

LA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO: UNA FORMACIÓN CONTINUA DE PROFESORES

Isabel Mercedes Lara Torres, Jesús Victoria Flores Salazar, Daysi Julissa García-Cuéllar
Universidad tecnológica del Perú, Pontificia Universidad Católica del Perú, Pontificia
Universidade Católica de São Paulo
c17029@utp.edu.pe, jvflores@pucp.edu.pe, ra00193072@pucsp.edu.br

Resumen

Esta investigación presenta el estudio de la parábola como lugar geométrico con profesores de formación continua de Lima-Perú. Como base teórica y metodológica utilizamos algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y de la Ingeniería Didáctica, respectivamente. Se observó, a partir de la aplicación de una secuencia de actividades, que los profesores movilizaron la noción parábola como lugar geométrico interactuando con el ambiente de representaciones dinámicas Geogebra. Como resultados, los docentes realizaron tratamientos en los diferentes registros y lograron coordinar los registros figural, gráfico y algebraico.

Palabras clave: parábola; registros de representación semiótica, GeoGebra.

Abstract

This research presents the study of the parabola as geometric place in teachers of continuous training of a private university in Lima-Peru. As the theoretical and methodological basis we use some aspects of the Theory of Semiotic Representation and Didactic Engineering respectively. From the application of a sequence of activities, we observe that teachers mobilized the parabola notion as geometric place interacting with the environment of Geogebra dynamic representations. As a result of the research, the teachers carried out processes in the different registers and managed to coordinate the figural, graphic and algebraic representations.

Key words: parabola, registers of semiotic representation, GeoGebra

■ Introducción

La parábola como lugar geométrico es un concepto importante en la Educación Matemática, debido a que se presenta como parte de la curricula en el curso de Matemática a nivel secundario y en los cursos generales de Matemática a nivel universitario en Perú.

La enseñanza tradicional de este objeto matemático ha traído como consecuencia la reducción de la parábola desde el aspecto algebraico y los distintos errores que los alumnos cometen sobre la parábola como el de confundir la parábola con la función cuadrática. Lopes (2014) menciona que los estudiantes de secundaria por lo general confunden la parábola con la función cuadrática. Menciona a su vez, que si

bien la función cuadrática se representa de diferentes formas a través de una expresión algebraica, gráficos cartesianos, etc., no significa de que los estudiantes conociendo la función cuadrática puedan entender las propiedades de la parábola.

Lopes (2014) sostiene también que comprender la parábola como lugar geométrico a partir de sus propiedades geométricas tiene un valor importante, frente a comprenderla desde un aspecto meramente algebraico. Dicho valor solo se alcanza enseñando desde sus aspectos geométricos y utilizando la tecnología que permita deducir sus propiedades geométricas.

Para efectos de nuestra investigación revisamos los dos libros de texto más utilizados en los colegios de secundaria en Lima – Perú.

Tabla 1. Libros de texto usados en la enseñanza de la Parábola

Libro	Unidad	Páginas	Título
Libro de Matemáticas del Ministerio del Perú	Unidad 7 Geometría Analítica	220 - 224	Manual para el Docente
Libro Norma	Unidad 9 – Tema 4 Geometría Analítica	404 - 409	Manuel para el Docente

En ellos se observó que el concepto de parábola se presenta como algo ya acabado, lo cual no permite a los estudiantes deducir, analizar o descubrir sus propiedades.

El libro de Matemática del Ministerio de Educación describe los pasos para la construcción de la parábola, actividad que solo está diseñada para comprobar la definición, tampoco se generan preguntas para relacionar aspectos geométricos de la construcción con la definición de la parábola.

Se observa a su vez que si bien la actividad propuesta les permite graficar la parábola, siguiendo los pasos que se les indican, no genera en los estudiantes un cambio de registro o tratamientos de la parábola, como se puede observar en la siguiente figura.

