}$$

La condizione (2.2) equivale all'esistenza di due costanti $\hat{c}$, $\hat{\hat{c}}$ tali che

$$\hat{c}s \leq \omega(s) \leq \hat{\hat{c}}s^{\delta} , \tag{2.3}$$

per ogni $\delta \in (0, 1)$.

2.1.1 Regolarità Log-Lipschitz

Una funzione il cui modulo di continuità è del tipo

$$\omega(s) = s(1 + |\log s|)$$

è detta *Log-Lipschitz continua*.

2.2 Gli spazi di Sobolev

Dati due interi k e p lo *spazio di Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ delle funzioni definite su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è definito da

$$W^{k,p} = \{u \in L^p(\Omega) \,:\, \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| < k, \qquad \exists\, D^{\alpha}u \text{ in senso debole e } D^{\alpha}u \in L^q(\Omega)\} .$$

Se $f \in W^{k,p}(\Omega)$, si definisce la norma

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} \triangleq \sum_{|\alpha|<k} \|D^{\alpha} f\|_{L^p(\Omega)} .$$

Gli spazi di Sobolev per i quali $p = 2$ sono degli spazi di Hilbert e per essi si usa la notazione $H^k = W^{k,2}$. La norma $\|u\|_{H^k}$ può essere definita sulla base della trasformata di Fourier. In particolare si può dimostrare che

$$\|u\|^2_{H^k} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\,, \tag{2.4}$$

dove $\hat{u}$ è la trasformata di Fourier di u. Si noti che l'equazione (2.4) permette l'estensione del concetto di spazio di Sobolev anche al caso in cui k non abbia un valore intero. In particolare, per ogni $d \in \mathbb{R}$ si può definire lo spazio $H^d(\Omega)$ delle funzioni per le quali

$$\|u\|^2_{H^d} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^d |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty\,. \tag{2.5}$$

2.3 Gli spazi di Gevrey-Sobolev

Un'estensione degli spazi di Sobolev è costituita dagli spazi di Gevrey-Sobolev. Dati $a > 0$, $d \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 1$, lo spazio di Gevrey-Sobolev $H^d_{a,\epsilon}$ è lo spazio delle funzioni per le quali

$$\|u\|^2_{H^d_{a,\epsilon}} \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^d e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\epsilon}}} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \,. \tag{2.6}$$

2.4 Gli spazi di Osgood-Gevrey-Sobolev

Se nella (2.6) si sostituisce al termine $2|\xi|^{1/\epsilon}$ la funzione

$$|\xi|^2 \omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right) ,$$

dove ω è un modulo di continuità che verifica la condizione di Osgood, si ottiene una nuova classe di spazi che definiamo, in questa tesi, spazi di *Osgood-Gevrey-Sobolev*. In particolare, dati $a \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ e un modulo di continuità ω (di tipo Osgood), si ha

$$\|u\|^2_{H^d_{a,\omega}} \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^d e^{a|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \,. \tag{2.7}$$

A questi spazi faremo riferimento nel Capitolo 4.

2.5 Relazioni tra gli spazi

Siccome per ogni $a > 0$, per ogni $\epsilon > 1$ e per ogni $r, d \in \mathbb{R}$

$$e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\epsilon}}} > 1 \,, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

ed esiste $C > 0$ tale che

$$(1+|\xi|^2)^{r-d} e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\epsilon}}} \leq C \,,$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, si ottiene facilmente che

$$u \in H^d_{a,\epsilon}(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; u \in H^r(\mathbb{R}^n) \tag{2.8}$$

ed esiste C' tale che

$$\|u\|_{H^r} \leq C' \|u\|_{H^d_{a,\epsilon}} \,. \tag{2.9}$$

Vale, poi la seguente proprietà: per ogni $\eta > 0$, per ogni $\nu > 0$, per ogni $\epsilon > 1$ e per ogni modulo di continuità ω che verifica la condizione di Osgood e che sia olderiano, esiste $M > 0$ tale che, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ tale che $|\xi| > M$, si ha

$$\eta|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right) \leq \nu|\xi|^{\frac{1}{\epsilon}} \,,$$

Di conseguenza, per ogni $d \in \mathbb{R}$,

$$u \in H^d_{\nu,\epsilon}(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow \ u \in H^d_{\eta,\omega}(\mathbb{R}^n) \tag{2.10}$$

ed esiste C tale che

$$\|u\|_{H^d_{\eta,\omega}} \leq C\|u\|_{H^d_{\nu,\epsilon}} \,. \tag{2.11}$$

Infine, poiché per ogni $a > 0$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ e per ogni modulo di continuità ω che verifica la condizione di Osgood si ha

$$e^{a|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)} > 1 \,,$$

si ottiene facilmente che, per ogni $d \in \mathbb{R}$,

$$u \in H^d_{a,\omega}(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow \ u \in H^d(\mathbb{R}^n) \qquad \text{e} \qquad \|u\|_{H^d} \leq \|u\|_{H^d_{a,\omega}} \,. \tag{2.12}$$

Capitolo 3

Alcuni risultati noti

Come anticipato nell'Introduzione, a causa del carattere regolarizzante dell'operatore parabolico (progressivo) l'esistenza di una soluzione al problema (1.3) non sempre è garantita. Di conseguenza, la questione trattata in questo lavoro, ovvero l'unicità della soluzione – o, meglio, la sua stabilità rispetto a variazioni del dato iniziale – riguarda, dunque, solo i casi in cui il problema ammette una soluzione. La domanda fondamentale, a cui daremo una risposta dettagliata nel prossimo capitolo, può essere posta nei seguenti termini: considerando un operatore parabolico retrogrado, definito come in (1.1), che ammette soluzione per ogni dato iniziale appartenente a un certo insieme, è possibile stimare la norma della soluzione con una funzione della norma del dato iniziale in modo che la stima tenda a zero con il dato inziale? La risposta, come ci si può aspettare, dipende dalla regolarità dei coefficienti dell'operatore $\mathcal{L}$. A tal proposito è interessante notare che molti risultati disponibili in letteratura riguardano non già l'unicità della soluzione ma il concetto piú ristretto di *stabilità* rispetto al dato iniziale. In questo capitolo si descrivono brevemente i alcuni risultati esistenti in letteratura, sia sull'unicità che sulla stabilità, in riferimento a diversi "livelli di regolarità" dei coefficienti.

3.1 Unicità

In questa prima parte sono riportati alcuni risultati riguardanti l'unicità della soluzione al problema (1.3) per diverse condizioni di regolarità dei coefficienti della parte principale dell'operatore $\mathcal{L}$. Tutti i risultati presentati fanno riferimento allo spazio

$$\mathcal{H}_0 \triangleq \mathscr{C}^1([0,T], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2([0,T], H^2(\mathbb{R}^n))\,. \tag{3.1}$$

3.1.1 Unicità con coefficienti lipsciziani in t e in x

Il seguente risultato è dovuto a Lions e Malgrange [21]. Siano dati due spazi di Hilbert V e H con $V \subset H$ e tali che l'iniezione di V in H è continua e V è denso in H. Siano $\langle\langle u, v\rangle\rangle$ il prodotto scalare di due elementi u e v in V, $\|u\| = \langle\langle u, u\rangle\rangle^{1/2}$ la norma di $u \in V$, $\langle f, g\rangle$ il prodotto scalare di due elementi f e g di H e $|f| = \langle f, f\rangle^{1/2}$ la norma di $f \in H$. Per ogni $t \in [0, T]$ sia data una forma sesquilineare $a : V \times V \to \mathbb{R}$, definita da

$$a : (u, v) \to a(t; u, v)\,,$$

continua su $V \times V$. Sia $A(t)$ l'operatore definito da

$$a(t; u, v) = \langle A(t)u, v\rangle \tag{3.2}$$

e sia $D[A(t)]$ il dominio di $A(t)$.

Ipotesi 3.1 *La forma $a(t; u, v)$ può essere scritta come $a_0(t; u, v)+a_1(t; u, v)$ dove a_0 e a_1 sono forme sesquilineari continue con le seguenti proprietà:*

1. *per ogni $u \in V$ e per ogni $v \in V$ l'applicazione che manda t in $a_k(t; u, v)$ ($k = 0$ oppure $k = 1$) è una funzione di classe $\mathscr{C}^1$ (in t);*
2. *per ogni $t \in [0, T]$, per ogni $u \in V$ e per ogni $v \in V$, $a_0(t; u, v)$ è reale ed esistono λ e $\alpha > 0$ tali che, per ogni $v \in V$,*

$$a_0(t; u, v) + \lambda|v|^2 \geq \alpha\|v\|^2\,;$$

3. *esiste una costante C tale che per ogni $u \in V$ e per ogni $v \in V$,*

$$|a_1(t; u, v)| \leq C\|u\||v|\,.$$

Teorema 3.2 *Se l'ipotesi 3.1 è verificata, una funzione u tale che:*

- $u \in L^2([0, T], V)$, $u' \in L^2([0, T], H)$,
- $u(t) \in D[A(t)]$ *per quasi tutti i* $t \in (0, T)$,
- $A(t)u(t) + u'(t) = 0$,
- $u(T) = 0$,

è identicamente nulla. □

L'applicazione di questo teorema generale al caso del problema 1.3 fornisce il seguente risultato.

Teorema 3.3 *Se i coefficienti della parte principale di $\mathcal{L}$, ovvero i coefficienti $a_{i,j}$, sono lipsciziani in t e in x, se $u \in \mathcal{H}_0$ e se $u_0 = 0$, allora $\mathcal{L}u = 0$ implica $u \equiv 0$.* □

3.1.2 Unicità con coefficienti Osgood-regolari rispetto a t e $\mathscr{C}_b^2$ rispetto a x

In un articolo del 2005, Del Santo e Prizzi [9] rilassano le condizioni sulla regolarità, rispetto al tempo, dei coefficienti della parte principale dell'operatore $\mathcal{L}$ ottenendo un risultato di unicità della soluzione nel caso in cui i coefficienti siano solamente Osgood-regolari rispetto a t. Tuttavia la condizione sulla regolarità rispetto a x è piú stretta, richiedendo che i coefficienti della parte principale siano di classe $\mathscr{C}^2$. Si consideri l'operatore parabolico $\mathcal{L}$ definito da:

$$\mathcal{L}u = \partial_t u + \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}(a_{i,j}(t,x)\partial_{x_j} u) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_{x_i} u + c(t,x)u\,, \tag{3.3}$$

dove tutti i coefficienti sono definiti in $[0,T] \times \mathbb{R}^n$, misurabili e limitati, i coefficienti b_i, per $i = 1,\ldots,n$, e c sono a valori complessi, la matrice $(a_{i,j}(t,x))_{i,j}$ e reale e simmetrica per ogni $t \in [0,T]$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Si supponga che esista $\lambda_0 \in (0,1]$ tale che, per ogni $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \lambda_0|\xi|^2\,.$$

Nel risultato seguente si fa riferimento allo spazio delle funzioni definite su (un sottoinsieme di) $\mathbb{R}^n$ continue e limitate, denotato con $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^n)$, allo spazio delle funzioni definite su (un sottoinsieme di) $\mathbb{R}^n$ due volte derivabili, limitate e con derivata limitata, denotato con $\mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}^n)$ e allo spazio $\mathcal{H}_1$ definito da

$$\mathcal{H}_1 \triangleq H^1([0,T], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2([0,T]H^2(\mathbb{R}^n))\,.$$

Teorema 3.4 [9] *Sia μ un modulo di continuità che soddisfa la condizione di Osgood. Se per ogni $i = 1,\ldots,n$ e per ogni $j = 1,\ldots,n$*

$$a_{i,j} \in \mathscr{C}^\mu([0,T], \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^n)) \cap \mathscr{C}([0,T], \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}^n))\,,$$

allora l'operatore $\mathcal{L}$ definito in (3.3) gode della proprietà di $\mathcal{H}_1$-unicità ovvero della proprietà che se $u \in \mathcal{H}_1$, se $\mathcal{L}u = 0$ su $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ e se $u(0,x) = 0$ su $\mathbb{R}^n$, allora $u \equiv 0$ su $[0,T] \times \mathbb{R}^n$. $\square$

3.1.3 Unicità con coefficienti Osgood-regolari rispetto a t e lipsciziani rispetto a x

In un lavoro piú recente [11], Del Santo e Prizzi hanno migliorato il risultato di unicità descritto nella sezione precedente, mostrando che un risultato simile può essere ottenuto anche nel caso in cui i coefficienti della parte principale non siano di classe $\mathscr{C}^2$ rispetto a x ma soltanto lipsciziani.

Teorema 3.5 [11] *Si consideri l'operatore*

$$\mathcal{L} = \partial_t + \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}(a_{i,j}(t,x)\partial_{x_j} u) + c(t,x)u\,, \tag{3.4}$$

dove tutti i coefficienti sono definiti in $[0,T] \times \mathbb{R}^n$*, misurabili e limitati,* c *è a valori complessi, la matrice* $(a_{i,j}(t,x))_{i,j}$ *e reale e simmetrica per ogni* $t \in [0,T]$ *e per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$*. Si supponga che esista* $\lambda_0 \in (0,1)$ *tale che, per ogni* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ *e per ogni* $\xi \in \mathbb{R}^n$*,*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \lambda_0|\xi|^2\,.$$

Sia $\mathcal{H}$ *lo spazio di funzioni definito da*

$$\mathcal{H} \triangleq H^1([0,T], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2([0,T], H^2(\mathbb{R}^n))\,. \tag{3.5}$$

Sia μ *un modulo di continuità che soddisfa la condizione di Osgood. Se per ogni* $i = 1,\ldots,n$ *e per ogni* $j = 1,\ldots,n$

$$a_{i,j} \in \mathscr{C}^{\mu}([0,T], L^{\infty}(\mathbb{R}^n)) \cap L^{\infty}([0,T], Lip(\mathbb{R}^n))\,,$$

allora l'operatore $\mathcal{L}$*, definito in (3.4), gode della proprietà di* $\mathcal{H}$*-unicità (dove* $\mathcal{H}$ *è definito in (3.5)) ovvero della proprietà che se* $u \in \mathcal{H}$*, se* $\mathcal{L}u = 0$ *su* $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ *e se* $u(0,x) = 0$ *su* $\mathbb{R}^n$*, allora* $u \equiv 0$ *su* $[0,T] \times \mathbb{R}^n$*.* $\square$

Per dimostrare il risultato, gli autori utilizzano la teoria di Littlewood e Paley (si veda, per esempio, [22, 23, 24, 27]) e il *paraprodotto* di Bony [3, 2].

3.1.4 Unicità con coefficienti Osgood-regolari rispetto a t e rispetto a x

Il risultato del paragrafo precedente è stato poi ulteriormente affinato in una pubblicazione successiva, dove l'unicità è stata dimostrata nel caso di coefficienti Osgood regolari sia rispetto a t che rispetto a x.

Teorema 3.6 [7] *Si considerino due moduli di continuità* μ *e* ω *tali che* $\omega(s) = \sqrt{\mu(s^2)}$*. Si supponga che* μ *soddisfi la condizione di Osgood, che esista una costante* $C_1 > 0$ *tale che*

$$\int_0^h \frac{\omega(t)}{t}dt \leq C_1\omega(h)\,,$$

che esista una costante $C_2 > 0$ tale che, per ogni p e q tali che $1 \leq p \leq q-1$,

$$\frac{\omega(2^{-q})}{\omega(2^{-p})} \leq C_2\omega(2^{p-q}),$$

che per ogni $s \in (0,1)$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{(1-s)k}\omega(2^{-k}) < +\infty$$

e che per ogni $j,k = 1,\dots,n$,

$$a_{j,k} \in \mathcal{C}^{\mu}([0,T], L^{\infty}(\mathbb{R}^n)) \cap L^{\infty}([0,T], \mathcal{C}^{\omega}(\mathbb{R}^n)).$$

Allora l'operatore $\mathcal{L}$, definito come in (3.4), gode della proprietà di $\mathcal{H}$-unicità, dove $\mathcal{H}$ è definito in (3.5). $\square$

Anche in questo case gli autori utilizzano la teoria di Littlewood e Paley e il paraprodotto di Bony.

3.2 Stabilità

Nella sezione precedente sono stati illustrati alcuni risultati di unicità, ovvero dimostrazioni del fatto che, sotto certe ipotesi, due soluzioni di (3.3) (o di (3.4)) che coincidono nell'istante iniziale sono coincidenti su tutto l'intervallo $[0,T]$. Questa sezione è riporta alcuni risultati dedicati allo studio della stabilità della soluzione rispetto ai dati iniziali. Questo è un concetto più stretto (un operatore che gode della proprietà di stabilità gode anche dell'unicità della soluzione) ed è una nozione che può essere utilizzata per studiare il buon comportamento del problema (1.3).

