UNIVERSIDAD DE GRANADA

Dpto. de Estadística e Investigación Operativa

MÉTODOS DE GENERACIÓN DE DISTRIBUCIONES. APLICACIÓN A LA DISTRIBUCIÓN DE WARING

TESIS DOCTORAL

Juan Antonio Marmolejo Martín

Granada 2002

MÉTODOS DE GENERACIÓN DE DISTRIBUCIONES. APLICACIÓN A LA DISTRIBUCIÓN DE WARING

Memoria presentada por
Juan Antonio Marmolejo Martín
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Vº Bº del Director de Tesis

Ramón Gutiérrez Jaímez
DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO

Fdo: Dr. Ramón Gutiérrez Jáimez

Dpto. de Estadística e Investigación Operativa

UNIVERSIDAD DE GRANADA

2002

Índice Temático

I. Desarrollo del Trabajo. Objetivos 1
II. Futuras vías de investigación 4

1. Resultados Generales. Teoremas de Sumación 5
1.1. Introducción 5
1.2. Funciones hipergeométricas univariantes 5
1.3. Funciones hipergeométricas bivariantes 8
1.4. Función hipergeométrica ${}_3F_2$ 16
1.5. Función hipergeométrica ${}_4F_3$ 24
1.6. Función hipergeométrica ${}_{p+1}F_p$ 30
1.7. Función hipergeométrica bivariante F_3 37

2. La Distribución de Waring 42
2.1. Cronología 42

3. La Distribución de Waring Bidimensional 58
3.1. Breve Introducción 58
3.2. Distribuciones marginales y condicionadas. Distribución de la suma 60
3.3. Momentos de la BGWD 62
3.4. Otras propiedades de la BGWD 64
3.5. Generación de la distribución de Waring Bidimensional a partir del Sistema de Pearson Discreto Bivariante 65
3.6. Estimación 81

4. Distribución de Waring Multivariante 92
4.1. Definición. Primeras propiedades 92
4.2. Generación de la distribución de Waring Multivariante 97
4.3. Distribución límite de una MGWD 106

Bibliografía 112

Capítulo Introductorio.

1. Desarrollo del trabajo. Objetivos.

Empezamos esta memoria dedicando un capítulo completo para hacer un recorrido sobre los resultados generales y teoremas de sumación que conocemos sobre familias de distribuciones discretas generadas por funciones hipergeométricas, centrándonos en aquellas que extienden a la función hipergeométrica de Gauss.

Este primer capítulo comienza con el estudio de las funciones hipegeométricas univariantes. Veremos los resultados más conocidos y después, más detalladamente, estudiamos la función hipergeométrica ${}_3F_2$, primera extensión univariante posible de la función ${}_2F_1$, la ${}_4F_3$ y, para finalizar, la ${}_{p+1}F_p$.

Una vez finalizado el estudio sobre la funciones hipergeométricas univariantes, haremos un amplio recorrido por las bivariantes. Empezamos con la F_3 que es una de las cuatro funciones de Appell, extensiones bivariantes de la ${}_2F_1$. Hay que recordar que una de las propiedades de esta familia es que sus distribuciones marginales pertenecen a la familia de distribuciones generadas por la ${}_3F_2$.

La segunda parte del trabajo la dedicamos a hacer un exhaustivo recorrido sobre todos los resultados que se conocen sobre la distribución discreta de Waring desde que esta surgió hasta la finalización de este trabajo.

La distribución generalizada univariante de Waring, UGWD(a, k, ρ), la comenzamos recordando un ejemplo de Newbold [21] en 1925. Esta distribución fue estudiada por Irwin (1968, 1975) [16], [17], [18] entre otros. Entre las propiedades más importantes que vemos en su estudio esá la de presentar la distribución como una distribución hipergeométrica que tiene una análoga continua que es, en general, Pearson tipo 6.

Uno de los autores que más aportaciones ha realizado sobre la distribución de Waring, unidimensional, bidimensional y multivariante ha sido Evdokia Xekalaki [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32]. A él le debemos la mayoría de los resultados conocidos.

Entre otras cosas, en este capítulo veremos:

La UGWD(a, k, ρ) posee las propiedades de divisibilidad infinita, integridad y regresión.

La distribución tiempo de vida puede ser también Waring.

La UGWD(a, k, ρ) se obtiene como una distribución especial de equilibrio.

La SGWD puede verse como un flujo de UGWD.

La UGWD(a, k, ρ) es útil cuando queremos hacer comparaciones entre casos psiquiátricos registrados en un mismo pais o incluso en paises diferentes.

Algunas extensiones bivariantes de la UGWD(a, k, ρ).

Distribución de la suma Z = X+Y.

Estimación de momentos factoriales para la BGWD(a, k, m, ρ).

......

El tercer capítulo lo dedicamos íntegramente al estudio de la distribución generalizada bivariante de Waring BGWD(a, k, m, ρ).

Sobre la distribución generalizada bivariante de Waring podemos decir que ha sido estudiada entre otros por Irwin (1975) y Xekalaki (1983, 1984) y utilizada en diversos campos. Así, aparece en modelos de distribuciones compuestas como en el caso de la distribución binomial negativa con beta bivariante, en modelos de "excedencia" para muestras ordenadas o en modelos de accidentes incurridos por un individuo entre dos períodos nos solapados de tiempo.

En primer lugar, presentamos la función masa de probabilidad de un vector aleatorio que sigue la distribución BGWD(a, k, m, ρ). Calculamos las distribuciones marginales y condicionadas, así como la distribución de la suma. Después nos centramos en los momentos y en algunas propiedades que consideramos importantes de la BGWD(a, k, m, ρ) que expresan la función de probabilidad de la Waring Bidimensional en términos de la función de Appell de primera clase.

La parte fundamental de este tercer capítulo consiste en generar la distribución bivariante de Waring a partir del sistema de Pearson discreto bivariante.

Llegamos a las ecuaciones diferenciales que verifica la función generatriz de probabilidad, encontrando a continuación las relaciones de recurrencia entre los momentos, lo que nos permitirá obtener el vector de medias y la matriz de varianzas-covarianzas, así como la matriz de correlaciones.

Cabe destacar también que si los parámetros a, k, m tienden todos a infinito con el mismo orden, la distribución BGWD(a, k, m, ρ) puede aproximarse por una distribución normal bivariante.

Más tarde obtenemos también las ecuaciones diferenciales que verifica la función generatriz de momentos y, a través de la función generatriz de cumulantes, obtenemos los primeros cumulantes y los cumulantes de orden r, concluyendo que los cumulantes de orden mayor que dos son despreciables para grandes valores de a, k y m.

La parte final de este capítulo la dedicamos al problema de la estimación, en la que concluimos afirmando que las estimaciones de los parámetros a y m se obtienen como las raíces del polinomio $x^2 + (a+m)x + am$ y la de los parámetros k y ρ como las raíces del polinomio $x^2 + (k+\rho)x + k\rho$.

Por último, el cuarto capítulo está dedicado a la generación de la distribución generalizada multivariante de Waring MGWD(a; $\underline{k}$; ρ).

La distribución multivariante generalizada de Waring ha sido estudiada entre otros por Xekalaki (1986) y utlilizada en diversos campos, fundamentalemente en teoría de accidentes.

Empezaremos con la definición y veremos algunas de las propiedades más importantes de esta distribución, sobre todo las relacionadas con las distribuciones marginales y condicionadas, así como el estudio de algunos de sus momentos.

La parte fundamental de este cuarto capítulo consiste en generar la distribución multivariante generalizada de Waring como un caso particular dentro de la familia de distribuciones Pearsonianas discretas.

Comenzamos exponiendo brevemente una metodología de construcción que aplicamos para un caso particular de los coeficientes del sistema de ecuaciones en diferencias propio del modelo de Pearson. Después veremos las ecuaciones diferenciales que verifica la función generatriz de probabilidad y a continuación comprobaremos que cada distribución marginal ξ_i es de tipo $UGWD(a,k_i,\rho)$ y que la conjunta de (ξ_i,ξ_j) es una $BGWD(a,k_i,k_j,\rho)$. Expresaremos la matriz de varianzas covarianzas y la matriz de correlaciones. El siguiente paso será obtener la distribución condicionada resolviendo el correspondiente sistema. Esto nos permitirá estudiar la superficie de regresión de ξ_i sobre $(\xi_1,...,\xi_{i-1},\xi_{i+1},...,\xi_n)$, que, en realidad, será un hiperplano de regresión. Después presentaremos los coeficientes de correlación múltiple y la función de densidad marginal de $(\xi_1,...,\xi_{i-1},\xi_{i+1},...,\xi_n)$ que es una $MGWD(a,k_1,...,k_{i-1},k_{i+1},...,k_n;\rho)$.

Después obtendremos la esperanza, varianza, covarianza y coeficientes de correlación condicionadas.

Para terminar este capítulo obtendremos la distribución límite de una MGWD que veremos que es una distribución normal multivariante.

Cabe destacar también que si los parámetros a, k, m tienden todos a infinito con el mismo orden, la distribución $BGWD(a,k,m,\rho)$ puede aproximarse por una distribución normal bivariante.

Más tarde obtenemos también las ecuaciones diferenciales que verifica la función generatriz de momentos y, a través de la función generatriz de cumulantes, obtenemos los primeros cumulantes y los cumulantes de orden r, concluyendo que los cumulantes de orden mayor que dos son despreciables para grandes valores de a, k y m.

La parte final de este capítulo la dedicamos al problema de la estimación, en la que concluimos afirmando que las estimaciones de los parámetros a y m se obtienen como las raíces del polinomio $x^2+(a+m)x+am$ y la de los parámetros k y ρ como las raíces del polinomio $x^2+(k+\rho)x+k\rho$.

2. Futuras vías de investigación.

Para finalizar este capítulo introductorio, vamos a destacar algunas líneas de investigación que pueden abordarse a partir de ahora, al igual que lo que pensamos que debe ser mejorado sustancialmente.

* Deben depurarse los métodos de estimación, debido al alto número de parámetros, para que podamos aplicarlos a situaciones reales.

* Ofrecer métodos de estimación para la distribución multivariante de Waring que hasta el momento no han sido estudiados.

* Estudiar más a fondo la teoría de fiabilidad cuando la distribución de tiempo de vida es $UGWD(a,k,\rho)$.

* Profundizar en los modelos de probabilidad que dan lugar a formas bivariantes alternativas a la ditribución generalizada de Waring.

— § —

Capítulo 1

Resultados Generales.

Teoremas de Sumación.

1.1. Introducción.

En este primer capítulo vamos a hacer un extenso recorrido sobre los resultados generales y teoremas de sumación de las funciones que extienden a la función hipergeométrica de Gauss.

Haremos un estudio general de las funciones hipergeométricas univariantes y bivariantes para estudiar después de manera más detenida las funciones hipergeométricas univariantes ${}_3F_2$, ${}_4F_3$, llegando a la generalización ${}_{p+1}F_p$. Una vez visto esto pasaremos a estudiar la función hipergeométrica bivariante F_3.

Para todos estos casos seguiremos el mismo proceso, es decir, estableceremos la ecuación en diferencias y veremos la función solución, estudiaremos las condiciones que deben verificar la función para convertirse en función masa de probabilidad. Presentaremos la función generatriz de probabilidad y concluiremos viendo que la función característica, la función generatriz de momentos y la función generatriz de cumulantes verifican una serie de ecuaciones diferenciales. Para finalizar estudiaremos los momentos nocentrados. Dedicaremos un apartado especial para los teoremas de sumación. Con las funciones bivariantes además de todo lo anterior haremos un breve estudio de las distribuciones condicionadas y marginales.

En este capítulo hacemos una completa revisión de la metodología y resultados ya utilizada en trabajos anteriores (Fajardo, [7], Gutiérrez y Rodríguez, [10], [11], [12], [14], [15] y Conde, [3]).

1.2 Funciones hipergeométricas univariantes.

1.2.1. Resultados generales.

Sean L y G funciones cualesquiera y f una función no conocida. La ecuación en diferencias propuesta por Fajardo, [7], que generaliza la familia de distribuciones discretas de Pearson, viene establecida de la siguiente manera:

$$G(r)f_{r+1} - L(r)f_r = 0 \tag{1.1}$$

donde $r \in Z^+; L : Z^+ \to R; G : Z^+ \to R - \{0\} \quad y \quad f : Z^+ \to R.$

La ecuación en diferencias tiene (Guelforn, [ ] y Jordan, [ ]) la siguiente solución:

$$f_r = \left\{ \begin{array}{lll} f_0 \prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)} & si & r \geq 1 \\ f_0 & si & r = 0 \end{array} \right\} \tag{1.2}$$

siendo f_0 es una constante inicial que supondremos distinta de cero.

Si la función f, solución de la ecuación (1.1) verifica la condiciones:

1. Condición de positividad.

$$L(r)G(r) > 0; \forall r \in Z^+ \; si \; H = \{r \in Z^+ / L(r) = 0\} = \emptyset$$

$$L(r)G(r) \geq 0; \; r = 0, 1, \ldots, m \;\; si \; H \neq \emptyset. \; Siendo \; m = minH.$$

2. Condición de convergencia.

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)} < \infty$$

3. Condición de normalización.

$$f_0 = \frac{1}{1 + \sum_{r=1}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)}}$$

(llamada constante normalizadora)

podemos decir que es una función masa de probabilidad.

Estas son las condiciones bajo las que tenemos que trabajar para que una función solución de (1.2) sea una función de probabilidad.

Teorema 1.1. *Si L y G son polinomios en r y r+1 respectivamente, de cualquier orden y se verifican las condiciones 1, 2 y 3 entonces la función generatríz de probabilidad g(t) asociada a la solución (1.2) verifica la ecuación diferencial:*

$$G(\theta)g(t) - tL(\theta)g(t) = b_0 f_0 \tag{1.3}$$

para $|t| < 1$, siendo $\theta = t\left(\frac{d}{dt}\right)$ con $\theta^0 = 1$ el operador identidad y b_0 el término independiente del polinomio $G(r+1)$.

Además la función característica $\phi(t)$, la función generatríz de momentos $M(t)$ y la función generatríz de cumulantes $k(t) = ln\phi(t)$ verifican las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$G(D)M(t) - e^{t}L(D)M(t) = b_0 f_0 \tag{1.4}$$

con $D = \frac{d}{dt}$,

$$G(\theta_i)\phi(t) - e^{it}L(\theta_i)\phi(t) = b_0 f_0 \tag{1.5}$$

con $\theta_i = \frac{1}{i}D$,

$$G(\theta_i)e^{k(t)} - e^{it}L(\theta_i)e^{k(t)} = b_0 f_0 \tag{1.6}$$

Definición 1.1. *Si existen las derivadas y son finitas en $t = 1$ en $g(t)$ y en $t = 0$ en $M(t)$ y $\phi(t)$ definimos los momentos no centrados:*

$$\mu_r' = [\theta^r g(t)]_{t=1} = [D^r M(t)]_{t=0} = [\theta_i^r \phi(t)]_{t=0}$$

Gracias al siguiente resultado podemos estimar los parámetros de la distribución perteneciente al sistema por el método de los momentos.

Teorema 1.2. *Consideremos L y G polinomios en r y r+1 respectivamente, siendo L de cualquier orden y G de orden q. Supongamos que los momentos no centrados de orden k existen con $k \geq q$.*

Entonces se verifica:

$$\sum_{j=0}^{q} b_j \mu_{j+h}' - \sum_{i=0}^{p} a_i \left(\sum_{m=0}^{h} \binom{h}{m} \mu_{i+m}' \right) = b_0 \theta^h f_0 \tag{1.7}$$

para $h = 0, 1, \ldots, k-q$ y a_i, b_j coeficientes de L y G respectivamente.

Además si $b_0 = 0$ la relación anterior será sólo de momentos y si $b_0 \neq 0$ nos encontraremos con la probabilidad f_0.

1.3 Funciones hipergeométricas bivariantes.

1.3.1 Resultados generales.

Sean $L, N : Z^+ x Z^+ \to R$ y $G, H : Z^+ x Z^+ \to R - \{0\}$ funciones, en principio, cualesquiera y sea $f : Z^+ x Z^+ \to R - \{0\}$ una función no conocida.

El sistema de ecuaciones en diferencias parciales viene establecido de la siguiente manera:

$$G(r,s) f_{r+1,s} - L(r,s) f_{r,s} = 0 \tag{1.8a}$$

$$H(r,s) f_{r,s+1} - N(r,s) f_{r,s} = 0 \tag{1.8b}$$

donde

$$L(r,s) = \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} a_{i_1,i_2} r^{i_1} s^{i_2} \tag{1.9a}$$

$$N(r,s) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} c_{j_1,j_2} r^{j_1} s^{j_2} \tag{1.9b}$$

$$G(r,s) = \sum_{k_1=0}^{p_1} \sum_{k_2=0}^{p_2} b_{k_1,k_2} (r+1)^{k_1} s^{k_2} \tag{1.9c}$$

$$H(r,s) = \sum_{l_1=0}^{q_1} \sum_{l_2=0}^{q_2} d_{l_1,l_2} r^{l_1} (s+1)^{l_2} \tag{1.9d}$$

donde $a_{i_1,i_2}, b_{k_1,k_2}, c_{j_1,j_2}, d_{l_1,l_2} \in R$, y con $a_{m_1,m_2}, b_{p_1,p_2}, c_{n_1,n_2}, d_{q_1,q_2} \neq 0$.

El sistema de ecuaciones en diferencias parciales tiene la siguiente solución:

$$f_{r,s} = \begin{cases} f_{0,0} \prod_{t=0}^{r-1} \prod_{t'=0}^{s-1} \frac{L(t,s)N(0,t')}{G(t,s)H(0,t')} & r \geq 1,\ s \geq 1 \\ f_{0,0} \prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t,0)}{G(t,0)} & r \geq 1,\ s = 0 \\ f_{0,0} \prod_{t'=0}^{s-1} \frac{N(0,t')}{H(0,t')} & s \geq 1,\ r = 0 \\ f_{0,0} & r = 0,\ s = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

fijada $f_{0,0} \neq 0$.

Recordemos que $f : Z^+xZ^+ :\to R - \{0\}$ es solución del sistema si verifica la igualdad

$$\frac{L(r,s+1)N(r,s)}{G(r,s+1)H(r,s)} = \frac{N(r+1,s)L(r,s)}{H(r+1,s)G(r,s)} \tag{1.11}$$

$\forall r,s \in Z^+$ tal que $f_{r,s} \neq 0$.

Si la función $f : Z^+xZ^+ \to R - \{0\}$ solución del sistema (1.8) verifica las condiciones:

1. Condición de positividad.

$$L(r,s)G(r,s) \geq 0$$

$$N(r,s)H(r,s) \geq 0$$

$\forall r,s \in H = \{(r,s) \in Z^+xZ^+ / f_{r,s} \neq 0\}$.

2. Condición de convergencia.

$$\sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s\neq 0 \\ (r,s)\in H}}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \prod_{t'=0}^{s-1} \frac{L(t,s)N(0,t')}{G(t,s)H(0,t')} < \infty$$

3. Condición de normalización.

$$f_{0,0} = \frac{1}{1 + \sum\limits_{\substack{r,s=0 \\ r+s\neq 0 \\ (r,s)\in H}}^{\infty} \prod\limits_{t=0}^{r-1} \prod\limits_{t'=0}^{s-1} \frac{L(t,s)N(0,t')}{G(t,s)H(0,t')}}$$

podemos decir que f es una función masa de probabilidad.

Teorema 1.3. *Si la función de probabilidad $f_{r,s}$ solución del sistema se puede escribir como producto de sus probabilidades condicionadas por sus correspondientes marginales, es decir*

$$f_{r,s} = f_{r/s} f_s \qquad y \qquad f_{r,s} = f_{s/r} f_r$$

Entonces:

a) Las funciones de probabilidad condicionadas verifican las ecuaciones en diferencias:

$$G(r,s)f_{r+1/s} - L(r,s)f_{r/s} = 0 \qquad (f_s > 0)$$

$$H(r,s)f_{s+1/r} - N(r,s)f_{s/r} = 0 \qquad (f_r > 0)$$

respectivamente.

b) Calculadas las anteriores, las funciones de probabilidad marginales verifican las ecuaciones en diferencias:

$$G(r,s)f_{s/r+1}f_{r+1} - L(r,s)\, f_{s/r} f_r = 0$$

$$H(r,s)f_{r/s+1}f_{s+1} - N(r,s)\, f_{r/s} f_s = 0$$

respectivamente.

Teorema 1.4. *Si L, N son polinomios en las variables (r,s) y G polinomio en $(r+1,s)$ y H polinomio en $(r,s+1)$ de órdenes cualesquiera y tal que se verifican las condiones 1, 2 y 3, entonces la función generatriz de probabilidad $g(t_1,t_2)$asociada al sistema (1.8) verifica el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*

$$G(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) - t_1 L(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) = G(\theta_1,\theta_2)\sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s}t_2^s$$

$$H(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) - t_2 N(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) = H(\theta_1,\theta_2)\sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0}t_1^r \tag{1.12}$$

para $|t_1| < 1, |t_2| < 1$, siendo $\theta_i = t_i\frac{\partial}{\partial t_i}$, $i = 1,2$.

Además la función generatriz de momentos $M(t_1,t_2)$ y la función característica $\phi(t_1,t_2)$ verifican los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales.

$$a) G(D_1,D_2)M(t_1,t_2) - e^{t_1}L(D_1,D_2)M(t_1,t_2) = G(D_1,D_2)\sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s}e^{t_2 s}$$

$$H(D_1,D_2)M(t_1,t_2) - e^{t_2}N(D_1,D_2)M(t_1,t_2) = H(D_1,D_2)\sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0}e^{t_1 r}$$

con $D_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$, $i = 1,2$.

$$b) G(\theta'_1,\theta'_2)\phi(t_1,t_2) - e^{it_1}L(\theta'_1,\theta'_2)\phi(t_1,t_2) = G(\theta'_1,\theta'_2)\sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s}e^{it_2 s}$$

$$H(\theta'_1,\theta'_2)\phi(t_1,t_2) - e^{it_2}N(\theta'_1,\theta'_2)\phi(t_1,t_2) = H(\theta'_1,\theta'_2)\sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0}e^{it_1 r}$$

con $\theta'_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_j}$, $j = 1,2$.

siendo

$$M(t_1,t_2) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f_{r,s}e^{t_1 r + t_2 s}$$

$$\phi(t_1,t_2) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f_{r,s}e^{i(t_1 r + t_2 s)}$$

Definición 1.2. *Si existen las derivadas parciales y son finitas para $t_i = 1$; $i = 1,2$ en $g(t_1,t_2)$ y para $t_i = 0$ en $M(t_1,t_2)$ y $\phi(t_1,t_2)$ definimos los momentos no centrados como siguen:*

$$\mu'_{r,s} = [\theta_1\theta_2 g(t_1,t_2)]_{t_1=t_2=1} = [D_1D_2M(t_1,t_2)]_{t_1=t_2=0} =$$
$$= [\theta'_1\theta'_2\phi(t_1,t_2)]_{t_1=t_2=0}$$

Gracias al siguiente resultado podemos estimar los parámetros de la distribución perteneciente al sistema por el método de los momentos.

Teorema 1.5. *Sean L,N polinomios en las variables (r,s), G polinomio en la variable $(r+1,s)$ y H polinomio en la variable $(r,s+1)$ de órdenes cualesquiera. Supongamos que los momentos no centrados $\mu'_{r,s}$ de cualquier orden existen.*

Entonces éstos verifican las siguientes leyes de recurrencia:

$$\sum_{k_1=0}^{p_1}\sum_{k_2=0}^{p_2} b_{k_1,k_2}\left[\sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\mu'_{k_1+f,k_2+m}\right]-$$

$$-\sum_{l_1=0}^{m_1}\sum_{l_2=0}^{m_2} a_{l_1,l_2}\left[\sum_{n=0}^{f}\sum_{m=0}^{g}\binom{f}{n}\binom{g}{m}\mu'_{l_1+n,l_2+m}\right]=$$

$$=\sum_{k_2=0}^{p_2} b_{0,k_2}\left[\sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\theta_1^f\theta_2^{k_2+m}\left(\sum_{s=0}^{\infty}f_{0,s}t_2^s\right)\right]_{t_2=1}.$$

$$\cdot\sum_{l_1=0}^{q_1}\sum_{l_2=0}^{q_2} d_{l_1,l_2}\left[\sum_{n=0}^{g}\binom{f}{n}\mu'_{l_1+n,l_2+g}\right]-$$

$$-\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2} c_{j_1,j_2}\left[\sum_{n=0}^{f}\sum_{m=0}^{g}\binom{f}{n}\binom{g}{m}\mu'_{j_1+n,j_2+m}\right]=$$

$$=\sum_{l_1=0}^{q_1} d_{l_1,0}\left[\sum_{n=0}^{f}\binom{f}{n}\theta_1^{l_1+n}\theta_2^{g}\left(\sum_{r=0}^{\infty}f_{r,0}t_1^r\right)\right]_{t_1=1} \quad (1.13)$$

para $f,g \in Z^+$.

El segundo miembro de estas expresiones se anula excepto para $f = 0$

en la primera de ellas y $g = 0$ en la segunda. Además si los coeficientes b_{0,k_2} y $d_{l,0}$ son iguales a cero, las relaciones son únicamente de momentos.

1.3.2 Teoremas de sumación.

En este apartado vamos a ver algunos resultados parciales (Slater, [ ] y Prudnikov, [ ]) que serán necesarios más adelante.

1.3.2.1 Resultados para la ${}_2F_1$.

Con los dos primeros resultados podemos sumar cualquier función hipergeométrica de Gauss para $\lambda = 1$, siempre que ésta sea convergente.

1. Teorema de Gauss:

$$ {}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \tag{1.14} $$

donde $a, b, c \notin Z^-$ *y* $Re(c-a-b) > 0$.

2. Teorema de Vandermonde:

$$ {}_2F_1(a,-m;c;1) = \frac{(c-a)_m}{(c)_m} \tag{1.15} $$

donde m *es un número natural y* c *no es un entero negativo menor que* a *ó* $-m$.

3. Segundo Teorema de Gauss:

$$ {}_2F_1\left(a,b;\frac{1+a+b}{2};\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)} \tag{1.16} $$

4. Teorema de Bailey:

$$ {}_2F_1\left(a,1-a;c;\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{c+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{c+a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+c-a}{2}\right)} \tag{1.17} $$

1.3.2.2 Resultados para la ${}_3F_2$.

1. Teorema de Dixon:

$$ {}_3F_2(a,b,c;1+a-b,1+a-c;1) = $$

$$ = \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b-c\right)\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-c\right)} \tag{1.18} $$

donde $\mathrm{Re}(a-2b-2c) > -2$.

2. Teorema de Watson:

$$ {}_3F_2\left(a,b,c;\frac{a+b+1}{2},2c;1\right) = $$

$$ = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-a-b}{2}+c\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-a}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1-b}{2}+c\right)} \tag{1.19} $$

donde $Re(1-a-b+2c) > 0$.

3. Teorema de Whipple:

$$ {}_3F_2(a,b,c;d,e;1) = $$

$$ = 2^{1-2c}\pi \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)}{\Gamma\left(\frac{a+e}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+e}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+d}{2}\right)} \tag{1.20} $$

donde $a+b=1$, $d+e=1+2c$ *y* $Re(c) > 0$.

Otros resultados de sumación que generalizan los que se acaban de enunciar aparecen en Lavoie, [ ]. Por ejemplo, el siguiente resultado es cercano al teorema de Watson:

4. Lavoie, Grondin y Rathie, 1992:

$$ {}_3F_2\left(a,b,c;\frac{a+b+2}{2},2c;1\right) = $$

$$\frac{2^{a+b-1}\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(c-\frac{a+b}{2}\right)}{(a-b)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)\Gamma(b)}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(c-\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(c-\frac{b-1}{2}\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{\Gamma\left(c-\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(c-\frac{b}{2}\right)}\right] \tag{1.21}$$

con $Re(2c-a-b)>-2$.

Y el siguiente es contiguo al teorema de Dixon:

5. Arora y Rathie, 1993:

$${}_3F_2(a,b,c;a-b+2,a-c+2;1)=$$

$$=\frac{2^{-2c+1}\Gamma(a-b+2)\Gamma(a-c+2)}{(b-1)(c-1)\Gamma(a-b-c+2)\Gamma(a-2c+2)}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}-b-c+2\right)\Gamma\left(\frac{a+3}{2}-c\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}-b+1\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a+5}{2}-b-c\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+1-c\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+3}{2}-b\right)}\right] \tag{1.22}$$

con $Re(a-2b-c)>-4$.