Ecuaciones de la parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos P del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado foco, y de una recta fija d , llamada directriz. Es decir:

$$d_{(p, \text{foco})} = d_{(p, \text{directriz})}$$

Construcción de la parábola

1. En una hoja trazamos una recta fija (d) y marcamos un punto externo (F).
2. Colocamos sobre d el cateto BC de una escuadra ABC, de modo que $AB > AF$. Marcamos el punto A y atamos un hilo de A a F, de longitud igual a AB.
3. Templamos el hilo con un lápiz haciéndolo coincidir con el cateto AB en un punto P, formándose así el segmento PF, de igual medida que BP.
4. Manteniendo el hilo templado con el lápiz, deslizamos la escuadra a lo largo de la recta d , acercándose al punto F.
5. Para obtener el gráfico completo de la parábola, cambiamos de posición la escuadra, tal como se muestra en la figura.

Figura 1. La Parábola como lugar geométrico, MINEDU, (2011, Pg.221)

Asimismo, no se presentan actividades donde los estudiantes, a partir de sus conocimientos previos, puedan construir dicha noción.

Como hemos podido evidenciar, creemos que la existencia de problemas de comprensión de la parábola como lugar geométrico por parte de los estudiantes es resultado de la forma en que se enseña, pensamos que los profesores no tienen conocimientos básicos sobre esta noción o se guían de la forma como presentan la parábola los distintos libros de matemáticas. Con respecto a lo mencionado, Fernández (2011) y Moncayo, Pantoja y Fernández (2012) señalan que la orientación tradicional basada en las descripciones algebraicas de las cónicas ha hecho que su tratamiento sea artificial, porque como señalan es enseñada de manera algebraica es decir, es enseñada a partir del estudio de las ecuaciones polinómicas de segundo grado y desde el punto de vista de funciones por lo que la noción de parábola como lugar geométrico no es trabajada a profundidad.

Es por ello que, ante estas evidencias observadas y las necesidades actuales en didáctica de la matemática, pensamos que es importante realizar una investigación que involucre el objeto matemático parábola en una formación continua (taller) de profesores de matemáticas, para que movilicen sus conocimientos relacionados a la parábola como lugar geométrico con el uso de ambientes de geometría dinámica como el Geogebra.

Por lo anterior, el objetivo de nuestra investigación se centra en que los docentes de matemáticas movilicen diferentes registros de representación semiótica de la parábola como lugar geométrico cuando desarrollan una secuencia de actividades.

Para cumplir nuestro objetivo de investigación, utilizamos como marco teórico algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (Duval, 1995) y como marco metodológico, aspectos de la Ingeniería didáctica de Artigue (1995), que presentamos a continuación.

■ Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

El investigador Duval (2005) afirma que las actividades cognitivas propias del aprendizaje de las matemáticas, como la conceptualización, razonamiento y resolución de problema, requieren del uso de sistemas de expresión y representación.

Por ello, los sistemas de comunicación y de representación son indispensables para los procesos de comprensión en términos de integración y estructuración de las representaciones mentales. En este sentido Duval (2005) expresa algunos aspectos claves de la teoría:

Representaciones Semióticas

El autor establece que por medio de las actividades asociadas a los sistemas de representación se puede caracterizar la comprensión que los estudiantes tienen acerca de un objeto matemático a través de representaciones semióticas, como gráficos, figuras, números, etc.

Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje formal, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...), no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. (Duval, 1995, p.14)

En ese sentido, Duval (2005) expresa que para que un sistema semiótico sea considerado registro este debe cumplir con las tres actividades cognitivas fundamentales: formación, tratamiento y conversión de representaciones semióticas:

Formación: Hace referencia a la expresión mental la cual implica la selección de un conjunto de caracteres, selección de las relaciones y datos que permite constituir lo que se representa.

Tratamiento: Es una transformación interna dentro del mismo sistema semiótico en relación a un mismo objeto.

Conversión: Es la transformación de representación en otro sistema semiótico distinto al inicial.

Estas actividades cognitivas se concretan en los siguientes registros de representación semiótica:

Tipos de Registros de Representación

Registro Figural: Engloba dibujos, esquemas, bosquejos, líneas, marcas, etc., que intentan representar el objeto de conocimiento sin dar cuenta de la cualidad de los elementos involucrados.

Registro de lengua Natural: En este registro se admite como representación una descripción en lenguaje natural. Si se quiere modelar un fenómeno, se debe partir de una descripción del mismo ya sea de tipo verbal o escrito.