3.2.1 Stabilità con coefficienti indipendenti da t

Un primo risultato sul buon comportamento del problema (1.3) è dovuto a Glagoleva. Nella sua nota del 1963 [12], ella considera l'equazione parabolica

$$\partial_t u = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}\left[a_{i,j}(x_1,\dots,x_n)\partial_{x_j} u\right] + c(x_1,\dots,x_n)u + f(t,x_1,\dots,x_n), \tag{3.6}$$

ovvero un'equazione i coefficienti della parte principale della quale non dipendono dal tempo, definita su un cilindro $R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ avente i generatori paralleli all'asse del tempo. Il problema specifico è completato dalle condizioni

$$u|_{t=0} = \phi(x_1, \dots, x_n)\,, \qquad u|_{\Gamma} = \psi(t, x_1, \dots, x_n)\,,$$

dove Γ è la superficie laterale di R. Per questo problema, Glagoleva ottiene due risultati: una stima della norma L^2 nel caso di coefficienti solamente misurabili e una stima della norma $\mathscr{C}$ nel caso in cui i coefficienti siano di classe $\mathscr{C}^1$. Entrambi i risultati sono ottenuti nelle ipotesi aggiuntive che la frontiera del dominio della funzione ristretto alla base di R – detto D – sia liscia, che $a_{j,i} = a_{i,j}$ per ogni i e per ogni j e che esistano delle costanti λ_1, λ_2 e K tali che, per ogni $x \in R$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \le \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\,, \qquad -K < c(x) \le 0\,.$$

Teorema 3.7 *Siano u_1 e u_2 due soluzioni di (3.6) in R che coincidono su Γ e tali che $\|u_1(0,\cdot) - u_2(0,\cdot)\|_{L^2} < \Delta$ e $\|u_1(-T,\cdot) - u_2(-T,\cdot)\|_{L^2} < M$ per qualche costante Δ e M. Allora se Δ è sufficientemente piccolo, per ogni $t \in (-T/40, 0)$ si ha*

$$\|u_1(t,\cdot) - u_2(t,\cdot)\|_{L^2} < \frac{Q}{\sqrt{T}} \Delta^{a/\log\left(\frac{T}{10}\right)}\,,$$

dove $a < 0$ è una costante assoluta e Q è una costante dipendente da M, K, λ_1, λ_2 e dal diametro di D.

Teorema 3.8 *Siano i coefficienti $a_{i,j}$ derivabili con continuità e siano le loro derivate limitate da una costante K. Se u_1 e u_2 sono due soluzioni di (3.6) in R che coincidono su Γ e tali che $|u_1(0,\cdot) - u_2(0,\cdot)| < \Delta$ e $|u_1(-T,\cdot) - u_2(-T,\cdot)| < M$ per qualche costante Δ e M. Allora se Δ è sufficientemente piccolo, per ogni $t \in [-T/40, 0)$ si ha*

$$|u_1(t,\cdot) - u_2(t,\cdot)| < \frac{Q_1}{T^{(n+1)/2}} \Delta^{a/\log\left(\frac{T}{10}\right)}\,,$$

dove $a < 0$ è una costante assoluta e Q_1 è una costante dipendente da M, K, λ_1, λ_2 e dal diametro di D.

3.2.2 Stabilità con coefficienti lipsciziani rispetto a t

Un altro risultato sulla dipendenza continua dai dati iniziali è stato dimostrato da Hurd [17] nell'impianto teorico di Lions e Malgrange. Egli considera due spazi di Hilbert complessi, V e H, con $V \subset H$, e definisce, per ogni $t \in [0, -T]$ una forma $a(t, u, v)$ sesquilineare (lineare in u e lineare-coniugata in v) in $V \times V$ che gode delle seguenti proprietà.

Ipotesi 3.9 *È sempre possibile scrivere a come*

$$a(t, u, v) = a_0(t, u, v) + a_1(t, u, v)\,,$$

dove a_0 e a_1 sono forme sesquilineari continue per ogni $t \in [0, -T]$ e per le quali valgono le seguenti proprietà:

- *per ogni $u \in V$, per ogni $v \in V$ e per ogni $t \in [0, -T]$, $a_0(t; u, v)$ è reale ed esistono C_1, λ e α tali che*

$$a_0(t; u, u) \leq C_1\|u\|^2\,, \qquad a_0(t; u, u) + \lambda|u|^2 \geq \alpha\|u\|^2\,;$$

- *per ogni $u \in V$, la mappa $t \to a_0(t; u, u)$ è derivabile per ogni $t \in [0, -T]$ ed esiste C_2 tale che la sua derivata $a_0'(t; u, u)$ soddisfa (per ogni $u \in V$ e per ogni $t \in [0, -T]$)*

$$|a_0'(t; u, u)| \leq C_2\|u\|^2\,;$$

- *esiste C_3 tale che, per ogni $u \in V$, per ogni $v \in V$ e per ogni $t \in [0, -T]$, $|\Re\{a_1(t; u, v)\}| \leq C_3\|u\||v|$.*

Come Lions e Malgrange, Hurd associa ad $a(t, u, v)$ un operatore illimitato $A(t)$ il cui dominio, $D[A(t)] \subset V$, è l'insieme di tutti gli $u \in V$ tali che la mappa che a v associa $a(t, u, v)$ sia continua in V nella topologia indotta da H. In questo modo è sempre possibile trovare un elemento $A(t)u$ di H tale che

$$a(t, u, v) = \langle A(t)u, v\rangle\,,$$

per ogni $v \in H$ e per ogni $t \in [0, -T]$. Per avere un risultato piú generale, Hurd introduce una famiglia di operatori hermitiani limitati $B(t)$ da H in H e, definito $b(t; u, v) = \langle B(t)u, v\rangle$ fa, per B, le seguenti ipotesi.

Ipotesi 3.10 *L'operatore B gode delle seguenti proprietà:*

- *esiste C_4 tale che, per ogni $u \in H$ e per ogni $t \in [0, -T]$, $|b(t; u, u)| \leq C_4|u|^2$;*

- *esiste* $\gamma > 0$ *tale che, per ogni* $u \in H$ *e per ogni* $t \in [0, -T]$, $b(t; u, u) \geq \gamma |u|^2$*;*
- *per ogni* $u \in V$ *la mappa* $t \to b(t; u, u)$ *è derivabile per ogni* $t \in [0, -T]$ *ed esiste* C_5 *tale che la sua derivata,* $b'(t; u, u)$ *soddisfa (per ogni* $u \in V$ *e per ogni* $t \in [0, -T]$*)*

$$|b'(t; u, u)| \leq C_5 |u|^2 .$$

Teorema 3.11 *Si consideri l'equazione*

$$B(t)\partial_t u + A(t)u = 0 ,$$

dove gli operatori A *e* B *soddisfano le ipotesi 3.9 e 3.10. Esiste* $\tau \in (0, \min\{1, T\})$*, dipendente solo dalle costanti che compaiono nelle ipotesi 3.9 e 3.10, tale che se* u_1 *e* u_2 *sono soluzioni di (3.11) definite in* $[0, -\tau]$ *e* $|u_1(0, \cdot) - u_2(0, \cdot)| < \tau/6$*, allora, per ogni* $t \in (-\tau/10, 0)$ *si ha*

$$|u_1(t, \cdot) - u_2(t, \cdot)| \leq \frac{K}{\sqrt{\tau}} |u_1(0, \cdot) - u_2(0, \cdot)|^{\delta} ,$$

dove $K > 0$ *è una costante che dipende da* $|u_1(-\tau, \cdot) - u_2(-\tau, \cdot)|$ *e dalle costanti che compaiono nelle ipotesi 3.9 e 3.10 e* δ *è una costante che dipende solo da queste ultime.* □

3.2.3 Stabilità con coefficienti log-lipsciziani rispetto a t e $\mathscr{C}_b^2$ rispetto a x

In un recente lavoro [10], Del Santo e Prizzi hanno dimostrato che un risultato di stabilità può essere ottenuto anche rilassando le condizioni di regolarità sui coefficienti della parte principale e, in particolare, richiedendo soltanto la log-lipscizianità. Si consideri l'equazione parabolica retrograda

$$\partial_t u + \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}(a_{i,j}(t, x)\partial_{x_j} u) + \sum_{j=1}^{n} b_j(t, x)\partial_{x_j} u + c(t, x)u = 0 \tag{3.7}$$

sulla striscia $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ e si supponga che

- per ogni $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ e per ogni $i, j = 1, \dots, n$, $a_{i,j}(t, x) = a_{j,i}(t, x)$;
- esiste $k > 0$ tale che, per ogni $(t, x, \xi) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$k|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t, x)\xi_i \xi_j \leq k^{-1}|\xi|^2 ; \tag{3.8}$$

- per ogni $i, j = 1, \ldots, n$

$$a_{i,j} \in \mathrm{LogLip}([0.T], L^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty([0,T], \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}^n))$$

e $b_j, c \in L^\infty([0,T], \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}^n))$.

Sia, infine,

$$\mathcal{E} = \mathscr{C}^0([0,T], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap \mathscr{C}^0([0,T), H^1(\mathbb{R}^n)) \cap \mathscr{C}^1([0,T), L^2(\mathbb{R}^n))\,.$$

Teorema 3.12 *Esiste $\sigma \in (0,T)$ e per ogni $\bar\sigma \in (0, \sigma/4)$ esistono ρ, $\bar M$, N e $\delta > 0$ tali che, se $u \in \mathcal{E}$ è una soluzione di (3.7) con $\|u(0,\cdot)\|_{L^2} \le \rho$, allora*

$$\sup_{t\in[0,\bar\sigma]} \|u(t,\cdot)\|_{L^2} \le \bar M (1 + \|u(\sigma,\cdot)\|_{L^2}) e^{-N(\log \|u(0,\cdot)\|_{L^2})^\delta}\,, \tag{3.9}$$

dove σ dipende solo da T e dai coefficienti $a_{i,j}$, b_i e c.

Il risultato (3.9) fornisce una maggiorazione su un sottointervallo $[0,\bar\sigma] \subset [0,T]$ ma non dà nessuna stima sulla grandezza di questo sottointervallo. Tuttavia, Del Santo e Prizzi hanno dimostrato che, iterando un numero finito di volte il Teorema 3.12, si può ottenere una stima valida su $[0,T)$.

Teorema 3.13 *Per ogni $T' \in (0,T)$ e per ogni $D > 0$ esistono ρ', M', N' e $\delta' > 0$ tali che, se $u \in \mathcal{E}$ è una soluzione dell'equazione (3.7) con*

$$\sup_{t\in[0,T']} \|u(t,\cdot)\|_{L^2} \le D$$

e $\|u(0,\cdot)\|_{L^2} \le \rho'$, allora

$$\sup_{t\in[0,T']} \|u(t,\cdot)\|_{L^2} \le M' e^{-N'|\log \|u(0,\cdot)\|_{L^2}|^{\delta'}}\,,$$

dove le costanti ρ', M', N' e δ' dipendono da T, da T', da D e dai coefficienti $a_{i,j}$, b_i e c. □

3.2.4 Stabilità con coefficienti log-lipsciziani rispetto a t e lipsciziani rispetto a x

Una richiesta di regolarità ancor piú debole di quella del paragrafo precedente è stata analizzata da Del Santo, Jäh e Prizzi [8]. Essi hanno trovato una proprietà di stabilità per l'operatore definito, sulla striscia $[0,T] \times \mathbb{R}^n$, da

$$\partial_t u + \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}(a_{i,j}(t,x)\partial_{x_i} u) = 0\,. \tag{3.10}$$

Essi hanno dimostrato che se

- per ogni $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ e per ogni $i,j = 1,\ldots,n$, $a_{i,j}(t,x) = a_{j,i}(t,x)$,
- vale la (3.8),
- per ogni $i,j = 1,\ldots,n$

$$a_{i,j} \in \mathrm{LogLip}([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty([0,T], \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)),$$

allora vale il seguente teorema.

Teorema 3.14 *Sia $s \in (0,1)$. Per ogni $T' \in (0,T)$ e per ogni $D > 0$, esistono delle costanti positive ρ, δ, M e N, che dipendono da k_A, dalla regolarità e dalla limitatezza dei coefficienti, da n, da s e da T' tali che se $u \in \mathcal{E}$ è una soluzione tale che $\|u(0,\cdot)\|_{H^{-s}} \le \rho$ e $\sup_{t\in(0,T)} \|u(t,\cdot)\|_{L^2} \le D$, allora*

$$\sup_{t\in[0,T']} \|u(t,\cdot)\|_{L^2} \le M e^{-N|\log(\|u(0,\cdot)\|_{H^{-1}})|^\delta},$$

dove $\mathcal{E}$ è definito come nel paragrafo precedente. □

Capitolo 4

Risultati

4.1 Controesempio per il caso Log-Lip

In questa sezione costruiremo un controesempio per il risultato descritto nel paragrafo 3.2.3. Riportiamo, per comodità, l'enunciato del Teorema 3.12.

Dato un operatore parabolico retrogrado $\mathcal{P}$ definito su $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ i coefficienti della parte principale del quale sono log-lipsciziani, dati $T' < T$ e $D > 0$, esistono $\rho > 0$, $\delta \in (0, 1)$, $M > 0$ e $N > 0$, tali che se $\mathcal{P}u = 0$, $\|u(0, \cdot)\|_{L^2} < \rho$ e, per ogni $t \in [0, T]$, $\|u(t, \cdot)\|_{L^2} < D$, allora

$$\sup_{t \in [0, T']} \|u(t, \cdot)\|_{L^2} < M e^{-N |\log \|u(0, \cdot)\|_{L^2}|^\delta}. \tag{4.1}$$

Il nostro scopo in questa sezione sarà quello di mostrare che se i coefficienti dell'operatore $\mathcal{P}$ non sono log-lipsciziani allora la stima (4.1) non è valida in generale.

Prima di presentare i dettagli della costruzione del controesempio sono necessarie due osservazioni. La prima riguarda il fatto che il Teorema 3.12 può essere enunciato e dimostrato anche nel caso in cui i coefficienti dell'operatore $\mathcal{P}$ siano periodici, ad esempio di periodo 2π, nelle variabili spaziali e la stessa proprietà di periodicità valga per le funzioni u soddisfacenti l'equazione $\mathcal{P}u = 0$. In tal caso la norma L^2 va intesa come la norma di $L^2([0, 2\pi]^n)$. Questo fatto è importante poiché, come vedremo tra breve, i coefficienti degli operatori utilizzati nel controesempio, cosí come le soluzioni, hanno proprio natura periodica.

La seconda osservazione riguarda, invece, il fatto che le costanti ρ, δ, M ed N che compaiono in (4.1) dipendono solo da T, T', D, dalle norme L^∞ dei coefficienti $a_{i,j}$, b_j e c e dalla norma log-lipsciziana degli stessi $a_{i,j}$. Di conseguenza, per provare che la (4.1) è violata sarà sufficiente costruire una successione di operatori i cui coefficienti abbiano tutti le stesse limitazioni in termini di norme L^∞ (e Osgood) e una successione di soluzioni tali che per tutti questi operatori e per tutte queste soluzioni la condizione (4.1) non sia mai verificata con le stesse costanti ρ, δ, M ed N della parte principale.

Il controesempio si basa sulla tecnica messa a punto da Pliś [26]. In particolare costruiremo:

- una successione $\{\mathcal{P}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di operatori parabolici retrogradi con coefficienti uniformemente Osgood-regolari (ma non log-lipsciziani) nella parte principale e coefficienti uniformemente limitati nelle parti di ordine inferiore; in particolare prenderemo in considerazione il modulo di continuità ω definito, per s vicino a 0, da
$$\omega(s) = s\log\left(1+\frac{1}{s}\right)\log\left(\log\left(1+\frac{1}{s}\right)\right)\,; \tag{4.2}$$
- una successione di dati iniziali lisci $u_{0,k}$, definiti su $\mathbb{R}^2$ e periodici di periodo 2π rispetto ad entrambe le variabili, tali che
$$\lim_{k\to\infty}\|u_{0,k}\|_{L^2([0,2\pi]\times[0,2\pi])} = 0\,;$$
- una successione $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di funzioni lisce uniformemente limitate su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}^2$, soluzioni del problema di Cauchy definito da $\mathcal{P}_k u_k = 0$ su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}^2$ con $u_k(0,\cdot,\cdot) = u_{0,k}(\cdot,\cdot)$;
- una successione di istanti di tempo $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tali che $0 < t_{k+1} < t_k$ e $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$,

tali che, per ogni $N > 0$ e per ogni $\delta \in (0,1)$,
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\|u_k(t_k,\cdot,\cdot)\|_{L^2([0,2\pi]\times[0,2\pi])}}{e^{-N|\log\|u_k(0,\cdot,\cdot)\|_{L^2([0,2\pi]\times[0,2\pi])}|^\delta}} = +\infty\,.$$

Dimostriamo innanzitutto i seguenti due lemmi accessori.