6. Gutiérrez y Rodríguez, 1997:

$${}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_2+1;\gamma_1,\gamma_2;1)=$$

$$=\sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}\frac{(\alpha_1)_i(\alpha_2)_i}{(\gamma_1)_i(\gamma_2)_i}\,{}_2F_1(\alpha_1+i,\alpha_2+i;\gamma_1+i;1) \tag{1.23}$$

donde $\gamma_1>\alpha_1+\alpha_2+1$ *y ninguno de los parámetros es entero negativo.*

Otras funciones:

1.

$${}_4F_3\left(a,1+\frac{a}{2},b,c;\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c;1\right)=$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}-b-c\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)} \cdot \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}-b\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}-c\right)} \tag{1.24}$$

En Exton, [ ] aparecen resultados para funciones hipergeométricas ${}_4F_3$ y de orden superior $\left({}_5F_4,\ {}_5F_6,\ \text{o}\ {}_{q+1}F_q\right)$. Por ejemplo, se tiene el siguiente resultado:

2. Exton, 1997:

$${}_{q+1}F_q(a, a+2, \ldots, a+2q; a+1, a+3, \ldots, a+2q-1; 1) =$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(-a-q)\left\{ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{a}{2}-q\right)} + \right. \\ \left. + \frac{2\left(\frac{a}{2}\right)_q}{\left(\frac{a+1}{2}\right)_{q+1}\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{a}{2}-q\right)} \right\} \tag{1.25}$$

1.4 Función hipergeométrica ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; \lambda)$.

1.4.1 Resultados generales:

Sean G y L polinomios cúbicos que podemos expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G(r) &= (\gamma_1 + r)(\gamma_2 + r)(r+1) \\ L(r) &= (\alpha_1 + r)(\alpha_2 + r)(\alpha_3 + r)\lambda \end{aligned} \tag{1.26}$$

con α_i, $i = 1,2,3$; γ_j, $j = 1,2$ y λ reales, en principio, cualesquiera.

La solución de la ecuación en diferencias (1.1) viene dada aplicando (1.2) por:

$$f_r = f_0 \frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r(\alpha_3)_r\lambda^r}{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r r!} \tag{1.27}$$

Si la función (1.27) verifica las siguientes tres condiciones será una función masa de probabilidad.

1. Condición de positividad.

Impone restricciones a los parámetros $\alpha_i, \gamma_j, \lambda$ de forma que:

$$L(r)G(r) \geq 0$$

2. Condición de convergencia.

$$\sum_{r=1}^{\infty} f_0 \frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r(\alpha_3)_r\lambda^r}{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r r!}$$

que es la función $f_0\{\,{}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\gamma_1,\gamma_2;\lambda)-1\}$. Como esta función es un caso particular de las funciones ${}_pF_q$ será convergente cuando los parámetros cumplan las siguientes restricciones:

a) como p = q + 1, converge $\forall|\lambda| < 1$.

b) para $|\lambda| = 1$, llamando $w = \gamma_1 + \gamma_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ se tiene que

i) si $w > 0$, entonces es absolutamente convergente.
ii) si $-1 < w \leq 0$, es condicionalmente convergente.
iii) si $w \leq -1$, es divergente.

3. Condición de normalización.

$$f_0 = {}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\gamma_1,\gamma_2;\lambda)^{-1} \tag{1.28}$$

De esta última expresión se observa que para poder obtener las probabilidades de estas distribuciones es necesario conocer el valor de la función ${}_3F_2$.

La función generatriz de probabilidad para distribuciones con función masa de probabilidad (1.27) tiene la siguiente forma:

$$g(t) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r t^r = f_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r(\alpha_3)_r(\lambda t)^r}{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r r!}$$

es decir:

$$g(t) = \frac{{}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,c_3;\gamma_1,\gamma_2;\lambda t)}{{}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\gamma_1,\gamma_2;\lambda)} \tag{1.29}$$

Esta función es convergente para $|t| \leq 1$, lo cual se verifica atendiendo a las condiciones anteriores. En concreto, o bien $|\lambda| < 1$, lo que implica que $|\lambda t| \leq 1$ para $|t| \leq 1$; o bien $|\lambda| = 1$ y $\gamma_1 + \gamma_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) > 0$.

A esta familia de distribuciones se le conoce como la generada por la función hipergeométrica ${}_3F_2$ que es una extensión univariante de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$.

Vamos a expresar G en función de r +1 y L en función de r:

$$G(r) = \sum_{i=0}^{3} b_i (r+1)^i$$

Así :

$$\begin{aligned} b_3 &= 1 \\ b_2 &= (\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 1) \\ b_1 &= (\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) \\ b_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$L(r) = \sum_{i=0}^{3} a_i r^i$$

De la misma forma:

$$\begin{aligned} a_3 &= \lambda \\ a_2 &= \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ a_1 &= \lambda(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) \\ a_0 &= \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3. \end{aligned}$$

Ya estamos en condiciones de aplicar el teorema 1.1, en consecuencia la función generatriz de probabilidad verifica la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \lambda t \alpha_1\alpha_2\alpha_3 g(t) = {} & (1 - \lambda t)\theta^3 g(t) + \\ & + [(\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 1) - \lambda t(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)]\theta^2 g(t) + \\ & + [(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) - \lambda t(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)]\theta g(t). \end{aligned}$$

La función generatriz de momentos verifica:

$$\lambda e^t \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 M(t) = (1 - \lambda e^t) D^3 M(t) + \\ + [(\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 1) - \lambda e^t(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)].D^2 M(t) + \\ + [(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) - \lambda e^t(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)] DM(t).$$

y la función característica verifica:

$$\lambda e^{it} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \phi(t) = (1 - \lambda e^{it}) \theta_i^3 \phi(t) + \\ + [(\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 1) - \lambda e^{it}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)].\ .\theta_i^2 \phi(t) + \\ + [(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) - \lambda e^{it}(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)] \theta_i \phi(t).$$

Para la familia de distribuciones generadas por ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; \lambda)$, se verifica la siguiente relación de recurencia:

$$b_3 \mu'_{3+h} + b_2 \mu'_{2+h} + b_1 \mu'_{1+h} = \\ = \sum_{m=0}^{h} \binom{h}{m} \{a_3 \mu'_{3+m} + a_2 \mu'_{2+m} + a_1 \mu'_{1+m} + a_0 \mu'_m\}$$

donde a_i, b_i son los coeficientes polinomiales de $L(r)$ y $G(r+1)$ respectivamente, siendo únicamente de momentos al ser $b_0 = 0$.

Así, para $h = 0, 1, 2$ las relaciones que se obtienen son:

$$b_3 \mu'_3 + b_2 \mu'_2 + b_1 \mu'_1 = a_3 \mu'_3 + a_2 \mu'_2 + a_1 \mu'_1 + a_0$$

$$b_3 \mu'_4 + b_2 \mu'_3 + b_1 \mu'_2 = a_3 \mu'_4 + (a_3 + a_2)\mu'_3 + (a_2 + a_1)\mu'_2 + \\ + (a_1 + a_0)\mu'_1 + a_0$$

$$b_3 \mu'_5 + b_2 \mu'_4 + b_1 \mu'_3 = a_3 \mu'_5 + (2a_3 + a_2)\mu'_4 + (a_3 + 2a_2 + a_1)\mu'_3 + \\ + (a_2 + 2a_1 + a_0)\mu'_2 + (a_1 + 2a_0)\mu'_1 + a_0$$

Y si $\lambda = 1$, al ser $b_3 = a_3 = 1$, las expresiones anteriores se simplifican de la siguiente manera:

$$(b_2 - a_2)\mu_2' + (b_1 - a_1)\mu - a_0 = 0$$

$$(b_2 - a_2 - 1)\mu_3' + (b_1 - a_2 - a_1)\mu_2' - (a_1 + a_0)\mu - a_0 = 0$$

$$(b_2 - a_2 - 2)\mu_4' + (b_1 - 2a_2 - a_1 - 1)\mu_3' - (a_2 + 2a_1 + a_0)\mu_2' - (a_1 + 2a_0)\mu - a_0 = 0$$

Así que si conocemos μ podemos obtener todos los momentos no centrados.

Dado que la media es.

$$\mu = t\frac{d}{dt}g(t)\ |_{t=1}$$

se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt}g(t) = \frac{d}{dt}\frac{{}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\gamma_1,\gamma_2;t)}{{}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\gamma_1,\gamma_2;1)} =$$

$$= {}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\gamma_1,\gamma_2;1)^{-1}\frac{d}{dt}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r(\alpha_3)_r t^r}{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r r!}$$

Como:

$$\frac{d}{dt}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r(\alpha_3)_r t^r}{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r r!} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r(\alpha_3)_r r t^{r-1}}{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r r!} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r(\alpha_3)_r t^{r-1}}{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r (r-1)!} =$$

$$= \sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)(\alpha_1+1)_{r'}(\alpha_2)(\alpha_2+1)_{r'}(\alpha_3)(\alpha_3+1)_{r'}t^{r'}}{(\gamma_1)(\gamma_1+1)_{r'}(\gamma_2)(\gamma_2+1)_{r'}r'!}$$

Así, sustituyendo para $t = 1$, se obtiene:

$$\mu = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\,{}_3F_2(\alpha_1+1,\alpha_2+1,\alpha_3+1;\gamma_1+1,\gamma_2+1;1)}{\gamma_1\gamma_2\,{}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\gamma_1,\gamma_2;1)} \qquad (\mu)$$

Aún no existe un resultado general que nos permita obtener el valor de esa función hipergeométrica, por lo que no se puede calcular el valor explícito de la esperanza, ni de la constante f_0.

Otro resultado conocido que es bastante interesante es el de la **moda**.

Sabemos, gracias a una caracterización de moda local, que si $\frac{f_m}{f_{m-1}} > 1$ y $\frac{f_m}{f_{m+1}} > 1$, existe una moda en el punto m, m > 0.

Si utilizamos el valor obtenido en la expresión (1.27) y simplificando nos encontramos con el sistema de inecuaciones:

$$\frac{(\alpha_1 + m - 1)(\alpha_2 + m - 1)(\alpha_3 + m - 1)}{(\gamma_1 + m - 1)(\gamma_2 + m - 1)m} > 1$$

$$\frac{(\gamma_1 + m)(\gamma_2 + m)(m + 1)}{(\alpha_1 + m)(\alpha_2 + m)(\alpha_3 + m)} > 1$$

Para $m > 0$ hay que comprobar que $\frac{\gamma_1 \gamma_2}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} > 1$.

De estas inecuaciones obtenemos dos parábolas que determinan la región en la que se encuentran las posibles modas.

Dependiendo del sentido de estas inecuaciones y de que existan raíces reales, se obtienen unos intervalos en los que se encuentran las posibles modas.

Estas pueden ser cualquier número natural situado dentro del intervalo determinado por las dos raíces reales de la primera parábola, en el caso de que éstas existan, siempre y cuando las dos inecuaciones sean mayores que cero y fuera del intervalo determinado por las dos raíces reales de la segunda parábola de forma que si éstas no existen nos quedamos sólamente con las del intervalo determinado por la primera parábola.

Si no existen raíces reales de la primera parábola, no hay ninguna moda.

En el caso de que las dos inecuaciones sean menores que cero, ocurre exactamente lo mismo pero intercambiando la explicación referente a cada parábola.

1.4.2 Teoremas de sumación:

Teorema 1.6. *Sea la función hipergeométrica* ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + n; \gamma_1, \gamma_2; \lambda)$ *en la que la diferencia entre uno de los parámetros del numerador y uno del denominador es un número natural n. Para aquellos casos en que la serie es infinita, esto es, ningún parámetro del numerador es entero* *negativo, se verifica que:*

$$ {}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_2+n;\gamma_1,\gamma_2;\lambda) = $$

$$ = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(\alpha_1)_i(\alpha_2)_i\lambda^i}{(\gamma_1)_i(\gamma_2)_i} \, {}_2F_1(\alpha_1+i,\alpha_2+i;\gamma_1+i;\lambda) \qquad (*) $$

Lema 1.1.

$$ {}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_2+1;\gamma_1,\gamma_2;\lambda) = $$

$$ = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} \frac{(\alpha_1)_i(\alpha_2)_i\lambda^i}{(\gamma_1)_i(\gamma_2)_i} \, {}_2F_1(\alpha_1+i,\alpha_2+i;\gamma_1+i;\lambda) $$

Lema 1.2.

$$ {}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_2+2;\gamma_1,\gamma_2;\lambda) = $$

$$ = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} \frac{(\alpha_1)_i(\alpha_2)_i\lambda^i}{(\gamma_1)_i(\gamma_2)_i} \, {}_2F_1(\alpha_1+i,\alpha_2+i;\gamma_1+i;\lambda) $$

Realmente este resultado también se puede utilizar para funciones hipergeométricas cuya serie sea finita, sólo tendremos que verificar que el parámetro γ_2+n no sea el mayor entero negativo, pues en ese caso la expresión anterior es distinta al operar con sumas finitas. Para poder utilizar dicho resultado de sumación es necesario conocer el valor de la función ${}_2F_1$ que en él aparece. Esto nos conduce a los siguientes corolarios:

Corolario 1.1. *Para* $\lambda = 1$, *si no existen parámetros enteros negativos en el numerador podemos utilizar el resultado* (1.14) *en el teorema anterior, de donde:*

$$ {}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_2+n;\gamma_1,\gamma_2;\lambda) = $$

$$ = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(\alpha_1)_i(\alpha_2)_i}{(\gamma_1)_i(\gamma_2)_i} \frac{\Gamma(\gamma_1+i)\Gamma(\gamma_1-\alpha_1-\alpha_2-i)}{\Gamma(\gamma_1-\alpha_1)\Gamma(\gamma_1-\alpha_2)} $$

Corolario 1.2. *Para* $\lambda = \frac{1}{2}$ *y* $\gamma_1 = \frac{1}{2}(1+\alpha_1+\alpha_2)$, *empleamos el resultado* (1.16) *en* $(*)$ *obteniendo:*

$$ {}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_2+n;\frac{1+\alpha_1+\alpha_2}{2},\gamma_2;\frac{1}{2}) = $$

$$ = \sum_{i=0}^{n} \frac{(\alpha_1)_i(\alpha_2)_i}{\left(\frac{1+\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)_i(\gamma_2)_i} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma\left(\frac{1+\alpha_1+\alpha_2}{2}+i\right)}{2^i\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha_1+i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha_2+i}{2}\right)} $$

Este teorema permite obtener el correspondiente valor de la esperanza de las distribuciones así generadas, ya que en la expresión (μ) aparece una función hipergeométrica de las consideradas en el corolario 1.1, en concreto:

$$ \mu = \frac{\alpha_1\alpha_2(\gamma_2+n)\lambda\ {}_3F_2(\alpha_1+1,\alpha_2+1,\gamma_2+n+1;\gamma_1+1,\gamma_2+1;\lambda)}{\gamma_1\gamma_2\,{}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_2+n;\gamma_1,\gamma_2;1)} $$

Si no hay parámetros enteros negativos, n = 1, $\lambda = 1$ y sustituyendo las expresiones ${}_3F_2$, tras operar nos queda:

$$ \mu = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\gamma_1-\alpha_1-\alpha_2-2}\left[\frac{(\gamma_2+1)(\gamma_1-\alpha_1-\alpha_2-2)+(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}{\gamma_2(\gamma_1-\alpha_1-\alpha_2-2)+\alpha_1\alpha_2}\right] $$

Si consideramos n = 2 y $\lambda = 1$:

$$ \mu = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\gamma_1-\alpha_1-\alpha_2-3}\cdot $$

$$ \cdot\frac{1}{\left[\begin{array}{c}(\gamma_2)_2(\gamma_1-\alpha_1-\alpha_2-2)_2+\alpha_1\alpha_2(\gamma_2+1)(\gamma_1-\alpha_1-\alpha_2-2)+\\ (\alpha_1)_2(\alpha_2)_2\end{array}\right]}\cdot $$

$$ \cdot\left[\begin{array}{c}(\gamma_2+1)_2(\gamma_1-\alpha_1-\alpha_2-3)_2+\\ +(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\gamma_1-\alpha_1-\alpha_2-3)+(\alpha_1)_2(\alpha_2)_2\end{array}\right] $$

siendo la expresión para n = 1 y $\lambda = \frac{1}{2}$, la siguiente:

$$ \mu = 2\frac{(\gamma_2+1)\Gamma\left(\frac{\alpha_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_2+1}{2}\right)+2\Gamma\left(\frac{\alpha_1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_2}{2}+1\right)}{\gamma_2\Gamma\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)+2\Gamma\left(\frac{\alpha_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_2+1}{2}\right)} $$

Teorema de Dixon.
Los parámetros son de la forma $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$; $\gamma_1 = 1+\alpha_1-\alpha_2$, $\gamma_2 = 1+\alpha_1-\alpha_3$ *con* $\alpha_1+2(1-\alpha_2-\alpha_3)>0$. *Además* $\alpha_1,\gamma_1,\gamma_2 \notin Z^-$, *puesto que la función gamma no está definida en los enteros negativos y dicha*

función aparece evaluada en esos parámetros en la expresión (1.17).

Teorema de Watson.

Los parámetros del denominador son de la forma $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\gamma_1 = (1 + \alpha_1 + \alpha_2)/2$, $\gamma_2 = 2\alpha_3$, *con* $1 - \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 > 0$.

Teorema de Whipple.

Los parámetros de la forma $\alpha_1, 1 - \alpha_1, \alpha_2; \gamma, 1 + 2\alpha_2 - \gamma$, *con* $\alpha_2 > 0$.

1.5. Función hipergeométrica ${}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda)$

Las funciones hipergeométricas ${}_3F_2$ son las primera extensión univariante natural de la función hipergeométrica de Gauss. Las soluciones de las ecuaciones en diferencias cuyos coeficientes son los polinomios de grado 3 vienen en términos de dichas funciones hipergeométricas ${}_3F_2$ tal y como hemos visto anteriormente.

Vamos a avanzar considerando L y G como polinomios de orden cuatro siendo una de las raíces de G el valor -1. Esto va a dar lugar a soluciones expresadas en términos de la función hipergeométrica ${}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda)$.

Estos resultados nos darán pié para avanzar hacia polinomios de orden p+1.

1.5.1 Resultados generales.

Sean G y L los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} G(r) &= (\gamma_1 + r)(\gamma_2 + r)(\gamma_3 + r)(r + 1) \\ L(r) &= (\alpha_1 + r)(\alpha_2 + r)(\alpha_3 + r)(\alpha_4 + r)\lambda \end{aligned} \tag{1.30}$$

siendo α_i, $i = 1,2,3,4$; γ_j, $j = 1,2,3$ y λ reales, en principio cualesquiera.

La solución de la ecuación en diferencias (1.1) aplicando (1.2) será:

$$f_r = f_0 \frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r(\alpha_3)_r(\alpha_4)_r\lambda^r}{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r(\gamma_3)_r r!} \tag{1.31}$$

Como en casos anteriores, si f_r verifica las siguientes tres condiciones será una función masa de probabilidad:

1. Condición de positividad.

Esta condición va a imponer unas restricciones a los parámetros $\alpha_i, \gamma_j, \lambda$ de forma que:

$$L(r)G(r) \geq 0$$

2. Condición de convergencia.

$$\sum_{r=1}^{\infty} f_0 \frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r(\alpha_3)_r(\alpha_4)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r(\gamma_3)_r r!}$$

que es la función $f_0\{{}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\lambda)-1\}$. Como esta función es un caso particular de las funciones ${}_pF_q$ será convergente cuando los parámetros cumplan las siguientes restricciones:

a) como p = q + 1, converge $\forall |\lambda| < 1$.

b) para $|\lambda| = 1$, llamando $w = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$ se tiene que

i) si $w > 0$, entonces es absolutamente convergente.
ii) si $-1 < w \leq 0$, es condicionalmente convergente.
iii) si $w \leq -1$, es divergente.

3. Condición de normalización.

$$f_0 = {}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\lambda)^{-1}$$

De esta última expresión se observa que para poder obtener las probabilidades de estas distribuciones es necesario conocer el valor de la función ${}_4F_3$.

La función generatriz de probabilidad para distribuciones con función masa de probabilidad (1.31) tiene la siguiente expresión:

$$g(t) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r t^r = f_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r(\alpha_3)_r(\alpha_4)_r(\lambda t)^r}{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r(\gamma_3)_r r!}$$

es decir:

$$g(t) = \frac{{}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\lambda t)}{{}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\lambda)} \tag{1.32}$$

Esta función para que exista, debe ser convergente para $|t| \leq 1$ lo que se verifica atendiendo a las condiciones anteriores. En concreto, o bien $|\lambda| < 1$, lo que implica que $|\lambda t| < 1$ para $|t| \leq 1$; o bien $|\lambda| = 1$ y $\sum_j \gamma_j - \sum_i \alpha_i > 0$.

A esta familia de distribuciones se le conoce como la generada por la función hipergeométrica ${}_4F_3$ que es una extensión univariante de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$.

Vamos a expresar G en función de r +1 y L en función de r:

$$G(r) = \sum_{i=0}^{4} b_i(r+1)^i$$

Así

$$\begin{aligned}
b_4 &= 1 \\
b_3 &= (\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 1) + (\gamma_3 - 1) \\
b_2 &= (\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) + (\gamma_1 - 1)(\gamma_3 - 1) + (\gamma_2 - 1)(\gamma_3 - 1) \\
b_1 &= (\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)(\gamma_3 - 1) \\
b_0 &= 0
\end{aligned}$$

$$L(r) = \sum_{i=0}^{4} a_i r^i$$

De la misma forma

$$\begin{aligned}
a_4 &= \lambda \\
a_3 &= \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
a_2 &= \lambda(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4) \\
a_1 &= \lambda(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4) \\
a_0 &= \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4
\end{aligned}$$

Ya estamos en condiciones de aplicar el teorema 1.1, en consecuencia la función generatriz de probabilidad verifica la siguiente ecuación diferencial:

$$\lambda t\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 g(t) = (1 - \lambda t)\theta^4 g(t) +$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{3}(\gamma_i-1)-\lambda t\sum_{i=1}^{4}\alpha_i\right]\theta^3 g(t)+$$

$$+\left[\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}(\gamma_i-1)(\gamma_j-1)-\lambda t\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{4}\alpha_i\alpha j\right]\theta^2 g(t)+$$

$$+\left[(\gamma_1-1)(\gamma_2-1)(\gamma_3-1)-\lambda t\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{4}\alpha_i\alpha_j\alpha_k\right]\theta g(t).$$

La función generatriz de momentos verifica:

$$\lambda e^t\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 M(t)=(1-\lambda e^t)D^4M(t)+$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{3}(\gamma_i-1)-\lambda e^t\sum_{i=1}^{4}\alpha_i\right]D^3M(t)+$$

$$+\left[\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}(\gamma_i-1)(\gamma_j-1)-\lambda e^t\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{4}\alpha_i\alpha_j\right]D^2M(t)+$$

$$+\left[(\gamma_1-1)(\gamma_2-1)(\gamma_3-1)-\lambda e^t\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{4}\alpha_i\alpha_j\alpha_k\right]DM(t).$$

y la función característica verifica:

$$\lambda e^{it}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\phi(t)=(1-\lambda e^{it})\theta_i^4\phi(t)+$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{3}(\gamma_i - 1) - \lambda e^{it}\sum_{i=1}^{4}\alpha_i\right]\theta_i^3\phi(t) +$$

$$+\left[\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}(\gamma_i - 1)(\gamma_j - 1) - \lambda e^{it}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{4}\alpha_i\alpha_j\right]\theta_i^2\phi(t) +$$

$$+\left[(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)(\gamma_3 - 1) - \lambda e^{it}\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{4}\alpha_i\alpha_j\alpha_k\right]\theta_i\phi(t).$$

Para la familia de distribuciones generadas por ${}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\lambda)$, se verifica la siguiente ecuación de recurencia:

$$b_4\mu'_{4+h} + b_3\mu'_{3+h} + b_2\mu'_{2+h} + b_1\mu'_{1+h} =$$

$$= \sum_{m=0}^{h}\binom{h}{m}\{a_4\mu'_{4+m} + a_3\mu'_{3+m} + a_2\mu'_{2+m} + a_1\mu'_{1+m} + a_0\mu'_m\} \tag{1.33}$$

donde a_i, b_i son los coeficientes polinomiales de $L(r)$ y $G(r+1)$ respectivamente, y que es únicamente de momentos al ser $b_0 = 0$.

Así, por ejemplo, para h = 0 y si $\lambda = 1$, las expresiones anteriores se simplifican de la siguiente manera:

$$(b_3 - a_3)\mu'_3 + (b_2 - a_2)\mu'_2 + (b_1 - a_1)\mu - a_0 = 0$$

Conocidos los dos primeros momentos se puede obtener el tercero a partir de la expresión anterior, y de ahí los siguientes momentos.

La media y el momento de orden dos no centrado tienen la siguiente forma:

$$\mu = \frac{\prod_{i=1}^{4} \alpha_i \lambda}{\prod_{i=1}^{3} \gamma_i} \frac{{}_4F_3(\alpha_1+1,\alpha_2+1,\alpha_3+1,\alpha_4+1;\gamma_1+1,\gamma_2+1,\gamma_3+1;\lambda)}{{}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\lambda)}$$

$$\mu_2' = \mu + \frac{\prod_{i=1}^{4}(\alpha_i)_2 \lambda^2}{\prod_{i=1}^{3}(\gamma_i)_2} +$$

$$+ \frac{{}_4F_3(\alpha_1+2,\alpha_2+2,\alpha_3+2,\alpha_4+2;\gamma_1+2,\gamma_2+2,\gamma_3+2;\lambda)}{{}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\lambda)} \tag{1.34}$$

Una vez más no existe un resultado general que nos permita obtener el valor de esa función hipergeométrica, por lo que no se pueden calcular los valores explícitos de (1.34) ni de la constante f_0.

1.5.2 Teoremas de sumación.

Teorema 1.7. *Sea la función hipergeométrica* ${}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \gamma_3+n;\ \gamma_1,\gamma_2,\ \gamma_3;\lambda)$ *en la que la diferencia entre uno de los parámetros del numerador y uno del denominador es un número natural n. Para aquellos casos en que la serie es infinita, esto es, ningún parámetro del numerador es entero negativo, se verifica que:*

$${}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma_3+n;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\lambda) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(\alpha_1)_i(\alpha_2)_i(\alpha_3)_i\lambda^i}{(\gamma_1)_i(\gamma_2)_i(\gamma_3)_i} \cdot {}_3F_2(\alpha_1+i,\alpha_2+i,\alpha_3+i;\gamma_1+i,\gamma_2+i;\lambda)$$

El resultado anterior tiene utilidad práctica cuando se puede calcular el valor de la función hipergeométrica ${}_3F_2$, *por lo que nos interesan funciones del tipo*

$${}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_2+m,\gamma_3+n;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\lambda)$$

con m y n números naturales.

Corolario 1.3. *En las condiciones del teorema 1.7 se verifica:*

$$ {}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_2+m,\gamma_3+n;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\lambda) = $$

$$ = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{(\alpha_1)_i(\alpha_2)_i(\gamma_2+m)_i\lambda^i}{(\gamma_1)_i(\gamma_2)_i(\gamma_3)_i}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(\alpha_1+i)_j(\alpha_2+i)_j\lambda^j}{(\gamma_1+i)_j(\gamma_2+i)_j}. $$

$$ \cdot {}_2F_1(\alpha_1+i+j,\alpha_2+i+j;\gamma_1+i+j;\lambda) $$

Corolario 1.4.

$$ {}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_2+m,\gamma_3+n;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;1) = $$

$$ = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{(\alpha_1)_i(\alpha_2)_i(\gamma_2+m)_i}{(\gamma_1)_i(\gamma_2)_i(\gamma_3)_i}. $$

$$ \cdot\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(\alpha_1+i)_j(\alpha_2+i)_j}{(\gamma_1+i)_j(\gamma_2+i)_j}\cdot\frac{\Gamma(\gamma_1+i+j)\Gamma(\gamma_1-\alpha_1-\alpha_2-i-j)}{\Gamma(\gamma_1-\alpha_1)\Gamma(\gamma_1-\alpha_2)} $$

Este corolario permite obtener el correspondiente valor de la esperanza y del momento de orden 2 de las distribuciones así generadas, ya que en las expresiones (1.34) aparecen funciones hipergeométricas de las consideradas en dicho corolario.

Corolario 1.5.

$$ {}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_2+m,\gamma_3+n;\frac{1+\alpha_1+\alpha_2}{2},\gamma_2,\gamma_3;\frac{1}{2}) = $$

$$ = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{(\alpha_1)_i(\alpha_2)_i(\gamma_2+m)_i}{(\frac{1+\alpha_1+\alpha_2}{2})_i(\gamma_2)_i(\gamma_3)_i2^i}. $$

$$ \cdot\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(\alpha_1+i)_j(\alpha_2+i)_j}{(\frac{1+\alpha_1+\alpha_2}{2}+i)_j(\gamma_2+i)_j2^j}. $$

$$ \cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma\left(\frac{1+\alpha_1+\alpha_2}{2}+i+j\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha_1+i+j}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha_2+i+j}{2}\right)}. $$

1.6 Función hipergeométrica ${}_{p+1}F_p(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p+1};\beta_1,\ldots,\beta_p;\lambda)$.