Registro gráfico: En este registro se puede representar por medio de una curva (continua o no) en el plano cartesiano. Se pone en juego la noción de gráfica del objeto matemático.

Registro algebraico: En este registro, se puede representar por medio de expresiones algebraicas.

A continuación, la figura 2 muestra los diferentes registros de representación semiótica que los docentes deberían utilizar al desarrollar la secuencia de actividades.

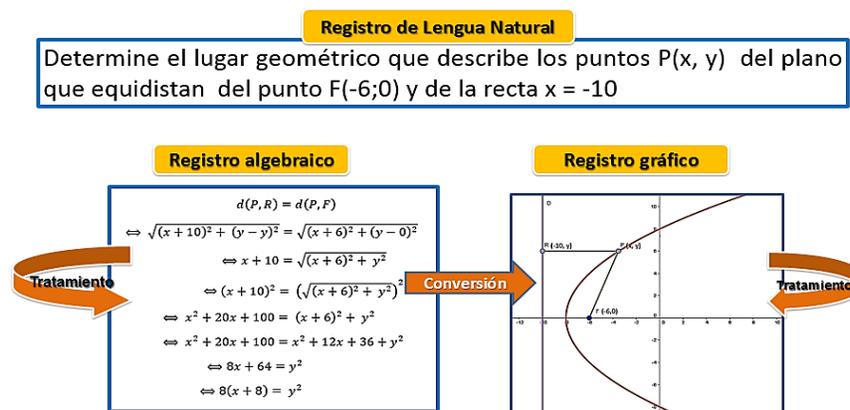


Figura 2. Registro de Lengua Natural, algebraico y gráfico de la Parábola (Elaboración propia)

La figura 2 muestra la conversión del registro de lengua natural al registro algebraico, luego se realiza el tratamiento dentro del registro algebraico; finalmente se ejecuta la conversión del registro algebraico al registro gráfico, mostrando una coordinación de sus significados.

De acuerdo con Duval (2004):

La conversión es una transformación de la representación de un objeto en un registro P en otra representación del mismo objeto en un registro L. La característica de la conversión es conservar la referencia al mismo objeto (objeto en el sentido estricto, situación...), pero sin conservar la explicitación de las mismas propiedades de ese objeto (Duval, 2004, p.44).

El autor expresa que las transformaciones de los sistemas semióticos permiten tener una variedad de representaciones de un objeto matemático y que esta variedad favorece el aprendizaje.

■ Aspectos de la Ingeniería didáctica

En relación a los aspectos metodológicos, la investigación es cualitativa y se utilizaron aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995).

La Ingeniería didáctica se denominó a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero, quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Artigue, sostiene que el profesor concibe, realiza, observa y analiza secuencias de enseñanza para lograr el aprendizaje de un contenido matemático determinado por un grupo específico de estudiantes.

Así mismo la autora sostiene que la Ingeniería didáctica se ubica en el registro de los estudios de casos, cuya validación es en esencia interna, basada en las confrontaciones entre el análisis a priori y a posteriori.

■ Experimento y análisis

A partir de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), hemos diseñado una secuencia compuesta por cuatro actividades específicas sobre la parábola como lugar geométrico utilizando el software GeoGebra en base a algunas herramientas geométricas y otras propiedades como el arrastre del mismo software. Se aplicó a 15 profesores de la Carrera Pública Magisterial en formación continua.

Las actividades se aplicaron en dos etapas: en la primera se tomaron como base las propiedades geométricas de la Parábola y en la segunda etapa, las actividades estaban relacionadas al dominio de la geometría analítica, utilizando en cada una el Geogebra.

A continuación se presenta dos actividades, una de cada una de las etapas con una pregunta.

Actividad N° 1:

En la primera actividad propuesta se les pide a los profesores la siguiente construcción: “Encuentre el punto P que equidista tanto de la recta d como del punto exterior F” siguiendo la secuencia de pasos.

Construya con Geogebra sin utilizar ninguna herramienta “Cónica – Parábola”:

Enunciado:
Encuentre el **punto P** que equidista tanto de la **recta d** como del punto exterior **F**.