Lemma 4.1 *[26] Siano b, c, s, z e B delle costanti in $[0,\infty)$ tali che $b > 0$, $s > 1$, $z > 1$, $c/b < d < 1/2$ e $B \le 1$. Siano $v(x) = b\cos(sx)$, $w(y) = c\cos(zy)$ e $u(x,y) = v(x) + Bw(y)$. Si ha:*
$$\begin{aligned}(v^2+v_x^2) &\le 4(u^2+u_x^2+u_y^2)\,, &(4.3)\\ (w^2+w_y^2) &\le 4z^2d^2(u^2+u_x^2+u_y^2)\,, &(4.4)\\ u^2+u_x^2+u_y^2 &> 0\,, &(4.5)\end{aligned}$$
dove il pedice x (y) indica la derivata rispetto a x (rispettivamente y). □

Dimostrazione. Dimostriamo prima la (4.5). Dalle definizioni di v, w e u si ottiene

$$u^2 + u_x^2 + u_y^2 = \left[b^2 + 2Bbc\cos(sx)\cos(zy) + B^2c^2\right] + \\ + \left[B^2c^2(z^2-1)\sin^2(zy)\right] + \left[b^2(s^2-1)\sin^2(sx)\right]$$

Tutti i termini tra parentesi quadre a destra sono positivi o nulli. Inoltre

- se $\sin(sx) \neq 0$ allora il terzo termine è strettamente positivo,
- se $\sin(zy) \neq 0$ allora il secondo termine è strettamente positivo,
- se $\sin(sx) = \sin(zy) = 0$ allora tutta la parte di destra si riduce a $(b \pm Bc)^2$.

La tesi si ottiene facilmente tenendo conto del fatto che $b > 2c$ e $B \leq 1$. Dimostriamo ora la (4.3). Dalla definizione di u si ottiene

$$u^2 + u_x^2 + u_y^2 = v^2 + B^2w^2 + v_x^2 + B^2w_y^2 + 2Bvw\,.$$

Allora è sufficiente dimostrare che

$$3v^2 + 8Bvw + 4B^2w^2 + 3v_x^2 + 4B^2w_y^2 \geq 0\,,$$

ovvero che

$$3+3(s^2-1)\sin^2(sx)+4\frac{B^2c^2}{b^2}(1+(z^2-1)\sin^2(zy))+8\frac{Bc}{b}\cos(sx)\cos(zy) \geq 0\,.$$

Poiché $s > 1$ e $z > 1$, basta dimostrare che

$$3 + \frac{4B^2c^2}{b^2} - 8\frac{Bc}{b} \geq 0\,.$$

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = 4t^2 - 8t + 3$. È facile vedere che $f(t) > 0$ per $t \in (0, 1/2)$ e cioè che (4.3), per le ipotesi sui valori di B, b e c, è vera. Dimostriamo infine la (4.4). Bisogna dimostrare che

$$4z^2d^2(v^2 + B^2w^2 + 2Bvw + v_x^2 + B^2w_y^2) \geq w^2 + w_y^2\,,$$

ovvero che

$$4v^2 + 4v_x^2 + 8Bvw + \left(4B^2 - \frac{1}{z^2d^2}\right)w^2 + \left(4B^2 - \frac{1}{z^2d^2}\right)w_y^2 \geq 0\,. \tag{4.6}$$

Sostituendo i valori di v, v_x, w e w_y, la (4.6) è equivalente a

$$4b^2(\cos^2(sx) + s^2\sin^2(sx)) + 8Bbc\cos(sx)\cos(zy) + \\ + \left(4B^2 - \frac{1}{z^2d^2}\right)(c^2\cos^2(zy) + c^2z^2\sin^2(zy)) \geq 0\,.$$

È facile vedere che $\cos^2(sx) + s^2\sin^2(sx) \geq 1$, che $\cos(sx)\cos(zy) \geq -1$, che

$$\left(4B^2 - \frac{1}{z^2d^2}\right)(c^2\cos^2(zy) + c^2z^2\sin^2(zy)) \geq 4B^2c^2 - \frac{1}{z^2d^2}c^2z^2\,.$$

Dunque è sufficiente dimostrare che

$$4b^2 - 8Bbc + 4B^2c^2 - \frac{c^2}{d^2} \geq 0\,.$$

Ricordando che $b > 2c$, che $B \leq 1$ e che $b > c/d$ si perviene alla tesi. ■

Lemma 4.2 *[26] Data una funzione $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, la derivata di ordine k della funzione $(u^2 + u_x^2 + u_y^2)^{-1}$ è una somma di termini del tipo*

$$c\frac{D_1u\cdots D_{2k}u}{(u^2 + u_x^2 + u_y^2)^{k+1}}\,,$$

dove c è un coefficiente moltiplicativo (costante) e D_i è una derivata di qualche ordine (anche zero) di u. □

Dimostrazione. L'enunciato può essere dimostrato per induzione su k. Per $k = 1$ si ha

$$D\left(\frac{1}{u^2 + u_x^2 + u_y^2}\right) = -\frac{2uDu + 2u_xDu_x + 2u_yDu_y}{(u^2 + u_x^2 + u_y^2)^2}$$

e dunque l'enunciato è vero. Supponiamolo vero al passo k; per il generico termine si ricava

$$D\left(\frac{D_0u\cdots D_{2k}u}{(u^2 + u_x^2 + u_y^2)^{k+1}}\right) = \\ = \frac{D(D_0u\cdots D_{2k}u)(u^2+u_x^2+u_y^2)}{(u^2 + u_x^2 + u_y^2)^{k+2}} - \frac{(k+1)(D_0u\cdots D_{2k}u)D(u^2+u_x^2+u_y^2)}{(u^2 + u_x^2 + u_y^2)^{k+2}}$$

e dunque l'enunciato è vero per $k + 1$. ■

Definiamo ora quattro funzioni che serviranno per costruire la successione di operatori e le corrispondenti soluzioni. Siano A, B, C e J funzioni $\mathscr{C}^\infty$ definite su $\mathbb{R}$ tali che (si veda la figura 4.1)

$A(t) = 1$ se $t \leq 1/5$ e $A(t) = 0$ se $t \geq 1/4$,

$B(t) = 0$ se $t \leq 0$ oppure se $t \geq 1$ e $B(t) = 1$ se $t \in [1/6, 1/2]$,

$C(t) = 0$ se $t \leq 1/4$ e $C(t) = 1$ se $t \geq 1/3$,

$J(t) = -2$ se $t \leq 1/6$ oppure $t \geq 1/2$ e $J(t) = 2$ se $t \in [1/5, 1/3]$.

Data una successione strettamente crescente $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di istanti di tempo positivi tale che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \tag{4.7}$$

e

$$r_n \triangleq a_{n+1} - a_n < 1\,, \tag{4.8}$$

definiamo

$$A_n(t) = A\left(\frac{t-a_n}{r_n}\right), \qquad B_n(t) = B\left(\frac{t-a_n}{r_n}\right),$$

$$C_n(t) = C\left(\frac{t-a_n}{r_n}\right), \qquad J_n(t) = J\left(\frac{t-a_n}{r_n}\right).$$

Inoltre, data una successione strettamente crescente $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$z_n > 1 \text{ per ogni } n\,, \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = +\infty \tag{4.9}$$

e

$$\frac{1}{z_{n+1} - z_n} < r_n\,, \tag{4.10}$$

poniamo

$$p_n = r_n(z_{n+1} - z_n)\,. \tag{4.11}$$

Sia, infine, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione strettamente crescente. Introduciamo le funzioni $v_n : [0, +\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $w_n : [0, +\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $u : [0, +\infty)\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite da

$$v_n(t, x_1) = e^{-q_n - z_n(t-a_n)} \cos\left(\sqrt{z_n}x_1\right),$$
$$w_n(t, x_2) = e^{-q_n - z_n(t-a_n) + J_n(t)p_n} \cos\left(\sqrt{z_n}x_2\right)$$

e

$$u(t, x_1, x_2) = \\ = \begin{cases} v_{n_0}(t, x_1)\,, & \text{se } t \leq a_{n_0}\,, \\ A_n(t)v_n(t, x_1) + B_n(t)w_n(t, x_2) + & \\ \qquad + C_n(t)v_{n+1}(t, x_1)\,, & \text{se } a_n \leq t \leq a_{n+1}\,, \\ & \qquad \text{con } n \geq n_0\,, \end{cases} \tag{4.12}$$

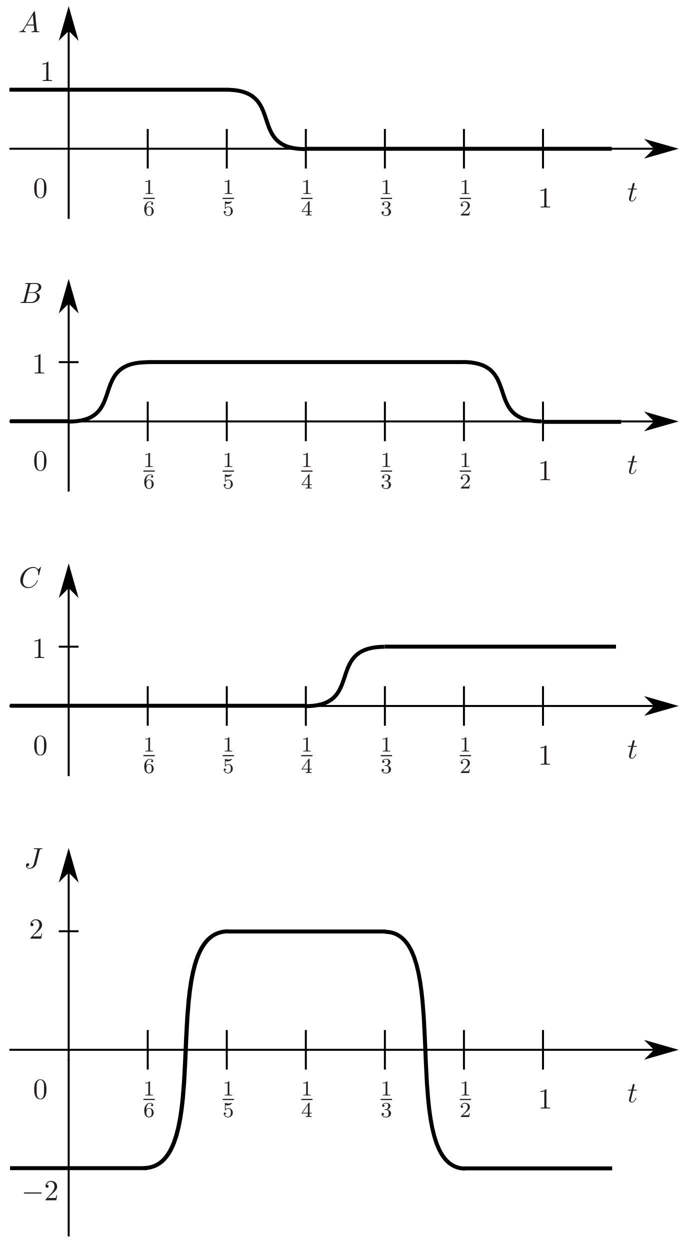

Figura 4.1: Rappresentazione grafica delle funzioni A, B, C e J. Per chiarezza, la scala sull'asse delle ascisse non è lineare.

per un n_0 che sceglieremo successivamente. Per queste funzioni è facile verificare che

$$\begin{aligned}
\partial_t v_n(t,x_1) &= -z_n v_n(t,x_1)\,, && (4.13)\\
\partial_{x_1}^2 v_n(t,x_1) &= -z_n v_n(t,x_1)\,, && (4.14)\\
\partial_t w_n(t,x_2) &= (-z_n + p_n J_n'(t)) w_n(t,x_2)\,, && (4.15)\\
\partial_{x_2}^2 w_n(t,x_2) &= -z_n w_n(t,x_2)\,, && (4.16)
\end{aligned}$$

che, di conseguenza,

$$\begin{aligned}
\partial_t v_n(t,x_1) - \partial_{x_1}^2 v_n(t,x_1) &= 0\,, && (4.17)\\
\partial_t w_n(t,x_2) - (1 - J_n'(t) p_n/z_n)\partial_{x_2}^2 w_n(t,x_2) &= 0 && (4.18)
\end{aligned}$$

e che, per come è costruita, u è una funzione $\mathscr{C}^\infty([0,+\infty)\times\mathbb{R}^2)$. Un altro fatto, che dimostreremo di seguito, è che u è limitata, come lo è ogni sua derivata di qualunque ordine rispetto a t, x_1 e x_2.

4.1.1 Limitatezza di u e delle sue derivate

Valutiamo, ora, quali siano le condizioni affinché la funzione u definita da (4.12) e le sue derivate di ogni ordine siano limitate. Dalle definizioni di v_n e w_n, si può ricavare che

- se $t \le a_n$ allora
$$v_n(t,x_1) \le e^{-q_n + z_n a_n}\,;$$
- se $a_n \le t \le a_{n+1}$ allora
$$v_n(t,x_1) \le e^{-q_n} \qquad \text{e} \qquad w_n(t,x_1) \le e^{-q_n+2p_n}\,.$$

Tenendo in considerazione la limitatezza delle funzioni A, B e C, si può concludere che l'esistenza di una costante c, tale che per ogni n,

$$|-q_n + 2p_n| < c\,,$$

è condizione sufficiente per la limitatezza di u. Per quanto riguarda le sue derivate, si noti che dalle (4.13)-(4.16) si ricava, per $0 \le t \le a_n$,

$$|D_t^{\alpha_1} D_{x_1}^{\alpha_2} v_n(t,x_1)| < |z_n|^{\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2}} e^{-q_n+z_n a_n}$$

e, per $a_n \leq t \leq a_{n+1}$,

$$
\begin{aligned}
|D_t^{\alpha_1} D_{x_1}^{\alpha_2}(A_n(t) v_n(t,x_1))| &< c_A |r_n|^{-\alpha_1} |z_n|^{\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2}} e^{-q_n}\,, \\
|D_t^{\alpha_1} D_{x_1}^{\alpha_2}(B_n(t) w_n(t,x_1))| &< c_B |r_n|^{-\alpha_1} |z_n|^{\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2}} p_n^{\alpha_1} e^{-q_n+2p_n}\,, \\
|D_t^{\alpha_1} D_{x_1}^{\alpha_2}(C_n(t) v_{n+1}(t,x_1))| &< c_C |r_n|^{-\alpha_1} |z_{n+1}|^{\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2}} e^{-q_{n+1}+z_{n+1} r_n}\,,
\end{aligned}
$$

dove c_A, c_B e c_C sono costanti che tengono conto dei valori di A, B e C e delle loro derivate nell'intervallo $[0,1]$. Di conseguenza, affinché le derivate di ogni ordine di u siano limitate, è sufficiente che

$$
\lim_{n\to\infty} |z_{n+1}|^{\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2}} |r_n|^{-\alpha_1} p_n^{\alpha_1} \max\{e^{-q_n+2p_n}, e^{-q_{n+1}+z_{n+1} r_n}\} = 0\,,
$$

per ogni $\alpha_1 \in \mathbb{N}$ e $\alpha_2 \in \mathbb{N}$.

4.1.2 Definizione, limitatezza e regolarità dell'operatore parabolico

Introduciamo ora l'operatore differenziale che sarà oggetto de controesempio. A tal proposito, definiamo gli intervalli

$$
I_1^n \triangleq \left[a_n, a_n + \frac{r_n}{6}\right]\,, \qquad I_6^n \triangleq \left[a_n + \frac{r_n}{2}, a_{n+1}\right]\,,
$$

e, per $k = 2, \ldots, 5$,

$$
I_k^n \triangleq \left[a_n + \frac{r_n}{6-k+2}, a_n + \frac{r_n}{6-k+1}\right]\,.
$$

Da queste definizioni e dalle (4.13)-(4.16) si può ricavare che

- in ogni intervallo I_k^n si ha

$$
\partial_t v_n(t,x_1) = \partial_{x_1}^2 v_n(t,x_1)\,, \qquad \partial_t v_{n+1}(t,x_1) = \partial_{x_1}^2 v_{n+1}(t,x_1)\,;
$$

- negli intervalli I_1^n, I_3^n, I_5^n e I_6^n vale anche

$$
\partial_t w_n(t,x_2) = \partial_{x_2}^2 w_n(t,x_2)\,;
$$

Inoltre negli intervalli I_2^n e I_5^n si ha

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x_1,x_2) &= \partial_t v_n(t,x_1) + \partial_t w_n(t,x_2) = \\ &= \partial^2_{x_1} v_n(t,x_1) + \left(-z_n + \frac{p_n}{r_n} J'\left(\frac{t-a_n}{r_n}\right)\right) w_n(t,x_2) = \\ &= \partial^2_{x_1} v_n(t,x_1) + \left(-z_n + \frac{p_n}{r_n} J'\left(\frac{t-a_n}{r_n}\right)\right) \left(-\frac{1}{z_n}\partial^2_{x_2} w_n(t,x_2)\right) = \\ &= \partial^2_{x_1} u(t,x_1) + \left(z_n - \frac{p_n}{r_n} J'\left(\frac{t-a_n}{r_n}\right)\right) \left(\frac{1}{z_n}\partial^2_{x_2} u(t,x_2)\right) .\end{aligned}$$

Di conseguenza, la funzione $l : [0,T] \to \mathbb{R}$ definita da

$$l(t) = \begin{cases} 1 & \text{su } I_1^n,\ I_3^n,\ I_4^n \text{ e } I_6^n\,, \\ 1 - \dfrac{p_n}{z_n r_n} J'\left(\dfrac{t-a_n}{r_n}\right) & \text{su } I_2^n \text{ e } I_5^n, \end{cases}$$

è tale per cui

$$\partial_t v_n - \partial^2_{x_1} v_n - l(t)\partial^2_{x_2} v_n = 0$$

e

$$\partial_t w_n - \partial^2_{x_1} w_n - l(t)\partial^2_{x_2} w_n = 0\,.$$

per ogni n e per ogni $t \in [0,+\infty)$. È facile vedere, inoltre, che $l(t) \in [1/2, 3/2]$ se $n \geq n_0$ e se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{z_n r_n} = 0\,.$$

Infine, dato un modulo di continuità ω, l ha regolarità $\mathscr{C}^\omega$ se esiste una costante c_l tale che, per ogni t_1 e per ogni t_2 in $[0,+\infty)$, valga

$$|l(t_1) - l(t_2)| \leq c_l \omega(|t_1 - t_2|)\,. \tag{4.19}$$

La condizione (4.19) è banalmente vera quando t_1 e t_2 appartengono entrambi allo stesso intervallo I_1^n, I_3^n, I_4^n o I_6^n. Nel caso in cui t_1 e t_2 appartengono entrambi a I_2^n o I_5^n, si può ricavare che

$$|l(t_1) - l(t_2)| \leq \|l'\|_{L^\infty}|t_1 - t_2| \leq \tilde{c}_l |\frac{p_n}{z_n r_n^2}||t_1 - t_2|\,.$$

Inoltre, poiché la funzione che manda s in $\omega(s)/s$ è decrescente (si veda il Capitolo 2) si ha

$$\frac{\omega(r_n)}{r_n} \leq \frac{\omega(|t_1 - t_2|)}{|t_1 - t_2|}\,.$$

Di conseguenza,

$$\sup_n \left| \frac{p_n}{z_n r_n \omega(r_n)} \right| < +\infty \quad \Rightarrow \quad l \in \mathscr{C}^\omega .$$

Se t_1 e t_2 appartengono a intervalli diversi, la condizione (4.19) vale ancora. Supponiamo, infatti, che t_1 e t_2 appartengano a due intervalli adiacenti e definiamo t^* come l'istante comune ai due intervalli. Si ha

$$\begin{aligned}|l(t_1)-l(t_2)| \leq |l(t_1)-l(t^*)|+|l(t^*)-l(t_2)| \leq c_{l1}\omega(|t_1-t^*|)+c_{l2}\omega(|t^*-t_2|) \leq \\ \leq c_{l3}\max\{\omega(|t_1-t^*|),\omega(|t^*-t_2|)\} \leq c_{l3}\omega(|t_1-t_2|)\,,\end{aligned}$$

dove $c_{l3} = \max\{c_{l1}, c_{l2}\}$ e dove l'ultima diseguaglianza è giustificata dal fatto che ω è crescente. Ripetendo il ragionamento per coppie di intervalli adiacenti, si giunge alla tesi.