1.6.1 Resultados generales.

Sean G y L los siguientes polinomios:

$$
\begin{aligned}
G(r) &= (\gamma_1 + r)...(\gamma_p + r)(r+1) \\
L(r) &= (\alpha_1 + r)...(\alpha_{p+1} + r)\lambda
\end{aligned}
\qquad (1.35)
$$

siendo $\alpha_i, i = 1,...,p+1$; γ_j, $j = 1,...,p$ y λ reales, en principio cualesquiera.

La solución de la ecuación en diferencias (1.1) aplicando (1.2) será:

$$
f_r = f_0 \frac{(\alpha_1)_r ...(\alpha_{p+1})_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r ... (\gamma_p)_r r!} \qquad (1.36)
$$

Como en casos anteriores, si (1.36) verifica las siguientes tres condiciones será una función masa de probabilidad:

1. Condición de positividad.

Esta condición va a imponer unas restricciones a los parámetros $\alpha_i, \gamma_j, \lambda$, de forma que:

$$
L(r)G(r) \geq 0
$$

2. Condición de convergencia.

$$
\sum_{r=1}^{\infty} f_0 \frac{(\alpha_1)_r ... (\alpha_{p+1})_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r ... (\gamma_p)_r r!}
$$

que es la función $f_0\{_{p+1}F_p(\alpha_1,...,\alpha_{p+1};\gamma_1,...,\gamma_p;\lambda) - 1\}$ que converge para $|\lambda| < 1$, mientras que para $|\lambda| = 1$ los parámetros han de cumplir las siguientes restricciones:

i) si $w > 0$, entonces es absolutamente convergente.
ii) si $-1 < w \leq 0$, es condicionalmente convergente.
iii) si $w \leq -1$, es divergente.

siendo $w = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j - \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i$.

3. Condición de normalización.

$$f_0 = {}_{p+1}F_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \ldots, \gamma_p; \lambda)^{-1}$$

De esta última expresión se observa que para poder obtener las probabilidades de estas distribuciones es necesario conocer el valor de la función ${}_{p+1}F_p$.

La función generatriz de probabilidad para distribuciones con función masa de probabilidad (1.36) tiene la siguiente forma:

$$g(t) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r t^r = f_0 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r \ldots (\alpha_{p+1})_r (\lambda t)^r}{(\gamma_1)_r \ldots (\gamma_p)_r r!}$$

esto es:

$$g(t) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r t^r = \frac{{}_{p+1}F_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \ldots, \gamma_p; \lambda t)}{{}_{p+1}F_p(\alpha_p, \ldots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \ldots, \gamma_p; \lambda)} \qquad (1.37)$$

y para que exista, debe ser convergente para $|t| \leq 1$, lo que se verifica atendiendo a las condiciones anteriores. En concreto, o bien $|\lambda| < 1$, lo cual implica que $|\lambda t| < 1$ para $|t| \leq 1$; o bien $|\lambda| = 1$ y $w > 0$.

A esta familia de distribuciones se le conoce como la generada por la función hipergeométrica ${}_{p+1}F_p$ que es una extensión univariante de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$.

Vamos a expresar G en función de r +1 y L en función de r:

$$G(r) = \sum_{i=0}^{p} b_i (r+1)^i$$

Así

$$b_{p+1} = 1$$

$$b_p = \sum_{i_1=1}^{p} (\gamma_{i_1} - 1)$$

$$b_{p-1} = \sum_{\substack{i_1, i_2 = 1 \\ i_1 \neq i_2}}^{p} (\gamma_{i_1} - 1)(\gamma_{i_2} - 1)$$

$$\vdots$$

$$b_2 = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{p-1}=1 \\ i_1\neq\ldots\neq i_{p-1}}}^{p} (\gamma_{i_1}-1)\ldots(\gamma_{i_{p-1}}-1)$$

$$b_1 = (\gamma_1 - 1)\ldots(\gamma_p - 1)$$

$$b_0 = 0$$

$$L(r) = \sum_{i=0}^{p} a_i r^i$$

De la misma forma

$$a_{p+1} = \lambda$$

$$a_p = \lambda \sum_{i_1=1}^{p+1} \alpha_{i_1}$$

$$a_{p-1} = \lambda \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1\neq i_2}}^{p+1} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}$$

$$\vdots$$

$$a_1 = \lambda \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p=1 \\ i_1\neq\ldots\neq i_p}}^{p+1} \alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_p}$$

$$a_0 = \lambda\alpha_1\ldots\alpha_p$$

Ya estamos en condiciones de aplicar el teorema 1.1, en consecuencia la función generatriz de probabilidad verifica la siguiente ecuación diferencial:

$$\lambda t\alpha_1\ldots\alpha_{p+1} g(t) = (1-\lambda t)\theta^{p+1} g(t) +$$

$$+ \left[\sum_{i_1=1}^{p} (\gamma_{i_1} - 1) - \lambda t \sum_{i_1=1}^{p+1} \alpha_{i_1} \right] \theta^p g(t) + \ldots +$$

$$+\left[(\gamma_1 - 1)\ldots(\gamma_p - 1) - \lambda t \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p=1 \\ i_1\neq\ldots\neq i_p}}^{p+1} \alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_p}\right]\theta g(t).$$

La función generatriz de momentos verifica:

$$\lambda e^t \alpha_1\ldots\alpha_{p+1} M(t) = (1 - \lambda e^t) D^{p+1} M(t) +$$

$$+\left[\sum_{i_1=1}^{p}(\gamma_{i_1} - 1) - \lambda e^t \sum_{i_1=1}^{p+1} \alpha_{i_1}\right] D^p M(t) + \ldots +$$

$$+\left[(\gamma_1 - 1)\ldots(\gamma_p - 1) - \lambda e^t \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p=1 \\ i_1\neq\ldots\neq i_p}}^{p+1} \alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_p}\right] DM(t).$$

y la función característica verifica:

$$\lambda e^{it} \alpha_1\ldots\alpha_{p+1} \phi(t) = (1 - \lambda e^{it}) \theta_i^{p+1} \phi(t) +$$

$$+\left[\sum_{i_1=1}^{p}(\gamma_{i_1} - 1) - \lambda e^{it} \sum_{i_1=1}^{p+1} \alpha_{i_1}\right] \theta_i^p \phi(t) + \ldots +$$

$$+\left[(\gamma_1 - 1)\ldots(\gamma_p - 1) - \lambda e^{it} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p=1 \\ i_1\neq\ldots\neq i_p}}^{p+1} \alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_p}\right] \theta_i \phi(t).$$

Para la familia de distribuciones generadas por ${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \ldots, \gamma_p; \lambda)$, se verifica la siguiente ecuación de recurencia:

$$b_{p+1}\mu'_{p+1+h} + b_p\mu'_{p+h} + \ldots + b_1\mu'_{1+h} =$$

$$= \sum_{m=0}^{h} \binom{h}{m} \{a_{p+1}\mu'_{p+1+m} + a_p\mu'_{p+m} + \dots + a_0\mu'_m\} \tag{1.38}$$

donde a_i, b_i son los coeficientes polinomiales de $L(r)$ y $G(r+1)$ respectivamente, y que es únicamente de momentos al ser $b_0 = 0$.

Así, por ejemplo, para h = 0 y si $\lambda = 1$, las expresiones anteriores se simplifican de la siguiente manera:

$$(b_p - a_p)\mu'_p + \dots + (b_1 + a_1)\mu - a_0 = 0$$

Conocidos los p-1 primeros momentos se puede obtener el momento de orden p a partir de lla expresión anterior, y de ahí los siguientes momentos.

El momento de orden r se define como:

$$\mu'_r = [\theta^r g(t)]_{t=1}$$

Así, la media y el momento no centrado de orden dos tienen la siguiente forma:

$$\mu = \frac{\prod_{i=1}^{p+1} \alpha_i \lambda}{\prod_{i=1}^{p} \gamma_i} \frac{{}_{p+1}F_p(\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_p + 1; \gamma_1 + 1, \dots, \gamma_p + 1; \lambda)}{{}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)}$$

$$\mu'_2 = \mu + \frac{\prod_{i=1}^{p+1} (\alpha_i)_2 \lambda^2}{\prod_{i=1}^{p} (\gamma_i)_2} \cdot$$

$$\cdot \frac{{}_{p+1}F_p(\alpha_1 + 2, \dots, \alpha_{p+1} + 2; \gamma_1 + 2, \dots, \gamma_p + 2; \lambda)}{{}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)} \tag{1.39}$$

Los momentos factoriales los obtenemos derivando la función generatriz de probabilidad:

$$\mu'_{[r]} = \frac{\prod_{i=1}^{p+1}(\alpha_i)_r \lambda^2}{\prod_{i=1}^{p}(\gamma_i)_r} \frac{{}_{p+1}F_p(\alpha_1 + r, \ldots, \alpha_{p+1} + r; \gamma_1 + r, \ldots, \gamma_p + r; \lambda)}{{}_{p+1}F_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \ldots, \gamma_p; \lambda)}$$

Kendall y Stuart, [ ] mediante las relaciones que ligan los dos tipos de momentos nos indican como se pueden obtener los momentos no centrados.

Seguimos encontrándonos el problema de que no existe un resultado general que nos permita obtener el valor de esa función hipergeométrica.

1.6.2 Teoremas de sumación.

Teorema 1.8. *Sea la función hipergeométrica* ${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_1, \gamma_p + n; \gamma_1, \ldots, \gamma_p; \lambda)$ *en la que la diferencia entre uno de los parámetros del numerador y uno del denominador es un número natural n. Para aquellos casos en que la serie es infinita, esto es, ningún parámetro del numerador es entero negativo, se verifica que:*

$${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \gamma_p + n; \gamma_1, \ldots, \gamma_p; \lambda) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(\alpha_1)_i \ldots (\alpha_p)_i \, \lambda^i}{(\gamma_1)_i \ldots (\gamma_p)_i} \, {}_pF_{p-1}(\alpha_1 + i, \ldots, \alpha_p + i; \gamma_1 + i, \ldots, \gamma_{p-1} + i; \lambda)$$

siempre y cuando $\gamma_p + n$ *no sea el mayor valor entero negativo de los parámetros del numerador.*

El resultado anterior tiene utilidad práctica cuando se puede calcular el valor de la función hipergeométrica ${}_{p+1}F_p$, por lo que nos interesan funciones del tipo ${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + n_1, \ldots, \gamma_p + n_{p-1}; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p; \lambda)$ con n_j, $j = 1, \ldots, p-1$ números naturales, de forma que se llega al siguiente corolario, aplicando el teorema anterior de forma recurrente,

Corolario1.7. *En las condiciones del teorema 1.8 se tiene que:*

$${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + n_1, \ldots, \gamma_p + n_{p-1}; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p; \lambda) =$$

$$\sum_{i_1=0}^{n_{p-1}} \binom{n_{p-1}}{i_1} \frac{(\alpha_1)_{i_1} (\alpha_2)_{i_1} (\gamma_2 + n_1)_{i_1} \ldots (\gamma_{p-1} + n_{p-2})_{i_1} \lambda^{i_1}}{(\gamma_1)_{i_1} (\gamma_2)_{i_1} \ldots (\gamma_p)_{i_1}}.$$

$$\cdot \sum_{i_2=0}^{n_{p-2}} \binom{n_{p-2}}{i_2} \frac{(\alpha_1+i_1)_{i_2}(\alpha_2+i_1)_{i_2}(\gamma_2+i_1+n_1)_{i_2}\cdots}{(\gamma_1+i_1)_{i_2}(\gamma_2+i_2)_{i_2}\cdots}$$

$$\frac{\cdots(\gamma_{p-2}+i_1+n_{p-3})_{i_2}\lambda^{i_2}}{\cdots(\gamma_{p-1}+i_1)_{i_2}}\cdots$$

$$\cdots \sum_{i_{p-1}=0}^{n_1} \binom{n_1}{i_{p-1}} \frac{(\alpha_1+i_1+\ldots+i_{p-2})_{i_{p-1}}(\alpha_2+i_1+\ldots+i_{p-2})_{i_{p-1}}\lambda^{i_{p-1}}}{(\gamma_1+i_1+\ldots+i_{p-2})_{i_{p-1}}(\gamma_2+i_1+\ldots+i_{p-2})_{i_{p-1}}}.$$

$$\cdot\, {}_2F_1(\alpha_1+i_1+\ldots+i_{p-1},\alpha_2+i_1+\ldots+i_{p-1};\gamma_1+i_1+\ldots+i_{p-1};\lambda) \tag{1.40}$$

Realmente este resultado es aplicable para funciones hipergeométricas cuya serie sea finita, únicamente habrá que tener cuidado en que el parámetro mayor entero negativo sea α_1 ó α_2.

Este teorema también permite obtener el correspondiente valor de la esperanza y del momento de orden 2 de las distribuciones así generadas, ya que en las expresiones (1.39) aparecen funciones hipergeométricas de las consideradas en el teorema.

1.7 Función hipergeométrica bivariante $F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma,\lambda_1,\lambda_2)$.

Esta función hipergeométrica bivariante que vamos a estudiar se ha generado mediante las cuatro funciones hipergeométricas de Lauricella, que son las extensiones bivariantes de la función hipergeométrica de Gauss.

1.7.1 Resultados generales.

Consideremos en el sistema (2.1) los siguientes polinomios:

$$L(r,s) = (\alpha_1+r)(\beta_1+r)\lambda_1$$

$$N(r,s) = (\alpha_2+s)(\beta_2+s)\lambda_2$$

$$G(r,s) = (\gamma+r+s)(r+1)$$

$$H(r,s) = (\gamma+r+s)(s+1) \tag{1.41}$$

con $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma,\lambda_1,\lambda_2$ parámetros reales no nulos y γ no entero negativo. L, N, G y H verifican la ecuación (1.11).

En estas condiciones, se obtiene como solución la siguiente función:

$$f_{r,s} = \left\{ \begin{array}{ll} f_{0,0}\dfrac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_s(\beta_1)_r(\beta_2)_s\,\lambda_1^r\lambda_2^s}{(\gamma)_{r+s}\,r!s!} & r,s \geq 1 \\ f_{0,0}\dfrac{(\alpha_1)_r(\beta_1)_r\,\lambda_1^r}{(\gamma)_r\,r!} & s \geq 1,\ s = 0 \\ f_{0,0}\dfrac{(\alpha_2)_s(\beta_2)_s\,\lambda_2^s}{(\gamma)_s\,s!} & s \geq 1,\ r = 0 \\ f_{0,0} & \end{array} \right\} \tag{1.42}$$

Si la función (1.42) verifica las siguientes condiciones será una función masa de probabilidad:

1. Condición de positividad.

Esta condición va a imponer unas restricciones a los parámetros $\alpha_i, \beta_j, \gamma, \lambda_k$.

2. Condición de convergencia:

$$\sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s\neq 0 \\ (r,s)\in H}}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1}\prod_{t'=0}^{s-1} \frac{L(t,s)}{G(t,s)}\frac{N(0,t')}{H(0,t')} = f_{00}\{F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma;\lambda_1,\lambda_2)-1\}$$

y esta suma es convergente para $\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|\} < 1$ y si $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ lo es cuando $\gamma > max\{\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2\}$.

3. Condición de normalización.

$$f_{00} = F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma;\lambda_1,\lambda_2)^{-1}$$

donde $F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma;\lambda_1,\lambda_2)$ es una de las funciones hipergeométricas de Appell que generaliza la función hipergeométrica de Gauss.

1.7.2 Funciones generatrices.

La función generatriz de probabilidad para las distribuciones con función de probabilidad (1.42) es:

$$g(t_1,t_2) = \frac{F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma;\lambda_1 t_1,\lambda_2 t_2)}{F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma;\lambda_1,\lambda_2)} \tag{1.43}$$

que converge para $|t_1| \leq 1, |t_2| \leq 1$ si $|\lambda_1| \leq 1, |\lambda_2| \leq 1$ (con $\gamma > \max\{(\alpha_1 + \beta_1), (\alpha_2 + \beta_2)\}$ para el caso en que $\lambda_1 = 1$ o $\lambda_2 = 1$).

A esta familia de distribuciones se le conoce como la generada por la función hipergeométrica F_3, que es una extensión bivariante de la conocida función hipergeométrica de Gauss o ${}_2F_1$.

Si consideramos:

$$G(r,s) = (\gamma - 1)(r+1) + (r+1)s + (r+1)^2 \tag{1.44}$$

$$H(r,s) = (\gamma - 1)(s+1) + r(s+1) + (s+1)^2$$

$$L(r,s) = \alpha_1\beta_1\lambda_1 + (\alpha_1 + \beta_1)\lambda_1 r + \lambda_1 r^2$$

$$N(r,s) = \alpha_2\beta_2\lambda_2 + (\alpha_2 + \beta_2)\lambda_2 s + \lambda_2 s^2$$

la función generatriz de probabilidad verifica el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\lambda_1 t_1 \alpha_1 \beta_1 g(t_1,t_2) = (1 - \lambda_1 t_1)\theta_1^2 g(t_1,t_2) +$$

$$+ [\gamma - 1 - \lambda_1 t_1(\alpha_1 + \beta_1)]\theta_1 g(t_1,t_2) + \theta_1\theta_2 g(t_1,t_2)$$

$$\lambda_2 t_2 \alpha_2 \beta_2 g(t_1,t_2) = (1 - \lambda_2 t_2)\theta_2^2 g(t_1,t_2) +$$

$$+ [\gamma - 1 - \lambda_2 t_2(\alpha_2 + \beta_2)]\theta_2 g(t_1,t_2) + \theta_1\theta_2 g(t_1,t_2) \tag{1.45}$$

La función generatriz de momentos verifica:

$$\lambda_1 e^{t_1}\alpha_1\beta_1 M(t_1,t_2) = (1 - \lambda_1 e^{t_1})D_1^2 M(t_1,t_2) +$$

$$+ [\gamma - 1 - \lambda_1 e^{t_1}(\alpha_1 + \beta_1)]D_1 M(t_1,t_2) + D_1 D_2 M(t_1,t_2)$$

$$\lambda_2 e^{t_2}\alpha_2\beta_2 M(t_1,t_2) = (1 - \lambda_2 e^{t_2})D_2^2 M(t_1,t_2) +$$

$$+[\gamma - 1 - \lambda_2 e^{it_2}(\alpha_2 + \beta_2)]D_2 M(t_1,t_2) + D_1 D_2 M(t_1,t_2) \quad (1.46)$$

La función característica verificará:

$$\lambda_1 e^{it_1}\alpha_1\beta_1\phi(t_1,t_2) = (1-\lambda_1 e^{it_1})\theta'_1\phi(t_1,t_2) +$$

$$+[\gamma - 1 - \lambda_1 e^{it_1}(\alpha_1+\beta_1)]\theta'^2_1\phi(t_1,t_2) + \theta'_1\theta'_2\phi(t_1,t_2)$$

$$\lambda_2 e^{it_2}\alpha_2\beta_2\phi(t_1,t_2) = (1-\lambda_2 e^{it_2})\theta'^2_2\phi(t_1,t_2) +$$

$$+[\gamma - 1 - \lambda_2 e^{it_2}(\alpha_2+\beta_2)]\theta'_2\phi(t_1,t_2) + \theta'_1\theta'_2\phi(t_1,t_2) \quad (1.47)$$

1.7.3. Relación de recurrencia entre los momentos.

Expresando los polinomios como en (1.44) y aplicando el teorema 1.5 obtenemos la primera relación:

$$(\gamma-1)\sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\mu'_{1+f,m} + \sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\mu'_{1+f,1+m} + \sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\mu'_{2+f,m} =$$

$$= \sum_{n=0}^{f}\sum_{m=0}^{g}\binom{f}{n}\binom{g}{m}\{\alpha_1\beta_1\lambda_1\mu'_{n,m} + (\alpha_1+\beta_1)\lambda_1\mu'_{1+n,m} + \lambda_1\mu'_{2+n,m}\}$$

$$(1.48)$$

Reemplazando en esta expresión para distintos valores de f y g obtenemos relaciones como las que siguen, en donde $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\alpha_1\beta_1 = [\gamma - 1 - (\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{1,0} + \mu'_{1,1}$$

$$\alpha_1\beta_1 = [\gamma - 1 - (\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{1,0} + [\gamma - (\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{1,1} + \mu'_{1,2} - \alpha_1\beta_1\mu'_{0,1}$$

$$\alpha_1\beta_1 = [\gamma - 2 - (\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{2,0} + \mu'_{2,1} + [\alpha_1\beta_1 + \alpha_1 + \beta_1]\mu'_{1,0}$$

$$(1.49)$$

La segunda relación de recurrencia entre momentos es:

$$(\gamma-1)\sum_{n=0}^{f}\binom{f}{n}\mu'_{n,1+g}+\sum_{n=0}^{f}\binom{f}{n}\mu'_{1+n,\,1+g}+\sum_{n=0}^{f}\binom{f}{n}\mu'_{n,2+g}=$$

$$=\sum_{n=0}^{f}\sum_{m=0}^{g}\binom{f}{n}\binom{g}{m}\{\alpha_2\beta_2\lambda_2\mu'_{n,m}+(\alpha_2+\beta_2)\lambda_2\mu'_{n,1+m}+\lambda_2\mu'_{n,2+m}\}$$

(1.50)

De nuevo, reemplazando en esta expresión para distintos valores de f y g obtenemos las siguientes relaciones, donde $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\alpha_2\beta_2 = [\gamma-1-(\alpha_2+\beta_2)]\mu'_{0,1}+\mu'_{1,1}$$

$$\alpha_2\beta_2 = [\gamma-1-(\alpha_2+\beta_2)]\mu'_{0,1}+[\gamma-(\alpha_2+\beta_2)]\mu'_{1,1}+\mu'_{2,1}-\alpha_2\beta_2\mu'_{1,0}$$

$$\alpha_2\beta_2 = [\gamma-2-(\alpha_2+\beta_2)]\mu'_{0,2}+\mu'_{1,2}+[\alpha_2\beta_2+\alpha_2+\beta_2]\mu'_{0,1}$$

(1.51)

Así, si conocemos una de las medias marginales podemos obtener todos los momentos no centrados.

Como las medias marginales son:

$$\mu'_{1,0} = t_1\frac{d}{dt_1}g(t_1,t_2)\ \Big|_{t_1=1}$$

$$\mu'_{0,1} = t_2\frac{d}{dt_2}g(t_1,t_2)\ \Big|_{t_2=1}$$

se obtienen las siguientes expresiones:

$$\mu'_{1,0} = f_{0,0}\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma}F_3(\alpha_1+1,\alpha_2,\beta_1+1,\beta_2;\gamma+1;1,1)$$

$$\mu'_{0,1} = f_{0,0}\frac{\alpha_2\beta_2}{\gamma}F_3(\alpha_1,\alpha_2+1,\beta_1,\beta_2+1;\gamma+1;1,1)$$

$$\mu'_{1,1} = \alpha_1\beta_1 - [\gamma - 1 - (\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{1,0}$$

$$\mu'_{2,1} = \alpha_2\beta_2\mu'_{1,0} - [\gamma - (\alpha_2+\beta_2)]\mu'_{1,1}$$

$$\mu'_{1,2} = \alpha_1\beta_1\mu'_{0,1} - [\gamma - (\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{1,1}$$

$$\mu'_{2,0} = \frac{1}{\gamma-2-(\alpha_1+\beta_1)}\{\alpha_1\beta_1 - \mu'_{2,1} + [\alpha_1\beta_1+\alpha_1+\beta_1]\mu'_{1,0}\}$$

$$\mu'_{0,2} = \frac{1}{\gamma-2-(\alpha_2+\beta_2)}\{\alpha_2\beta_2 - \mu'_{1,2} + [\alpha_2\beta_2+\alpha_2+\beta_2]\mu'_{0,1}\} \tag{1.52}$$

Como vemos las medias marginales aparecen en función de la función hipergeométrica F_3, la cual para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ es una serie. El valor de dicha serie no es conocido en general, de ahí que sea interesante obtener algunos resultados que nos permitan sumar esa serie. Precisamente al estudiar las distribuciones marginales y condicionadas nos encontraremos con una expresión que nos da el valor de esa suma en una amplia clase de funciones.

1.7.4. Distribuciones condicionadas y marginales.

Aplicando el teorema 1.3 obtenemos las distribuciones condicionadas y marginales que nos da la ecuación en diferencias que verifica las función de densidad unidimensional condicionada. Las soluciones en cada caso vienen dadas por:

$$f_{r/s} = \left\{ \begin{array}{ll} f_{0/s}\dfrac{(\alpha_1)_r(\beta_1)_r\,\lambda_1^r}{(\gamma+s)_r\, r!} & r \geq 1 \\ f_{0/s} & r = 0 \end{array} \right\}$$

$$f_{s/r} = \left\{ \begin{array}{ll} f_{0/r} \dfrac{(\alpha_2)_s(\beta_2)_s \lambda_2^s}{(\gamma + r)_s\, s!} & s \geq 1 \\ f_{0/r} & s = 0 \end{array} \right\}$$

donde $f_{0/s} = {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma + s; \lambda_1)^{-1}$ y $f_{0/r} = {}_2F_1(\alpha_2, \beta_2; \gamma + r; \lambda_2)^{-1}$.

En consecuencia las funciones generatrices de probabilidad serán:

$$\begin{aligned} g(t) &= f_{0/s}\, {}_2F_1\left(\alpha_1, \beta_1; \gamma + s; \lambda_1\, t\right) \\ g(t) &= f_{0/r}\, {}_2F_1\left(\alpha_2, \beta_2; \gamma + s; \lambda_2\, t\right) \end{aligned} \tag{1.53}$$

con $r, s \in Z^+$.

Por tanto, las distribuciones condicionadas pertenecen a la familia de distribuciones univariantes generada por la función hipergeométrica de Gauss.

Las curvas de regresión son no lineales. Así si $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ se tiene:

$$\hat{\xi}_1 = E[\xi_1 = r/\xi_2 = s] = \frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma + s - \alpha_1 - \beta_1 - 1}$$

$$\hat{\xi}_2 = E[\xi_2 = s/\xi_1 = r] = \frac{\alpha_2\beta_2}{\gamma + r - \alpha_2 - \beta_2 - 1} \tag{1.54}$$

Al ser decrecientes las curvas, la covarianza y el coeficiente de correlación son negativos.

Teorema 1.9. *Las funciones generatrices de probabilidad de las distribuciones marginales siendo $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ son:*

$$g_1(t) = \frac{{}_3F_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma - \alpha_2 - \beta_2; \gamma - \alpha_2, \gamma - \beta_2; t)}{{}_3F_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma - \alpha_2 - \beta_2; \gamma - \alpha_2, \gamma - \beta_2; 1)}$$

$$g_2(t) = \frac{{}_3F_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma - \alpha_1 - \beta_1; \gamma - \alpha_1, \gamma - \beta_1; t)}{{}_3F_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma - \alpha_1 - \beta_1; \gamma - \alpha_1, \gamma - \beta_1; 1)} \tag{1.55}$$

Así pues dichas distribuciones pertenecen a la familia de distribuciones univariantes generadas por la función hipergeométrica ${}_3F_2$.

Corolario 1.8. *La función bivariante F_3 toma el siguiente valor para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:*

$$F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma;1,1) =$$
$$= {}_2F_1(\alpha_1,\beta_1;\gamma;1).{}_3F_2(\alpha_2,\beta_2,\gamma-\alpha_1-\beta_1;\gamma-\alpha_1,\gamma-\beta_1;1) \tag{1.56a}$$

$$F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma;1,1) =$$
$$= {}_2F_1(\alpha_2,\beta_2;\gamma;1).{}_3F_2(\alpha_1,\beta_1,\gamma-\alpha_2-\beta_2;\gamma-\alpha_2,\gamma-\beta_2;1) \tag{1.56b}$$

Si conocemos el valor de ${}_3F_2$ este resultado se puede aplicar en la práctica.

Si la serie no es finita, utilizando $(1.56\,a)$ el teorema 1.9 se podrá aplicar siempre y cuando una de las siguientes expresiones sea un entero positivo:

$$\alpha_2-\gamma-\alpha_1$$

$$\alpha_2-\gamma+\beta_1$$

$$\beta_2-\gamma+\alpha_1$$

$$\beta_2-\gamma+\beta_1 \tag{1.57}$$

Análogamente si utilizamos $(1.56\,b)$ podremos aplicar el mismo teorema cuando una de las siguiente expresiones sea un entero positivo:

$$\alpha_1-\gamma-\alpha_2$$

$$\alpha_1-\gamma+\beta_2$$

$$\beta_1-\gamma+\alpha_2$$

$$\beta_1-\gamma+\beta_2 \tag{1.58}$$

Cuando uno de los parámetros del numerador coincida con uno de los del denominador, la función ${}_3F_2$ se simplifica en una ${}_2F_1$. Por ejemplo cuando $\alpha_2=\gamma-\alpha_1$ o $\beta_2=\gamma-\beta_1$.