1. Utilice las herramientas del Geogebra y construya una **recta d** como objeto fijo.
2. Coloque un **punto F** que no pertenezca a la **recta d** como objeto fijo coloque un **punto Q** sobre la recta d con la opción **punto en objeto**.
3. Trace una **recta perpendicular n** a la **recta d** y que pase por el **punto Q**.
4. Trace el **segmento QF**.
5. Construya la **mediatriz m** del **segmento QF**.
6. Crea el **punto de intersección P** entre la **recta perpendicular n** con la **mediatriz m**.

Nota: En esta actividad no se requiere de ejes ni de cuadrículas.
Objeto fijo: Clic derecho – propiedades – check en cuadrito de objeto fijo.

Figura 3. Imagen del archivo Actividad_1.ggb: La parábola como lugar geométrico. (Elaboración propia)

Se presenta la pregunta A de la actividad 1: Si P es un punto que equidista de la recta d como del punto F, ¿dicho punto P pertenecerá a la mediatriz del segmento QF? Justifique su respuesta.

A su vez se plantean preguntas que permiten visualizar y conjeturar sobre el comportamiento de los elementos de la parábola y propiedades con ayuda la utilización de la herramienta arrastre. Se espera que logren la coordinación del registro de lengua natural con el registro figural cuando se interactúe con la construcción de la parábola en GeoGebra.

Como se había previsto a priori, uno de los profesores, al que llamaremos Armando, logró construir la parábola como lugar Geométrico al utilizar las herramientas del GeoGebra como recta, punto, mediatriz, recta perpendicular, punto de intersección, como se muestra en la figura 4.

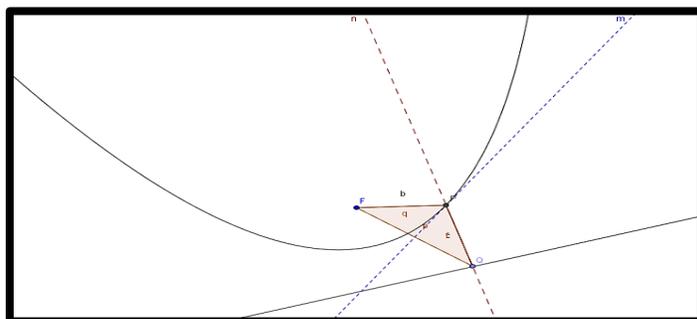


Figura 4. Actividad 1 – Construcción de la parábola como lugar geométrico. (Elaboración propia)

Como se había previsto a priori, el profesor Armando manipula el punto Q y responde a la pregunta que genera la movilización de la construcción de la parábola por medio de las herramientas arrastre, rastro y lugar geométrico como se muestra en la figura 5.

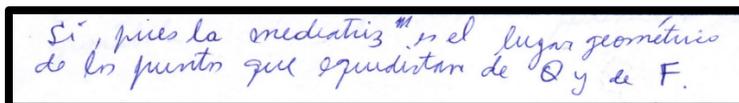


Figura 5. Actividad 1 – Ítem A – Profesor Armando. (Elaboración propia)

Actividad N° 2:

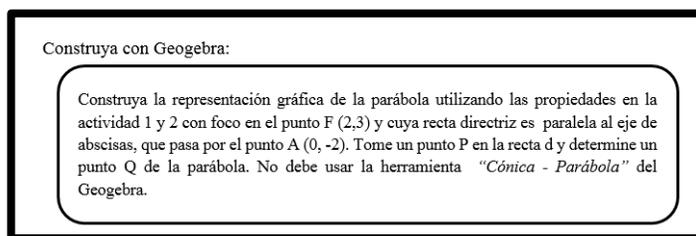


Figura 6. Actividad 2: La parábola como lugar geométrico. (Elaboración propia)

A priori, consideramos que los profesores utilicen la apariencia Álgebra y Gráficas del software Geogebra ya que en esta actividad se está introduciendo puntos y coordenadas del foco como los F (2,3) y el punto A (0,-2), tracen la recta d, tracen la mediatriz de un segmento FP y una recta perpendicular a la directriz en el punto P.