Introduciamo ora l'operatore $\widetilde{\mathcal{L}}$ definito da

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \partial_t - \partial_{x_1}^2 - l(t)\partial_{x_2}^2$$

e definiamo

$$d_u(t,x_1,x_2) = u^2(t,x_1,x_2) + (\partial_{x_1}u(t,x_1,x_2))^2 + (\partial_{x_2}u(t,x_1,x_2))^2$$

e

$$\begin{aligned} b_1(t,x_1,x_2) &= -\left(\frac{\widetilde{\mathcal{L}}u(t,x_1,x_2)}{d_u(t,x_1,x_2)}\right)\partial_{x_1}u(t,x_1,x_2) \\ b_2(t,x_1,x_2) &= -\left(\frac{\widetilde{\mathcal{L}}u(t,x_1,x_2)}{d_u(t,x_1,x_2)}\right)\partial_{x_2}u(t,x_1,x_2) \\ b_3(t,x_1,x_2) &= -\left(\frac{\widetilde{\mathcal{L}}u(t,x_1,x_2)}{d_u(t,x_1,x_2)}\right)u(t,x_1,x_2)\,. \end{aligned}$$

Se i coefficienti b_1, b_2 e b_3 definiti come sopra sono funzioni $\mathscr{C}^\infty$, allora l'operatore

$$\widetilde{\mathcal{P}} \triangleq \partial_t - \partial_{x_1}^2 - l(t)\partial_{x_2}^2 + b_1(t,x_1,x_2)\partial_{x_1} + b_2(t,x_1,x_2)\partial_{x_2} + b_3(t,x_1,x_2)$$

è parabolico. Se $t < a_{n_0}$ si ha $u = v_{n_0}(t,x_1)$ e dunque

$$\partial_t u - \partial_{x_1}^2 u - l(t)\partial_{x_2}^2 u = \partial_t u - \partial_{x_1}^2 u = 0$$

e, di conseguenza,

$$b_1(t,x_1,x_2) = b_2(t,x_1,x_2) = b_3(t,x_1,x_2) = 0\,,$$

per ogni x_1 e per ogni x_2. Se $t \in [a_n, a_{n+1}]$, l'analisi può essere fatta per ciascun intervallo I_k^n con l'aiuto dei Lemmi 4.1 e 4.2. Su I_1^n vale

$$u(t,x_1,x_2) = e^{-q_n - z_n(t-a_n)} \cos(\sqrt{z_n}x_1) + B_n(t) e^{-q_n - z_n(t-a_n) - 2p_n} \cos(\sqrt{z_n}x_2)\,.$$

e dunque possiamo applicare la (4.5) del Lemma 4.1 con $s = z = \sqrt{z_n}$,

$$\begin{aligned} b &= e^{-q_n - z_n(t-a_n)}\,, \\ c &= e^{-q_n - z_n(t-a_n) - 2p_n}\,, \\ B &= B(t) \end{aligned}$$

e $d = e^{-p_n}$, ottenendo che $d_u(t,x_1,x_2) > 0$, per ogni t, per ogni x_1 e per ogni x_2. Inoltre in I_1^n vale

$$\widetilde{\mathcal{L}}u(t,x_1,x_2) = B_n'(t) w_n(t,x_2)$$

e dunque

$$b_1(t,x_1,x_2) = -\frac{B_n'(t) w_n(t,x_2) \partial_{x_1} v_n(t,x_2)}{d_u(t,x_1,x_2)}\,,$$

per ogni $t \in I_1^n$, per ogni x_1 e per ogni x_2. Di conseguenza, per ogni $t \in I_1^n$ si ha

$$|b_1(t,x_1,x_2)| \le |B_n'(t)| \frac{|w_n(t,x_2)|}{d_u(t,x_1,x_2)^{\frac{1}{2}}} \frac{|\partial_{x_1} v_n(t,x_1)|}{d_u(t,x_1,x_2)^{\frac{1}{2}}} \le 4C_B r_n^{-1} \sqrt{z_n} e^{-p_n}\,,$$

dove C_B è una costante che dipende dal valore delle derivate di B e dove sono state usate la (4.3) e la (4.4) del Lemma 4.1. Analogamente si può ricavare

$$|b_2(t,x_1,x_2)| \le |B_n'(t)| \frac{|w_n(t,x_2)|}{d_u(t,x_1,x_2)^{\frac{1}{2}}} \frac{|\partial_{x_2} w_n(t,x_2)|}{d_u(t,x_1,x_2)^{\frac{1}{2}}} \le 4C_B r_n^{-1} z_n e^{-2p_n}$$

e

$$\begin{aligned} |b_3(t,x_1,x_2)| &\le |B_n'(t)| \frac{|w_n(t,x_2)|}{d_u(t,x_1,x_2)^{\frac{1}{2}}} \frac{|v_n(t,x_1) + B_n(t) w_n(t,x_2)|}{d_u(t,x_1,x_2)^{\frac{1}{2}}} \le \\ &\le 2C_B r_n^{-1} \sqrt{z_n} e^{-p_n} + C_B r_n^{-1} z_n e^{-2p_n}\,. \end{aligned}$$

Per la derivata rispetto al tempo possiamo ricavare

$$\partial_t(b_1(t,x_1,x_2)) = \frac{\partial_t\left(B_n'(t)w_n(t,x_2)\partial_{x_1}u(t,x_1,x_2)\right)}{d_u(t,x_1,x_2)} + \\ + B_n'(t)w_n(t,x_2)\partial_{x_1}u(t,x_1,x_2)\partial_t\left(\frac{1}{d_u(t,x_1,x_2)}\right).$$

Sfruttando il Lemma 4.2 non è difficile ricavare che le derivate di ogni ordine dei coefficienti b_1, b_2 e b_3 sono limitate se le successioni $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono tali per cui, per ogni $\alpha > 0$, per ogni $\beta > 0$ e per ogni $\gamma > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} r^{-\gamma} z_n^{\alpha} p_n^{\beta} e^{-p_n} = 0\,.$$

Riassumendo, abbiamo ottenuto che

- per la limitatezza di u e delle sue derivate, deve essere

$$\lim_{n\to\infty} z_{n+1}^{\alpha} p_n^{\beta} r_n^{-\gamma} \max\{e^{-q_n+2p_n}, e^{-q_{n+1}+z_{n+1}r_n}\} = 0\,, \tag{4.20}$$

  per ogni $\alpha > 0$, per ogni $\beta > 0$ e per ogni $\gamma > 0$;

- per la limitatezza e la positività della funzione l, deve essere $n \geq n_0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{z_n r_n} = 0\,; \tag{4.21}$$

- per avere $l \in \mathscr{C}^{\omega}$, con ω definito da (4.2), deve essere

$$\sup_n \left|\frac{p_n}{z_n r_n \omega(r_n)}\right| < +\infty\,; \tag{4.22}$$

- per la limitatezza dei coefficienti b_1, b_2 e b_3 deve essere

$$\lim_{n\to\infty} z_n^{\alpha} p_n^{\beta} r_n^{-\gamma} e^{-p_n} = 0\,, \tag{4.23}$$

  per ogni $\alpha > 0$, per ogni $\beta > 0$ e per ogni $\gamma > 0$.

Se valgono tutte le condizioni elencate, allora l'operatore $\widetilde{\mathcal{P}}$ è un operatore parabolico ben definito su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}^2$ e la funzione u definita da (4.12) è tale per cui $\widetilde{\mathcal{P}}u = 0$.

4.1.3 Costruzione delle successioni

Nei paragrafi precedenti è stato introdotto un operatore parabolico $\widetilde{\mathcal{P}}$, è stata definita una funzione u tale che $\widetilde{\mathcal{P}}u = 0$ e sono state individuate delle condizioni sotto le quali i coefficienti della parte principale di $\widetilde{\mathcal{P}}$ stanno in $\mathscr{C}^\omega$. In questo paragrafo definiremo un modulo di continuità non log-lipsciziano μ, troveremo una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e una successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che verificano le condizioni (4.20), (4.21), (4.23) e (4.22), quest'ultima riferita al modulo μ e individueremo

- una successione di operatori parabolici retrogradi $\{\mathcal{P}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ costruiti rovesciando il tempo e traslando $\widetilde{\mathcal{P}}$,
- una successione di istanti di tempo t_k,
- successione di soluzioni $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (per ogni k, u_k è soluzione di $\mathcal{P}_k = 0$),

tali che $\lim_{k\to\infty} \|u_k(0,\cdot,\cdot)\|_{L^2([0,2\pi],[0,2\pi])} = 0$ e, per ogni $N > 0$ e per ogni $\delta \in (0,1)$,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|u_k(t_k,\cdot,\cdot)\|_{L^2([0,2\pi]\times[0,2\pi])}}{e^{-N|\log\|u_k(0,\cdot,\cdot)\|_{L^2([0,2\pi]\times[0,2\pi])}|^\delta}} = +\infty\,. \tag{4.24}$$

Sia, dunque, μ definito, in un intorno destro di 0, come

$$\mu(s) = s\log\left(1+\frac{1}{s}\right)\log\left(\log\left(1+\frac{1}{s}\right)\right),$$

siano $a_1 = 0$ e, per $n > 1$,

$$a_n = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j\log j}\,;$$

sia $z_n = n^4$. È immediato vedere che le condizioni (4.7), (4.8) e (4.9) sono verificate. Inoltre

$$\frac{1}{z_{n+1}-z_n} = \frac{1}{4n^3+6n^2+4n+1} < \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} = r_n$$

e dunque anche la (4.10) è verificata. Siano, ora, $q_1 = 0$ e, per $n > 1$, $q_n = e^{\sum_{k=2}^{n} z_k r_{k-1}}$. Si può calcolare facilmente

$$p_n = \frac{4n^3+6n^2+4n+1}{(n+1)\log(n+1)}\,,$$

da cui si può dedurre che la (4.23) è verificata. Inoltre, da

$$q_n = e^{\sum_{k=2}^{n} \frac{k^3}{\log k}}\,, \tag{4.25}$$

si ricava

$$\begin{aligned} -\, q_n + 2p_n \leq -\sum_{k=2}^{n} \frac{k^3}{\log k} + \frac{1}{\log(n+1)} \frac{8n^3+12n^2+8n+2}{n+1} \leq \\ \leq \frac{1}{\log n}\left(8n^2+12n+10-n^3\right) \end{aligned}$$

e

$$-q_{n+1} + z_{n+1}r_n \leq -\sum_{k=2}^{n+1} \frac{k^3}{\log k} + \frac{(n+1)^3}{\log(n+1)} =\leq -\sum_{k=2}^{n} \frac{k^3}{\log k}$$

e, di conseguenza, che anche la (4.20) è verificata. Inoltre

$$\frac{p_n}{z_n r_n} = \frac{(n+1)^4 - n^4}{n^4} = \frac{4n^3+6n^2+4n+1}{n^4}$$

e dunque anche la (4.21) è verificata. Infine si può ricavare che

$$\frac{p_n}{z_n r_n \mu(r_n)} = \frac{4n^3+6n^2+4n+1}{n^4 r_n \log\left(1+\frac{1}{r_n}\right)\log\left(\log\left(1+\frac{1}{r_n}\right)\right)}$$

ovvero che

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{z_n r_n \bar{\omega}(r_n)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4\log(n+1)}{\log\left(1+(n+1)\log(n+1)\right)\log\left(\log\left(1+(n+1)\log(n+1)\right)\right)} = 0 \end{aligned}$$

e, in conclusione, che anche la (4.22) è verificata.

Siano ora, per $k \in \mathbb{N}$,

$$n_{1,k} = \lfloor e^{e^k} \rfloor + 2 \quad \text{e} \quad n_{2,k} = \lfloor e^{e^{k+\frac{1}{k}}} \rfloor + 1\,, \tag{4.26}$$

dove $\lfloor x \rfloor$ indica la parte intera di x, $t_{1,k} = a_{n_{1,k}}$ e $t_{2,k} = a_{n_{2,k}}$. Ovviamente si ha

$$\lim_{k\to\infty} t_{1,k} = +\infty$$

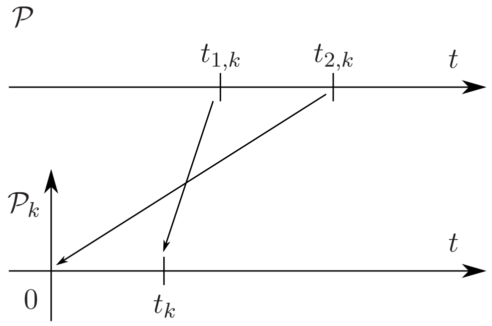

Figura 4.2: Inversione del tempo e traslazione nella costruzione di $\mathcal{P}_k$ da $\mathcal{P}$.

ed è, inoltre facile verificare che

$$t_{2,k} - t_{1,k} = \sum_{j=n_{1,k}+1}^{n_{2,k}} \frac{1}{j \log j} \leq \int_{n_{1,k}-1}^{n_{2,k}-1} \frac{1}{x \log x} dx \leq \int_{e^{e^k}}^{e^{e^{k+\frac{1}{k}}}} \frac{1}{x \log x} dx = \frac{1}{k}\,,$$

e che, di conseguenza,

$$\lim_{k\to\infty} (t_{2,k} - t_{1,k}) = 0\,.$$

Gli istanti di tempo cosí definiti ci serviranno ora per costruire la sequenza di operatori ottenuti, come si diceva, per "inversione" del tempo e traslazione (si veda la Figura 4.2). Sia, dunque,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_k \triangleq \partial_t + \partial_{x_1}^2 + l(t_{2,k} - t)\partial_{x_2}^2 + b_1(t_{2,k} - t, x_1, x_2)\partial_{x_1} + \\ + b_2(t_{2,k} - t, x_1, x_2)\partial_{x_2} + b_3(t_{2,k} - t, x_1, x_2)\,.\end{aligned}$$

I coefficienti degli operatori cosí costruiti sono limitati in L^∞ e in $\mathscr{C}^\omega$ con coefficienti che non dipendono da k. Applicando le modifiche di inversione del tempo e traslazione anche alla soluzione u dell'equazione $\widetilde{\mathcal{P}}u = 0$, ovvero definendo

$$u_k(t, x_1, x_2) = u(t_{2,k} - t, x_1, x_2)\,, \tag{4.27}$$

si ottiene una soluzione dell'equazione $\mathcal{P}_k u_k = 0$. Vogliamo provare che la successione degli operatori e delle loro soluzioni sono tali per cui vale la (4.24). Definito $t_k = t_{2,k} - t_{1,k}$, dalla (4.27) si ricava

$$u_k(t_k, x_1, x_2) = u(t_{1,k}, x_1, x_2)$$

e

$$u_k(0,x_1,x_2)=u(t_{2,k},x_1,x_2)$$

e dunque provare la (4.24) è equivalente a dimostrare che

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\|u(t_{1,k},\cdot,\cdot)\|_{L^2([0,2\pi]\times[0,2\pi])}}{e^{-N|\log\|u(t_{2,k},\cdot,\cdot)\|_{L^2([2\pi]\times[2\pi])}|^\delta}}=+\infty\,. \tag{4.28}$$