Corolario 1.9. *La función* $F_3(\alpha, \gamma - \alpha, \beta_1, \beta_2; \gamma, 1, 1)$ *donde* $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \gamma - \alpha - \beta_1,\ \gamma - \beta_1 \notin Z^-$ *toma el siguiente valor*:

$$F_3(\alpha, \gamma - \alpha, \beta_1, \beta_2; \gamma, 1, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta_1)\Gamma(\alpha - \beta_2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta_1 - \beta_2)} \tag{1.59}$$

– § –

Capítulo 2

La distribución de Waring

2.1. Cronología.

En este primer apartado vamos a hacer una introducción en la que abordaremos los resultados más conocidos sobre esta distribución desde el punto de vista univariante, bivariante y multivariante desde su aparición hasta el momento en el que fue depositada esta Tesis Doctoral.

Habría muchas formas de empezar estas referencias historicas pero pensamos que es interesante recordar que un ejemplo de Newbold (1925, 1927), [19] en el que indicaba que la distribución de accidentes de trabajadores en una factoría de jabón seguía una binomial negativa, fue ajustado por Irwin (1968), [17] mediante una distribución generalizada de Waring Univariante probando que los resultados mejoraban los obtenidos por Newbold.

Hay un artículo anterior al mencionado, Irwin (1963), [17], en el que la distribución de Waring Univariante fue ajustada por máxima verosimilitud. En este artículo Irwin trabajó con una población de gusanos (*Litomosoides carinii, Liponyssus bacoti*). El Dr. Norman Bailey posteriormente ajustó los mismos datos con la distribución generalizada de Waring mediante dos métodos.

La distribución generalizada de Waring Univariante $UGWD\ (a,k,\rho)$ fue estudiada por Irwin (1968, 1975) entre otros y se utiliza en diferentes campos, entre los que destaca la teoría de accidentes. Esta distribución también puede verse como una distribución que pertenece a la familia de distribuciones de Kemp tipo 4. Es una distribución que tiene una cola extremadamente larga para ciertos valores, además todos los momentos pueden llegar a ser infinitos.

En tres artículos publicados por la J. R. Statist. Soc. Academy en el año 1975 y debidos a Irwin, [18] aparece un amplio estudio sobre la distribución generalizada de Waring Univariante.

En esta serie, Irwin presenta la distribución como una distribución hipergeométrica cuya función generatriz es la siguiente:

$$CF(a,k,\rho+a+k,A),$$
$$con\, a \geq 0, \qquad k \geq 0, \qquad \rho > 0, \qquad C = \frac{\rho_{(k)}}{(\rho+a)_{(k)}} \qquad (2.1)$$

e indica que para ciertos valores de los parámetros a, k tiene una cola extremadamente larga, añadiendo que de hecho todos los momentos pueden ser infinitos.

En el primer artículo, distingue varios casos en función de los valores especiales que tomen los tres parámetros, además aparecen las expresiones de β_1, β_2 así como las formas que estos toman en función de los valores de aquellos. Define las distribuciones continuas análogas a esta distribución discreta probando que en general es Pearson tipo 6 aunque en casos particulares puede ser tipo 3, tipo 4 y tipo 5. Estudia los momentos viendo que efectivamente todos los momentos de orden r son infinitos si $\rho \leq r$:

$$\mu_r = \frac{a_{(r)}k_{(r)}}{(\rho-1)(\rho-2)...(\rho-r)} \qquad (2.2)$$

Ofrece una tabla de β_1, β_2 y la discute para los valores de $\rho = 8, 16, 24, 32, \infty$, y q_a, $q_k = \frac{1}{9}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$
siendo:

$$q_a = \frac{a}{(a+\rho)} \qquad q_k = \frac{k}{(k+\rho)}$$

Para finalizar obtiene la moda de esta distribución y sus propiedades.

El segundo está dedicado íntegramente al estudio de las tabulaciones de la distribución en ordenador. En este estudio para distintos valores de los parámetros ρ, q_a, q_k se obtuvieron los porcentajes de puntos absolutos y relativos superiores para la distribución generalizada de Waring long-tailed. En este mismo artículo se tabuló también la moda, mediana y media para la misma distribución y en función de los distintos valores de los parámetros anteriores, así como la desviación estándar y el coeficiente de variación. Concluye con dos ejemplos de ajuste de la distribución generalizada de Waring.

Para terminar con esta serie el último artículo compara la distribución generalizada de Waring con el sistema de Pearson de distribuciones de frecuencias. Aquí, utilizando el método abscisa-ordenada (sistema de curvas de frecuencias) llega a la conclusión de que las curvas obtenidas con el método abscisa-ordenada son las distribuciones continuas análogas a la distribución generalizada de Waring discreta, llegando a afirmar que la distribución continua análoga es en general Pearson tipo 6 que podemos escribir de la siguiente manera:

$$y = Cx^{q_2}(x+a)^{-q_1}, \qquad 0 \le x < \infty, \qquad q_1 > 0, \qquad q_2 > -1 \tag{2.3}$$

En los tres artículos anteriores aparecen menciones a las familias de funciones hipergeométricas que ya estudiamos en el capítulo 1.

Siguiendo esta secuencia histórica nos encontramos con lo siguientes artículos:

En 1983 aparece un artículo de Evdokia Xekalaki, [26] "Divisibilidad infinita, propiedades de integridad y regresión de la UGWD".

En él aparece un estudio de las propiedades estructurales de la UGWD. Se prueba que es una distribución infinitamente divisible, que es una distribución discreta "self-decomposable" sobre $\{0,1,2,...\}$ en el sentido de Steutel y van Harn. Se observa que la UGWD es unimodal y que las probabilidades P_n, $n = 0,1,2,...$ de la $UGWD$ (a,k,ρ) satisfacen la siguiente relación:

$$(n+1)\,P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} P_k r_{n-k} \qquad n = 0,1,2,... \qquad r_n \ge 0 \tag{2.4}$$

(*medida canónica no creciente*)

También se prueba que la familia de distribuciones univariantes generalizadas de Waring es una familia "limitadamente" completa.

Se hace un estudio de la regresión consiguiéndose los siguientes resultados:

i) Si $X \sim UGWD(a,k;\rho)$ y $Y/(X=x) \sim NH(x;m,n)$, es decir:

$$P[Y=y/X=x] = \frac{\binom{-m}{y}\binom{-n}{x-y}}{\binom{-m-n}{x}}; m,n > 0, y = 0,1,...,x \tag{2.5}$$

entonces:

$$E[X/Y=y] \;=\; \frac{(\rho+m+n-1)\,y+an}{\rho+m-1};\; y=0,1,... \qquad (2.6)$$

ii) Si n = 1, P[X = 0] < 1 la regresión de X sobre Y es lineal, es decir,

$$(E[X/Y=y] \;=\; \alpha y+\beta;\; y=0,1,...)\; siendo\; \alpha < 1+m^{-1} \qquad (2.7)$$

sí y sólo si

$$X \sim UGWD\left(\frac{\beta}{\alpha-1}, m+1; \frac{\alpha}{\alpha-1}-m\right)$$

iii) Si m = n = 1 se reduce a la distribución discreta uniforme, es decir,

$$P[Y=y/X=x] \;=\; \frac{1}{x+1};\; y=0,...,x. \qquad (2.8)$$

Con lo que se establece de manera indirecta una relación entre la distribución discreta uniforme y la $UGWD\ (a,k,\rho)$.

Por último, se añade que la $UGWD\ (a,k,\rho)$ es simétrica respecto de sus parámetros a y k, es decir $UGWD\ (a,k;\rho) \sim UGWD\ (k,a;\rho)$.

En 1983 aparecen dos nuevos artículos ambos de Evdokia Xekalaki, [27], [28]:

1. "Funciones de riesgo y distribuciones de vida en tiempo discreto"

Aquí aparece un resultado interesante:

Caracteriza la distribución de tiempo de vida T cuya función de riesgo es de la forma:

$$\lambda(t) \;=\; \frac{1}{a+bt}$$

Añadiendo que tales distribuciones deben ser bien geométrica, o bien hipergeométrica negativa o bien Waring.

En el caso de la Waring (**b** > **0**) T tendrá función de probabilidad de la siguiente manera:

$$P_t = \frac{\left(\frac{a-1}{b}\right)_{(t)}}{a\left(\frac{a}{b}+1\right)_{(t)}} \qquad t = 0, 1, \ldots \tag{2.9}$$

En el análogo continuo obtiene cuando $\lambda(t) = \dfrac{1}{a+bt}$ con $t \in [0, +\infty)$ y $b > 0$ la distribución es **Pearson tipo 6**, estableciendo incluso la forma que tendrá la función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{b}{a}x\right)^{-\frac{1}{b}-1} \qquad x \in (0, +\infty);\ a, b \in R,\ a > 0 \tag{2.10}$$

También indica que si $b < 0$ (caso de la hipergeométrica negativa) el análogo continuo es Pearson **tipo 1**.

2. "La UGWD respecto a la teoría de accidentes: propensión, "hechizos" o contagio".

En este artículo se consideran dos extensiones derivadas de la UGWD en el contexto de accidentes. Estos están basados en una hipótesis de "contagio" y una hipótesis de "hechizo" respectivamente.

En él prueba entre otras cosas que si bien la UGWD es un modelo creible si es aceptada la propensión de accidentes como un hecho establecido, un ajuste satisfactorio de este modelo no puede considerarse evidente para la validez de la hipótesis de propensión.

En el año siguiente, 1984 encontramos el artículo "En el proceso hipergeométrico de nacimiento y algunas implicaciones sobre la representación de la distribución gamma" debido a Carlo Ferreri, [8].

Aquí se indica que la UGWD se obtiene como una distribución especial de equilibrio, en concreto, tiene la forma:

$$\prod(z) = \frac{F(\frac{1}{\alpha}, \beta; \gamma; z)}{F(\frac{1}{\alpha}, \beta; \gamma; 1)} \tag{2.11}$$

que es la función generatriz de probabilidad de la UGWD$(a, k; \rho)$ tomando $a = \frac{1}{\alpha}$, $k = \beta$ y $\rho = \gamma - a - k$.

Un poco después, en 1987 nos encontramos con el artículo de Harold Boxenbaum, Grancine Pivinski y Stephen J. Ruberg, [1] "Proporción de publicaciones científicas farmaceuticas. Aplicación de la distribución de

Waring".

Aquí se afirma que hay que poner un énfasis particular en la distribución de Waring y sus implicaciones en la proporción de publicaciones dinámicas.

Se proporciona la función masa de probabilidad de la distribución Waring que fue ajustada para la frecuencia de datos de publicaciones:

$$P[X = i] = \frac{ak_{[i-1]}}{(a+k)_{[i]}} \qquad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

donde P es la función de probabilidad, X es la variable aleatoria para el número de publicaciones, a y k son los parámetros de la distribución y:

$$y_{[j]} = \frac{(y+j)!}{(y-1)!}$$

Los parámetros a y k se estimaron usando una técnica similar al método de los momentos.

Si $\bar{x}$ es la media muestral para el número de publicaciones y f_0 es la fracción observada de cero publicaciones, entonces:

$$\hat{a} = \frac{f_0 \, \bar{x}}{f_0(\bar{x} + 1) - 1}$$

$$\hat{k} = \bar{x}\,(\hat{a} - 1)$$

Las frecuencias de publicaciones de autores no senior no están bien caracterizadas por la distribución de Waring y estos resultados no aparecieron en este artículo.

Este estudio finaliza con las siguientes conclusiones:

El promedio de publicaciones per capita del total de publicaciones en 1984 fue 3.56, con el 26.9% de los críticos que no publicaron nada en absoluto durante el año. El promedio de publicaciones per capita de primeros autores en este estudio fue 1.17, siendo el porcentaje de críticos que no publicaron un papel como autor senior incrementado a un 50.4%. El llamado frupo élite de científicos consistió en el 12.8% y 11.7% de la muestra de artículos del total y autores senior respectivamente. En este artículo se comprobó que las distribuciones Waring son adecuadas para caracterizar los datos. El esquema conceptual conduce a que la distribución de Waring asume tres características fundamentales: 1°. Propiedad de reproducción. La proporción de nuevas entradas es proporcional al tamaño de la comunidad. 2°. Propiedad "ventaja acumulativa" o "el éxito engendra al éxito". Los científicos que han publicado con más facilidad probablemente publicarán su próximo artículo antes que los científicos menos publicados. 3°. Propiedad "fuga" uniforme. Todos los científicos, indiferentes a la proporción de publicaciones, tienen la misma posibilidad de caer fuera de la publicación de la comunidad.

Un año despues, 1988, aparece el artículo de Edward J. Danial, [4] titulado "Generalización de las condiciones suficientes para que una variable aleatoria sea infinitamente divisible".

Las únicas aportaciones interesantes en este trabajo sobre lo ya conocido, son una serie de condiciones distintas a las ya anunciadas por Xekalaki, para que la *UGWD* $(a, k; \rho)$ sea infinitamente divisible.

La *UGWD* $(a, k; \rho)$ es infinitamente divisible para todos los valores de sus parámetros que satisfacen:

$$a > 0,\ \rho > 0\, y\, 0 < k < 1$$
$$\acute{o}\ si$$
$$k > 0,\ \rho < 0\, y\, 0 < a < 1$$

Sin embargo, no se satisface la infinita divisibilidad para $k > 1$ y $a > 1$.

Continuamos ahora con el artículo aparecido en el año 1989 debido a J. Panaretos, [22] y titulado "Algunas propiedades y aplicaciones de la SGWD".

La SGWD puede verse como un flujo de UGWD y nace en conexión con esquemas de urna que contienen bolas de dos colores (negras y blancas).

La función de probabilidad de la SGWD tiene la siguiente forma:

$$P[X = x] = \frac{c_{(\sum m_i)}}{(\alpha + c)_{(\sum m_i)}} \sum_{\sum_{j=1}^{k} j x_j = x} \frac{\alpha_{(\sum x_i)}}{(\alpha + c + \sum m_i)_{(\sum x_i)}} \prod_{i=1}^{k} \frac{m_{i_{(x_i)}}}{x_i!} \tag{2.12}$$

siendo su función generatriz de probabilidad:

$$G(s) = \frac{C_{\left(\sum m_i\right)}}{(\alpha + c)_{\left(\sum m_i\right)}} F_D\left(\alpha; m_1, \ldots m_k; \alpha + \sum_{i=1}^{k} m_i + c; s, s^2, \ldots, s^k\right) \tag{2.13}$$

donde F_D es la serie hipergeométrica de Lauricella de tipo D, es decir.

$$F_D\left(\alpha; \beta_1, \ldots \beta_k; \alpha + \sum \beta_i + \gamma; s_1, \ldots, s_k\right) =$$

$$= \sum_{r_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_k=0}^{\infty} \frac{\alpha_{\left(\sum r_i\right)} \beta_{1(r_1)} \cdots \beta_{k(r_k)}}{\left(\alpha + \sum \beta_i + \gamma\right)_{\left(\sum r_i\right)}} \cdot \frac{s_1^{r_1}}{r_1!} \cdots \frac{s_k^{r_k}}{r_k!} \tag{2.14}$$

$$|s_i| \leq 1; \; i = 1, \ldots, k.$$

Si k = 1 obtenemos la UGWD.

Como puede observarse, la SGWD puede verse como la distribución conjunta k-variante de distribuciones generalizadas univariantes Waring.

El siguiente artículo no aparece hasta que en 1992 Luc Devroye, [5] ve publicado "Variables aleatorias generadas por las distribuciones digamma y trigamma".

El objetivo de este artículo es discutir métodos eficientes para la generación de variables aleatorias para las distribuciones digamma y trigamma de Sibuya.

Durante este proceso se obtienen algoritmos eficientes para una variedad de distribuciones incluida la UGWD obtenida para a = 1 ó b = 1 donde:

$$P_n = \frac{\eta(a+c)\eta(b+c)}{\eta(a+b+c)\eta(c)} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(a+b+c)_n} \qquad n \geq 0 \tag{2.15}$$

siendo P_n la función de probabilidad de la familia hipergeométrica generalizada tipo B3 o GHgB3 que es una distribución discreta de enteros no negativos.

También en 1992 nos encontramos con el artículo de Dietmar Wolfram, [25] "Aplicación de las características informétricas de bases de datos IR al diseño del sistema de archivación, parte I: Modelos Informétricos".

En este estudio se examinan las características informétricas del sistema de base de datos IR y se observa como puede ser utilizado para ayudar al diseñador del sistema ha decidir que tipos de estructuras de archivos actuarían mejor en un determinado tipo de sistema de información.

Son seleccionadas cuatro distribuciones para ajustar una colección de datos. Entre las seleccionadas aparece la distribución generalizada de Waring ajustada:

$$f(x) = \frac{\Gamma(v+\alpha)\Gamma(x+v-1)\Gamma(x+\beta-1)}{B(\alpha,\beta)\Gamma(v)\Gamma(x+v+\alpha+\beta-1)(x-1)!}, \qquad x = 1,2,... \tag{2.16}$$

donde α, β y v son constantes, $\Gamma(*)$ representa la función gamma y $B(*,*)$ la función beta.

Las colecciones de datos observados fueron ajustados por las distribuciones seleccionadas (distribución simple de Zipf, distribución de Mandelbrot-Zipf, distribución binomial negativa ajustada y distribución generalizada de Waring ajustada) para determinar cual modelaba mejor los datos. La técnica utilizada para estimar los parámetros fue la estimación mínimo cuadrática

A diferencia de estudios precedentes que estudiaron grupos pequeños de datos con cientos de documentos, este estudio utiliza grandes bases de datos que contienen miles de términos, por lo que adecuar este modelo se hace más dificil debido al gran número de términos.

Ajiferuke (1989) y Nelson (1989) demostraron que la distribución generalizada de Waring es bastante flexible para el modelaje de los datos bibliometricos y la adecuación de estos datos confirma su conclusión.

La distribución generalizada de Waring ajustada, es el modelo que mejor se adecua de las cuatro distribuciónes, actuando considerablemente mejor que el tradicionalmente usado, es decir, el modelo Mandelbrot-Zipf.

También se indica que el modelo binomial negativo ajustado que aquí se presenta se ajusta muy bien para modelos de datos obtenidos mediante preguntas.

Siete años más tarde Luisa Canal y R. Micciolo, [2] (1999) ven publicado su artículo "Modelos probabilísticos para analizar contactos psiquiátricos".

Se estudian tres modelos (Poisson, Binomial Negativa y Waring) para analizar la distribución del número de contactos de pacientes llevados a cabo usando un caso psiquiátrico registrado en el Psiquiátrico Sur-Verona durante el período 1/01/79 a 31/12/91. Sobre un total de 6913 contactos en 3454 sujetos se aplicó un test chi-cuadrado para la bondad de ajuste obteniéndose sólo un resultado no significativo para la Waring. En las conclusiones, se destaca que la distribución de Waring es la mejor de las tres presentadas, añadiendo los autores que es útil cuando queremos hacer comparaciones entres casos psiquiátricos registrados en el mismo pais o incluso en paises diferentes.

En el año 2000 aparece publicado el artículo de Hans-Peter Duerr y Klaus Dietz, [6] "Modelos estocásticos para procesos de agregación".

Aquí se presentan tres modelos estocásticos de agregación $SAM(o,q,0), SAM(\alpha,\beta,0)$ y $SAM(o,q,r)$ que describen la agregación de objetos en grupos y las distribuciones de los tamaños de los grupos y el número de grupos dentro de su hábitat.

Estos modelos proporcionan como casos especiales de procesos de coagulación-fragmentación, una nueva procedencia para la distribución geométrica cero-truncada y la distribución cero-truncada de Waring.

Ya en el año 2001 tenemos el artículo de Andrienne W. Kemp [19] titulado "La distribución q-beta geométrica como un modelo para la fecundabilidad".

Este artículo versa sobre la no concepción de parejas sexualmente activas y se estudia el número de ciclos exigidos para lograr el embarazo.

Weinberg y Gladen estudiaron el caso particular donde la distribución para el número de ciclos necesarios para la concepción tiene una distribución beta-geométrica con función masa de probabilidad:

$$P[X=x] = \frac{\eta(\frac{1-\eta}{\theta}+x-2)!\left(\frac{1}{\theta}\right)!}{(\frac{1-\eta}{\theta}-1)!(\frac{1}{\theta}+x-1)!}$$
$$x = 1,2,... \tag{2.17}$$

en notación de Griffiths.

Irwin ya había deducido el modelo beta-geométrico con soporte $0,1,2,...$ como una generalización de la distribución de Yule.

El usó la extensión de Waring $(c-a)^{-1} = c^{-1} + ac^{-1}(c+1)^{-1} + ...$ y obtuvo la función generatriz de probabilidad:

$$G(s) = \left(\frac{c-a}{c}\right)_2F_1(1,a;c+1;s)$$
$$siendo\ a = \frac{1-\mu}{\theta}\ y\, c = \frac{1}{\theta} \tag{2.18}$$

Así de G(s) obtenemos

$$P\,[\,\textit{no concepción durante el primer ciclo } x] \;=\; \frac{a(a+1)...(a+x-1)}{c(c+1)...(c+x-1)}$$

$$x \geq 1 \qquad (2.19)$$

Además

$$P\,[\,\textit{concepeción durante el ciclo x /no ha habido concepción previamente}] \;=\; R_x$$

$R_x = \dfrac{c-a}{c+x-1}$ que decrece monótonamente a cero cuando $x \to \infty$.

Por último haremos referencia al trabajo de Gutiérrez Jáimez R. y Rodríguez Avi, J. "Inclusión de la distribución generalizada de Waring Univariante en la familia de Pearson. Aplicación a situaciones en el deporte".

En el se observa que considerando los siguientes polinomios:

$$G(r) = (a+k+\rho+r)(r+1) \qquad y \qquad L(r) = (a+r)(k+r)$$

donde a, m y ρ son números reales positivos, la solución de la ecuación en diferencias (1.1) viene dada por:

$$f_r = f_0 \frac{(a)_{r+s}(k)_r}{(a+k+\rho)_r r!} \qquad r \geq 0$$

que es la función masa de probabilidad de una distribución generalizada de Waring Univariante de parámetros a, k, ρ.

La función generatriz de probabilidad tiene la expresión:

$$g(t) = \frac{{}_2F_1(a,k;a+k+\rho;t)}{{}_2F_1(a,k;a+k+\rho;1)}$$

y en consecuencia, se concluye, que es una distribución perteneciente a la familia de distribuciones generadas por la función hipergeométrica de Gauss.

También se obtiene un sistema de ecuaciones que permite la estimación de los parámetros mediante el método de los momentos.

Este artículo finaliza con una modelización de los goles marcados por los futbolistas en la Liga Española de Futbol 1989/1990.

Debemos recordar que la UGWD ha sido usada en una amplia variedad de campos científicos tan remotos y diferentes como la linguística (p.e. Simon, Haight), la biología (Irwin), la bibliografía y estudios económicos (Kendall) y la mencionada teoría de accidentes.

Siguiendo con nuestro repaso histórico pasamos ahora a la **Distribución Generalizada de Waring Bivariante BGWD$(\mathbf{a},\mathbf{k},\mathbf{m},\rho)$.** Esta distribución ha sido estudiada entre otros por Irwin (1975), Xekalaki (1983, 1984) y utilizada en diversos campos. Así, aparece en modelos de muestreo para poblaciones tricotómicas, en modelos de distribuciones compuestas, en modelos de "excedencia" para muestras ordenadas o en modelos de accidentes incurridos por un individuo entre dos períodos no solapados de tiempo.

En el artículo publicado en el año 1983 de Evdokia Xekalaki, [26] que antes mencionabamos "Divisibilidad infinita, propiedades de integridad y regresión de la UGWD" aparece el siguiente resultado:

Si $Y/X = x \sim NH(x;m,m)$ y $X \sim UGWD(a, m+n, \rho)$ entonces el vector aleatorio $(Y, X-Y)$ tiene una distribución bivariante con función de probabilidad:

$$P[Y=y, X-Y=z] = \frac{\rho_{(m+n)}}{(a+\rho)_{(m+n)}} \frac{n_{(z)}}{y!} \frac{m_{(y)}}{z!} \frac{a_{(y+z)}}{(a+m+n+\rho)_{(y+z)}} \tag{2.20}$$

$y = 0, 1, \ldots \qquad z = 0, 1, \ldots$

que es la distribución bivariante generalizada de Waring.

En 1984, aparece publicado en la J. R. Statistics Society Academic un artículo también de Evdokia Xekalaki, [29] titulado "*La Distribución Generalizada de Waring Bivariante y su aplicación a la Teoría de Accidentes*".

En él, Xekalaki comienza haciendo un repaso al trabajo de Irwin sobre el modelo propensión-responsabilidad en el estudio de la Teoría de Accidentes al que antes hicimos mención y los problemas a los que da lugar, para continuar con la presentación de la distribución bivariante y su relación con la teoría de accidentes. Para finalizar, estudia una serie de aplicaciones de esta distribución a los datos sobre accidentes en carretera (accidentes de 183 conductores de autobus de una Compañía de Belfast en el Norte de Irlanda durante el período 1952-1955. Los datos están colocados en una distribución bivariante donde las marginales corresponden a los períodos 1952-53 y 1954-55). Un apéndice posterior expresa la función generatríz de probabilidad en términos de la función Appell de primera clase:

$$G(s,t) = \frac{\rho_{(k+m)}}{(a+\rho)_{(k+m)}} F_1(a;k,m;a+k+m+\rho;s,t) \qquad (2.21)$$

Por último y dentro del apéndice, añade propiedades de esta distribución.

En 1985, aparecen publicados dos artículos.

El primero bajo el título "Algunas extensiones bivariantes de la distribución generalizada de Waring" se debe a Evdokia Xekalaki, [31].

En él, se consideran algunos modelos de probabilidad que dan lugar a formas bivariantes alternativas a la distribución generalizada Waring.

El primer modelo consistente en dos variables aleatorias no negativas X_1,X_2 entero valuadas sobre $\{0,1,2,...\}x\{0,1,2,...\}$ cuya función de distribución conjunta es la Poisson doble de parámetros $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ asumiendo que λ_1 y λ_2 son dos variables aleatorias independientes gamma. La función generatriz de probabilidad tiene la forma $g(s,t) = exp\{\lambda_1(s-1)+\lambda_2(t-1)\}$.

Como conclusión se obtiene que la distribución condicionada $(X_1,X_2)/v$ $(v > 0)$ sigue una distribución binomial negativa:

$$BN\left(k, \frac{v}{1+v}, m, \frac{v}{1+v}\right)$$

También se obtiene que si v sigue una distribución beta II de parámetros a y ρ :

$$(X_1,X_2) \sim BGWD(a;k,m;\rho)$$

Otro resultado es, que en determinados casos, la BGWD tiende a la distribución bivariante beta II de parámetros k, m y ρ ó a una distribución bivariante gamma incorrelada de parámetros k, m, 1,1.

El segundo modelo considera $\lambda_1 = \lambda_p$, $\lambda_2 = \lambda_q$, con $\lambda,p,q > 0$ y función generatriz de probabilidad $g(s,t) = exp\{\lambda(p(s-1)+q(t-1))\}$

con $p+q \leq 1$. En este segundo modelo se supone que λ es una variable aleatoria con distribución gamma.

Una de las conclusiones a las que se llega es que :

$$(X_1,X_2)\,/\,b\ (b>0) \sim BN\left(a, \frac{bp}{a+bp}, \frac{bq}{a+bq}\right)$$

Si ahora consideramos que b sigue una distribución beta II de parámetros k y ρ entonces:

$$(X_1,X_2) \sim BGWD(a;k,m;\rho)$$

También se obtienen resultados para las marginales, condicionadas y la distribución de la suma, siendo todas *UGWD*.

El tercer modelo supone que (λ_1,λ_2) tiene una distribución bivariante gamma y el cuarto modelo que λ_1,λ_2 son variables aleatorias independientes beta II obteniéndose como resultado más significativo que ni las condicionadas ni la distribución de la suma serán UGWD para ambos modelos.

El segundo artículo, también debido a Xekalaki, [30] que aparece en 1985 se titula "Estimación de momentos factoriales para la distribución bivariante generalizada de Waring".

Aquí se discute un procedimiento de estimación basado en el primer y segundo orden de los momentos factoriales, para ajustar los datos a la distribución. Aparecen expresiones para los errores asintóticos estándar de los estimadores de los parámetros de la distribución, así como de los estimadores resultantes de las componentes de la varianza, que representan los valores de los factores "contribución", "exposición al riesgo" y "propensión" a una situación de acidente.