A priori, se espera que los profesores respondan a las preguntas generando que vuelvan a la construcción para interactuar por medio de la herramienta arrastre y realicen los tratamientos y conversiones entre registros y se logre calcular la ecuación: $P: x^2 - 4x - 10y - 9 = 0$

A posteriori, el profesor Armando realizó la construcción de la parábola como lugar geométrico con el Geogebra utilizando los elementos geométricos trabajados en la actividad 1 y 2 en el dominio de la

geometría analítica movilizandando las propiedades de la parábola, logrando realizar tratamientos en el registro gráfico como la coordinación entre las representaciones de la parábola en el registro de lengua natural y el registro gráfico, como se muestra en la figura 7.

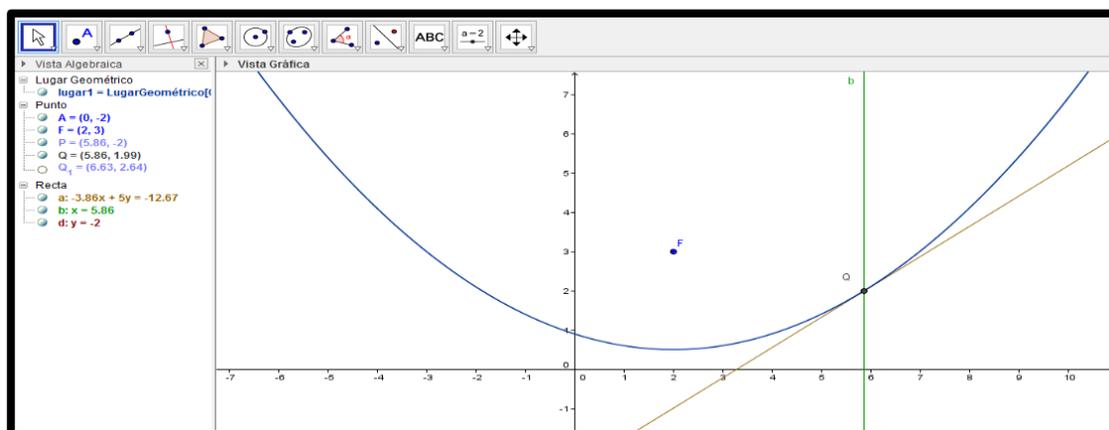


Figura 7. Construcción de la parábola de la actividad 2 del profesor Armando. (Elaboración propia)

■ Conclusiones

Las actividades generaron que los docentes del estudio, como en el caso del profesor Armando, coordinaran los registros de lengua natural, gráfico y algebraico en la construcción de la parábola, realizando tratamientos y conversiones, logrando la comprensión de la parábola a partir del uso de elementos geométricos relacionados a las propiedades de la parábola con el uso del GeoGebra y de las diferentes formas de obtener una parábola en el dominio de la geometría y en el dominio de la geometría analítica, favoreciendo la conversión del registro gráfico con el registro algebraico. Según Duval (2005) al trabajar con por lo menos dos registros de representación semiótica realizando tratamientos y conversiones avalamos una mayor comprensión del objeto matemático.

En el estudio, se reconoció también que las herramientas del GeoGebra facilitaron la comprensión de la parábola como lugar geométrico, cuando los docentes a través de la realización de las actividades con este software lograban conjeturar las propiedades y/o características de dicho objeto matemático.

■ Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (2004). *Les problèmes fondamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Trad. Myrian V. Restrepo. Santiago de Cali: Merlin I. D.

- Duval, R. (2005). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Colombia: Grupo editorial Merlin I.D.
- Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global. Integrando Cabri Géometre II Plus*. [Tesis de Maestría en Educación Matemática]. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia. Recuperado de: <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3901/4/CB-0450269.pdf>
- Lara, I. M. (2016). *La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de registros de Representación Semiótica*. [Tesis de Maestría en Educación Matemática]. Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de: <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/7363.pdf>
- Lopes, S. (2014). *Una secuencia didáctica para la enseñanza de la parábola en como lugar geométrico*. [Tesis de Maestría en Educación Matemática]. Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo.
- Moncayo, C.; Pantoja, J. y Fernández, E. (2012). *Enfoque didáctico para la conceptualización de la parábola como lugar geométrico integrando Cabri Geometre II Plus*. [Tesis de Licenciatura]. Universidad de Nariño. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.