Si noti che

$$u(a_n,x_1,x_2)=v_n(a_n,x_1)=e^{-q_n}\cos(\sqrt{z_n}x_1)\,.$$

Poiché $z_n=n^4$ e $t_{i,k}=a_{n_{i,k}}$, si ha

$$\|u(t_{i,k},\cdot,\cdot)\|_{L^2([0,2\pi]\times[0,2\pi])}=2\pi^2e^{-q_{n_{i,k}}}\,.$$

Di conseguenza, per provare la (4.28) basta provare che, comunque si prendano $N>0$ e $\delta\in(0,1)$, si ha

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e^{-q_{n_{1,k}}}}{e^{-N(q_{n_{2,k}})^\delta}}=+\infty\,. \tag{4.29}$$

La (4.29) è immediatamente dimostrata se si riesce a dimostrare che

$$\lim_{k\to\infty}\frac{N(q_{n_{2,k}})^\delta}{q_{n_{1,k}}}=+\infty\,. \tag{4.30}$$

Ricordando la (4.25), si ricava facilmente

$$q_{n_{2,k}}\geq q_{n_{1,k}}e^{\frac{n_{1,k}^3}{\log(n_{1,k})}(n_{2,k}-n_{1,k})}$$

e dunque la (4.30) può essere dedotta da

$$\lim_{k\to\infty}\frac{N\left(q_{n_{1,k}}e^{\frac{n_{1,k}^3}{\log(n_{1,k})}(n_{2,k}-n_{1,k})}\right)^\delta}{q_{n_{1,k}}}=+\infty\,. \tag{4.31}$$

Poiché $1\leq q_{n_{1,k}}\leq e^{n_{1,k}^4}$, la (4.31) discende direttamente da

$$\lim_{k\to\infty}\delta\frac{n_{1,k}^3}{\log(n_{1,k})}(n_{2,k}-n_{1,k})-n_{1,k}^4=+\infty\,,$$

ovvero da

$$\lim_{k\to\infty} \delta \frac{n_{1,k}^3 n_{2,k}}{\log(n_{1,k})} - (1+\delta) n_{1,k}^4 = +\infty \tag{4.32}$$

Dividendo la (4.32) per $(1+\delta)n_{1,k}^3$, si può veder che essa è giustificata dal fatto che, per ogni $\delta' \in (0,1)$,

$$\lim_{k\to\infty} \delta' \frac{n_{1,k} n_{2,k}}{\log(n_{1,k})} - n_{1,k} = +\infty\,, \tag{4.33}$$

che può essere facilmente dimostrato sostituendo a $n_{1,k}$ e $n_{2,k}$ i loro valori dai dalla (4.26).

4.2 Definizioni accessorie

In questo paragrafo definiremo alcune funzioni che saranno richiamate nel seguito. Sia dato un modulo di continuità ω che soddisfi la condizione di Osgood. Per $\rho > 1$ definiamo

$$\theta(\rho) \triangleq \int_{1/\rho}^{1} \frac{1}{\omega(s)} ds\,. \tag{4.34}$$

La funzione θ cosí definita assume valori nell'intervallo $[0, +\infty)$ ed è biiettiva e strettamente crescente. Di conseguenza può essere invertita. Per $y \in (0,1]$, $q > 0$ e $\lambda > 0$ sia

$$\psi_{\lambda,q}(y) \triangleq \theta^{-1}(-\lambda q \log y)\,.$$

Si ricava immediatamente che

$$\theta(\psi_{\lambda,q}(y)) = -\lambda q \log y$$

e, dunque,

$$\theta'(\psi_{\lambda,q}(y))\psi'_{\lambda,q}(y) = -\frac{\lambda q}{y}$$

Definiamo, ora,

$$\phi_{\lambda,q}(y) \triangleq q \int_1^y \psi_{\lambda,q}(z) dz\,.$$

La funzione $\phi_{\lambda,q} : (0,1] \to (-\infty, 0]$ è biiettiva e strettamente crescente. Inoltre si ha

$$\phi''_{\lambda,q}(y) = q\psi'_{\lambda,q}(y) = \frac{q}{\theta'(\psi_{\lambda q}(y))}\left(-\frac{\lambda q}{y}\right)\,. \tag{4.35}$$

D'altro canto, con il cambio di variabile $\eta = 1/s$, la (4.34) diventa

$$\theta(\rho) = -\int_\rho^1 \frac{1}{\omega\left(\frac{1}{\eta}\right)}\frac{1}{\eta^2}d\eta = \int_1^\rho \frac{1}{\eta^2\omega\left(\frac{1}{\eta}\right)}d\eta$$

da cui si ottiene

$$\frac{1}{\theta'(\psi_{\lambda,q}(y))} = \psi_{\lambda,q}(y)^2\omega\left(\frac{1}{\psi_{\lambda,q}(y)}\right). \tag{4.36}$$

Sostituendo la (4.36) nella (4.35) e ricordando che $\psi_{\lambda,q}(y) = \phi'_{\lambda,q}(y)/q$, si ricava che $\phi_{\lambda,q}$ soddisfa l'equazione

$$y\phi''_\lambda(y) = -\lambda(\phi'_\lambda(y))^2\omega\left(\frac{q}{\phi'_\lambda(y)}\right). \tag{4.37}$$

Si osservi che, per ogni $\lambda > 0$, per ogni $q > 0$ e per ogni $y \in (0,1]$, $\psi_{\lambda,q}(y) \in (1,+\infty)$ e, di conseguenza

$$\frac{q}{\phi'_{\lambda,q}(y)} \in (0,1).$$

4.3 Stabilità con coefficienti Osgood-regolari

Ritorniamo ora all'operatore (1.1) e supponiamo che i suoi coefficienti non dipendano da x; consideriamo cioè l'equazione

$$\partial_t u + \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(t)\partial_{x_i,x_j}u + \sum_{i=1}^n b_i(t)\partial_{x_i}u + c(t)u = 0 \tag{4.38}$$

sulla striscia $[0,T] \times \mathbb{R}^n$. Diremo che una funzione u, appartenente allo spazio funzionale

$$\mathcal{E} \triangleq \mathscr{C}^0([0,T], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap \mathscr{C}^0([0,T), H^1(\mathbb{R}^n)) \cap \mathscr{C}^1([0,T), L^2(\mathbb{R}^n))$$

è una soluzione di (4.38) se verifica (4.38) in $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, nei risultati che seguono, supporremo verificate le seguenti ipotesi.

Ipotesi 4.3 *L'operatore $\mathcal{L}$ definito da (4.38) è tale che*

- *per ogni $t \in [0,T]$ e per ogni $i,j = 1,\ldots,n$,*

$$a_{i,j}(t) = a_{j,i}(t);$$

- *esiste* $k_A > 0$ *tale che, per ogni* $(t, \xi) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$,

$$k_A |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t) \xi_i \xi_j \leq k_A^{-1} |\xi|^2 \, ;$$

- *esiste* $k_B > 0$ *tale che, per ogni* $t \in [0, T]$, $|b_i(t)| \leq k_B$;
- *esiste* $k_C > 0$ *tale che, per ogni* $t \in [0, T]$, $|c(t)| \leq k_C$;
- *per ogni* $i, j = 1, \ldots, n$, $a_{i,j} \in \mathscr{C}^{\omega}([0, T])$, *dove* ω *è un modulo di continuità che verifica la condizione di Osgood,* $b_i, c \in L^{\infty}([0, T])$.

Siamo ora in grado di enunciare il risultato di stabilità anticipato nell'introduzione alla dimostrazione del quale sarà dedicata la parte rimanente della tesi.

Teorema 4.4 *Sia* $u \in \mathcal{E}$ *soluzione di (4.38), con* $\mathcal{L}$ *soddisfacente le ipotesi 4.3. Esistono* σ, C *e* $\widetilde{C}$, *dipendenti da* k_A, *da* k_B, *da* k_C, *da* ω, *da* T *e da* n *ed esiste* $\bar{\sigma} < \sigma$ *tali che, se* $\|u(0, \cdot)\|^2_{H^0_{\nu,\epsilon}} < 1/(\widetilde{C} k_A)$, *per qualche* $\nu > 0$ *e per qualche* $\epsilon > 1$, *allora*

$$\sup_{z \in [0, \bar{\sigma}]} \|u(z, \cdot)\|_{H^1} \leq C e^{-\sigma g\left(\|u(0,\cdot)\|_{H^0_{\nu,\epsilon}}\right)} \left[1 + \|u(\sigma, \cdot)\|_{H^1}\right] , \tag{4.39}$$

dove $g : [0, 1/k_A] \to [0, +\infty]$ *è una funzione strettamente decrescente e tale che* $\lim_{y \to 0} g(y) = +\infty$. □

Per dimostrare il Teorema 4.4 useremo dei risultati parziali espressi in termini di maggiorazioni di certe quantità integrali. Il seguente Lemma 4.6 garantisce che gli integrali che introdurremo sono finiti, dando cosí un significato alle maggiorazioni ottenute.

Lemma 4.5 *Sia* $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* $\mathcal{C}^1[0, T]$. *Se* $u'(t) \geq Mu(t)$, *allora* $u(t) \leq e^{M(t-T)} u(T)$.

Dimostrazione. Basta osservare che vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned} u'(t) \geq Mu(t) \;\Rightarrow\; u'(t) e^{-M(t-T)} - Mu(t) e^{-M(t-T)} \geq 0 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(u(t) e^{-M(t-T)}\right) \geq 0 \;\Rightarrow\; u(t) e^{-M(t-T)} \leq u(T) \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; u(t) \leq e^{M(t-T)} u(T) \, . \end{aligned}$$

■

Lemma 4.6 *Se $u \in \mathcal{E}$ è soluzione di (4.38), allora $u \in \mathscr{C}^1([0,T), H^d_{a,\epsilon})$ per ogni $a > 0$, per ogni $\epsilon > 1$ e per ogni $d \in \mathbb{R}$.* □

Dimostrazione. Come abbiamo già osservato, $\hat{u}$, la trasformata di Fourier di u, soddisfa la proprietà che, per ogni $t \in [0,T]$ e per quasi ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\partial_t \hat{u}(t,\xi) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t)\xi_i\xi_j \hat{u}(t,\xi) + \imath \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\xi_i \hat{u}(t,\xi) + c(t)\hat{u}(t,\xi) = 0\,. \tag{4.45}$$

Moltiplicando ambo i membri della (4.45) per $\bar{\hat{u}}$ si ottiene

$$\partial_t \hat{u}(t,\xi)\bar{\hat{u}}(t,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t)\xi_i\xi_j |\hat{u}(t,\xi)|^2 - \imath \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\xi_i |\hat{u}(t,\xi)|^2 - c(t)|\hat{u}(t,\xi)|^2\,. \tag{4.40}$$

Aggiungendo alla (4.40) la sua complessa coniugata, si ricava

$$\partial_t |\hat{u}(t,\xi)|^2 = 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t)\xi_i\xi_j |\hat{u}(t,\xi)|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \Im\{b_i(t)\}\xi_i |\hat{u}(t,\xi)|^2 + \\ + 2\Re\{c(t)\}|\hat{u}(t,\xi)|^2\,, \tag{4.41}$$

da cui, ricordando le limitazioni per i coefficienti di $\mathcal{L}$ ricavabili dalle ipotesi 4.3, si giunge a

$$\partial_t |\hat{u}(t,\xi)|^2 \geq 2k_A|\xi|^2 |\hat{u}(t,\xi)|^2 - 2nk_B|\xi||\hat{u}(t,\xi)|^2 - 2k_C|\hat{u}(t,\xi)|^2$$

ovvero

$$\partial_t |\hat{u}(t,\xi)|^2 \geq (2k_A|\xi|^2 - 2nk_B|\xi| - 2k_C)|\hat{u}(t,\xi)|^2\,.$$

Il Lemma 4.5 permette di ottenere che

$$|\hat{u}(t,\xi)|^2 \leq e^{(2k_a|\xi|^2 - 2nk_B|\xi| - 2k_C)(t-T)}|\hat{u}(T,\xi)|^2\,.$$

Per $t \in (0,T)$ fissato si ha dunque

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^d e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\epsilon}}} |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \leq \\ \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^d e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\epsilon}} + (2k_a|\xi|^2 - 2nk_B|\xi| - 2k_C)(t-T)} |\hat{u}(T,\xi)|^2 d\xi < +\infty\,,$$

dove l'ultima diseguaglianza discende dal fatto che $u \in \mathcal{E}$ e duque, in particolare, $u \in \mathscr{C}^0([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$, e che, poiché $t < T$,

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \left(1+|\xi|^2\right)^d e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\epsilon}} + (2k_a|\xi|^2 - 2nk_B|\xi| - 2k_C)(t-T)} = 0$$

per ogni $a > 0$ e per ogni $\epsilon > 1$. ■

4.3.1 Una maggiorazione puntuale

Il primo risultato che presentiamo consiste nel fatto che, fissato ξ, si può maggiorare un integrale in t di una funzione che dipende da $|\hat{u}(t,\xi)|$ (dove $\hat{u}$ è la trasformata di Fourier di u) con una somma pesata di due termini: uno dipendente dal valore della trasformata nel punto iniziale dell'intervallo di integrazione, $\hat{u}(0,\xi)$, e uno dipendente dal valore nel punto finale $\hat{u}(\sigma,\xi)$.

Proposizione 4.7 *Sia $u \in \mathcal{E}$ soluzione di (4.38), con $\mathcal{L}$ soddisfacente le ipotesi 4.3, e sia $\hat{u}$ la sua trasformata di Fourier rispetto a x. Esistono $\sigma \in (0,T)$, α, γ e λ, dipendenti da k_A, k_B, k_C, dal valore della norma $\mathscr{C}^\omega$ dei coefficienti della parte principale, da T e da n, tali che se $\phi = \phi_{\lambda,k}$ è la funzione definita al paragrafo 4.2 con $q = k_A$, allora per ogni $\tau \in (0,T)$ e per ogni $\beta > \tau + T$,*

$$\frac{1}{4}\left(k_A|\xi|^2+\gamma\right)\int_0^\sigma e^{(1-\alpha t)|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)}e^{2\gamma t}e^{-2\beta\phi\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)}|\hat{u}(t,\xi)|^2dt \leq$$
$$\leq \phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right)\tau e^{|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)}e^{-2\beta\phi\left(\frac{\tau}{\beta}\right)}|\hat{u}(0,\xi)|^2+$$
$$+(\sigma+\tau)(\gamma+k_A^{-1}|\xi|^2)e^{2\gamma\sigma}e^{-2\beta\phi\left(\frac{\sigma+\tau}{\beta}\right)}|\hat{u}(\sigma,\xi)|^2\,. \quad (4.42)$$

□

Dimostrazione. Presi $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\lambda > 0$, $\tau \in (0,T)$ e $\beta > \tau + T$, definiamo la funzione

$$\hat{v}(t,\xi) = e^{\left(\frac{1-\alpha t}{2}\right)|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)}e^{\gamma t}e^{-\beta\phi\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)}\hat{u}(t,\xi)\,. \quad (4.43)$$

dove ϕ è la la funzione definita al paragrafo 4.2 con $q = k_A$. Calcolando la derivata di $\hat{v}$ rispetto al tempo t si ottiene

$$\partial_t\hat{v}(t,\xi) = -\frac{\alpha}{2}|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)e^{\left(\frac{1-\alpha t}{2}\right)\xi^2\omega\left(\frac{1}{|\xi^2|+1}\right)}e^{\gamma t}e^{-\beta\phi\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)}\hat{u}(t,\xi)+$$
$$+\gamma e^{\left(\frac{1-\alpha t}{2}\right)|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)}e^{\gamma t}e^{-\beta\phi\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)}\hat{u}(t,\xi)+$$
$$-\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)e^{\left(\frac{1-\alpha t}{2}\right)|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)}e^{\gamma t}e^{-\beta\phi\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)}\hat{u}(t,\xi)+$$
$$+e^{\left(\frac{1-\alpha t}{2}\right)|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)}e^{\gamma t}e^{-\beta\phi\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)}\partial_t\hat{u}(t,\xi)$$

che può essere riscritta come

$$\partial_t \hat{v} + \frac{\alpha}{2}|\xi|^2 \omega \left(\frac{1}{|\xi|^2+1} \right) \hat{v} - \gamma \hat{v} + \phi' \left(\frac{t+\tau}{\beta} \right) \hat{v} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t) \xi_i \xi_j \hat{v} + \\ + \imath \sum_{i=1}^{n} b_i(t) \xi_i \hat{v} + c(t) \hat{v} = 0 \,, \quad (4.44)$$

dove la dipendenza di $\hat{v}$ e $\partial_t \hat{v}$ da t e ξ è stata omessa per semplicità di notazione e dove si è sfruttata l'identità

$$\partial_t \hat{u}(t,\xi) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t) \xi_i \xi_j \hat{u}(t,\xi) + \imath \sum_{i=1}^{n} b_i(t) \xi_i \hat{u}(t,\xi) + c(t) \hat{u}(t,\xi) = 0 \,. \quad (4.45)$$