Una de las publicaciones sobre esta distribución más importantes es la que aparece en el libro "*Bivariate Discrete Distributions*" de Kathleen Kocherlakota y Subrahmaniam Kocherlakota, [20] en 1992.

En este texto se hace un amplio estudio de la Distribución Bivariante de Waring. Se recogen entre otros los resultados de Irwin y de Xekalaki.

Aparecen las propiedades de la $BGWD(a,k,m,\rho)$, entre las que destacan que la distribución de la suma $Z=X+Y$ $\left(\textit{siendo } (X,Y) \textit{ una } BGWD(a,k,m,\rho)\right)$ es una $UGWD(a,k+m,\rho)$, las distribuciones condicionadas (X/Y es $UGWD(a+s,k,\rho+m)$ y Y/X es $UGWD(a+r,m,\rho+k)$) y los momentos. A continuación se estudia la estimación recordando que Xekalaki (1984) propuso el método de los momentos, finalizando con el estudio de los principales modelos de la $BGWD(a,k,m,\rho)$, a saber, modelos urna, modelos mixtos y el modelo exceedance.

Por último se estudian las formas límite de las distribuciones conjuntas:

a y ρ tienden a ∞ bajo la restricción:

$$\frac{a}{a+\rho} \text{ es igual a un determinado valor}$$

ó todos los parámetros tienden a ∞ bajo las restricciones:

$$\frac{a}{a+\rho} \to 0;$$
$$\frac{am}{a+\rho} \to m^* < \infty;$$
$$\frac{ak}{a+\rho} \to k^* < \infty$$

Para finalizar este apartado vamos a recordar algunos resultados de la Distribución Generalizada de Waring Multivariante $MGWD\ (a; \underline{k}; \rho)$. Esta distribución ha sido estudiada entre otros por Xekalaki (1986) y utilizada en diversos campos, fundamentalmente en teoría de accidentes.

En 1986 la Commun. Statistic-Theor. Meth., publica el artículo "*La distribución generalizada de Waring*" cuyo autor es Evdokia Xekalaki [32]. Aquí se hace una extensión de la distribución generalizada de Waring mediante una generalización multivariante de la extensión de Waring y se estudian sus propiedades. Demuestra que las distribuciones marginales (condicionadas y no condicionadas) son distribuciones generalizadas de Waring univariantes y estudia algunas propiedades más (La suma de las variables que componen el vector es también *UGWD*, ...). Añade que la distribución generalizada multivariante de Waring surge en la teoría de accidentes como la distribución conjunta de accidentes incurridos por una población propensa a ellos, expuesta a una variable externa riesgo de ocurrencia sobre una serie de de períodos de tiempo no solapados. Además prueba que usando esta distribución multivariante se pueden "medir" las contribuciones de propensión , riesgo de exposición y cambio de una situación dada de accidentes.

Hasta la fecha no han aparecido nuevos trabajos que introduzcan novedades sobre la Distribución Generalizada de Waring Univariante, Bivariante o Multivariante.

Debemos destacar algunos trabajos relacionados con este apartado y que son referidos en los artículos y textos antes mencionados:

"*Modelos para Distribuciones Gaussianas Hipergeométricas*" debido a Adrienne W. Kemp y D. Kemp (1975).

"*Estimación de parámetros en algunas extensiones de la familia de Katz de distribuciones geométricas incluyendo funciones hipergeométricas*" debido a Jhon Gurland y Ram Tripathi (1975).

"*Una Familia General de Distribuciones Discretas con Probabilidades Hipergeométricas*" debido a Jhon Gurland y Ram Tripathi (1976, 1977).

"*Familia de distribuciones discretas de Pearson generadas por la función hipergeométrica univariante* ${}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\gamma_1,\gamma_2;\lambda)$" debido a Gutiérrez Jáimez, Ramón y Rodríguez Avi, José (1997).

– § –

Capítulo 3

La distribución de Waring Bidimensional.

3.1. Breve introducción.

Esta distribución nace al introducirse nuevos conceptos en el estudio de accidentes (Irwin, [17]). Estos conceptos fueron la propensión y la responsabilidad en accidentes.

Un poco más tarde (Xekalaki, [29]) fueron estudiados los accidentes ocurridos en comercios por un individuo en dos períodos de tiempo no solapados. En este sentido, asumimos que los comercios están expuestos a dos factores.

El caso bidimensional nace como una aproximación natural de la definición original de la versión univariante de Irwin.

En la versión univariante el punto de arranque fue la extensión de Waring:

$$\frac{1}{x-a} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_{(r)}}{x_{(r+1)}} \tag{3.1}$$

Irwin generalizó esta extensión de la siguiente forma:

$$\frac{1}{(x-a)_{(k)}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_{(r)}k_{(r)}}{x_{(k+r)}}\frac{1}{r!} \qquad a,k>0 \tag{3.2}$$

Ahora considerando $\rho = x - a > 0$ y multiplicando ambos lados de la igualdad por $\rho_{(k)}$ se obtiene la $UGWD(a,k;\rho)$.

Una variable aleatoria X sigue una distribución univariante generalizada de Waring de parámetros a, k y ρ ($UGWD(a,k;\rho)$) cuando su función masa de probabilidad es la siguiente:

$$f(r) = P\{X = r\} = \frac{\rho_{(k)}}{(a+\rho)_{(k)}} \frac{a_{(r)}k_{(r)}}{(a+k+\rho)_{(r)}} \frac{1}{r!} \qquad (3.3)$$

$r = 0, 1, \ldots \qquad a, k, \rho > 0$

donde $x_{(r)} = \dfrac{\Gamma(x+r)}{\Gamma(x)}$, $x > 0$, $r \in R$; siendo $\Gamma(.)$ la función gamma.

La función generatriz de probabilidad de X es la siguiente:

$$G(s) = \frac{\rho_{(k)}}{(a+\rho)_{(k)}} \; {}_2F_1(a, k; a+k+\rho; s)$$

El objetivo ahora es definir la $BGWD(a; k, m; \rho)$.

Sea $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Entonces para $k, m, a > 0$ tenemos:

$$\frac{1}{(x-a)_{(k+m)}} =$$

$$= (1+\Delta)^{-a} \frac{1}{x_{(a+m)}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_{(l)}(-1)^l}{l!} \Delta^l \left[\frac{1}{x_{(k)}} \frac{1}{(x+k)_{(m)}} \right] =$$

$$= \ldots =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_{(r+l)}}{(x)_{(k+m+r+l)}} \frac{k_{(r)}}{r!} \frac{m_{(l)}}{l!}. \qquad (3.4)$$

Teniendo en cuenta que $x > a$, la serie doble, en el lado derecho de esta ecuación, es convergente. Si consideramos ahora que $\rho = x - a > 0$ y multiplicamos ambos lados por $\rho_{(k+m)}$, obtenemos una serie doble de términos positivos que converge a la unidad, pudiendo considerar que su término general define una distribución de probabilidad discreta bivariante. Así, podemos llegar a la siguiente definición:

Definición 3.1. *Decimos que un vector aleatorio (X, Y) sigue una distribución bivariante generalizada de Waring de parámetros a, k, m y ρ ($BGWD(a; k, m; \rho)$) cuando su función masa de probabilidad es la siguiente:*

$$f(r,s) = P\{X = r, Y = s\} =$$

$$= \frac{\rho_{(k+m)}}{(a+\rho)_{(k+m)}} \frac{k_{(r)}}{r!} \frac{m_{(s)}}{s!} \frac{a_{(r+s)}}{\gamma_{(r+s)}} \tag{3.5}$$

$r = 0, 1, ...;\ s = 0, 1, ...;$

donde

$$\gamma = a + \rho + k + m$$

y donde

$$x_{(r)} = \frac{\Gamma(x+r)}{\Gamma(x)}$$

siendo $\Gamma(.)$ la función gamma.

3.2. Distribuciones marginales y condicionadas. Distribución de la suma.

Veamos ahora cuales son las distribuciones marginales de la $BGWD(a; k, m; \rho)$.

Definición 3.2. *Si* $(X, Y) \sim BGWD(a; k, m; \rho)$ *entonces*:

$$X \sim UGWD(a, k; \rho) \text{ e } Y \sim UGWD(a, m; \rho)$$

siendo

$$f_X(r) = P[X = r] = \frac{\rho_{(k)}}{(a+\rho)_{(k)}} \frac{k_{(r)} a_{(r)}}{(a+\rho+k)_{(r)}} \frac{1}{r!} \tag{3.6}$$

$r = 0, 1, ...$

y

$$f_Y(s) = P[Y = s] = \frac{\rho_{(m)}}{(a+\rho)_{(m)}} \frac{m_{(s)} a_{(s)}}{(a+\rho+m)_{(s)}} \frac{1}{s!} \tag{3.7}$$

$s = 0, 1, ...$

Una vez estudiadas las distribuciones marginales hagamos lo propio con las condicionadas.

La función masa de probabilidad condicionada de X dado $Y = y$ tiene la siguiente expresión:

$$g(x/y) = \frac{(\gamma - a - k)_k}{(\gamma - k + y)_{(k)}} \frac{(a+y)_{(x)}}{(\gamma + y)_{(x)}} \frac{k_{(x)}}{x!} \tag{3.8}$$

$x = 0, 1, ...$

luego $(X/Y = y) \sim UGWD(a + y, k; \gamma - a - k)$.

La expresión de la función masa de probabilidad condicionada de Y dado $X = x$ tiene una expresión totalmente análoga a la de (3.8).

$$g(y/x) = \frac{(\gamma - a - m)_m}{(\gamma - m + x)_{(m)}} \frac{(a+x)_{(y)}}{(\gamma + x)_{(y)}} \frac{m_{(y)}}{y!} \tag{3.9}$$

$y = 0, 1, ...$

En consecuencia $(Y/X = x) \sim UGWD(a + x, m; \gamma - a - m)$.

Estudiemos ahora las expresiones que tienen las regresiones de X sobre Y y de Y sobre X:

- Regresión de X sobre Y:

$$E[X/Y = y] = \frac{k(a+y)}{\gamma - a - k - 1} \tag{3.10}$$

- Regresión de Y sobre X:

$$E[Y/X = x] = \frac{m(a+x)}{\gamma - a - m - 1} \tag{3.11}$$

Ambas regresiones son lineales.

- Coeficiente de correlación:

$$\rho_{x,y}^2 = \frac{km}{(\gamma - a - k - 1)(\gamma - a - m - 1)} \tag{3.12}$$

Una pregunta que cabría hacernos ahora es ¿cuál es la expresión de la suma $Z = X + Y$?

Podemos afirmar que dado el vector $(X, Y) \sim BGWD(a; k, m; \rho)$ entonces $Z \sim UGWD(a; k + m; \rho)$, siendo su función de probabilidad:

$$h(z) = \frac{\rho_{(k+m)}}{(a+\rho)_{(k+m)}} \frac{a_{(z)}(k+m)_{(z)}}{\gamma_{(z)}} \frac{1}{z!} \tag{3.13}$$

$z = 0, 1, \ldots$

3.3. Momentos de la BGWD(a; k, m; ρ)

Establezcamos en primer lugar la función generatríz de probabilidad para $(X, Y) \sim BGWD(a; k, m; \rho)$ que fue estudiada por Irwin, y mejorada por Erdelyi y otros:

$$\pi(t_1, t_2) = \frac{\rho(k+m)}{(a+\rho)_{(k+m)}} F[a; k, m; a + \rho + k + m; t_1, t_2] \tag{3.14}$$

siendo

$$F[a; k, m; a + \rho + k + m; t_1, t_2] = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{k_{(r)}}{r!} \frac{m_{(s)}}{s!} \frac{a_{(r+s)}}{\gamma_{(r+s)}} t_1^r t_2^s$$

donde $\gamma = a + k + m + \rho$.

Además:

i) Si $t_1 = t_2 = t$ entonces $F[a; k, m; \gamma; t, t] = {}_2F_1[a, k, m; t]$ que es la función hipergeométrica de Gauss.

ii) Si además en la expresión anterior t = 1:

$$F[a;k,m;\gamma;1,1] = \frac{(\gamma-k-m)_{(k+m)}}{(\gamma-k-m-a)_{(k+m)}}$$

siendo $\pi(1,1) = 1$.

Para determinar los momentos factoriales debemos establecer la derivada parcial de orden (x , y) de $\pi(t_1,t_2)$ respecto de sus argumentos:

$$\pi^{(x,y)}(t_1,t_2) =$$

$$= \frac{\rho(k+m)}{(a+\rho)_{(k+m)}} \sum_{r=x}^{\infty}\sum_{s=y}^{\infty} \frac{k_{(r)}}{r!}\frac{m_{(s)}}{s!}\frac{a_{(r+s)}}{\gamma_{(r+s)}}.$$

$$.(r-x+1)_{(x)}(s-y+1)_{(y)}t_1^{r-x}t_2^{s-y} \qquad (3.15)$$

Considerando $t_1 = t_2 = 1$ en la expresión (3.15), el momento factorial de orden (r,s) será:

$$\mu_{[r,s]} = \frac{k_{(r)}m_{(s)}a_{(r+s)}}{(\rho-1)(\rho-2)...(\rho-r-s)} =$$

$$= \frac{k_{(r)}m_{(s)}a_{(r+s)}}{(\rho-r-s)_{(r+s)}} \qquad (3.16)$$

$r = 0,1,...\qquad s = 0,1,...$

este momento existirá cuando $\rho > r+s$.

En particular:

$$\mu'_{[1,0]} = E[X] = \frac{ak}{\rho-1}$$

$$\mu'_{[0,1]} = E[Y] = \frac{am}{\rho-1}$$

$$\mu'_{[2,0]} = Var[X] = \frac{ak(a+\rho-1)(k+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} = \sigma_X^2$$

$$\mu'_{[0,2]} = Var[Y] = \frac{am(a+\rho-1)(m+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} = \sigma_Y^2$$

$$\mu'_{[1,1]} = Cov(X,Y) = \frac{akm(a+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} = \sigma_{XY}$$

$$\rho_{x,y} = \frac{(akm)^{1/2}}{[(\rho+k-1)(\rho+m-1)]} > 0 \qquad (3.17)$$

Dado que $\rho > 2$ para que los momentos centrales de segundo orden existan, se deduce que la covarianza σ_{XY} es positiva, lo que implica que X e Y son siempre positivamente correlados.

3.4. Otras propiedades de la BGWD(a; k, m; ρ) .

La función generatriz de probabilidad de la distribución bivariante generalizada de Waring puede expresarse en términos de la función de Appell de primera clase:

$$G(s,t) = \frac{\rho_{(k+m)}}{(a+\rho)_{(k+m)}} F_1(a;k,m;a+k+m+\rho;s,t) \qquad (3.18)$$

donde

$$F_1(a;\beta,\beta';\gamma;u,v) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_{(r+l)}\beta_{(r)}\beta'_{(l)}}{\gamma_{(r+l)}} \frac{u^r}{r!}\frac{v^l}{l!} \qquad (3.19)$$

Que $\rho > 0$ implica que $G(s,t)$ es convergente para todos los valores de a, k, m en el área $[-1,1]\,x\,[-1,1]$.

Por el teorema de Gauss:

$$F_1(a;k,m;a+k+m+\rho;1,1) = \frac{(a+\rho)_{(k+m)}}{\rho_{(k+m)}} \qquad (3.20)$$

Las probabilidades sucesivas de la $BGWD(a;k,m;\rho)$ están relacionadas por una relación de recurrenciade primer orden, es decir

$$\frac{p_{i+1,j}}{p_{i,j}} = \frac{(a+i+j)(k+i)}{(a+k+m+\rho+i+j)(i+1)} \qquad (3.21a)$$

$$\frac{p_{i,j+1}}{p_{i,j}} = \frac{(a+i+j)(m+j)}{(a+k+m+\rho+i+j)(j+1)} \qquad (3.21b)$$

3.5. Generación de la distribución de Waring bidimensional a partir del sistema de Pearson Discreto Bivariante.

Partiendo de la expresión (1.8) y teniendo en cuenta la igualdad (1.11) llegamos a la siguiente solución:

$$f_{r,s} = f_{0,0} \prod_{t=0}^{r-1} \prod_{t'=0}^{s-1} \frac{L(t,s)N(o,t')}{G(t,s)H(o,t')} \qquad r,s \in N$$

entendiendo que si r = 0 ó s = 0 el correspondiente producto vale 1 y fijada $f_{0,0}$ para que sea distinta de cero.

Recordemos que la función anterior, $f_{r,s}$, será una función masa de probabilidad cuando verifique las condiciones de positividad, convergencia y normalidad.

Ya vimos en el teorema 1.4 que si L, N, G y H son polinomios de órdenes cualesquiera en determinadas variables, la función generatriz de probabilidad $g(t_1,t_2)$ verificaba el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (1.12):

$$G(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) - t_1 L(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) = G(\theta_1,\theta_2)\sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s}t_2^s$$

$$H(\theta_1,\theta_2)M(t_1,t_2) - t_2 N(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) = H(\theta_1,\theta_2)\sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0}t_1^r$$

para $|t_1| < 1, |t_2| < 1$, siendo $\theta_i = t_i \frac{\partial}{\partial t_i}$, i=1, 2.

Si en el sistema de ecuaciones en diferencias generador de la familia de distribuciones de Pearson discretas consideramos los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} G(r,s) &= (a+k+m+\rho+r+s)(r+1) \\ H(r,s) &= (a+k+m+\rho+r+s)(s+1) \\ L(r,s) &= (a+r+s)(k+r) \\ N(r,s) &= (a+r+s)(m+s) \end{aligned}$$

siendo a, m, k, ρ números reales positivos, dado que se verifica la condición necesaria, la solución viene dada por:

$$f_{r,s} = f_{0,0} \frac{(a)_{r+s}(k)_r(m)_s}{(a+k+m+\rho)_{r+s}\, r!\, s!} \qquad r,s \geq 0 \qquad (3.22)$$

que es la función masa de probabilidad de una $BGWD(a;k,m;\rho)$.

Esta función es una función masa de probabilidad pues verifica las condiciones de positividad, convergencia y normalización, al ser los coeficientes de los polinomios positivos y al ser la función masa de probabilidad para cada r, s fijos, un término de la función hipergeométrica $F_1(a,k,m;a+k+m+\rho;1,1)$ que es convergente pues $\rho > 0$.

En consecuencia:

$$f_{0,0} = \frac{1}{F_1(a,k,m;a+k+m+\rho;1,1)} =$$

$$= \frac{\Gamma(k+m+\rho)\Gamma(a+\rho)}{\Gamma(a+k+m+\rho)\Gamma(\rho)} \qquad (3.23)$$

Por tanto, su función generatriz de probabilidad es:

$$g(t_1,t_2) = \frac{F_1(a,k,m;a+k+m+\rho;t_1,t_2)}{F_1(a,k,m;a+k+m+\rho;1,1)}$$

con lo que concluimos que **es una distribución perteneciente a la familia de distribuciones discretas generadas por la función hipegeométrica bivariante $F_1(a;\beta,\beta';\gamma;u,v)$ extensión de la función hipergeométrica de Gauss.**

Por aplicación del teorema 1.4 y tras expresar los polinomios G y H en las variables $(r+1,\ s)$ y $(r,\ s+1)$ respectivamente, las ecuaciones diferenciales que verifica la f. g. p. son, tal y como ya habíamos escrito:

$$G(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) - t_1L(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) = G(\theta_1,\theta_2)\sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s}t_2^s$$

$$H(\theta_1,\theta_2)M(t_1,t_2) - t_2N(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) = H(\theta_1,\theta_2)\sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0}t_1^r$$

para $|t_1| < 1$, $|t_2| < 1$, siendo $\theta_i = t_i\frac{\partial}{\partial t_i}, i = 1,2.$

Efectuemos los cálculos:

Empezamos con la primera ecuación:

$$G(\theta_1,\theta_2) = (a+k+m+\rho+\theta_1+\theta_2)(\theta_1+1) =$$

$$= a\theta_1 + a + k\theta_1 + k + m\theta_1 + m + \rho\theta_1 + \rho + \theta_1^2 + \theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2 =$$

$$= \theta_1^2 + (a+k+m+\rho+1)\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2 + (a+k+m+\rho).$$

$$L(\theta_1,\theta_2) = (a+\theta_1+\theta_2)(k+\theta_1) = ak + a\theta_1 + k\theta_1 + \theta_1^2 + k\theta_2 + \theta_1\theta_2$$

.

Así:

$$t_1L(\theta_1,\theta_2) = akt_1 + a\theta_1t_1 + k\theta_1t_1 + \theta_1^2t_1 + k\theta_2t_1 + \theta_1\theta_2t_1 =$$

$$= \theta_1^2t_1 + t_1(a+k)\theta_1 + \theta_1\theta_2t_1 + k\theta_2t_1 + akt_1.$$

Por lo tanto:

$$G(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) - t_1L(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} (1-t_1)\theta_1^2 + [a+k+m+\rho+1-t_1(a+k)]\theta_1 + (1-t_1)\theta_1\theta_2 + \\ +(1-t_1k)\theta_2 - akt_1 + (a+k+m+\rho) \end{array}\right] g(t_1,t_2).$$

con lo que tenemos el primer miembro de la ecuación.

Veamos el segundo:

Sabemos que para $r,s \geq 1$ (1.42) la función masa de probabilidad se puede expresar de la siguiente manera:

$$g(t_1,t_2) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f_{r,s} t_1^r t_2^s =$$

$$= f_{0,0} \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_s (\beta_1)_r (\beta_2)_s (\lambda_1 t_1)^r (\lambda_2 t_2)^s}{(\gamma)_{r+s}\, r!s!}$$

donde $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2$.

Si lo trasladamos a nuestro caso:

$$g(t_1,t_2) = f_{0,0} \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_r (k)_s (m)_r (\rho)_s (\lambda_1 t_1)^r (\lambda_2 t_2)^s}{(\gamma)_{r+s}\, r!s!}$$

donde $\gamma = a + k + m + \rho$.

Si r = 0 entonces:

$$g(t_1,t_2) = f_{0,0} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(k)_s (\rho)_s (\lambda_2 t_2)^s}{(\gamma)_s\, s!}$$

Por otro lado, para $r = 0$ y $s \geq 1$ (1.42):

$$f_{r,s} = f_{0,0} \frac{(k)_s (\rho)_s \lambda_2^s}{(\gamma)_s\, s!}$$

entonces:

$$\sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s} t_2^s = \sum_{s=0}^{\infty} f_{0,0} \frac{(k)_s (\rho)_s (\lambda_2 t_2)^s}{(\gamma)_s\, s!} =$$

$$= f_{0,0} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(k)_s (\rho)_s (\lambda_2 t_2)^s}{(\gamma)_s\, s!} = g(t_1,t_2) \quad para \quad r = 0$$

Como:

$$G(\theta_1,\theta_2) = \theta_1^2 + (a+k+m+\rho+1)\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2 + (a+k+m+\rho)$$

El segundo miembro, $G(\theta_1,\theta_2)\sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s}\, t_2^s$, será igual a

$$[(a+k+m+\rho)+\theta_2]g(t_1,t_2).$$

Pasándolo todo al primer miembro obtenemos que una de las ecuaciones diferenciales que verifica la función generatriz de probabilidad es:

$$\left[\begin{array}{c} (1-t_1)\theta_1^2 + [a+k+m+\rho+1-t_1(a+k)]\theta_1 + \\ +(1-t_1)\theta_1\theta_2 - t_1 k\theta_2 - akt_1 \end{array}\right] g(t_1,t_2) = 0$$

Veamos ahora la segunda ecuación:

$$H(\theta_1,\theta_2) = (a+k+m+\rho+\theta_1+\theta_2)(\theta_2+1) =$$

$$= a\theta_2 + a + k\theta_2 + k + m\theta_2 + m + \rho\theta_2 + \rho + \theta_2^2 + \theta_2 + \theta_1\theta_2 + \theta_1 =$$

$$= \theta_2^2 + (a+k+m+\rho+1)\theta_2 + \theta_1\theta_2 + \theta_1 + (a+k+m+\rho).$$

$$N(\theta_1,\theta_2) = (a+\theta_1+\theta_2)(m+\theta_2) = am + a\theta_2 + m\theta_1 + \theta_2^2 + m\theta_2 + \theta_1\theta_2.$$

Así:

$$\begin{aligned} t_2N(\theta_1,\theta_2) &= amt_2 + a\theta_2t_2 + m\theta_1t_2 + \theta_2^2t_2 + m\theta_2t_2 + \theta_1\theta_2t_2 = \\ &= \theta_2^2t_2 + t_2(a+m)\theta_2 + \theta_1\theta_2t_2 + m\theta_2t_2 + amt_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$H(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) - t_2N(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) =$$

$$\begin{aligned} &= \{(1-t_2)\theta_2^2 + [a+k+m+\rho+1-t_2(a+m)]\theta_2 + (1-t_2)\theta_1\theta_2 + \\ &+\ (1-t_2m)\theta_2 - amt_2 + (a+k+m+\rho)\}g(t_1,t_2). \end{aligned}$$

con lo que tenemos el primer miembro de la segunda ecuación.

Veamos el segundo:

Sabemos que la función generatriz de probabilidad se puede expresar de la siguiente manera:

$$g(t_1,t_2) = f_{0,0}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_r\,(\alpha_2)_s\,(\beta_1)_r\,(\beta_2)_s\,(\lambda_1 t_1)^r\,(\lambda_2 t_2)^s}{(\gamma)_{r+s}\,r!s!}$$

donde $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2$

Si lo trasladamos a nuestro caso:

$$g(t_1,t_2) = f_{0,0}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(a)_r\,(k)_s\,(m)_r\,(\rho)_s\,(\lambda_1 t_1)^r\,(\lambda_2 t_2)^s}{(\gamma)_{r+s}\,r!s!}$$

donde $\gamma = a + k + m + \rho$.

Si s = 0 entonces:

$$g(t_1,t_2) = f_{0,0}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(a)_r\,(m)_r\,(\lambda_1 t_1)^r}{(\gamma)_r\,r!}$$

Por otro lado, para $s = 0$ y $r \geq 1$:

$$f_{r,s} = f_{0,0}\frac{(a)_r\,(m)_r\,\lambda_1^r}{(\gamma)_r\,r!}$$

entonces:

$$\sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0}t_1^r = \sum_{r=0}^{\infty} f_{0,0}\frac{(a)_r\,(m)_r\,(\lambda_1 t_1)^r}{(\gamma)_r\,r!} =$$

$$= f_{0,0}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(a)_r\,(m)_r\,(\lambda_1 t_1)^r}{(\gamma)_r\,r!} = g(t_1,t_2)\ para\ s = 0$$

Como

$$H(\theta_1,\theta_2) = \theta_2^2 + (a+k+m+\rho+1)\theta_2 + \theta_1\theta_2 + \theta_1 + (a+k+m+\rho)$$

El segundo miembro será igual a

$$[(a+k+m+\rho)+\theta_1]g(t_1,t_2).$$

Pasándolo todo al primer miembro obtenemos que una de las ecuaciones diferenciales que verifica la función generatriz de probabilidad es:

$$\{(1-t_2)\theta_2^2+[a+k+m+\rho+1-t_2(a+m)]\theta_2+$$

$$+(1-t_2)\theta_1\theta_2-t_2m\theta_1-amt_2\}g(t_1,t_2)=0 \qquad (3.25)$$

Si consideramos $\gamma=a+k+m+\rho$ y aplicamos el teorema 1.5 podemos encontrar las relaciones de recurrencia entre los momentos:

$$(\gamma-1)\sum_{j=0}^{g}\binom{g}{j}\mu'_{1+f,j}+\sum_{j=0}^{g}\binom{g}{j}\mu'_{1+f,\,1+j}+\sum_{j=0}^{g}\binom{g}{j}\mu'_{2+f,j}=$$

$$\sum_{i=0}^{f}\sum_{j=0}^{g}\binom{f}{i}\binom{g}{j}\left[ak\mu'_{i,j}+(a+k)\mu'_{i+1,j}+k\mu'_{i,1+j}+\mu'_{1+i,1+j}+\mu'_{2+i,j}\right]$$

$$(\gamma-1)\sum_{i=0}^{f}\binom{f}{i}\mu'_{i,\,1+g}+\sum_{i=0}^{f}\binom{f}{i}\mu'_{1+i,\,1+g}+\sum_{i=0}^{f}\binom{f}{i}\mu'_{i,\,2+g}=$$

$$\sum_{i=0}^{f}\sum_{j=0}^{g}\binom{f}{i}\binom{g}{j}\left[am\mu'_{i,j}+(a+m)\mu'_{i,1+j}+m\mu'_{i+1,j}+\mu'_{1+i,1+j}+\mu'_{i,2+j}\right]$$

lo que nos permite, desarrollando las primeras ecuaciones, obtener el vector de medias y la matriz de varianzas-covarianzas:

$$\mu=\begin{pmatrix}\frac{ak}{\rho-1}\\ \frac{am}{\rho-1}\end{pmatrix}$$

$$\sum=\begin{pmatrix}\frac{ak(a+\rho-1)(k+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} & \frac{akm(a+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)}\\ \frac{akm(a+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} & \frac{ak(a+\rho-1)(k+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)}\end{pmatrix} \qquad (3.26)$$

así como la matriz de correlaciones:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{km}{(k+\rho-1)(m+\rho-1)}} \\ \sqrt{\frac{km}{(k+\rho-1)(m+\rho-1)}} & 1 \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

Pasando al estudio de la regresión, y mediante la aplicación del teorema 1.3, obtenemos que las funciones de probabilidad condicionadas, que son soluciones del sistema en diferencias:

$$(a+k+m+\rho+r+s)(r+1)f_{r+1/s} - (a+r+s)(k+r)f_{r/s} = 0$$

$$(a+k+m+\rho+r+s)(s+1)f_{s+1/r} - (a+r+s)(m+s)fs/r = 0 \tag{3.28}$$

tienen las siguientes funciones masa de probabilidad:

$$f_{r/s} = f_{0/s}\frac{(a+s)_r(k)_r}{(a+s+k+m+\rho)_r r!}$$

$$f_{s/r} = f_{0/r}\frac{(a+r)_s(m)_s}{(a+r+k+m+\rho)_s s!} \tag{3.29}$$

y por tanto, calculando igualmente las marginales, se obtiene que las distribuciones marginales y condicionadas son del tipo:

$$f_{r/s} \to UGWD(a+s,k;\rho+k)$$

$$f_{s/r} \to UGWD(a+r,m;\rho+k)$$

$$f_r \to UGWD(a,k;\rho)$$

$$f_s \to UGWD(a,m;\rho)$$

al ser distribuciones de Waring univariantes, las curvas de regresión son:

$$\xi_1 = E[\xi_1/\xi_2 = s] = \frac{(a+s)\,k}{\rho+m-1}$$

$$\xi_2 = E[\xi_2/\xi_1 = r] = \frac{(a+r)\,m}{\rho+k-1} \qquad (3.30)$$

siendo por tanto, la regresión lineal.