L'equazione complessa coniugata della (4.44) è

$$\partial_t \bar{\hat{v}} + \frac{\alpha}{2}|\xi|^2 \omega \left(\frac{1}{|\xi|^2+1} \right) \bar{\hat{v}} - \gamma \bar{\hat{v}} + \phi' \left(\frac{t+\tau}{\beta} \right) \bar{\hat{v}} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t) \xi_i \xi_j \bar{\hat{v}} + \\ - \imath \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i(t) \xi_i \bar{\hat{v}} + \bar{c}(t) \bar{\hat{v}} = 0 \,. \quad (4.46)$$

Sommando la (4.44) moltiplicata per $(t+\tau)\partial_t \bar{\hat{v}}$ con la (4.46) moltiplicata per $(t+\tau)\partial_t \hat{v}$ si ottiene

$$2(t+\tau)|\partial_t \hat{v}|^2 + \frac{\alpha}{2}(t+\tau)|\xi|^2 \omega \left(\frac{1}{|\xi|^2+1} \right) (\hat{v}\partial_t \bar{\hat{v}} + \bar{\hat{v}} \partial_t \hat{v}) - \gamma (t+\tau)(\hat{v}\partial_t \bar{\hat{v}} + \bar{\hat{v}} \partial_t \hat{v}) + \\ + (t+\tau)\phi' \left(\frac{t+\tau}{\beta} \right) (\hat{v}\partial_t \bar{\hat{v}} + \bar{\hat{v}} \partial_t \hat{v}) - (t+\tau) \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t) \xi_i \xi_j (\hat{v}\partial_t \bar{\hat{v}} + \bar{\hat{v}} \partial_t \hat{v}) + \\ - 2(t+\tau) \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Im \{ b_i(t) \hat{v} \partial_t \bar{\hat{v}} \} + 2(t+\tau) \Re \left\{ c(t) \hat{v} \partial_t \bar{\hat{v}} \right\} = 0 \,. \quad (4.47)$$

Sostituendo ancora, nel secondo addendo, le espressioni di $\partial_t \hat{v}$ e $\partial_t \bar{\hat{v}}$ ricavabili dalle (4.44) e (4.46) si ottiene

$$
\begin{aligned}
2(t+\tau)|\partial_t \hat{v}|^2 - \frac{\alpha^2}{2}(t+\tau)|\xi|^4 \left[\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\right]^2 |\hat{v}|^2 + \\
+ \alpha\gamma(t+\tau)|\xi|^2 \omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)|\hat{v}|^2 - \alpha(t+\tau)|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)|\hat{v}|^2 + \\
+ \alpha(t+\tau)|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)|\hat{v}|^2\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t)\xi_i\xi_j - c(t)\right) + \\
- \gamma(t+\tau)(\hat{v}\partial_t\bar{\hat{v}} + \bar{\hat{v}}\partial_t\hat{v}) + (t+\tau)\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)(\hat{v}\partial_t\bar{\hat{v}} + \bar{\hat{v}}\partial_t\hat{v}) + \\
- (t+\tau)(\hat{v}\partial_t\bar{\hat{v}} + \bar{\hat{v}}\partial_t\hat{v})\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t)\xi_i\xi_j + \\
- 2(t+\tau)\sum_{i=1}^{n}\xi_i \Im\{b_i(t)\hat{v}\partial_t\bar{\hat{v}}\} + 2(t+\tau)\Re\left\{c(t)\hat{v}\partial_t\bar{\hat{v}}\right\} = 0\,. \quad (4.48)
\end{aligned}
$$

Estendiamo, ora, il valore delle funzioni $a_{i,j}$ a tutto l'asse reale, ponendo $a_{i,j}(t) = a_{i,j}(0)$ se $t < 0$ e $a_{i,j}(T)$ se $t > T$ e definiamo

$$
a^{\epsilon}_{i,j}(t) \triangleq (\rho_\epsilon * a_{i,j})(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(t-s)a_{i,j}(s)ds
$$

dove ρ_ϵ è un mollificatore di classe $\mathscr{C}^\infty$.

Supponiamo $\alpha > 1/T$ e integriamo tra 0 e s con $s \leq \sigma = 1/\alpha$. Otteniamo

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^s (t+\tau)|\partial_t\hat{v}(t,\xi)|^2dt - \frac{\alpha^2}{2}|\xi|^4\left[\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\right]^2\int_0^s (t+\tau)|\hat{v}(t,\xi)|^2dt+\\
&\qquad \underbrace{+\,\alpha\gamma|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\int_0^s (t+\tau)|\hat{v}(t,\xi)|^2dt}_{(A)}+\\
&\qquad -\alpha|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\int_0^s (t+\tau)\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)|\hat{v}(t,\xi)|^2dt+\\
&\qquad +\alpha|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\int_0^s (t+\tau)\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(t)\xi_i\xi_j|\hat{v}(t,\xi)|^2dt+\\
&\qquad -\alpha|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\int_0^s (t+\tau)c(t)|\hat{v}(t,\xi)|^2dt+\\
&\qquad +\gamma\int_0^s |\hat{v}(t,\xi)|^2dt - \gamma(s+\tau)|\hat{v}(s,\xi)|^2+\\
&+\underbrace{\gamma\tau|\hat{v}(0,\xi)|^2}_{(B)}+\int_0^s\left[-\phi''\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)-\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)\right]|\hat{v}(t,\xi)|^2dt+\\
&\qquad +\underbrace{\phi'\left(\frac{s+\tau}{\beta}\right)(s+\tau)|\hat{v}(s,\xi)|^2}_{(C)}-\phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right)\tau|\hat{v}(0,\xi)|^2+\\
&\qquad \underbrace{-\int_0^s (t+\tau)[\hat{v}(t,\xi)\partial_t\bar{\hat{v}}(t,\xi)+\bar{\hat{v}}(t,\xi)\partial_t\hat{v}(t,\xi)]\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(t)\xi_i\xi_j dt}_{(D)}+\\
&\qquad -2\sum_{i=1}^n\xi_i\int_0^s (t+\tau)\Im\{b_i(t)\hat{v}(t,\xi)\partial_t\bar{\hat{v}}(t,\xi)\}dt+\\
&\qquad\qquad +2\int_0^s (t+\tau)\Re\{c(t)\hat{v}(t,\xi)\partial_t\bar{\hat{v}}(t,\xi)\}dt = 0\,, \qquad (4.49)
\end{aligned}
$$

dove, per semplificare la successiva trattazione, alcuni termini sono stati sinteticamente identificati con le lettere dalla A alla D. I termini (A) e (B) sono positivi e, poché ϕ è strettamente crescente (si veda la sezione 4.2), anche il termine (C) è positivo. Di conseguenza dalla (4.49), sostituendo ancora, nel termine (D), $a_{i,j}(t)$ con $a_{i,j}(t) + a^{\epsilon}_{i,j}(t) - a^{\epsilon}_{i,j}(t)$, si ricava

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{2\int_0^s (t+\tau)|\partial_t \hat{v}(t,\xi)|^2 dt}_{(E)} - \underbrace{\frac{\alpha^2}{2}|\xi|^4 \left[\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\right]^2 \int_0^s (t+\tau)|\hat{v}(t,\xi)|^2 dt}_{(F)} + \\
&\quad - \underbrace{\alpha|\xi|^2 \omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right) \int_0^s (t+\tau)\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)|\hat{v}(t,\xi)|^2 dt}_{(G)} + \\
&\quad + \underbrace{\alpha|\xi|^2 \omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right) \int_0^s (t+\tau) \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(t)\xi_i\xi_j |\hat{v}(t,\xi)|^2 dt}_{(H)} + \\
&\quad - \underbrace{\alpha|\xi|^2 \omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right) \int_0^s (t+\tau)c(t)|\hat{v}(t,\xi)|^2 dt}_{(I)} + \underbrace{\gamma \int_0^s |\hat{v}(t,\xi)|^2 dt}_{(L)} + \\
&\quad - \underbrace{\gamma(s+\tau)|\hat{v}(s,\xi)|^2}_{(M)} + \underbrace{\int_0^s \left[-\phi''\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right) - \phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)\right]|\hat{v}(t,\xi)|^2 dt}_{(N)} + \\
&\quad - \underbrace{\phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right)\tau|\hat{v}(0,\xi)|^2}_{(O)} + \underbrace{\int_0^s 2(t+\tau)\Re\{\hat{v}(t,\xi)\partial_t \bar{\hat{v}}(t,\xi)\} \sum_{i,j=1}^n \widetilde{a}^{\epsilon}_{i,j}(t)\xi_i\xi_j dt}_{(P)} + \\
&\quad + \underbrace{\int_0^s |\hat{v}(t,\xi)|^2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial t}[(t+\tau)a^{\epsilon}_{i,j}(t)]\xi_i\xi_j dt}_{(Q)} + \underbrace{\tau \sum_{i,j=1}^n a^{\epsilon}_{i,j}(0)\xi_i\xi_j |\hat{v}(0,\xi)|^2}_{(R)} + \\
&\quad - \underbrace{(s+\tau)\sum_{i,j=1}^n a^{\epsilon}_{i,j}(s)\xi_i\xi_j|\hat{v}(s,\xi)|^2}_{(S)} - \underbrace{2\sum_{i=1}^n \xi_i \int_0^s (t+\tau)\Im\{b_i(t)\hat{v}(t,\xi)\partial_t\bar{\hat{v}}(t,\xi)\}dt}_{(T)} \\
&\quad + \underbrace{2\int_0^s (t+\tau)\Re\{c(t)\hat{v}(t,\xi)\partial_t\bar{\hat{v}}(t,\xi)\}dt}_{(U)} \le 0\,, \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

dove $\widetilde{a}^{\epsilon}_{i,j} = a^{\epsilon}_{i,j} - a_{i,j}$ per ogni $i, j = 1, \ldots, n$. Consideriamo ora ciascun termine singolarmente, cominciando con il termine (P). Per le proprietà del modulo di continuità ω, esiste una costante C_0 tale che

$$|a^{\epsilon}_{i,j}(t) - a_{i,j}(t)| \leq C_0\omega(\epsilon)\,,$$

per ogni ϵ, per ogni i, per ogni j e per ogni t. Da cui

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}[a^{\epsilon}_{i,j}(t) - a_{i,j}(t)]\xi_i\xi_j\right| \leq \sum_{i,j=1}^{n}|a^{\epsilon}_{i,j}(t) - a_{i,j}(t)||\xi_i\xi_j| \leq C_0 n^2\omega(\epsilon)|\xi|^2\,,$$

dove si è utilizzato il fatto che, per ogni i, $|\xi_i| \leq |\xi|$. Di conseguenza, scegliendo

$$\epsilon = \frac{1}{|\xi|^2+1}\,,$$

si ottiene

$$|(P)| \leq \int_0^s C_0 n^2|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)(t+\tau)2|\hat{v}(t,\xi)\partial_t\bar{\hat{v}}(t,\xi)|dt\,.$$

Utilizzando la diseguaglianza di Young si ricava

$$|(P)| \leq \int_0^s (t+\tau)|\partial_t\hat{v}(t,\xi)|^2dt + C_0^2 n^4|\xi|^4\left[\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\right]^2\int_0^s(t+\tau)|\hat{v}(t,\xi)|^2dt$$

e dunque

$$(P) \geq \underbrace{-\int_0^s (t+\tau)|\partial_t\hat{v}(t,\xi)|^2dt}_{(P_1)}\,\underbrace{-C_0^2 n^4|\xi|^4\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\int_0^s(t+\tau)|\hat{v}(t,\xi)|^2dt}_{(P_2)}\,,$$

dove si è sfruttato il fatto che $\omega(s) \in [0,1]$ per ogni $s \in [0,1]$ e dunque $-\omega(s)^2 > -\omega(s)$ per ogni $s \in [0,1]$. Si noti che il termine (P_1) è uguale a $-(E)$; un primo risultato è dunque

$$2(E) + (P) \geq 2(E) + (P_1) + (P_2) = (E) + (P_2)\,. \tag{4.51}$$

Consideriamo ora il termine (Q). Per le proprietà del modulo di continuità, esiste una costante C_1 tale che

$$|(a^{\epsilon}_{i,j})'(t)| \leq C_1\frac{\omega(\epsilon)}{\epsilon}\,,$$

per ogni ϵ, per ogni i, per ogni j e per ogni t. Di conseguenza, scegliendo ancora

$$\epsilon = \frac{1}{|\xi|^2+1}\,,$$

si ricava

$$
\begin{aligned}
(Q) = \int_0^s |\hat{v}(t,\xi)|^2 \sum_{i,j=1}^n (t+\tau)(a^\epsilon_{i,j})'(t)\xi_i\xi_j dt + \\
+ \int_0^s |\hat{v}(t,\xi)|^2 \sum_{i,j=1}^n a^\epsilon_{i,j}(t)\xi_i\xi_j dt \geq \\
\geq \underbrace{-C_1 n^2 |\xi|^2(|\xi|^2+1)\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\int_0^s (t+\tau)|\hat{v}(t,\xi)|^2 dt}_{(Q_1)} + \\
+ \underbrace{\int_0^s \sum_{i,j=1}^n a^\epsilon_{i,j}(t)\xi_i\xi_j |\hat{v}(t,\xi)|^2 dt}_{(Q_2)} .
\end{aligned}
$$

Se α è preso tale che

$$
\alpha k_A \geq 2(n^4 C_0 + n^2 C_1) ,
$$

allora, sfruttando il fatto che

$$
(H) \geq \alpha k_A |\xi|^4 \omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\int_0^s (t+\tau)|\hat{v}(t,\xi)|^2 dt ,
$$

si ottiene

$$
\frac{1}{2}(H) + (P_2) + (Q_1) \geq \underbrace{-C_1 n^2 |\xi|^2 \omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\int_0^s (t+\tau)|\hat{v}(t,\xi)|^2 dt}_{(Q_3)}
$$

che, insieme alla (4.51), fornisce

$$
2(E) + (H) + (P) + (Q) \geq (E) + \frac{1}{2}(H) + (Q_2) + (Q_3) . \tag{4.52}
$$

Sostituendo la (4.52) nella (4.50), e tenendo conto del fatto che il termine

(R) è positivo o nullo, si ricava

$$
\begin{aligned}
&(E)+\frac{1}{2}(H)+(Q_2)\underbrace{-\frac{\alpha^2}{2}|\xi|^4\left[\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right)\right]^2\int_0^s(t+\tau)|\hat v(t,\xi)|^2dt}_{(F)}+\\
&\underbrace{-C_1n^2|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\int_0^s(t+\tau)|\hat v(t,\xi)|^2dt}_{(Q_3)}+\\
&-\underbrace{\alpha|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right)\int_0^s(t{+}\tau)\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)|\hat v(t,\xi)|^2dt}_{(G)}+\\
&-\underbrace{\alpha|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right)\int_0^s(t{+}\tau)c(t)|\hat v(t,\xi)|^2dt}_{(I)}+\underbrace{\gamma\int_0^s|\hat v(t,\xi)|^2dt}_{(L)}+\\
&-\underbrace{\gamma(s+\tau)|\hat v(s,\xi)|^2}_{(M)}+\underbrace{\int_0^s\left[-\phi''\left(\frac{t{+}\tau}{\beta}\right)\left(\frac{t{+}\tau}{\beta}\right)-\phi'\left(\frac{t{+}\tau}{\beta}\right)\right]|\hat v(t,\xi)|^2dt}_{(N)}+\\
&-\underbrace{\phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right)\tau|\hat v(0,\xi)|^2}_{(O)}\underbrace{-(s+\tau)\sum_{i,j=1}^n a^\epsilon_{i,j}(s)\xi_i\xi_j|\hat v(s,\xi)|^2}_{(S)}+\\
&\underbrace{-2\sum_{i=1}^n\xi_i\int_0^s(t{+}\tau)\Im\{b_i(t)\hat v(t,\xi)\partial_t\bar{\hat v}(t,\xi)\}dt}_{(T)}\\
&\underbrace{+2\int_0^s(t+\tau)\Re\{c(t)\hat v(t,\xi)\partial_t\bar{\hat v}(t,\xi)\}dt}_{(U)}\le 0\,. \qquad (4.53)
\end{aligned}
$$

Per il termine (T) possiamo ricavare

$$
\begin{aligned}
(T) \leq \int_0^s 2nk_B|\xi|(t+\tau)|\hat{v}(t,\xi)||\partial_t\bar{\hat{v}}(t,\xi)|dt \leq \\
\leq \int_0^s (t+\tau)\left(2n^2k_B^2|\xi|^2|\hat{v}(t,\xi)|^2 + \frac{1}{2}|\partial_t\hat{v}(t,\xi)|^2\right)dt = \\
= 2n^2k_B^2|\xi|^2\int_0^s (t+\tau)|\hat{v}(t,\xi)|^2dt + \frac{1}{2}\int_0^s (t+\tau)|\partial_t\hat{v}(t,\xi)|^2dt
\end{aligned}
$$

che implica

$$
-(T) \geq -\underbrace{2(T+\tau)n^2k_B^2|\xi|^2\int_0^s |\hat{v}(t,\xi)|^2dt}_{(T_1)} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^s (t+\tau)|\partial_t\hat{v}(t,\xi)|^2dt}_{(T_2)}\,.
$$

Analogamente per (U),

$$
\begin{aligned}
(U) \leq \int_0^s 2k_C(t+\tau)|\hat{v}(t,\xi)||\partial_t\bar{\hat{v}}(t,\xi)|dt \leq \\
\leq \int_0^s (t+\tau)\left(2k_C^2|\hat{v}(t,\xi)|^2 + \frac{1}{2}|\partial_t\hat{v}(t,\xi)|^2\right)dt = \\
= 2k_C^2\int_0^s (t+\tau)|\hat{v}(t,\xi)|^2dt + \frac{1}{2}\int_0^s (t+\tau)|\partial_t\hat{v}(t,\xi)|^2dt
\end{aligned}
$$

che implica

$$
(U) \geq -\underbrace{2(T+\tau)k_C^2\int_0^s |\hat{v}(t,\xi)|^2dt}_{(U_1)} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^s (t+\tau)|\partial_t\hat{v}(t,\xi)|^2dt}_{(U_2)}\,.
$$

Sia, ora, γ^* tale che, per ogni ξ,

$$
\begin{aligned}
\gamma^* + k_A|\xi|^2 - 8T(n^2k_B^2|\xi|^2 + k_C^2) \geq \\
\geq 2T\alpha|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\left[\alpha|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right) + 2k_c + \frac{2C_1n^2}{\alpha}\right]\,.
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

Si noti che la (4.54) ammette soluzione a patto che la quantità

$$
|\xi|^2\left[\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\right]^2
$$

sia limitata per $\xi \to \infty$ ma ciò è garantito dall'ipotesi 2.2, ovvero

$$\mathscr{C}^{\omega} \subset \bigcap_{\alpha<1} \mathscr{C}^{0,\alpha}\,.$$

Se fissiamo $\gamma > \gamma^*$, la (4.54) assicura che

$$\frac{1}{2}(L) + \frac{1}{2}(Q_2) - (F) - (T_1) - (U_1) - (I) + (Q_3) \geq 0\,. \tag{4.55}$$

Utilizzando la (4.55) nella (4.53) e tenendo conto del fatto che $(E) = (T_2) + (U_2)$ si ricava

$$\frac{1}{2}(H)+\frac{1}{2}(Q_2)-\underbrace{\alpha|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\int_0^s (t+\tau)\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)|\hat{v}(t,\xi)|^2 dt}_{(G)}+\frac{1}{2}(L)+$$
$$-\underbrace{\gamma(s+\tau)|\hat{v}(s,\xi)|^2}_{(M)}+\underbrace{\int_0^s \left[-\phi''\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)-\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)\right]|\hat{v}(t,\xi)|^2 dt}_{(N)}+$$
$$-\underbrace{\phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right)\tau|\hat{v}(0,\xi)|^2}_{(O)}-\underbrace{(s+\tau)\sum_{i,j=1}^{n} a^{\epsilon}_{i,j}(s)\xi_i\xi_j|\hat{v}(s,\xi)|^2}_{(S)} \leq 0\,. \tag{4.56}$$

Ricordiamo, ora, che la funzione ϕ è soluzione dell'equazione

$$-y\phi''(y) = \lambda(\phi'(y))^2\omega\left(\frac{k_A}{\phi'(y)}\right)\,, \tag{4.57}$$

per qualche costante positiva λ. Siccome $\omega(z)/z > 1$ per ogni $z \in (0,1]$ (si veda la Proprietà 2.2), la (4.57) implica

$$-\frac{1}{2}y\phi''(y) > \frac{\lambda k_A}{2}\phi'(y)\,. \tag{4.58}$$

Dunque, se ϕ è soluzione di (4.57) con $\lambda > 2/k_A$ si ha

$$(N) \geq -\frac{1}{2}\int_0^s \phi''\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)|\hat{v}(t,\xi)|^2 dt\,.$$

Consideriamo ora i seguenti due casi. Se

$$\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right) \leq \frac{(|\xi|^2+1)k_A}{4}\,,$$

allora

$$(G) \leq \frac{1}{4}\alpha k_A|\xi|^2(|\xi|^2+1)\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\int_0^s (t+\tau)|\hat{v}(t,\xi)|^2 dt$$

e dunque, se

$$\gamma > \max\left\{\gamma^*, 8T\alpha k_A\omega\left(\frac{1}{2}\right)\right\}, \tag{4.59}$$

si ha

$$\frac{1}{2}(H) + \frac{1}{4}(L) \geq (G)\,.$$

Infatti se $|\xi| > 1$, allora

$$\frac{1}{4}\alpha k_A|\xi|^2(|\xi|^2+1)\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\int_0^s (t+\tau)|\hat{v}(t,\xi)|^2 dt \leq \frac{1}{2}(H)\,.$$

Se, invece, $|\xi| \leq 1$, allora

$$(|\xi|^2+1)|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right) \leq 2\omega\left(\frac{1}{2}\right)\,.$$

Se, d'altro canto,

$$\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right) > \frac{(|\xi|^2+1)k_A}{4}\,,$$

allora, siccome la funzione $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ definita da $g(y) = \omega(y)/y$ è decrescente, si ha

$$(|\xi|^2+1)\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right) = \frac{\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)}{\frac{1}{|\xi|^2+1}} \leq$$

$$\leq \frac{\omega\left(\frac{k_A}{4\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)}\right)}{\frac{k_A}{4\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)}} = \frac{4}{k_A}\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)\omega\left(\frac{k_A}{4\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)}\right)$$

e, dato che ω è crescente,

$$(|\xi|^2+1)\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right) \leq \frac{4}{k_A}\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)\omega\left(\frac{k_A}{\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)}\right)\,.$$

Di conseguenza, se ϕ è soluzione di (4.57) con $\lambda > 4/k_A$, si ha

$$
\begin{aligned}
(N) &\geq -\frac{1}{2}\int_0^s \phi''\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)|\hat{v}(t,\xi)|^2 dt = \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_0^s \phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)\left(\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)\omega\left(\frac{k_A}{\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)}\right)\right)|\hat{v}(t,\xi)|^2 dt \geq \\
&\geq \frac{\lambda k_A}{8}(|\xi|^2+1)\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\int_0^s \phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)|\hat{v}(t,\xi)|^2 dt\,. \qquad (4.60)
\end{aligned}
$$

Se, poi,

$$
\lambda > \max\left(\frac{4}{k_A}, \frac{16T\alpha}{k_A}\right),
$$

allora

$$
(N) \geq \alpha(|\xi|^2+1)\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)\int_0^s (t+\tau)\phi'\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)|\hat{v}(t,\xi)|^2 dt \geq (G)\,.
$$

In conclusione, tenendo conto che $(N) \geq 0$, $(H) \geq 0$, $(L) \geq 0$ e $(G) \geq 0$, si ha

$$
\frac{1}{2}(H) + \frac{1}{4}(L) + (N) - (G) \geq 0\,. \qquad (4.61)
$$

Utilizzando ancora (4.61) nella (4.56) e tenendo conto del fatto che

$$
\frac{1}{2}(Q_2) \geq \frac{1}{2}k_A|\xi|^2\int_0^s |\hat{v}(t,\xi)|^2 dt\,,
$$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{k_A|\xi|^2}{2} + \frac{\gamma}{4}\right)\int_0^s |\hat{v}(t,\xi)|^2 dt \leq \\
&\qquad \leq \phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right)\tau|\hat{v}(0,\xi)|^2 + (s+\tau)(\gamma + k_A^{-1}|\xi|^2)|\hat{v}(s,\xi)|^2\,. \qquad (4.62)
\end{aligned}
$$

Sostituendo la (4.43) nella (4.62) si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(k_A|\xi|^2+\gamma\right)\int_0^s e^{(1-\alpha t)|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)}e^{2\gamma t}e^{-2\beta\phi\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)}|\hat{u}(t,\xi)|^2 dt \leq \\
&\qquad \leq \phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right)\tau e^{|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)}e^{-2\beta\phi\left(\frac{\tau}{\beta}\right)}|\hat{u}(0,\xi)|^2 + \\
&+ (s+\tau)(\gamma + k_A^{-1}|\xi|^2)e^{(1-\alpha s)|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)}e^{2\gamma s}e^{-2\beta\phi\left(\frac{s+\tau}{\beta}\right)}|\hat{u}(s,\xi)|^2\,. \qquad (4.63)
\end{aligned}
$$

La (4.63) vale per ogni $s \in (0,\sigma]$. Prendendo proprio $s = \sigma$ si ottiene la (4.42). ■

4.3.2 Una maggiorazione integrale

La Proposizione 4.7 fornisce una maggiorazione puntuale della trasformata di Fourier di u che ci permetterà di ottenere, per integrazione, un'analoga maggiorazione per la norma di u. Per questo risultato avremo bisogno del seguente lemma.

Lemma 4.8 *Se $u \in \mathcal{E}$ è soluzione di (4.38), allora esite $\bar{\gamma}$, indipendente da ξ, tale che, per ogni ξ, $e^{2\bar{\gamma}t}|\hat{u}(t,\xi)|^2$ è (debolmente) crescente in t.* □

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che esiste $\bar{\gamma}$ tale che

$$\partial_t(e^{2\bar{\gamma}t}\hat{u}(t,\xi)\bar{\hat{u}}(t,\xi)) \geq 0\,.$$

Si noti che

$$\begin{aligned}\partial_t(e^{2\bar{\gamma}t}\hat{u}(t,\xi)\bar{\hat{u}}(t,\xi)) &= 2\bar{\gamma}e^{2\bar{\gamma}t}|\hat{u}(t,\xi)|^2+\\ &+ e^{2\bar{\gamma}t}\partial_t(\hat{u}(t,\xi))\bar{\hat{u}}(t,\xi) + e^{2\bar{\gamma}t}\hat{u}(t,\xi)\partial_t(\bar{\hat{u}}(t,\xi))\,. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Dalla (4.45), moltiplicando per $\bar{\hat{u}}(t,\xi)$ si ottiene

$$\begin{aligned}&\bar{\hat{u}}(t,\xi)\partial_t\hat{u}(t,\xi) =\\ &\quad= \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t)\xi_i\xi_j|\hat{u}(t,\xi)|^2 - \imath\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\xi_i|\hat{u}(t,\xi)|^2 + c(t)|\hat{u}(t,\xi)|^2\end{aligned}$$

e anche, prendendo i valori complessi coniugati in entrambi i membri,

$$\begin{aligned}&\hat{u}(t,\xi)\partial_t\bar{\hat{u}}(t,\xi) =\\ &\quad= \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t)\xi_i\xi_j|\hat{u}(t,\xi)|^2 + \imath\sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i(t)\xi_i|\hat{u}(t,\xi)|^2 + \bar{c}(t)|\hat{u}(t,\xi)|^2\end{aligned}$$

e, dunque,

$$\begin{aligned}\partial_t(e^{2\bar{\gamma}t}\hat{u}(t,\xi)\bar{\hat{u}}(t,\xi)) &= 2\bar{\gamma}e^{2\bar{\gamma}t}|\hat{u}(t,\xi)|^2 + 2e^{2\bar{\gamma}t}\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t)\xi_i\xi_j|\hat{u}(t,\xi)|^2+\\ &+ 2e^{2\bar{\gamma}t}\sum_{i=1}^{n}\Im\{b_i(t)\}\xi_i|\hat{u}(t,\xi)|^2 + 2e^{2\bar{\gamma}t}\Re\{c(t)\}|\hat{u}(t,\xi)|^2\,.\end{aligned} \tag{4.65}$$

Dalla (4.65) si ricava

$$\partial_t(e^{2\bar{\gamma}t}\hat{u}(t,\xi)\bar{\hat{u}}(t,\xi)) \geq 2e^{2\bar{\gamma}t}|\hat{u}(t,\xi)|^2(\bar{\gamma} + k_A|\xi|^2 - nk_B|\xi| - k_C)\,.$$

Ora, se $|\xi| \geq nk_B/k_A$, allora $k_A|\xi|^2 > nk_B|\xi|$ e dunque, se $\bar{\gamma} > k_C$, si ha

$$\bar{\gamma} + k_A|\xi|^2 - nk_B|\xi| - k_C \geq 0\,.$$

Se, d'altro canto $|\xi| < nk_B/k_A$, allora $-|\xi| > -nk_B/k_A$ e dunque $-nk_B|\xi| > -n^2k_B^2/k_A$. In conclusione, se $\bar{\gamma} > 2\max\{k_C, n^2k_B^2/k_A\}$, si ha

$$\bar{\gamma} + k_A|\xi|^2 - nk_B|\xi| - k_C \geq 0\,.$$

■

Ritorniamo ora alla Proposizione 4.7; essa, per integrazione nella variabile ξ, permette di ottenere il seguente risultato.

Proposizione 4.9 *Sia $u \in \mathcal{E}$ soluzione di (4.38), con $\mathcal{L}$ soddisfacente le ipotesi 4.3. Esistono $\sigma \in (0,T)$ e C, dipendenti da k_A, da k_B, da k_C, da ω da T e da n, ed esiste $\bar{\sigma} < \sigma$ tali che, se ϕ è soluzione dell'equazione (4.37) con $q = k_A$, allora per ogni $\beta > \tau + T$ e per ogni $\tau \leq \sigma/4$*

$$\sup_{z\in[0,\bar{\sigma}]} \|u(z,\cdot)\|^2_{H^1_{\frac{1}{2},\omega}} \leq$$

$$\leq Ce^{-\sigma\phi'\left(\frac{\sigma+\tau}{\beta}\right)} \left[\phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right) e^{-2\beta\phi\left(\frac{\tau}{\beta}\right)} \|u(0,\cdot)\|^2_{H^0_{1,\omega}} + \|u(\sigma,\cdot)\|^2_{H^1}\right]. \quad (4.66)$$

□

Dimostrazione. Si osservi che nella (4.42) la funzione integranda è positiva e, di conseguenza, si può minorare il termine a sinistra integrando su un intervallo contenuto in $[0,\sigma]$. Siano $\tau \leq \sigma/4$ e $\bar{\sigma} = \sigma/8$ e sia z un valore tale che $0 < z \leq \bar{\sigma}$; si ha

$$[z, 2z+\tau] \subset [0, \sigma/2]\,;$$

integrando anche in ξ e tenendo conto del fatto che, per ogni $t \in [0,\sigma/2]$,

$$1 - \alpha t \geq 1 - \alpha\frac{\sigma}{2} \geq \frac{1}{2}\,,$$

si ottiene

$$\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n} \left(k_A|\xi|^2 + \gamma\right) e^{\frac{1}{2}|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)} \int_z^{2z+\tau} e^{2\gamma t} e^{-2\beta\phi\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)} |\hat{u}(t,\xi)|^2 dt d\xi \leq$$

$$\leq \tau\phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right) e^{-2\beta\phi\left(\frac{\tau}{\beta}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)} |\hat{u}(0,\xi)|^2 d\xi +$$

$$+ (\sigma+\tau)e^{2\gamma\sigma} e^{-2\beta\phi\left(\frac{\sigma+\tau}{\beta}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} (\gamma + k_A^{-1}|\xi|^2)|\hat{u}(\sigma,\xi)|^2 d\xi\,. \quad (4.67)$$

Siano, ora, $\bar{\bar{\gamma}}$ un valore di γ che verifica la (4.59) e $\bar{\gamma}$ fornito dal Lemma 4.8 e sia

$$\gamma > \max\{\bar{\bar{\gamma}}, \bar{\gamma}\}\,.$$

È facile vedere che, oltre al risultato del Lemma 4.8, si ha che $e^{2\gamma z} \geq 1$ per ogni $z \geq 0$ e che, siccome ϕ è crescente,

$$e^{-2\beta\phi\left(\frac{t+\tau}{\beta}\right)} \geq e^{-2\beta\phi\left(\frac{2(z+\tau)}{\beta}\right)}$$

per ogni $t < 2z + \tau$. Con queste considerazioni, la (4.67) fornisce

$$\begin{aligned} c_1(z+\tau)\int_{\mathbb{R}^n}(|\xi|^2+1)e^{\frac{1}{2}|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)}|\hat{u}(z,\xi)|^2 d\xi \leq \\ \leq \tau\phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right)e^{2\beta\left[\phi\left(\frac{2(z+\tau)}{\beta}\right)-\phi\left(\frac{\tau}{\beta}\right)\right]}\int_{\mathbb{R}^n}e^{|\xi|^2\omega\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right)}|\hat{u}(0,\xi)|^2 d\xi + \\ + c_2(\sigma+\tau)e^{2\gamma\sigma}e^{2\beta\left[\phi\left(\frac{2(z+\tau)}{\beta}\right)-\phi\left(\frac{\sigma+\tau}{\beta}\right)\right]}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)|\hat{u}(\sigma,\xi)|^2 d\xi\,, \end{aligned} \tag{4.68}$$

dove si sono introdotte le costanti

$$c_1 \triangleq \frac{1}{4}\min\{k_A,\gamma\}\,, \qquad c_2 \triangleq \max\left\{\gamma, k_A^{-1}\right\}\,.$$