Igualmente, si a, k, m tienden a infinito y todos con el mismo orden, O(a), la distribución $BGWD\,(a,k,m,\rho)$ puede aproximarse por una distribución normal bivariante, con vector de medias y matriz de varianzas-covarianzas las correspondientes a la distribución $BGWD\,(a,k,m,\rho)$. Para demostrarlo, partiremos de la función generatriz de cumulantes.

Según el teorema 1.4, la f.g.m. verifica el sistema de ecuaciones diferenciales (con $\gamma = a+k+m+\rho$):

$$\left[\begin{array}{c} (1-e^{t_1})D_1^2 + [\gamma+1-e^{t_1}(a+k)]D_1 + \\ +(1-e^{t_1})D_1D_2 - e^{t_1}kD_2 - ake^{t_1} \end{array}\right] g(t_1,t_2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{c} (1-e^{t_2})D_2^2 + [\gamma+1-e^{t_2}(a+m)]D_2 + \\ +(1-e^{t_2})D_1D_2 - e^{t_2}mD\theta_1 - ame^{t_2} \end{array}\right] g(t_1,t_2) = 0$$

$$(3.31)$$

Veamoslo:

Sea la función Generatriz de momentos $M(t_1,t_2)$ que sabemos que verifica el siguiente sistema:

$$G(D_1,D_2)M(t_1,t_2) - e^{t_1}L(D_1,D_2)M(t_1,t_2) = G(D_1,D_2)\sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s}e^{t_2 s}$$

$$H(D_1,D_2)M(t_1,t_2) - e^{t_2}N(D_1,D_2)M(t_1,t_2) = H(D_1,D_2)\sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0}e^{t_1 r}$$

para $|t_1| < 1, |t_2| < 1$, siendo $D_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$, i=1, 2.

Efectuemos los cálculos:

Empezamos con la primera ecuación:

$$G(D_1,D_2) = (a+k+m+\rho+D_1+D_2)(D_1+1) =$$

$$= aD_1+a+kD_1+k+mD_1+m+\rho D_1+\rho+D_1^2+D_1+D_1D_2+D_2 =$$

$$= D_1^2+(a+k+m+\rho+1)D_1+D_1D_2+D_2+(a+k+m+\rho).$$

$$L(D_1,D_2) = (a+D_1+D_2)(k+D_1) = ak+aD_1+kD_1+D_1^2+kD_2+D_1D_2.$$

Así:

$$e^{t_1}L(D_1,D_2) = ake^{t_1}+aD_1e^{t_1}+kD_1e^{t_1}+D_1^2e^{t_1}+kD_2e^{t_1}+D_1D_2e^{t_1} =$$

$$= D_1^2e^{t_1}+e^{t_1}(a+k)D_1+D_1D_2e^{t_1}+kD_2e^{t_1}+ake^{t_1}$$

Por lo tanto:

$$G(D_1,D_2)M(t_1,t_2)-e^{t_1}L(D_1,D_2)M(t_1,t_2) =$$

$$= \{(1-e^{t_1})D_1^2+[a+k+m+\rho+1-e^{t_1}(a+k)]D_1+(1-e^{t_1})D_1D_2+$$
$$+\ (1-e^{t_1}k)D_2-ake^{t_1}+(a+k+m+\rho)\}M(t_1,t_2).$$

con lo que tenemos el primer miembro de la ecuación.

Veamos el segundo:

Sabemos que la función generatriz de probabilidad se puede expresar de la siguiente manera:

$$M(t_1,t_2) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f_{r,s}e^{t_1r+t_2s}$$

Si r = 0 entonces:

$$M(t_1,t_2) = \sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s}e^{t_2s}$$

Como

$$G(D_1, D_2) = D_1^2 + (\gamma + 1)D_1 + D_1D_2 + D_2 + a + k + m + \rho$$

El segundo miembro será igual a

$$[a + k + m + \rho + D_2]M(t_1, t_2).$$

Pasándolo todo al primer miembro obtenemos que una de las ecuaciones diferenciales que verifica la función generatriz de momentos es:

$$\begin{bmatrix} (1 - e^{t_1})D_1^2 + [a + k + m + \rho + 1 - e^{t_1}(a + k)]D_1 + \\ + (1 - e^{t_1})D_1D_2 - e^{t_1}kD_2 - ake^{t_1} \end{bmatrix} M(t_1, t_2) = 0$$

Análogamente se obtiene la otra ecuación:

$$\begin{bmatrix} (1 - e^{t_2})D_2^2 + [a + k + m + \rho + 1 - e^{t_2}(a + m)]D_2 + \\ + (1 - e^{t_2})D_1D_2 - e^{t_2}mD_1 - ame^{t_2} \end{bmatrix} M(t_1, t_2) = 0$$

tal y como queríamos probar.

Si $\Lambda = \log M$, haciendo el cambio, tenemos:

$$(1 - e^{t_1})[D_1^2 + D_1D_2]e^{\Lambda} + [\gamma + 1 - e^{t_1}(a + k)]D_1e^{\Lambda} - \\ - e^{t_1}kD_2e^{\Lambda} - ake^{t_1}e^{\Lambda} = 0$$

Aplicamos las derivadas a los tres primeros sumandos pues al cuarto no le afecta:

Sumando primero:

$$(1 - e^{t_1})[D_1^2 + D_1D_2]e^{\Lambda}$$

$$[D_1^2 + D_1D_2]e^{\Lambda} = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}e^{\Lambda} + \frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_2}e^{\Lambda} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_1}\left[e^{\Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial t_1}\right] + \frac{\partial}{\partial t_1}\left[\frac{\partial}{\partial t_2}e^{\Lambda}\right] =$$

$$= e^{\Lambda}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t_1}\frac{\partial \Lambda}{\partial t_1}\right) + e^{\Lambda}\left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t_1^2}\right) + \frac{\partial}{\partial t_1}\left[e^{\Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial t_2}\right] =$$

$$= e^{\Lambda}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\right)^2 + e^{\Lambda}\left(\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_1^2}\right) + e^{\Lambda}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_2\partial t_1}\right] =$$

$$= e^{\Lambda}\left[\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\right)^2 + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_1^2} + \frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_1\partial t_2}\right]$$

Por tanto:

$$(1-e^{t_1})[D_1^2 + D_1 D_2]e^{\Lambda} =$$

$$(1-e^{t_1})\, e^{\Lambda}\left[\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\right)^2 + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_1^2} + \frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_1\partial t_2}\right]$$

Segundo sumando:

$$[\gamma + 1 - e^{t_1}(a+k)]D_1 e^{\Lambda}$$

$$\gamma D_1 e^{\Lambda} + D_1 e^{\Lambda} - e^{t_1}(a+k)D_1 e^{\Lambda} =$$

$$= \gamma\frac{\partial}{\partial t_1}e^{\Lambda} + \frac{\partial}{\partial t_1}e^{\Lambda} - e^{t_1}(a+k)\frac{\partial}{\partial t_1}e^{\Lambda} =$$

$$= \gamma e^{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1} + e^{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1} - e^{t_1}(a+k)e^{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1} =$$

$$= e^{\Lambda}\left[\gamma\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1} + \frac{\partial\Lambda}{\partial t_1} - e^{t_1}(a+k)\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\right] =$$

$$= e^{\Lambda}[\gamma + 1 - e^{t_1}(a+k)]\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}$$

Tercer sumando:

$$e^{t_1}kD_2e^{\Lambda}$$

$$e^{t_1}kD_2e^{\Lambda} = e^{t_1}k\frac{\partial}{\partial t_2}e^{\Lambda} = e^{t_1}ke^{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2}$$

Uniendo los cuatro sumandos:

$$(1-e^{t_1})\, e^{\Lambda}\left[\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\right)^2 + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_1^2} + \frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_1\partial t_2}\right] +$$

$$+ e^{\Lambda}[\gamma + 1 - e^{t_1}(a+k)]\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1} - e^{t_1}ke^{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2} - ake^{t_1}e^{\Lambda} = 0$$

Entonces:

$$e^{\Lambda}\left[\begin{array}{c}(1-e^{t_1})\left[\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\right)^2+\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_1^2}+\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2}+\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_1\partial t_2}\right]+\\ +[\gamma+1-e^{t_1}(a+k)]\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}-e^{t_1}k\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2}-ake^{t_1}\end{array}\right]=0$$

Despejando:

$$(1-e^{t_1})\left[\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_1^2}+\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_1\partial t_2}+\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\right)^2+\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2}\right]+$$

$$+[\gamma+1-e^{t_1}(a+k)]\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}-e^{t_1}k\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2}-ake^{t_1}=0 \qquad (3.32a)$$

Análogamente con la otra ecuación:

$$(1-e^{t_2})\left[\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_2^2}+\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_1\partial t_2}+\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2}\right)^2+\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2}\right]+$$

$$+[\gamma+1-e^{t_2}(a+m)]\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2}-e^{t_2}m\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}-ame^{t_2}=0 \qquad (3.32b)$$

por tanto, los primeros cumulantes se obtienen haciendo $t_i=0$:

$$(1-e^{0})\left[\begin{array}{c}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_1^2}\Big|_{t_1=0}+\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_1\partial t_2}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}+\\ +\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\right)^2\Big|_{t_1=0}+\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}\end{array}\right]+$$

$$+[\gamma+1-e^{0}(a+k)]\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\Big|_{t_1=0}-e^{0}k\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2}\Big|_{t_2=0}-ake^{0}=0$$

entonces:

$$[\gamma+1-(a+k)]\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\Big|_{t_1=0}-k\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2}\Big|_{t_2=0}-ak=0$$

así:

$$(m+\rho+1)\kappa_{1,0}-k\kappa_{0,1}=ak$$

Haciendo lo mismo con la segunda ecuación:

$$(1-e^0)\left[\begin{array}{c} \frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_2^2}\Big|_{t_2=0} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_1\partial t_2}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} + \\ +\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2}\right)^2\Big|_{t_2=0} + \frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} \end{array}\right]+$$

$$+[\gamma+1-e^0(a+m)]\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2}\Big|_{t_2=0} - e^0 m\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\Big|_{t_1=0} - ame^0 = 0$$

entonces:

$$[\gamma+1-(a+m)]\frac{\partial\Lambda}{\partial t_2}\Big|_{t_2=0} - m\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\Big|_{t_1=0} - am = 0$$

así:

$$(k+\rho+1)\kappa_{0,1} - m\kappa_{1,0} = am \tag{3.33b}$$

Si imponemos que a, k, m tiendan a infinito y con el mismo orden, O(a), entonces los primeros cumulantes son también de orden O(a). Si consideramos las 2^r ecuaciones que se obtienen al diferenciar el sistema de cumulantes r_1 veces con respecto a t_1, r_2 veces con respecto a t_2, con $r_1+r_2=r-1$ y substituir t_i por cero, obtendremos los cumulantes de orden r:

$$\sum_{r_1 r_2}\kappa_{r_1 r_2}O(a) + \sum_{r_1 r_2}(cum.orden < r)(cum.ord < r)O(1) +$$

$$+\sum_{r_1 r_2}(cum.orden < r)O(a) = constante[orden \le O(a^2)] \tag{3.34}$$

Como todos los cumulantes de primer orden son de O(a), por inducción se sigue que todos son de O(a) a lo sumo. Luego, como las varianzas y covarianzas son de O(a), haciendo el cambio:

$$Y = \frac{X-\mu}{\sqrt{a}} \qquad X_{2x1}; \qquad \mu_{2x1} \tag{3.35}$$

queda que los cumulantes de orden impar de Y son cero y los de orden $2r$ $(r=2,3,...)$ son de orden $O(a)/O(a^2) = O(a^{1-r}) \le O(a^{-1})$. Por tanto, los cumulantes de orden mayor que 2 son despreciables para grandes valores de a, k, m, lo que implica que la distribución límite de Y es tal que todos sus cumulantes de orden superior a 2 son cero, es decir, que la distribución límite de Y es una normal bivariante, con vector de medias y matriz de varianzas-covarianzas los mencionados con anterioridad.

El mismo proceso que hemos seguido para obtener el sistema de ecuaciones diferenciables en diferencias parciales para la función generatriz de probabilidad o para la función generatriz de momentos se puede hacer para obtener sendos sistemas de ecuaciones diferenciables en diferencias parciales para la **función característica**.

En este caso, el sistema que verifican es el siguiente:

Función Característica $\phi(t_1,t_2)$:

$$G(\theta'_1,\theta'_2)\phi(t_1,t_2) - e^{it_1}L(\theta'_1,\theta'_2)\phi(t_1,t_2) = G(\theta'_1,\theta'_2)\sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s}e^{it_2 s}$$

$$H(\theta'_1,\theta'_2)\phi(t_1,t_2) - e^{it_2}N(\theta'_1,\theta'_2)\phi(t_1,t_2) = H(\theta'_1,\theta'_2)\sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0}e^{it_1 r}$$

con $\theta'_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_j}$, $j = 1,2$.

Siendo

$$\phi(t_1,t_2) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f_{r,s}e^{i(t_1 r+t_2 s)}$$

Efectuemos los cálculos:

Empezamos con la primera ecuación:

$$G(\theta'_1,\theta'_2) = (a+k+m+\rho+\theta'_1+\theta'_2)(\theta'_1+1) =$$

$$= a\theta'_1 + a + k\theta'_1 + k + m\theta'_1 + m + \rho\theta'_1 + \rho + \theta'^2_1 + \theta'_1 + \theta'_1\theta'_2 + \theta'_2 =$$

$$= \theta'^2_1 + (a+k+m+\rho+1)\theta'_1 + \theta'_1\theta'_2 + \theta'_2 + (a+k+m+\rho)$$

$$L(\theta'_1,\theta'_2) = (a+\theta'_1+\theta'_2)(k+\theta'_1) = ak + a\theta'_1 + k\theta'_1 + \theta'^2_1 + k\theta'_2 + \theta'_1\theta'_2.$$

Así:

$$e^{it_1}L(\theta'_1,\theta'_2) = ake^{it_1} + a\theta'_1e^{it_1} + k\theta'_1e^{it_1} + \theta'^2_1e^{it_1} + k\theta'_2e^{it_1} + \theta'_1\theta'_2e^{it_1} =$$

$$= \theta'^2_1e^{it_1} + e^{it_1}(a+k)\theta'_1 + \theta'_1\theta'_2e^{it_1} + k\theta'_2e^{it_1} + ake^{it_1}.$$

Por lo tanto:

$$G(\theta'_1,\theta'_2)\phi(t_1,t_2) - e^{it_1}L(\theta'_1,\theta'_2)\phi(t_1,t_2) =$$

$$= \{(1-e^{it_1})\theta'^2_1 + [a+k+m+\rho+1-e^{it_1}(a+k)]\theta'_1 + (1-e^{it_1})\theta'_1\theta'_2 + \\ + (1-e^{it_1}k)\theta'_2 - ake^{it_1} + (a+k+m+\rho)\}\phi(t_1,t_2).$$

con lo que tenemos el primer miembro de la ecuación.

Veamos el segundo:

Sabemos que la función generatriz de probabilidad se puede expresar de la siguiente manera:

$$\phi(t_1,t_2) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f_{r,s}e^{i(t_1r+t_2s)}$$

Si $r = 0$ entonces:

$$\phi(t_1,t_2) = \sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s}e^{it_2s}$$

Como
$G(\theta'_1,\theta'_2) = \theta'^2_1 + (a+k+m+\rho+1)\theta'_1 + \theta'_1\theta'_2 + \theta'_2 + (a+k+m+\rho)$

El segundo miembro será igual a

$$[(a+k+m+\rho) + \theta'_2]\phi(t_1,t_2)$$

Pasándolo todo al primer miembro obtenemos que una de las ecuaciones diferenciales que verifica la función generatriz de momentos es:

$$\begin{bmatrix} (1-e^{it_1})\theta'^2_1 + [a+k+m+\rho+1-e^{it_1}(a+k)]\theta'_1 + \\ +(1-e^{it_1})\theta'_1\theta'_2 - e^{it_1}k\theta'_2 - ake^{it_1} \end{bmatrix}\phi(t_1,t_2) = 0 \tag{3.36}$$

Análogamente se obtiene la otra ecuación:

$$\left[\begin{array}{c} (1-e^{it_2})\theta_2'^2 + [a+k+m+\rho+1-e^{it_2}(a+m)]\theta_2' + \\ +(1-e^{it_2})\theta_1'\theta_2' - e^{it_2}m\theta_1' - ame^{it_2} \end{array}\right]\phi(t_1,t_2) = 0 \tag{3.37}$$

3.6 Estimación.

En este último apartado, vamos a estudiar el problema de la estimación.

Comenzaremos con el caso univariante y estudiaremos el bivariante en ambos casos para la distribución de Waring.

Existen distintos métodos para estimar los parámetros de una distribución discreta, entre ellos el método de los momentos, el método de máxima verosimilitud, métodos basados en el cálculo de cocientes de probabilidades, ...

El método de máxima verosimilitud nos lleva a unas ecuaciones que no son resolubles y el basado en los cocientes de probabilidades presenta como mayor inconveniente la complejidad del sistema de ecuaciones que hay que resolver para estimar los parámetros (Conde, [3]).

Debido a lo explicado anteriormente, vamos a centrarnos en el método de los momentos.

3.6.1. Relación de recurrencia entre los momentos.

Utilizaremos las funciones hipergeométricas en el caso unidimensional ${}_2F_1(a,k;a+k+\rho;1)$ y $F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma;\lambda_1,\lambda_2)$ en el caso bidimensional.

Considerando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, nos quedan cinco parámetros $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma$ que estimaremos por el método de los momentos.

Las relaciones de recurrencia entre momentos las calcularemos gracias al *teorema* 3.5.

3.6.1.1. Caso univariante.

Sabemos que a partir de la relación de recurrencia:

$$\sum_{j=0}^{q} b_j \mu'_{j+h} - \sum_{i=0}^{p} a_i \left(\sum_{m=0}^{h} \binom{h}{m} \mu'_{i+m} \right) = b_0 \theta^h f_0$$

que ya vimos en el primer capítulo, es relativamente facil estimar los parámetros mediante el método de los momentos.

En primer lugar se plantea un sistema lineal con 2p + 1 ecuaciones (número de parámetros estimables) en donde las incógnitas son los coeficientes de los polinomios $L(r)$ y $G(r+1)$. Después se obtendrán los parámetros a través de su relación con los coeficientes hallados anteriormente. Este es el proceso que se sigue para la estimación de la familia ${}_{p+1}F_p$ con $\lambda = 1$.

La distribución univariante generalizada de Waring está generada por la función ${}_2F_1(a,k;a+k+\rho;1)$ (Rodríguez, [23]).

Utilizando la relación de recurrencia entre momentos dada por:

$$b_3\mu'_{3+h} + b_2\mu'_{2+h} + b_1\mu'_{1+h} =$$
$$= \sum_{m=0}^{h} \binom{h}{m} \{a_3\mu'_{3+m} + a_2\mu'_{2+m} + a_1\mu'_{1+m} + a_0\mu'_m\}$$

para $h = 0,1,2$ obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que son los coeficientes de los polinomios L y G.

Dicho sistema es el siguiente:

$$(b_1 - a_1)\mu - a_0 = 0$$
$$(b_1 + a_1 - 1)\mu'_2 - (a_1 + a_0)\mu - a_0 = 0$$
$$(b_1 - a_1 - 2)\mu'_3 - (2a_1 + a_0 + 1)\mu'_2 - (a_1 + 2a_0)\mu - a_0 = 0$$

A continuación se despejan los parámetros de las relaciones siguientes:

$$b_1 = (\gamma - 1) \qquad (*)$$
$$a_1 = \alpha + \beta$$
$$a_0 = \alpha\beta$$

de donde:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a+k+\rho-1 \\
a_1 &= a+k \\
a_0 &= ak
\end{aligned}
$$

es decir, que el parámetro $\gamma-1$ se obtiene como raiz del polinomio de primer grado $x+b_1$, mientras que los parámetros α,β son las raíces del polinomio de segundo grado dado por $x^2+a_1x+a_0$.

Los parámetros se obtienen de la siguiente manera:

1°. Se calculan los momentos no centrados μ,μ_2' y μ_3' de la distribución y se sustituyen en (**). De esta manera obtenemos los valores de b_1,a_1 y a_0.

2°. Obtenemos los parámetros estimados resolviendo el sistema de ecuaciones (*).

3.6.1.2. Caso bivariante.

Teorema 3.1: Sean L, N polinomios en las variables (r,s); G polinomio en $(r+1,s)$ y H polinomio en $(r,s+1)$ de ordenes cualesquiera y tales que verifiquen las condiciones de positividad, convergencia y normalización. Si existen los momentos no centrados $\mu_{r,s}'$ de cualquier orden r, s, éstos verifican:

$$
\sum_{k_1=0}^{p_1}\sum_{k_2=0}^{p_2} b_{k_1,k_2}\left[\sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\mu'_{(k_1+f),(k_2+m)}\right]-
$$

$$
-\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2} a_{i_1,i_2}\left[\sum_{h=0}^{f}\sum_{m=0}^{g}\binom{f}{h}\binom{g}{m}\mu'_{(i_1+h),(i_2+m)}\right]=
$$

$$
=\sum_{k_1=0}^{p_1}\sum_{k_2=0}^{p_2} b_{k_1,k_2}\left[\sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\theta_1^{(k_1+f)}\theta_2^{(k_2+m)}\left(\sum_{s=0}^{\infty}f_{0,s}t_2^s\right)\right]_{\substack{t_1=1\\ t_2=1}}
$$

$$
\sum_{l_1=0}^{q_1}\sum_{l_2=0}^{q_2} d_{l_1,l_2}\left[\sum_{h=0}^{f}\binom{f}{h}\mu'_{(l_1+h),(l_2+g)}\right]-
$$

$$
-\sum_{j_1=0}^{h_1}\sum_{j_2=0}^{h_2} c_{j_1,j_2}\left[\sum_{h=0}^{f}\sum_{m=0}^{g}\binom{f}{h}\binom{g}{m}\mu'_{(j_1+h),(j_2+m)}\right]=
$$

$$= \sum_{l_1=0}^{q_1}\sum_{l_2=0}^{q_2} d_{l_1,l_2}\left[\sum_{h=0}^{f}\binom{f}{h}\theta_1^{(l_1+h)}\theta_2^{(l_2+g)}\left(\sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0}t_1^r\right)\right]_{\substack{t_1=1\\t_2=1}} \tag{3.38}$$

para $f, g \in Z^+$ y siendo:

$$L(r,s) = \sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2} a_{i_1,i_2} r^{i_1}s^{i_2} \qquad a_{i_1,i_2} \in R; \qquad a_{m_1,m_2} \neq 0$$

$$N(r,s) = \sum_{j_1=0}^{h_1}\sum_{j_2=0}^{h_2} c_{j_1,j_2} r^{j_1}s^{j_2} \qquad c_{j_1,j_2} \in R; \qquad c_{h_1,h_2} \neq 0$$

$$G(r,s) = \sum_{k_1=0}^{p_1}\sum_{k_2=0}^{p_2} b_{k_1,k_2}(r+1)^{k_1}s^{k_2} \qquad b_{k_1,k_2} \in R; \qquad b_{p_1,p_2} \neq 0$$

$$H(r,s) = \sum_{l_1=0}^{q_1}\sum_{l_2=0}^{q_2} d_{l_1,l_2} r^{l_1}(s+1)^{l_2} \qquad d_{l_1,l_2} \in R; \qquad d_{q_1,q_2} \neq 0$$

De forma análoga al caso univariante, la estimación de los parámetros puede hacerse por el método de los momentos. Para ello basta considerar un sistema lineal formado por tantas relaciones de recurrencia independientes entre momentos y como parámetros tenga la distribución, siempre que los momentos existan y sena finitos y el sistema sea compatible determinado.

Expresando los polinomios como siguen:

$$\begin{aligned} G(r,s) &= (\gamma-1)(r+1)+(r+1)s+(r+1)^2 \\ H(r,s) &= (\gamma-1)(s+1)+r(s+1)+(s+1)^2 \\ L(r,s) &= \alpha_1\beta_1\lambda_1+(\alpha_1+\beta_1)\lambda_1 r+\lambda_1 r^2 \\ N(r,s) &= \alpha_2\beta_2\lambda_2+(\alpha_2+\beta_2)\lambda_2 s+\lambda_2 s^2 \end{aligned}$$

la primera relación quedaría:

$$(\gamma-1)\sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\mu'_{1+f,m}+\sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\mu'_{1+f,1+m}+\sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\mu'_{2+f,m} =$$

$$= \sum_{n=0}^{f}\sum_{m=0}^{g}\binom{f}{n}\binom{g}{m}\{\alpha_1\beta_1\lambda_1\mu'_{n,m}+(\alpha_1+\beta_1)\lambda_1\mu'_{1+n,m}+\lambda_1\mu'_{2+n,m}\}$$

Reemplazando en esta expresión para distintos valores de f y g obtenemos relaciones como las que siguen, en donde $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\alpha_1\beta_1 = [\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1)]\mu'_{1,0} + \mu'_{1,1}$$
$$\alpha_1\beta_1 = [\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1)]\mu'_{1,0} + [\gamma - (\alpha_1 + \beta_1)]\mu'_{1,1} + \mu'_{1,2} - \alpha_1\beta_1\mu'_{0,1}$$
$$\alpha_1\beta_1 = [\gamma - 2 - (\alpha_1 + \beta_1)]\mu'_{2,0} + \mu'_{2,1} + [\alpha_1\beta_1 + \alpha_1 + \beta_1]\mu'_{1,0}$$

La segunda relación de recurrencia entre momentos es:

$$(\gamma - 1)\sum_{n=0}^{f}\binom{f}{n}\mu'_{n,1+g} + \sum_{n=0}^{f}\binom{f}{n}\mu'_{1+n,\,1+g} + \sum_{n=0}^{f}\binom{f}{n}\mu'_{n,2+g} =$$

$$= \sum_{n=0}^{f}\sum_{m=0}^{g}\binom{f}{n}\binom{g}{m}\{\alpha_2\beta_2\lambda_2\mu'_{n,m} + (\alpha_2 + \beta_2)\lambda_2\mu'_{n,1+m} + \lambda_2\mu'_{n,2+m}\}$$

De nuevo, reemplazando en esta expresión para distintos valores de f y g obtenemos las siguientes relaciones, donde $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\alpha_2\beta_2 = [\gamma - 1 - (\alpha_2 + \beta_2)]\mu'_{0,1} + \mu'_{1,1}$$
$$\alpha_2\beta_2 = [\gamma - 1 - (\alpha_2 + \beta_2)]\mu'_{0,1} + [\gamma - (\alpha_2 + \beta_2)]\mu'_{1,1} + \mu'_{2,1} - \alpha_2\beta_2\mu'_{1,0}$$
$$\alpha_2\beta_2 = [\gamma - 2 - (\alpha_2 + \beta_2)]\mu'_{0,2} + \mu'_{1,2} + [\alpha_2\beta_2 + \alpha_2 + \beta_2]\mu'_{0,1}$$

Así, si conocemos una de las medias marginales podemos obtener todos los momentos no centrados.