Dividendo per τ e tenendo conto del fatto che $(z+\tau)/\tau > 1$ e che ϕ è negativa, è facile vedere che la (4.68) implica

$$\begin{aligned} c_1\|u(z,\cdot)\|^2_{H^1_{\frac{1}{2},\omega}} \leq \phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right)e^{2\beta\left[\phi\left(\frac{2(z+\tau)}{\beta}\right)-\phi\left(\frac{\tau}{\beta}\right)\right]}\|u(0,\cdot)\|^2_{H^0_{1,\omega}} + \\ + c_2\frac{\sigma+\tau}{\tau}e^{2\gamma\sigma}e^{2\beta\left[\phi\left(\frac{2(z+\tau)}{\beta}\right)-\phi\left(\frac{\sigma+\tau}{\beta}\right)\right]}\|u(\sigma,\cdot)\|^2_{H^1} \leq \\ \leq \phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right)e^{2\beta\left[\phi\left(\frac{2(z+\tau)}{\beta}\right)-\phi\left(\frac{\tau}{\beta}\right)-\phi\left(\frac{\sigma+\tau}{\beta}\right)\right]}\|u(0,\cdot)\|^2_{H^0_{1,\omega}} + \\ + c_2\frac{\sigma+\tau}{\tau}e^{2\gamma\sigma}e^{2\beta\left[\phi\left(\frac{2(z+\tau)}{\beta}\right)-\phi\left(\frac{\sigma+\tau}{\beta}\right)\right]}\|u(\sigma,\cdot)\|^2_{H^1}\,, \end{aligned} \tag{4.69}$$

Con riferimento alla funzione ϕ, si può notare che, poiché ϕ è crescente,

$$2(z+\tau) \leq \frac{\sigma}{2} + \tau \quad \Rightarrow \quad \phi\left(\frac{2(z+\tau)}{\beta}\right) \leq \phi\left(\frac{\frac{\sigma}{2}+\tau}{\beta}\right)\,.$$

Inoltre, poiché ϕ è anche concava,

$$\phi\left(\frac{\sigma+\tau}{\beta}\right) - \phi\left(\frac{\frac{\sigma}{2}+\tau}{\beta}\right) \geq \frac{\sigma}{2\beta}\phi'\left(\frac{\sigma+\tau}{\beta}\right)\,.$$

Di conseguenza dalla (4.69) si ricava

$$c_1\|u(z,\cdot)\|^2_{H^1_{\frac{1}{2},\omega}} \leq$$
$$\leq e^{-\sigma\phi'\left(\frac{\sigma+\tau}{\beta}\right)}\left[\phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right)e^{-2\beta\phi\left(\frac{\tau}{\beta}\right)}\|u(0,\cdot)\|^2_{H^0_{1,\omega}}+c_2\frac{\sigma+\tau}{\tau}e^{2\gamma\sigma}\|u(\sigma,\cdot)\|^2_{H^1}\right], \tag{4.70}$$

ovvero

$$\|u(z,\cdot)\|^2_{H^1_{\frac{1}{2},\omega}} \leq$$
$$\leq Ce^{-\sigma\phi'\left(\frac{\sigma+\tau}{\beta}\right)}\left[\phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right)e^{-2\beta\phi\left(\frac{\tau}{\beta}\right)}\|u(0,\cdot)\|^2_{H^0_{1,\omega}}+\|u(\sigma,\cdot)\|^2_{H^1}\right], \tag{4.71}$$

dove

$$C=\max\left\{\frac{1}{c_1},\frac{c_2(\sigma+\tau)e^{2\gamma\sigma}}{c_1\tau}\right\}.$$

La (4.71) vale per ogni $z\in[0,\bar{\sigma}]$ e dunque da essa discende immediatamente la (4.66). ■

4.3.3 Dimostrazione del Teorema 4.4

La Proposizione 4.9 stabilisce, in particolare, che la norma di u in un qualunque istante del sottointervallo $[0,\bar{\sigma}]\subset[0,\sigma]$ è limitata da una quantità dipendente dal valore della norma negli istanti iniziale, $\|u(0,\cdot)\|_{H^0_{1,\omega}}$, e finale, $\|u(\sigma,\cdot)\|_{H^1}$. Tuttavia, per ottenere un risultato di stabilità il termine a destra nell'equazione (4.71) deve tendere a zero al tendere a zero di $\|u(0,\cdot)\|_{H^0_{1,\omega}}$, cosa che non è immediatamente verificabile dalla (4.71). Il seguente Lemma ci permetterà di scegliere β in modo da scrivere la (4.71) in una forma dalla quale la proprietà di stabilità sia piú facilmente ricavabile.

Lemma 4.10 *Sia ϕ soluzione dell'equazione (4.37) con $\lambda>0$ e $q>0$ qualunque. Per ogni $\tau>0$ e per ogni $y<1/q$, esiste un unico $\beta>\tau$ tale che*

$$e^{-2\beta\phi\left(\frac{\tau}{\beta}\right)}\phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right)=\frac{1}{y}. \tag{4.72}$$

Inoltre, detta β^* la funzione che a y associa il massimo tra la soluzione della (4.72) e il valore $T+\tau$, si ha

$$\lim_{y\to 0}e^{-\sigma\phi'\left(\frac{\sigma+\tau}{\beta^*(y)}\right)}=0. \tag{4.73}$$

per ogni $\sigma\in(0,T]$. □

Dimostrazione. L'equazione (4.72) è equivalente a

$$2\beta\phi\left(\frac{\tau}{\beta}\right) - \log\left(\phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right)\right) = \log(y)\,.$$

Sia $f_\tau : [\tau, +\infty] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f_\tau(\beta) = 2\beta\phi\left(\frac{\tau}{\beta}\right) - \log\left(\phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right)\right)\,.$$

Si ricava facilmente che

$$\lim_{\beta\to+\infty} f_\tau(\beta) = -\infty\,, \qquad \lim_{\beta\to\tau^+} f_\tau(\beta) = -\log(\phi'(1)) = -\log(q)\,.$$

Inoltre,

$$\frac{\partial f_\tau(\beta)}{\partial\beta} = 2\phi\left(\frac{\tau}{\beta}\right) - \frac{2\tau}{\beta}\phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right) + \frac{\tau}{\beta^2\phi'\left(\frac{\tau}{\beta}\right)}\phi''\left(\frac{\tau}{\beta}\right) < 0\,.$$

Dunque f_τ è monotona decrescente e assume tutti i valori tra $-\infty$ e $-\log q$. Ora, per le ipotesi su y, è sempre $\log y < -\log q$; di conseguenza esiste sempre $\beta > \tau$ tale che $f_\tau(\beta) = \log y$. Il primo enunciato è cosí provato. Si noti, ora che, detta $\widehat{\beta} : (0, 1/q) \to (\tau, +\infty)$ la funzione che manda y nel valore $f_\tau^{-1}(\log y)$, si ha

$$\lim_{y\to 0} \beta^*(y) = \lim_{y\to 0} \widehat{\beta}(y) = +\infty\,.$$

Per concludere la dimostrazione basta osservare che

$$\lim_{\beta\to+\infty} e^{-\sigma\phi'\left(\frac{\sigma+\tau}{\beta}\right)} = 0\,,$$

per ogni $\tau > 0$ e per ogni $\sigma > 0$. ■

Siamo ora in grado di dimostrare il risultato di stabilità.

Dimostrazione del Teorema 4.4. Si noti che l'applicazione del Lemma 4.10 alla (4.66) con $y = \|u(0,\cdot)\|^2_{H^0_{1,\omega}}$ permette di affermare che esistono σ e C ed esiste $\bar{\sigma} < \sigma$ tali che, se $\|u(0,\cdot)\|^2_{H^0_{1,\omega}} < 1/k_A$, allora

$$\sup_{z\in[0,\bar{\sigma}]} \|u(z)\|_{H^1_{\frac{1}{2},\omega}} \le Ce^{-\sigma\widetilde{g}\left(\|u(0,\cdot)\|_{H^0_{1,\omega}}\right)}\left[1 + \|u(\sigma,\cdot)\|_{H^1}\right]\,, \tag{4.74}$$

dove $\widetilde{g} : [0, 1/k_A] \to [0, +\infty]$ è definita da

$$\widetilde{g}(y) = \phi' \left(\frac{\sigma + \tau}{\beta^*(y^2)} \right) .$$

$\widetilde{g}$ è strettamente decrescente e

$$\lim_{y \to 0} \widetilde{g}(y) = +\infty \, .$$

Inoltre, come si può ricavare dalle relazioni specificate nel Capitolo 3,

$$\|u(z, \cdot)\|_{H^1} \leq \|u(z, \cdot)\|_{H^1_{\frac{1}{2},\omega}} \tag{4.75}$$

ed esiste $\widehat{C}$ tale che

$$\|u(0, \cdot)\|_{H^0_{1,\omega}} \leq \widehat{C}^{\frac{1}{2}} \|u(0, \cdot)\|_{H^0_{\nu,\epsilon}} \, .$$

Essendo $\widetilde{g}$ strettamente decrescente, si ricava immediatamente

$$-\widetilde{g} \left(\|u(0, \cdot)\|_{H^0_{1,\omega}} \right) \leq -\widetilde{g} \left(\widehat{C} \|u(0, \cdot)\|_{H^0_{\nu,\epsilon}} \right) . \tag{4.76}$$

Inoltre,

$$\|u(0, \cdot)\|^2_{H^0_{\nu,\epsilon}} \leq \frac{1}{\widehat{C} k_A} \quad \Rightarrow \quad \|u(0, \cdot)\|^2_{H^0_{1,\omega}} \leq \frac{1}{k_A} \, . \tag{4.77}$$

Definendo $g(x) = \widetilde{g}(\widehat{C}x)$, le (4.75), (4.76) e (4.77) permettono di ricavare facilmente la (4.39). ■

Capitolo 5

Conclusioni

Si è visto che il problema della stabilità delle soluzioni rispetto alle condizioni iniziali è una questione difficile da trattare per le equazioni paraboliche retrograde, a causa del carattere regolarizzante degli operatori parabolici (progressivi). Tuttavia, dai risultati esposti nei capitoli precedenti, si può concludere che, anche nel caso in cui i coefficienti della parte principale non siano lispsciziani (e nemmeno log-lipsciziani), il problema parabolico retrogrado ammette una certa proprietà di stabilità delle soluzioni, pur di considerare coefficienti almeno Osgood-regolari rispetto al tempo. Il risultato ottenuto sembra anche richiedere degli opportuni (e complicati) spazi funzionali. Su questo ultimo punto, però, è ragionevole supporre che si possa ottenere un risultato che coinvolge soltanto le norme delle soluzioni negli usuali spazi di Sobolev.

In questa tesi sono state considerate, in particolare, equazioni i cui coefficienti non dipendono dalla variabile spaziale. Questa scelta è stata effettuata anche per poter sfruttare, nell'ottenimento dei risultati, le proprietà della trasformata di Fourier. Rimane, dunque, aperto il problema dell'analisi della stabilità nel caso piú generale in cui i coefficienti dipendano anche dalla variabile spaziale e siano, ad esempio, lipsciziani rispetto a questa. È, comunque, ragionevole supporre che, con l'uso di tecniche di analisi come la decomposizione diadica o il paraprodotto di Bony, si possano ottenere risultati di stabilità soddisfacenti.

Un'altra possibile estensione dei risultati presentati in questa tesi è relativa all'introduzione di elementi di incertezza nella conoscenza dei coefficienti che descrivono l'operatore parabolico e, in particolare, dei coefficienti della parte principale. Si tratterebbe, in questo caso, di estendere i risultati alle equazioni differenziali stocastiche.

Bibliografia

[1] S. Agmon and L. Nirenberg. Properties of solutions of ordinalry differential equations in banach space. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 16:121–239, 1963.

[2] Á. Bényi, D. Maldonando, and V. Naibo. What is... a paraproduct. *Notices of the AMS*, 57:858–860, 2010.

[3] J.M. Bony. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Annales scientifiques de l'É.N.S., 4e série*, 14(2):209–246, 1981.

[4] B.L. Buzbee and A. Carasso. On the numerical computation of parabolic problems for preceding times. *Mathematics of Computation*, 27(122):237–266, 1973.

[5] T. Carleman. Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'equations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 26B(17):1–9, 1939.

[6] D. Colton. The approximation of solutions to the backwards heat equation in a nonhomogeneous medium. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 72:418–429, 1979.

[7] D. Del Santo, C. Jäh, and M. Paicu. Backward uniqueness for parabolic operators with non-lipschitz coefficients. *Osaka Journal of Mathematics*, 52:793–815, 2015.

[8] D. Del Santo, C. Jäh, and M. Prizzi. Conditional stability for backward parabolic equations with $\mathrm{LogLip}_t \times \mathrm{Lip}_x$-coefficients. *Nonlinear Analysis*, 121:101–122, 2015.

[9] D. Del Santo and M. Prizzi. Backward uniqueness for parabolic operators whose coefficients are non-lipschitz continuous in time. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 84:471–491, 2005.

[10] D. Del Santo and M. Prizzi. Continuous dependence for backward parabolic operators with log-lipschitz coefficients. *Mathematische Annalen*, 345:213–243, 2009.

[11] D. Del Santo and M. Prizzi. A new result on backward uniqueness for parabolic operators. *Annali di Matematica Pura e Applicata*, 194:387–403, 2015.

[12] R.Y. Glagoleva. Continuous dependence on initial data of the solution to the first boundary value problem for a parabolic equation with negative time. *Soviet Math. Dokl.*, 4:13–17, 1963. Traduzione inglese di *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 148, no. 1, pp. 820–823, 1963.

[13] J. Hadamard. *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, New Haven, 1923.

[14] D.N. Hào and N.V. Duc. Stability results for the heat equation backward in time. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 353:627–641, 2009.

[15] D.N. Hào and N.V. Duc. Stability results for backward parabolic equations with time-dependent coefficients. *Inverse Problems*, 27:1–20, 2011.

[16] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators IV*. Classics in Mathematics. Springer, 2009.

[17] A.E. Hurd. Backward continuous dependence for mixed parabolic problems. *1967*, 34:493–500, Duke Mathematical Journal.

[18] V. Isakov. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, volume 127 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 2006.

[19] F. John. Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13:551–585, 1960.

[20] A. Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, volume 120 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1996.

[21] J.L. Lions and B. Malgrange. Sur l'unicité rétrograde dans les problèmes mixtes paraboliques. *Mathematica Scandinavica*, 8:277–286, 1960.

[22] J.E. Littlewood and R.E.A.C. Paley. Theorems on fourier series and power series. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-6:230–233, 1931.

[23] J.E. Littlewood and R.E.A.C. Paley. Theorems on fourier series and power series (ii). *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-42:52–89, 1937.

[24] J.E. Littlewood and R.E.A.C. Paley. Theorems on fourier series and power series (iii). *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-43:105–126, 1938.

[25] N.T.N. Oanh. A splitting method for a backward parabolic equation with time-dependent coefficients. *Computers and Mathematics with Applications*, 65:17–28, 2013.

[26] A. Pliś. On non-uniqueness in cauchy problem for an elliptic second order differential equation. *Bull. Ac. Pol. Sci.*, 11:95–100, 1963.

[27] E.M. Stein. *Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood-Paley Theory*, volume 63 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 1970.

UN ANEDDOTO

Un giorno d'inverno del 1992, un venerdí mattina, mi trovavo a scendere le scale dell'aula Ciamician, un'aula grande ma non abbastanza da garantire un posto a sedere a tutti gli studenti dei corsi in Ingegneria. Io, per esempio, quel giorno avevo trovato posto solo dietro all'ultima fila, dove agli ultimi arrivati era assicurato solo un banco largo una trentina di centimetri e cosí alto che solo stando in piedi lo si poteva usare come piano d'appoggio per prendere gli appunti del corso di Analisi Matematica.

– Casagrande, venga lei! aveva esclamato il professore qualche istante prima. Ero l'unico studente del corso a cui piaceva provare a risolvere gli esercizi che ci assegnava – una settimana per la successiva – e discuterli poi, con lui, alla lavagna. O forse ero, piú semplicemente, l'unico che accettava di sottoporre al giudizio degli altri i propri risultati. E cosí toccava quasi sempre a me. Mentre tornavo al mio posto e la risoluzione dell'esercizio, cioè quel piccolo risultato teorico che avevo appena conseguito, era cancellata per lasciare spazio alla lezione di quel giorno, pensavo che mi sarebbe piaciuto un futuro in cui avessi potuto occuparmi a tempo pieno di matematica.

A distanza di un quarto di secolo, non solo la mia professione consiste nello studio dei sistemi dinamici e nell'insegnamento delle loro proprietà ma mi sono ritrovato a ragionare, con quello stesso professore, sulla stabilità condizionata di alcune equazioni differenziali paraboliche retrograde con coefficienti continui non lipsciziani in spazi di Gevrey-Sobolev. Non posso che dirmi soddisfatto e ringraziare il professore Daniele Del Santo per aver contribuito, anche in quei giorni d'inverno, ad alimentare il mio interesse per la matematica.