Como las medias marginales son:

$$\mu'_{1,0} = t_1\frac{d}{dt_1}g(t_1,t_2)\ |_{t_1=1}$$

$$\mu'_{0,1} = t_2\frac{d}{dt_2}g(t_1,t_2)\ |_{t_2=1}$$

se obtienen las siguientes expresiones:

$$\mu'_{1,0} = f_{0,0}\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma}F_3(\alpha_1+1,\alpha_2,\beta_1+1,\beta_2;\gamma+1;1,1)$$

$$\mu'_{0,1} = f_{0,0}\frac{\alpha_2\beta_2}{\gamma}F_3(\alpha_1,\alpha_2+1,\beta_1,\beta_2+1;\gamma+1;1,1)$$

$$\mu'_{1,1} = \alpha_1\beta_1 - [\gamma-1-(\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{1,0}$$

$$\mu'_{2,1} = \alpha_2\beta_2\mu'_{1,0} - [\gamma-(\alpha_2+\beta_2)]\mu'_{1,1}$$

$$\mu'_{1,2} = \alpha_1\beta_1\mu'_{0,1} - [\gamma-(\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{1,1}$$

$$\mu'_{2,0} = \frac{1}{\gamma-2-(\alpha_1+\beta_1)}\{\alpha_1\beta_1 - \mu'_{2,1} + [\alpha_1\beta_1+\alpha_1+\beta_1]\mu'_{1,0}\}$$

$$\mu'_{0,2} = \frac{1}{\gamma-2-(\alpha_2+\beta_2)}\{\alpha_2\beta_2 - \mu'_{1,2} + [\alpha_2\beta_2+\alpha_2+\beta_2]\mu'_{0,1}\}$$

Como vemos las medias marginales aparecen en función de la función hipergeométrica F_3, la cual para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ es una serie.

Sustituyendo la ecuación:

$$\alpha_1\beta_1 = [\gamma-1-(\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{1,0} + \mu'_{1,1}$$

en la ecuación:

$$\alpha_1\beta_1 = [\gamma-1-(\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{1,0} + [\gamma-(\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{1,1} + \mu'_{1,2} - \alpha_1\beta_1\mu'_{0,1}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}&[\gamma-1-(\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{1,0} + \mu'_{1,1} = \\ &= [\gamma-1-(\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{1,0} + [\gamma-(\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{1,1} + \mu'_{1,2} - \\ &- \{[\gamma-1-(\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{1,0} + \mu'_{1,1}\}\mu'_{0,1};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[\gamma-1-(\alpha_1+\beta_1)](\mu'_{1,0} - \mu'_{1,0} + \mu'_{1,0}\mu'_{0,1}) + \mu'_{1,1} = \\ &= [\gamma-(\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{1,1} + \mu'_{1,2} + \mu'_{1,1}\mu'_{0,1};\end{aligned}$$

$$[\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1)]\mu'_{1,0}\mu'_{0,1} =$$
$$= [\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1)]\mu'_{1,1} + \mu'_{1,2} - \mu'_{1,1}\mu'_{0,1};$$

$$[\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1)]\left(\mu'_{1,0}\mu'_{0,1} - \mu'_{1,1}\right) = \mu'_{1,2} - \mu'_{1,1}\mu'_{0,1};$$

Despejando:

$$[\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1)] = \frac{\mu'_{1,2} - \mu'_{1,1}\mu'_{0,1}}{\mu'_{1,0}\mu'_{0,1} - \mu'_{1,1}}$$

Como:

$$\mu_{1,1} = \mu'_{1,1} - \mu'_{1,0}\mu'_{0,1}$$

Concluimos:

$$\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1) = \frac{\mu'_{1,1}\mu'_{0,1} - \mu'_{1,2}}{\mu_{1,1}}$$

Reemplacemos ahora:

$$\alpha_1\beta_1 = [\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1)]\mu'_{1,0} + \mu'_{1,1} \tag{1}$$

y

$$\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1) = \frac{\mu'_{1,1}\mu'_{0,1} - \mu'_{1,2}}{\mu_{1,1}} \tag{2}$$

en la siguiente ecuación:

$$\alpha_1\beta_1 = [\gamma - 2 - (\alpha_1 + \beta_1)]\mu'_{2,0} + \mu'_{2,1} + [\alpha_1\beta_1 + \alpha_1 + \beta_1]\mu'_{1,0} \tag{3}$$

Empecemos sustituyendo (1) en (3):

$$(\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1))\mu'_{1,0} + \mu'_{1,1} =$$
$$= [\gamma - 2 - (\alpha_1 + \beta_1)]\mu'_{2,0} + \mu'_{2,1} +$$
$$+ \left[(\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1))\mu'_{1,0} + \mu'_{1,1} + \alpha_1 + \beta_1\right]\mu'_{1,0};$$

$$[\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1)]\left(\mu'_{1,0} - \mu'_{2,0} - (\mu'_{1,0})^2\right) + \mu'_{1,1} + \mu'_{2,0} =$$
$$= \mu'_{2,1} + \mu'_{1,1}\mu'_{1,0} + (\alpha_1 + \beta_1)\mu'_{1,0}$$

Utilizando ahora (2):

$$\left(\frac{\mu'_{1,1}\mu'_{0,1}-\mu'_{1,2}}{\mu_{1,1}}\right)\left(\mu'_{1,0}-\mu'_{2,0}-(\mu'_{1,0})^2\right)+\mu'_{1,1}+\mu'_{2,0}=$$

$$=\mu'_{2,1}+\mu'_{1,1}\mu'_{1,0}-\left(\frac{\mu'_{1,1}\mu'_{0,1}-\mu'_{1,2}}{\mu_{1,1}}+\gamma-1\right)\mu'_{1,0};$$

Agrupando:

$$\left(\frac{\mu'_{1,1}\mu'_{0,1}-\mu'_{1,2}}{\mu_{1,1}}\right)(\mu'_{1,0}(2-\mu'_{1,0})-\mu'_{2,0})+$$

$$+\mu'_{1,1}(1-\mu'_{1,0})+\mu'_{2,0}-\mu'_{2,1}=$$

$$=(\gamma-1)\mu'_{1,0}$$

Despejando γ obtenemos:

$$\gamma=1+\frac{1}{\mu'_{1,0}}\left\{\begin{array}{c}\frac{\mu'_{1,1}\mu'_{0,1}-\mu'_{1,2}}{\mu_{1,1}}[\mu'_{1,0}(2-\mu'_{1,0})-\mu'_{2,0}]+\\ +\mu'_{1,1}(1-\mu'_{1,0})+\mu'_{2,0}-\mu'_{2,1}\end{array}\right\}$$

Además si de:

$$\alpha_1\beta_1=[\gamma-1-(\alpha_1+\beta_1)]\mu'_{1,0}+\mu'_{1,1}$$

sustituimos en :

$$\gamma-1-(\alpha_1+\beta_1)=\frac{\mu'_{1,1}\mu'_{0,1}-\mu'_{1,2}}{\mu_{1,1}}$$

y operamos se tiene:

$$\alpha_1\beta_1=\left(\frac{\mu'_{1,1}\mu'_{0,1}-\mu'_{1,2}}{\mu_{1,1}}\right)\mu'_{1,0}+\mu'_{1,1};$$

$$\alpha_1\beta_1=\frac{\mu'_{1,1}\mu'_{0,1}\mu'_{1,0}-\mu'_{1,2}\mu'_{1,0}+\mu'_{1,1}\mu_{1,1}}{\mu_{1,1}};$$

Como:

$$\mu_{1,1} = \mu'_{1,1} - \mu'_{1,0}\mu'_{0,1}$$

entonces:

$$\alpha_1\beta_1 = \frac{\mu'_{1,1}\mu'_{0,1}\mu'_{1,0} - \mu'_{1,2}\mu'_{1,0} + \mu'_{1,1}\left(\mu'_{1,1} - \mu'_{1,0}\mu'_{0,1}\right)}{\mu_{1,1}}$$

luego:

$$\alpha_1\beta_1 = \frac{\mu'^2_{1,1} - \mu'_{1,2}\mu'_{1,0}}{\mu_{1,1}}$$

Además de:

$$\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1) = \frac{\mu'_{1,1}\mu'_{0,1} - \mu'_{1,2}}{\mu_{1,1}}$$

obtenemos

$$(\alpha_1 + \beta_1) = \gamma - 1 - \frac{\mu'_{1,2} - \mu'_{1,1}\mu'_{0,1}}{\mu_{1,1}}$$

Así pues las estimaciones de los parámetros α_1, β_1 se obtienen como las raíces del polinomio $x^2 + (\alpha_1 + \beta_1)x + \alpha_1\beta_1$.

De igual forma se obtienen las estimaciones de los parámetros α_2 y β_2 :
Si sustituimos la ecuación:

$$\alpha_2\beta_2 = [\gamma - 1 - (\alpha_2 + \beta_2)]\mu'_{0,1} + \mu'_{1,1}$$

en la ecuación:

$$\alpha_2\beta_2 = [\gamma - 1 - (\alpha_2 + \beta_2)]\mu'_{0,1} + \\ + [\gamma - (\alpha_2 + \beta_2)]\mu'_{1,1} + \mu'_{2,1} - \alpha_2\beta_2\mu'_{1,0}$$

operando se obtiene:

$$\gamma - 1 - (\alpha_2 + \beta_2) = \frac{\mu'_{1,1}\mu'_{1,0} - \mu'_{2,1}}{\mu_{1,1}}$$

Si reemplazamos ahora:

$$\alpha_2\beta_2 = [\gamma - 1 - (\alpha_2 + \beta_2)]\mu'_{0,1} + \mu'_{1,1}$$

y

$$\gamma - 1 - (\alpha_2 + \beta_2) = \frac{\mu'_{1,1}\mu'_{1,0} - \mu'_{2,1}}{\mu_{1,1}}$$

en la ecuación:

$$\begin{aligned}\alpha_2\beta_2 = {} & [\gamma - 2 - (\alpha_2 + \beta_2)]\mu'_{0,2} + \mu'_{1,2} + \\ & + [\alpha_2\beta_2 + \alpha_2 + \beta_2]\mu'_{0,1}\end{aligned}$$

nos queda una ecuación en la que si despejamos γ obtenemos:

$$\gamma = 1 + \frac{1}{\mu'_{0,1}}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\mu'_{1,1}\mu'_{1,0} - \mu'_{2,1}}{\mu_{1,1}}[\mu'_{0,1}(2 - \mu'_{0,1}) - \mu'_{0,2}] + \\ +\mu'_{1,1}(1 - \mu'_{0,1}) + \mu'_{0,2} - \mu'_{2,1}\end{array}\right\}$$

Además si de:

$$\alpha_2\beta_2 = [\gamma - 1 - (\alpha_2 + \beta_2)]\mu'_{0,1} + \mu'_{1,1}$$

sustituimos en:

$$\gamma - 1 - (\alpha_2 + \beta_2) = \frac{\mu'_{1,1}\mu'_{1,0} - \mu'_{2,1}}{\mu_{1,1}}$$

se tiene que:

$$\alpha_2\beta_2 = \frac{\mu'^2_{1,1} - \mu'_{2,1}\mu'_{0,1}}{\mu_{1,1}}$$

Por lo tanto:

$$(\alpha_2 + \beta_2) = \gamma - 1 - \frac{\mu'_{2,1} - \mu'_{1,1}\mu'_{1,0}}{\mu_{1,1}}$$

Así pues las estimaciones de los parámetros α_2, β_2 se obtienen como las raíces del polinomio $x^2 + (\alpha_2 + \beta_2)x + \alpha_2\beta_2$.

– § –

Capítulo 4

Distribución de Waring Multivariante.

4.1. Definición. Primeras propiedades.

4.1.1. Definición de la MGWD$\left(a; \underset{\sim}{k}; \rho\right)$.

Definimos, tal y como hicimos con el caso bivariante, la extensión multivariante de la distribución generalizada de Waring, a través de una generalización multivariante de la extensión de Waring:

$$\frac{1}{x-a} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_{(r)}}{x_{(r+1)}} \tag{4.1}$$

Ahora, Xekalaki [32], veremos una generalización de (4.1) que dará lugar a la versión multivariante de la distribución generalizada de Waring.

Para k_i, $i = 1, \ldots, n$, números reales positivos y distintos, definimos una función real de x como:

$$f(x) = \frac{1}{x_{\left(\sum_i k_i\right)}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(x + \sum_{j=0}^{i-1} k_j\right)_{(k_i)}} \tag{4.2}$$

$k_0 = 0$.

Sabemos que para una función real g(x) siendo a > 0:

$$g(x-a) = (1+\Delta)^{-a} g(x) \tag{4.3}$$

y

$$\Delta^r g(x) = \sum_{l=0}^{r} (-r)_{(l)} \frac{g(x+l)}{l!} \tag{4.4}$$

$r = 0, 1, ...$

donde $\Delta g(x) = g(x+1) - g(x)$.

Además, si $g_i(x)$, $i = 1, ..., n$ son funciones de x:

$$\Delta^m \left[\prod_{i=1}^{n} g_i(x) \right] = \sum_{\sum r_i = m} m! \prod_{i=1}^{n} \Delta^{r_i} g_i \left(x + \sum_{j=0}^{i-1} r_j \right) \tag{4.5}$$

$r_0 = 0$

Mediante (4.4) puede probarse que:

$$\Delta^r \frac{1}{x_{(l)}} = \frac{(-1)^r l_{(r)}}{x_{(l+r)}}, r = 0, 1, 2, ... \tag{4.6}$$

Combinando (4.2), (4.3), (4.5) *y* (4.6) obtenemos (Xekalaki [32]):

$$\frac{1}{(x-a)_{(\sum k_i)}} = (1+\Delta)^{-a} \frac{1}{x_{(\sum x_i)}} =$$

$$= \sum_{r_1, ..., r_n} \frac{a_{(\sum r_i)} (k_1)_{(r_1)} ... (k_n)_{(r_n)}}{x_{(\sum r_i + \sum k_i)} (r_1)! ... (r_n)!}$$

es decir:

$$1 = \frac{(x-a)_{(\sum k_i)}}{x_{(\sum k_i)}} \sum_{r_1, ..., r_n} \frac{a_{(\sum r_i)} (k_1)_{(r_1)} ... (k_n)_{(r_n)}}{(x + \sum k_i)_{(\sum r_i)} (r_1)! ... (r_n)!} \tag{4.7}$$

La serie múltiple es convergente para x > a.

Aquí hemos obtenido una serie múltiple que converge a 1 y además sus sucesivos términos definen una distribución discreta multivariante.

Considerando $x = a + \rho$, $\rho > 0$ obtenemos la distribución multivariante generalizada de Waring de parámetros $a, \underset{\sim}{k} = (k_1, ..., k_n)$ y ρ :

$$MGWD(a;(k_1,...,k_n);\rho) \equiv MGWD\left(a;\underset{\sim}{k};\rho\right)$$

Definición 4.1. *Un vector aleatorio* $\underset{\sim}{X} = (X_1,...,X_n)$ *de componentes no negativas entero-valuadas, decimos que sigue una* $MGWD\left(a;\underset{\sim}{k};\rho\right)$; $a,\ \rho,\ k_i > 0,\ i = 1,...,n,$ *si su funcion masa de probabilidad viene dada por*:

$$f(\underset{\sim}{x}) = P\left\{\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{r}\right\} = \frac{\rho_{(\sum k_i)}}{(a+\rho)_{(\sum k_i)}} \frac{a_{(\sum r_i)}(k_1)_{(r_1)}...(k_n)_{(r_n)}}{(a+\rho+\sum k_i)_{(\sum r_i)}(r_1)!...(r_n)!}, \tag{4.8}$$

$r_i = 0,1,...;\ i = 1,...,n$

La función generatriz de probabilidad de la $MGWD\left(a;\underset{\sim}{k};\rho\right)$ puede expresarse en términos de la función hipergeométrica de Lauricella tipo D:

$$G(\underset{\sim}{t}) = \frac{\rho_{(\sum k_i)}}{(a+\rho)_{(\sum k_i)}} F_D\left(a;k_1,...,k_n;a+\sum_{i=1}^{n}k_i+\rho;\underset{\sim}{t}\right) \tag{4.9}$$

donde

$$F_D\left(a;\beta_1,\beta_2,...,\beta_n;\gamma;\underset{\sim}{t}\right) = \sum_{r_1,...,r_n} \frac{a_{(\sum r_i)}}{(\gamma)_{(\sum r_i)}} \prod_{i=1}^{n} \frac{(\beta_i)_{(r_i)} t_i^{r_i}}{(r_i)!}.$$

Que $\rho > 0$ asegura la convergencia de (4.9) para todos los valores de los parámetros $a, k_1, ..., k_n$ y ρ para $t_i \in [-1,1]$, $i = 1,2,...,n.$

Para terminar este subapartado indicaremos que, lógicamente, cuando n = 2 la $MGWD\left(a;\underset{\sim}{k};\rho\right)$ se convierte en la $BGWD(a;k_1,k_2;\rho)$ y en la $UGWD(a;k;\rho)$ $(k_1 = k)$ cuando n = 1.

Además debemos indicar que la $MGWD\left(a;\underset{\sim}{k};\rho\right)$ tal y como está definida en (4.9) es un miembro de la familias de distribuciones hipergeométricas multivariantes generalizadas de Sibuya y Shimizu (1981) y de Janardan y Patil (1972).

4.1.2. Propiedades.

Sea $\underset{\sim}{X}$ un vector aleatorio que sigue una $MGWD\left(a; \underset{\sim}{k}; \rho\right)$ entonces se verifican las siguientes propiedades:

$a)\ X_i \sim UGWD(a, k_i; \rho). \qquad i = 1, ..., n.$

$b)\ \sum_{j=1}^{s} X_{i_j} \sim UGWD(a, \sum_{j=1}^{s} k_{i_j}; \rho) \qquad \{i_1, i_2, ...i_s\} \subseteq \{1, ..., n\} \qquad s \leq n.$

$c)\ (X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_s}) \sim MGWD(a; k_{i_1}, ..., k_{i_s}; \rho)$

$\{i_1, i_2, ...i_s\} \subseteq \{1, ..., n\} \qquad s \leq n.$

$d)\ (X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_s}) \mid (X_{i_{s+1}}, X_{i_{s+2}}, ..., X_{i_n})$ sigue una distribución:

$$MGWD(a + \sum_{j=s+1}^{n} x_{i_j}; k_{i_1}, ..., k_{i_s}; \rho + \sum_{j=s+1}^{n} k_{i_j})$$

$\{i_1, i_2, ...i_s\} \cup \{i_{s+1}, i_{s+2}, ...i_n\} = \{1, ..., n\} \qquad s \leq n.$

$e)\left(X_i, \sum_{j \neq i} X_j\right) \sim BGWD(a; k_i, \sum_{j \neq i} k_j; \rho) \qquad i = 1, ..., n.$

$f)\ X_i \mid \sum_{j \neq i} X_j \sim UGWD\left(a + \sum_{j \neq i} x_j, k_i; \rho + \sum_{j \neq i} k_j\right) \qquad i = 1, ..., n.$

Como implican las propiedades a, b y d las distribuciones marginales (condicionadas y no condicionadas) así como sus convoluciones son de la misma forma (*UGWD*).

Se puede observar que las propiedades d y f son equivalentes para el caso s = 1, lo que implica que:

$$E\left(X_i \mid \{X_j = x_j, j \neq i\}\right) = E\left(X_i \mid \sum_{j \neq i} X_j = \sum_{j \neq i} x_j\right) =$$

$$= \frac{\left(a + \sum_{j \neq i} x_j\right) k_i}{\rho + \sum_{j \neq i} k_j - 1} \tag{4.10}$$

$$V(X_i \mid \{X_j = x_j, j \neq i\}) = V\left(X_i \mid \sum_{j \neq i} X_j = \sum_{j \neq i} x_j\right) =$$

$$= \frac{k_i\left(a + \sum_{j \neq i} x_j\right)\left(\rho + \sum_{j \neq i} k_j - 1\right)\left(a + \sum_{j \neq i}(k_j + x_j) + \rho - 1\right)}{\left(\rho + \sum_{j \neq i} k_j - 1\right)^2\left(\rho + \sum_{j \neq i} k_j - 2\right)} \tag{4.11}$$

Las medias y varianzas marginales (por la propiedad a)) son respectivamente para $\rho > 1$ y $\rho > 2$:

$$\mu_{X_i} = \frac{ak_i}{\rho - 1}$$

$$\sigma^2_{X_i} = \frac{ak_i(\rho + a - 1)(\rho + k_i - 1)}{(\rho - 1)^2(\rho - 2)} \tag{4.12}$$

$i = 1, 2, ..., n$

También por la propiedad d y para s = 2, las covarianzas serán:

$$\sigma_{X_i X_j} = \frac{a(\rho + a - 1)k_i k_j}{(\rho - 1)^2(\rho - 2)} \tag{4.13}$$

$i,j = 1, 2, ..., n;\ i \neq j,\ \rho > 2$

Dado que $\sigma_{X_i X_j}$ existe sólo si $\rho > 2$ el vector aleatorio $\underset{\sim}{X}$ estará siempre correlado positivamente.

Los momentos factoriales de la MGWD$\left(a; \underset{\sim}{k}; \rho\right)$ se pueden obtener para $r_i = 0, 1, ...;\ i = 1, 2, ...$ mediante la siguiente expresión:

$$\mu_{(r_1,\ldots,r_n)} = \frac{a_{(\sum r_i)} \prod_{i=1}^{n} (k_i)_{(r_i)}}{(\rho-1)(\rho-2)\ldots(\rho-\sum r_i)} \tag{4.14}$$

Lógicamente son finitos sólo para $\rho > \sum r_i$ que es la condición necesaria para que la serie

$$F_D\left(a + \sum_{i=1}^{n} r_i; k_1 + r_1, \ldots, k_n + r_n; a + \rho + \sum_{i=1}^{n} (k_i + r_i); \underset{\sim}{1} \right)$$

sea convergente.

4.2. Generación de la distribución generalizada de Waring Multivariante.

En este apartado llegaremos a la distribución multivariante generalizada de Waring (*MGWD*) como un caso particular dentro de la familia de distribuciones Pearsonianas discretas y estudiaremos sus propiedades de acuerdo con su pertenencia a tal familia. Comenzaremos exponiendo brevemente una metodología de construcción y la aplicaremos para un caso particular de los coeficientes del sistema de ecuaciones en diferencias propio del modelo de Pearson.

Pearson (1985) propuso para el caso discreto el estudio de funciones obtenidas a partir de la solución de un sistema de ecuaciones en diferencias, que en el caso n-dimensional se expresa de la siguiente manera:

$$G_i(r_1, \ldots, r_n) f_{r_1,\ldots,r_i+1,\ldots,r_n} - L_i(r_1, \ldots, r_n) f_{r_1,\ldots,r_n} = 0 \tag{4.15}$$

donde:

$$L_i : (Z^+)^n \to R$$

$$G_i : (Z^+)^n \to R - \{0\}$$

son funciones con $i = 1, \ldots, n$.

La condición necesaria para que la función f sea solución del anterior sistema es que las funciones L_i, G_i verifiquen:

$$E_{r_i}[E_{r_j}(f_{r_1,\dots,r_n})] = E_{r_j}[E_{r_i}f] \qquad i \neq j = 1,\dots,n$$

....

....

$$E_{r_1}[E_{r_2}\dots[E_{r_n}(f)]] = \dots\dots = E_{r_n}[E_{rn-1}\dots[E_{r_1}(f)]] \tag{4.16}$$

$$f_{r_1,\dots,r_n} > 0$$

En este caso, la solución viene dada por el siguiente teorema:

Teorema 4.1. *Si la función f: $N^n \to R$ es la solución del sistema, entonces podemos escribirla de la siguiente forma*:

$$f = f_{0,\dots,0} \prod_{t_1=0}^{r_1-1} \frac{L_1(t_1, r_2, \dots, r_n)}{G_1(t_1, r_2, \dots, r_n)} \cdots \prod_{t_1=0}^{r_i-1} \frac{L_i(0,\dots,t_i,\dots,r_n)}{G_i(0,\dots,t_i,\dots,r_n)} \cdots$$
$$\cdots \prod_{t_n=0}^{r_n-1} \frac{L_n(0,\dots,o,t_n)}{G_n(0,\dots,0,t_n)} \tag{4.17}$$

para $r_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ y para conveniente notación indicaremos que si algún $r_i = 0$ el correspondiente producto vale 1, *fijando $f_{0,\dots,0}$ para que sea distinta de cero.*

La condición necesaria para que una tal función f, solución del sistema anterior, sea una función masa de probabilidad es que verifique el siguiente:

Teorema 4.2. *Sea $H = \{(r_1, \dots, r_n) \in N^n \text{ tq } f_{r_1,\dots,r_n} \neq 0\}$. La función f, solución del sistema* (4.15) *dado en* (4.16) *es una solución probabilidad discreta multivariante sí y solo sí se verifican las siguientes condiciones*:

1. *Condición de positividad.*

$$L_i(r_1, \dots, r_n)\, G_i(r_1, \dots, r_n) \geq 0$$

$\forall (r_1, \dots, r_n) \in H$

2. *Condición de convergencia.*

$$\sum_{r_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=0}^{\infty} \prod_{t_1=0}^{r_1-1} \cdots \prod_{t_n=0}^{r_n-1} \frac{L_1(t_1,...,r_n)}{G_1(t_1,...,r_n)} \cdots \frac{L_n(0,...,t_n)}{G_n(0,...,t_n)} < \infty$$

$r_1 + ... + r_n \neq 0$

3. *Condición de normalización.*

$$f_{0,...,0} = \frac{1}{1 + \sum_{r_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=0}^{\infty} \prod_{t_1=0}^{r_1-1} \cdots \prod_{t_n=0}^{r_n-1} \frac{L_1(t_1,...,r_n)}{G_1(t_1,...,r_n)} \cdots \frac{L_n(0,...,t_n)}{G_n(0,...,t_n)}}$$

$r_1 + ... + r_n > 0$

Si las funciones L_i, G_i son polinomios entonces:

Teorema 4.3. *Si $g\,(t_1,...,t_n)$ es la función generatriz de la función f que es la solución del sistema* (4.15), *y L_i, G_i son polinomios en $(r_1,...,r_n)$ y $(r_1,...,r_i+1,...r_n)$ respectivamente, de órdenes cualesquiera y tal que las condiciones dadas en el teorema* 4.1 *se verifican, entonces $g(t_1,...,t_n)$ verifica el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*:

$$G_i(\theta_1,...,\theta_n)g(t_1,...,t_n) - t_i L_i(\theta_1,...,\theta_n)g(t_1,...,t_n) =$$

$$= G_i(\theta_1,...,\theta_n)\left[\sum_{r_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_{i-1}=0}^{\infty} \sum_{r_{i+1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=0}^{\infty} f_{r_1,...,r_{i-1}r_{i+1}...r_n} t_1^{r_1} ... t_{i-1}^{r_{i-1}} t_{i+1}^{r_{i+1}} ... t_n^{r_n}\right] \tag{4.18}$$

para $|t_i| < 1; \theta_i = t_i \frac{\partial}{\partial t_i} \qquad i = 1,...,n.$

De la misma forma la función generatriz de momentos y la función característica verifican:

$$G_i(D_1,...,D_n)M(t_1,...,t_n) - e^{t_i} L_i(D_1,...,D_n)M(t_1,...,t_n) =$$

$$= G_i(D_1,...,D_n)\left[\sum_{r_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{i-1}=0}^{\infty}\sum_{r_{i+1}=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty} f_{r_1,...,r_{i-1}r_{i+1}...r_n} e^{t_1 r_1}...e^{t_{i-1}r_{i-1}}e^{t_{i+1}r_{i+1}}...e^{t_n r_n}\right] \tag{4.19}$$

con $D_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$ $\qquad i = 1,...,n.$

$$G_i(\theta'_1,...,\theta'_n)\phi(t_1,...,t_n) - t_i L_i(\theta'_1,...,\theta'_n)\phi(t_1,...,t_n) =$$

$$= G_i(\theta'_1,...,\theta'_n)\left[\begin{array}{c}\sum_{r_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{i-1}=0}^{\infty}\sum_{r_{i+1}=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty} f_{r_1,...,r_{i-1}r_{i+1}...r_n}\cdot \\ .e^{it_1 r_1}\ ...\ e^{it_{i-1}r_{i-1}}e^{it_{i+1}r_{i+1}}...e^{it_n r_n}\end{array}\right] \tag{4.20}$$

con $\theta'_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_j}$ $\qquad j = 1,...,n.$

Del estudio del sistema (4.15), pueden calcularse las funciones de probabilidad condicionales, así como las ecuaciones diferenciales que verifican sus funciones generatrices y sus superficies de regresión, siempre y cuando sean racionales.

Teorema 4.4. *Si la función de probabilidad solución del sistema (4.15) puede escribirse como el producto de una condicional con sus respectivas marginales obtenemos*:

a) *La función de probabilidad condicional verifica el sistema de ecuaciones parciales*:

$$G_i(r_1,...,r_n)f_{(r_1,...,r_{i-1},...r_k)/(r_{k+1},...,r_n)} - L_i(r_1,...,r_n)f_{(r_1,...,r_k)/(r_{k+1},...,r_n)} = 0 \tag{4.21}$$

$$i = 1,...,k;\ f_{(r_{k+1},...,r_n)} > 0$$

b) *Una vez calculada la función de probabilidad condicional, las marginales verifican el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias*:

$$G_i(r_1,...,r_n)f_{(r_1,...,r_{i-1},...r_k)/(r_{k+1},...,r_{j+1},...r_n)}f_{(r_{k+1},...,r_j+1,...r_n)} -$$

$$- L_i(r_1,...,r_n)f_{(r_1,...,r_n)/(r_{k+1},...,r_n)}f_{(r_{k+1},...,r_j,...r_n)} = 0 \tag{4.22}$$

$$con\, j = k+1,...,n$$

Consideramos los siguientes polinomios:

$$G_i(r_1,...,r_n) = (a+k_1+...+k_n+\rho+r_1+...+r_n)(r_i+1)$$

$$L_i(r_1,...,r_n) = (a+r_1+...+r_n)(k_i+r_i)$$

donde $a, k_1, ..., k_n, \rho > 0$. Por el teorema 4.1 sabemos que la solución del sistema de ecuaciones en diferencias viene dado por:

$$f_{r_1,...,r_n} = f_{0,...,0}\frac{(a)_{r_1+...+r_n}(k_1)_{r_1}...(k_n)_{r_n}}{(a+k_1+...+k_n+\rho)_{r_1,...,r_n}r_1!...r_n!} \tag{4.23}$$

donde $r_1,...,r_n$ son enteros,y además sabemos que es la función masa de probabilidad de la $MGWD(a, k_1, ..., k_n, \rho)$. Esta función verifica las condiciones del teorema 4.2 dado que los coeficientes de los polinomios son positivos, y dado que la función masa de probabilidad para cada $r_1,...,r_n$ fijado, es un término de la función hipergeométrica:

$$F_D^{(n)}(a, k_1, ..., k_n; a+k_1+...+k_n+\rho, 1, ..., 1)$$

que es convergente a cero al ser $\rho > 0$.

En consecuencia:

$$f_{0,...,0} = \frac{\Gamma(k_1+...+k_n+\rho)\Gamma(a+\rho)}{\Gamma(a+k_1+...+k_n+\rho)\Gamma(\rho)} \tag{4.24}$$

La función generatriz de probabilidad es:

$$g(t_1,...,t_n) = \frac{F_D^{(n)}(a, k_1, ..., k_n; a+k_1+...+k_n+\rho, t_1, ..., t_n)}{F_D^{(n)}(a, k_1, ..., k_n; a+k_1+...+k_n+\rho, 1, ..., 1)} \tag{4.25}$$

con lo que es una distribución perteneciente a la familia de distribuciones discretas generadas por la función hipegeométrica:

$$F_D^{(n)}(a, k_1, ..., k_n; a+k_1+...+k_n+\rho, 1, ..., 1)$$

que es una extensión de la función hipergeométrica de Gauss.

Vamos por tanto a obtener sus propiedades principales mediante la aplicación de los resultados anteriores.

Por aplicación del teorema 4.3 y tras expresar los polinomios G_i en la variables $(r_1,...,r_i+1,...r_n)$, las ecuaciones diferenciales que verifica la función generatriz de probabilidad, a cuya expresión hemos llegado haciendo las mismas operaciones que en el capítulo 3, son las siguientes:

$$\left[\begin{array}{c} (1-t_i)\sum_{k=1}^{n}\theta_k\theta_i + \left[a+\left(\sum_{j=1}^{k}k_j\right)+\rho+1-t_i(a+k_i)\right]\theta_i - \\ -t_ik_i\sum_{i\neq j=1}^{n}\theta_j - t_iak_i \end{array}\right] g(t_1,...,t_n) = 0 \tag{4.26}$$

donde $i=1,...,n;\ |t_i|<1;\theta_i = t_i\frac{\partial}{\partial t_i}$

De nuevo, por aplicación del teorema 4.3 podemos obtener lasdistribuciones marginales y condicionadas. Así, si estudiamos la variable aleatoria $(\xi_1,...\xi_n)$ con una distribución de este tipo obtenemos:

a) Cada distribución marginal ξ_i es de tipo $UGWD(a,k_i,\rho)$, y de esta forma, el vector de medias será:

$$\mu = \begin{pmatrix} \frac{ak_1}{\rho-1} \\ ...... \\ ...... \\ \frac{ak_n}{\rho-1} \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

b) La distribución conjunta de (ξ_i,ξ_j) es la $BGWD(a,k_i,k_j,\rho)$ y así, la matriz de varianzas covarianzas tiene la siguiente forma:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{ak_1(a+\rho-1)(k_1+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} & ..... & ..... & \frac{ak_1k_n(a+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} \\ & & ..... & \frac{ak_2k_n(a+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} \\ & & ..... & ..... \\ & & & \frac{ak_n(a+\rho-1)(k_n+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

siendo la matriz de correlaciones:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \sqrt{k_1 \frac{k_n}{(k_1+\rho-1)(k_n+\rho-1)}} \\ & 1 & \ldots\ldots & \sqrt{k_2 \frac{k_n}{(k_2+\rho-1)(k_n+\rho-1)}} \\ & & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

Para obtener la distribución condicionada, recordemos que fue obtenida resolviendo el siguiente sistema:

$$\left(a+\rho+\sum_{j=1}^{n} k_i + \sum_{j=1}^{n} r_i\right)(r_i+1)f_{(r_1,\ldots,r_{i-1},\ldots r_k)/(r_{k+1},\ldots,r_n)} -$$

$$-\left(a+\sum_{j=1}^{n} r_i\right)(k_i+r_i)f_{(r_1,\ldots,r_k)/(r_{k+1},\ldots,r_n)} = 0$$

cuya solución es:

$$f_{r_i/(r_1,\ldots,r_n)} = f_{0/(r_1,\ldots,r_n)} \frac{\left(a+\sum\limits_{i\neq j=1}^{n} r_j\right)_{r_i} (k)_i}{\left(a+\rho+\sum\limits_{i\neq j=1}^{n} k_i + \sum\limits_{i\neq j=1}^{n} r_j\right)_{r_i} r_i!} \tag{4.30}$$

donde:

$$f_{0/(r_1,\ldots,r_{i-1},r_{i+1},\ldots,r_n)} = \frac{1}{{}_2F_1\left(a+\rho+\sum\limits_{i\neq j=1}^{n} r_j; k_i; a+\rho+\sum\limits_{j=1}^{n} k_i + \sum\limits_{i\neq j=1}^{n} r_j; 1\right)}$$

que corresponde a una $UGWD\left(a+\sum\limits_{i\neq j=1}^{n} r_j, k_i; \rho+\sum\limits_{i\neq j=1}^{n} k_j\right)$

Esto nos permite estudiar la superficie de regresión de ξ_i sobre $(\xi_1,\ldots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\ldots,\xi_n)$:

$$\xi_i = \frac{\left(a + \sum_{i \neq j = 1}^{n} r_j\right) k_i}{\left(\rho - 1 + \sum_{i \neq j = 1}^{n} k_j\right)}$$

que es una función lineal en r_j y, por consiguiente, es un hiperplano de regresión.

Los coeficientes de correlación múltiple son:

$$\varrho_{i(1,\dots,i-1,i+1,\dots,n)} = \left\{ \frac{\left(\sum_{i \neq j = 1}^{n} k_j\right) k_i}{(k_i + \rho - 1)\left(\rho - 1 + \sum_{i \neq j = 1}^{n} k_j\right)} \right\}^{1/2} \tag{4.31}$$

La función de densidad marginal de $(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n)$ que viene dada por el teorema 4.4, tiene la siguiente forma:

$$MGWD(a, k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n; \rho)$$

La función de probabilidad condicionada de:

$$\xi_1, \dots, \xi_m / \xi_{m+1} = r_{m+1}, \dots, \xi_n = r_n$$

por el teorema 4.4 es la solución del sistema de ecuaciones en diferencias parciales:

$$\left(a + \rho + \sum_{j=1}^{n} k_j + \sum_{j=1}^{n} r_j\right)(r_i + 1) f_{r_{i+1}/(r_{m+1},\dots,r_n)} -$$

$$- \left(a + \sum_{j=1}^{n} r_i\right)(k_i + r_i) f_{r_i/(r_{m+1},\dots,r_n)} = 0$$

siendo una variable de dimensión m que tiene la distribución:

$$MGWD\left(a + \sum_{j=m+1}^{n} r_j, k_1, \dots, k_m; \rho + \sum_{j=m+1}^{n} k_j + \sum_{j=1}^{n} r_j\right)$$

De manera análoga se obtiene el caso n-dimensional, siendo sus distribuciones características condicionadas:

a) El valor esperado de la variable ξ_i condicionado a las variables $(\xi_{m+1},...,\xi_n)$ tiene la siguiente expresión:

$$E(\xi_i/\xi_{m+1} = r_{m+1},...,\xi_n = r_n) = \frac{\left(a + \sum_{j=m+1}^{n} r_j\right)k_i}{\rho - 1 + \sum_{j=1}^{n} k_j} \quad (4.32)$$

b) La superficie de regresión de la variable ξ_i consideradas las variables $(\xi_{m+1},...,\xi_n)$, es una combinación lineal de variables $(\xi_{m+1},...,\xi_n)$, así, esta superficie de regresión es el hiperplano de regresión.

c) La varianza de la variable ξ_i condicionada a las variables $(\xi_{m+1},...,\xi_n)$ viene dada por:

$$V(\xi_i/\xi_{m+1} = r_{m+1},...,\xi_n = r_n) =$$

$$= \frac{\left(a + \sum_{j=m+1}^{n} r_j\right)k_i\left(a + \rho - 1 + \sum_{j=1}^{n} k_j + \sum_{j=1}^{n} r_j\right)\left(k_i + \rho - 1 + \sum_{j=m+1}^{n} k_j\right)}{\left(\rho - 1 + \sum_{j=1}^{n} k_j\right)^2\left(\rho - 2 + \sum_{j=m+1}^{n} k_j\right)} \quad (4.33)$$

d) La covarianza de las variables ξ_i, ξ_j condicionadas a las variables $(\xi_{m+1},...,\xi_n)$ tiene la siguiente expresión:

$$Cov(\xi_i/\xi_{m+1} = r_{m+1},...,\xi_n = r_n; \xi_l/\xi_{m+1} = r_{m+1},...,\xi_n = r_n) =$$

$$= \frac{\left(a + \sum_{j=m+1}^{n} r_j\right)k_i k_l\left(a + \rho - 1 + \sum_{j=1}^{n} k_j + \sum_{j=1}^{n} r_j\right)}{\left(\rho - 1 + \sum_{j=1}^{n} k_j\right)^2\left(\rho - 2 + \sum_{j=m+1}^{n} k_j\right)} \quad (4.34)$$

e) Así, podemos calcular los coeficientes de correlación de las variables (ξ_i, ξ_j) condicionadas a las variables $(\xi_{m+1},...,\xi_n)$ cuyo valor es:

$$\varrho_{i,1(m+1,\dots,n)} = \left\{ \frac{k_i k_l}{\left(k_i + \rho - 1 + \sum\limits_{j=m+1}^{n} k_j\right)\left(k_l + \rho - 1 + \sum\limits_{j=m+1}^{n} k_j\right)} \right\}^{1/2} \tag{4.35}$$

con $i \neq l = 1,\dots,m$.

Estos coeficientes son las coeficientes de correlación parcial que representan la correlación entre las variables 1 y l, una vez eliminada la influencia de las variables $(\xi_{m+1},\dots,\xi_n)$.

La función de probabilidad marginal de $(\xi_{m+1},\dots,\xi_n)$ se obtiene mediante la aplicación del teorema 4.4 y es la siguiente:

$$MGWD(a, k_{m+1},\dots,k_n;\rho)$$

y la función de probabilidad de la variable aleatoria $\eta = (\xi_1 + \dots + \xi_n)$ es:

$$UGWD(a, k_1,\dots,k_n;\rho)$$

4.3. Distribución límite de una MGWD.

Veamos ahora que si $a, k_1,\dots,k_n$ tienden a infinito y todos con el mismo orden O(a), la distribución multivariante generalizada de Waring puede aproximarse mediante una distribución normal multivariante, con vector de medias y matriz de varianzas-covarianzas las correspondientes a la distribución multivariante generalizada de Waring correspondiente. Para demostrarlo, partiremos, como en el caso bidimensional, de la función generatriz de cumulantes.

Según el teorema 4.3, la f.g.m. verifica el sistema de ecuaciones diferenciales (con $\gamma = a + k_1 + \dots + k_n + \rho$) :

$$\left[\begin{array}{c} (1 - e^{t_i})\sum\limits_{k=1}^{n} D_k D_i + [\gamma + 1 - e^{t_i}(a + k_i)]D_i \\ -e^{t_i} k_i \sum\limits_{i \neq j=1}^{n} D_j - a k_i e^{t_i} \end{array} \right] M = 0 \tag{4.36}$$

Si $\Lambda = \log M$, haciendo el cambio, la función generatriz de cumulantes satisface:

$$(1-e^{t_i})\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_i\partial t_j}+\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_j}\right]+[\gamma+1-e^{t_i}(a+k)]\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}-$$

$$-e^{t_i}k_i\sum_{i\neq j=1}^{n}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_j}-ak_ie^{t_i}=0 \qquad (4.37)$$

Veámoslo:
Si $\Lambda=\log M$, (4.36) nos quedaría:

$$\left[(1-e^{t_i})\sum_{k=1}^{n}D_kD_i\right]e^{\Lambda}+\{[\gamma+1-e^{t_i}(a+k_i)]D_i\}e^{\Lambda}$$

$$-\left[e^{t_i}k_i\sum_{i\neq j=1}^{n}D_j\right]e^{\Lambda}-(ak_ie^{t_i})e^{\Lambda}=0$$

Aplicamos las derivadas a los tres primeros sumandos pues al cuarto no le afecta:

Sumando primero:

$$\left[(1-e^{t_i})\sum_{k=1}^{n}D_kD_i\right]e^{\Lambda}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}D_kD_i\right)e^{\Lambda}=[D_1D_i+\ldots+D_i^2+\ldots+D_nD_i]e^{\Lambda}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_i}e^{\Lambda}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial t_i^2}e^{\Lambda}+\ldots+\frac{\partial}{\partial t_n}\frac{\partial}{\partial t_i}e^{\Lambda}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t_i}\left[e^{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}\right]+\ldots+\frac{\partial}{\partial t_i}\left[e^{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}\right]+\ldots+\frac{\partial}{\partial t_i}\left[e^{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_n}\right]=$$

$$=e^{\Lambda}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1}+\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_i\partial t_1}\right)+\ldots+e^{\Lambda}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}+\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_i^2}\right)+$$

$$+\ldots+e^{\Lambda}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_n}+\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_i\partial t_n}\right)=$$

$$=e^{\Lambda}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_i\partial t_j}+\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_j}\right]$$

Por tanto:

$$\left[(1-e^{t_i})\sum_{k=1}^{n} D_k D_i\right]e^{\Lambda} =$$

$$= (1-e^{t_i})\left[e^{\Lambda}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_i \partial t_j} + \frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_j}\right]\right]$$

Segundo sumando:

$$[\gamma + 1 - e^{t_i}(a+k_i)]D_i e^{\Lambda}$$

$$\gamma D_i e^{\Lambda} + D_i e^{\Lambda} - e^{t_i}(a+k_i)D_i e^{\Lambda} =$$

$$= \gamma\frac{\partial}{\partial t_i}e^{\Lambda} + \frac{\partial}{\partial t_i}e^{\Lambda} - e^{t_1}(a+k)\frac{\partial}{\partial t_i}e^{\Lambda} =$$

$$= \gamma e^{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i} + e^{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i} - e^{t_i}(a+k_i)e^{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i} =$$

$$= e^{\Lambda}\left[\gamma\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i} + \frac{\partial\Lambda}{\partial t_i} - e^{t_i}(a+k_i)\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}\right] =$$

$$= e^{\Lambda}[\gamma + 1 - e^{t_i}(a+k_i)]\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}$$

Tercer sumando:

$$\left[e^{t_i}k_i\sum_{i\neq j=1}^{n} D_j\right]e^{\Lambda}$$

$$\left[e^{t_i}k_i\sum_{i\neq j=1}^{n} D_j\right]e^{\Lambda} = e^{t_i}k_i(D_1 + \ldots + D_{i-1} + D_{i+1} + \ldots + D_n)e^{\Lambda} =$$

$$= e^{t_i}k_i(D_1 e^{\Lambda} + \ldots + D_{i-1}e^{\Lambda} + D_{i+1}e^{\Lambda} + \ldots + D_n e^{\Lambda}) =$$

$$= e^{t_i}k_i\left[\frac{\partial}{\partial t_1}e^{\Lambda} + \ldots + \frac{\partial}{\partial t_{i-1}}e^{\Lambda} + \frac{\partial}{\partial t_{i+1}}e^{\Lambda} + \ldots + \frac{\partial}{\partial t_n}e^{\Lambda}\right] =$$

$$= e^{t_i}k_i\left[e^{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_1} + \ldots + e^{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_{i-1}} + e^{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_{i+1}} + \ldots + e^{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_n}\right] =$$

$$= e^{t_i}k_i\left(\sum_{i\neq j=1}^{n}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_j}\right)e^{\Lambda}$$

Uniendo los cuatro sumandos:

$$(1-e^{t_i})\left[e^{\Lambda}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_i\partial t_j}+\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_j}\right]\right]+$$

$$+e^{\Lambda}[\gamma+1-e^{t_i}(a+k_i)]\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}-e^{t_i}k_i\left(\sum_{i\neq j=1}^{n}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_j}\right)e^{\Lambda}-(ak_ie^{t_i})e^{\Lambda}=0$$

Entonces:

$$e^{\Lambda}\left[\begin{array}{c}(1-e^{t_i})\left[\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_i\partial t_j}+\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_j}\right]\right]+\\ +[\gamma+1-e^{t_i}(a+k_i)]\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}-e^{t_i}k_i\left(\sum_{i\neq j=1}^{n}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_j}\right)-ak_ie^{t_i}\end{array}\right]=0$$

Despejando:

$$(1-e^{t_i})\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_i\partial t_j}+\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_j}\right]+$$

$$+[\gamma+1-e^{t_i}(a+k_i)]\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}-e^{t_i}k_i\left(\sum_{i\neq j=1}^{n}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_j}\right)-ak_ie^{t_i}=0$$

Análogamente con las otras n-1 ecuaciones.

Calculemos ahora los primeros cumulantes haciendo $t_i = 0$:

$$(1-e^{0})\left[\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t_i\partial t_j}+\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_j}\right]\Big|_{t_i,t_j=0}\right]+$$

$$+[\gamma+1-e^{0}(a+k_i)]\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}\Big|_{t_i=0}-e^{0}k_i\left(\sum_{i\neq j=1}^{n}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_j}\Big|_{t_j=0}\right)-ak_ie^{0}=0$$

entonces:

$$[\gamma+1-(a+k_i)]\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}\mid_{t_i=0}\; -k_i\left(\sum_{i\neq j=1}^{n}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_j}\mid_{t_j=0}\right)-ak_i=0$$

así, como $\gamma = a+k_1+...+k_n+\rho$:

$$\left(\rho+1+\sum_{i\neq j=1}^{n}k_i\right)\frac{\partial\Lambda}{\partial t_i}\mid_{t_i=0}\; -k_i\left(\sum_{i\neq j=1}^{n}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_j}\mid_{t_j=0}\right)-ak_i=0$$

entonces:

$$\left(\rho+1+\sum_{i\neq j=1}^{n}k_i\right)\kappa_{0,\dots,1_{(i)},\dots,0}-k_i\sum_{i\neq j=1}^{n}\kappa_{0,\dots,1_{(j)},\dots,0}=ak_i \qquad (4.38)$$

Si imponemos que $a, k_1, ..., k_n$ tiendan a infinito y todos con el mismo orden, O(a), entonces los primeros cumulantes son también de orden O(a). Si consideramos las n^r ecuaciones que se obtienen al diferenciar el sistema de cumulantes r_1 veces con respecto a $t_1, ..., r_n$ veces con respecto a t_n, con $r_1+...+r_n = r-1$ y substituir t_i por cero, obtendremos que las n^r ecuaciones en los n^r cumulantes de orden r son del tipo:

$$[\gamma+1-(a+k_i)]\frac{\partial^r\Lambda}{\partial t_1^{r_1}...\partial t_i^{r_i+1}...\partial t_n^{r_n}}-(a+k_i)\frac{\partial^{r-1}\Lambda}{\partial t_1^{r_1}...\partial t_n^{r_n}}+...$$

y así, los cumulantes son de la siguiente forma:

$$\sum_{r_1 r_2}\kappa_{r_1,\dots,r_n}O(a)+\sum(cum.orden<r)(cum.ord<r)O(1)+$$

$$+\sum(cum.orden<r)O(a)=constante[orden\le O(a^2)] \qquad (4.39)$$

Como todos los cumulantes de primer orden son de O(a), por inducción se sigue que todos son de O(a) a lo sumo. Luego, como las varianzas y covarianzas son de O(a), haciendo el cambio:

$$Y=\frac{X-\mu}{\sqrt{a}} \qquad X_{nx1}; \qquad \mu_{nx1} \qquad (4.40)$$

queda que los cumulantes de orden impar de Y son cero y los de orden $2r$ $(r = 2,3,...)$ son de orden $O(a)/O(a^2) = O(a^{1-r}) \le O(a^{-1})$. Por tanto, los cumulantes de orden mayor que 2 son despreciables para grandes valores de $a, k_1, ..., k_n$, lo que implica que la distribución límite de Y es tal que todos sus cumulantes de orden superior a 2 son cero, es decir, que la distribución límite de Y es una normal multivariante, con vector de medias y matriz de varianzas-covarianzas los mencionados con anterioridad.

– § –

Bibliografía

[1] BOXENBAUM, H., PIVINSKI, F. y STEPHEN, J. R. (1987). *Publication rates of pharmaceutical scientists: Application of the Waring distribution.* Drug Metabolism reviews, 18 (4), 553-571.

[2] CANAL, L. y MICCIOLO, R. (1999). *Modelli probabilistici per l'analisi dei contatti psichiatrici.* Epidemiologia e Psichiatria Sociale, 8, 1, 47-55

[3] CONDE, A. (1999). *Estudio de familias de distribuciones discretas generadas por funciones hipergeométricas.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

[4] DANIAL, E. J. (1988). *Generalization to the sufficient conditions for a discrete random variable to be infinitely divisible.* Statistics & Probability Letters, 6, 379-382.

[5] DEVROYE, L. (1992). *Random variate generation for the digamma and trigamma distributions.* Journal of Statistical Computation and Simulation, 43, nº 3-4, 197-216.

[6] DUERR, H. P. Y DIETZ, K. (2000). *Stochastics models for aggregation processes.* Mathematical Biosciences, 165 (2), 135-145.

[7] FAJARDO, M.A. (1985). *Generalizaciones de los sistemas de Pearson discretos.* Tesis Doctoral. Universidad de Extremadura.

[8] FERRERI, C. (1984). *On the hypergeometric birth process and some implications about the gamma distribution representation.* Journal of the Royal Statistical Society, Serie b, 46, nº 1, 52-57.

[9] GUTIERREZ, R. Y RODRIGUEZ, J. (1994a). *Generación de la distribución de Waring Bidimensional a partir del sistema de Pearson discreto bivariante.* XXI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, 35-36.

[10] GUTIERREZ, R. Y RODRIGUEZ, J. (1994b). *L'Enseignement des familles de distributions discretes de Pearson travers une methodologie constructive. Application un cas particulier*. Proceeding of the Fourth International Conference on Teaching Statistics, ICOTS IV, vol. 2, pag 471.

[11] GUTIERREZ, R. Y RODRIGUEZ, J. (1995a). *Family of Pearson's discrete distributions by the univariate hypergeometric function* ${}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\gamma_1,\gamma_2;\lambda)$.Prodeedings of the Sevent International Symposium of Applied Stochastic Models and Data Analysis, 274-283.

[12] GUTIERREZ, R. Y RODRIGUEZ, J. (1995b). *Ejemplos de distribuciones discretas de Pearson genradas por la función hipergeométrica univariante* ${}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\gamma_1,\gamma_2;\lambda)$. XXII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, 37-38.

[13] GUTIERREZ, R. Y RODRIGUEZ, J. (1997a). *Generation of multivariate generalized Waring distribution from Pearson's discrete multidimensional system*. Submitted to Comm. in Stat.

[14] GUTIERREZ, R. Y RODRIGUEZ, J. (1997b). *Estudio de una subclase de la familia de distribuciones discretas generadas por la función hipegeométrica* ${}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\gamma_1,\gamma_2;1)$. XXIII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, 46.5-46.6.

[15] GUTIERREZ, R. Y RODRIGUEZ, J. (1997c). *Family of Pearson discrete distributions generated by the univariate hypergeometric function* ${}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\gamma_1,\gamma_2;1)$. Applied Stochastics Models and Data Analysis, vol. 13, 115-125.

[16] IRWIN, J.O. (1963). *The place of mathematics in medical and biological statistics*. Journal of the Royal Statistical Society, Serie A, 126, 1-44.

[17] IRWIN, J.O. (1968). *The generalized Waring distribution applied to accident theory*. Journal of the Royal Statistical Society, Serie A, 131, 205-225.

[18] IRWIN, J.O. (1975). *The generalized Waring distribution*. Journal of the Royal Statistical Society, Serie A, 138, 18-31 (part I), 204-227 (part II), 374-378 (part III).

[19] KEMP, A. W. (2001). *The q-beta-geometric distribution as a model for fecundability*. Commun. Statist. Theory Meth., 30 (11), 2373-2384.

[20] KOCHERLAKOTA, S. y KOCHERLAKOTA, K. (1992) *Bivariate Discrete Distributions*. Statistics: textbooks and monographs. vol. 132. Ed. Dekker.

[21] NEWBOLD, E. M. (1925) *A contribution to the study of the human factor in the causation of accidents*. Indusrial Health Research Board Report nº 34.

[22] PANARETOS, J. (1989). *Some properties and applications of the stuttering generalized Waring distribution*. International Journal of Mathematics and Matematical Sciencies. 12, nº3, 531-537.

[23] RODRÍGUEZ J. (1994). *Contribución a los métodos de generación de distribuciones multivariantes discretas*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

[24] TRIPATI, R. C. y GURLAND, J. (1977). *A general family of discrete distributions with hypergeometric probabilities*. Journal of the Royal Statistical Society, Serie B, 39, nº 3., 349-356.

[25] WOLFRAM, D. (1992). *Applying informetric characteristics of databases to IR systrm file design, part I: Informetric models*. Information Processing & Management. 28, nº 1, 121-133.

[26] XEKALAKI, E. (1983a). *Infinite divisibility, completeness and regression properties of the univariate generalized Waring distribution*. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 35, nº 2, 279-289.

[27] XEKALAKI, E. (1983b). *The Univariate Generalized Waring distribution in relation to accident theory: proneness, spells or contagion*? Biometrics, 39, 887-895.

[28] XEKALAKI, E. (1983c). *Hazard functions and life distributions in discrete time*. Commun. Statist. Theory Meth., 12 (21), 2503-2509.

[29] XEKALAKI, E. (1984). *The Bivariate Generalized Waring distribution and its application to accident theory*. Journal of the Royal Statistical Society, Serie A, 147, part 3., 488-498.

[30] XEKALAKI, E. (1985a). *Factorial moment estimation for the bivariate generalized Waring distribution*. Statistische Hefte, 26, 115-129.

[31] XEKALAKI, E. (1985b). *Some bivariate extensions of the generalized Waring distribution*. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. 20, 173-181.

[32] XEKALAKI, E. (1986). *The Multivariate Generalized Waring Distribution*. Commun. Statist. Theory Meth., 15 (3), 1047-1064.

– § –