

Universidade Federal de Uberlândia  
Faculdade de Matemática  
Curso de Licenciatura em Matemática a Distância

# Cálculo I

Érika Maria Chioca Lopes

Segunda Edição  
Revista e Atualizada



2018

Copyright © 2013 by Érika Maria Chioca

1ª edição 2013

2ª edição 2018

Lopes, Érika Maria Chioca

Cálculo 1 / Érika Maria Chioca Lopes. - 2ª ed. Uberlândia, MG :  
UFU, 2018 89p.

Licenciatura em Matemática.

1. Cálculo 1

Reitor

Valder Steffen Júnior

Coordenador UAB/CEAD/UFU

Maria Teresa Menezes Freitas

Conselho Editorial

Carlos Rinaldi - UFMT

Carmen Lucia Brancaglioni Passos - UFScar

Célia Zorzo Barcelos - UFU

Eucídio Arruda Pimenta - UFMG

Ivete Martins Pinto - FURG

João Frederico Costa Azevedo Meyer - UNICAMP

Marisa Pinheiro Mourão - UFU

Edição

Centro de Educação a Distância

Comissão Editorial - CEAD/UFU

Diagramação

Equipe CEAD/UFU

PRESIDENTE DA REPÚBLICA  
Michel Miguel Elias Temer

MINISTRO DA EDUCAÇÃO  
José Mendonça Bezerra Filho

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL  
DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA/CAPES  
Carlos Cezar Modernel Lenuzza

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA - UFU  
REITOR  
Valder Steffen Júnior

VICE-REITOR  
Orlando César Mantese

CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA  
DIRETORA E COORDENADORA UAB/UFU  
Maria Teresa Menezes Freitas

SUPLENTE UAB/UFU  
Aléxia Pádua Franco

FACULDADE DE MATEMÁTICA – FAMAT – UFU  
DIRETOR  
Prof. Dr. Marcio Colombo Fenille

COORDENADORA DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA – PARFOR  
Profa. Dra. Fabiana Fiorezi de Marco

ASSESSORA DA DIRETORIA  
Sarah Mendonça de Araújo

EQUIPE MULTIDISCIPLINAR  
Alberto Dumont Alves Oliveira  
Darcus Ferreira Lisboa Oliveira  
Dirceu Nogueira de Sales Duarte Jr.  
Gustavo Bruno do Vale  
Otaviano Ferreira Guimarães





## **SOBRE A AUTORA**

**Profª Érika Maria Chioca Lopes**

Fez Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia (1996), mestrado em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (1998) e especialização em Estatística Aplicada pela Universidade Federal de Uberlândia (2003). Já atuou como professora de curso supletivo, de escola de Ensino Médio e de curso pré-vestibular. Atuou durante doze anos no ensino particular de 3º grau. Atualmente é professora assistente da Universidade Federal de Uberlândia. Atualmente é professora assistente da Universidade Federal de Uberlândia e doutoranda em Educação.

# SUMÁRIO

SOBRE A AUTORA	5
SUMÁRIO	6
FIGURAS	8
SOBRE O CURSO	9
INFORMAÇÕES	11
AGENDA	12
ANOTAÇÕES	14
MÓDULO 1	15
<b>SUMÁRIO QUINZENAL</b>	15
TEXTO BÁSICO	16
1.1 <i>Definição de limite</i>	16
1.2 <i>Limites laterais</i>	20
1.3 <i>Operações com limites</i>	22
1.4 <i>Teoremas do confronto e da conservação do sinal</i>	25
1.5 <i>Limites fundamentais</i>	26
II – ATIVIDADES DO TEXTO BÁSICO	27
III – LEITURA COMPLEMENTAR	27
III - SÍNTESE DO MÓDULO	28
IV - REFERÊNCIAS	28
MÓDULO 2	29
<b>SUMÁRIO QUINZENAL</b>	29
TEXTO BÁSICO	31
2.1 <i>Limites infinitos de funções</i>	31
2.2 <i>Limites no infinito</i>	35
2.3 <i>Assíntotas horizontais e verticais</i>	39
2.4 <i>Continuidade num ponto e num intervalo</i>	42
2.5 <i>Teorema do valor intermediário</i>	45
II – ATIVIDADES DO TEXTO BÁSICO	46
III - SÍNTESE DO MÓDULO	47
IV - REFERÊNCIAS	47
MÓDULO 3	48

<b>SUMÁRIO QUINZENAL</b>	<b>48</b>
3.1 Sequências: definição e convergência	49
<b>I - TEXTO BÁSICO</b>	<b>49</b>
3.2 Definição e interpretação de derivadas	52
3.3 Derivabilidade x Continuidade	55
3.4 Regras de derivação	57
3.5 Regra da cadeia	58
<b>II – ATIVIDADES DO TEXTO BÁSICO</b>	<b>61</b>
<b>III – LEITURA COMPLEMENTAR 1</b>	<b>61</b>
<b>IV - SÍNTESE DO MÓDULO</b>	<b>61</b>
<b>V - REFERÊNCIAS</b>	<b>62</b>

<b>MÓDULO 4</b>	<b>63</b>
<b>SUMÁRIO QUINZENAL</b>	<b>63</b>
4.1 Teorema de Rolle e Teorema do valor médio	65
<b>I - TEXTO BÁSICO</b>	<b>65</b>
4.2 Derivadas de ordem superior a um	69
4.3 Construção de gráficos de funções	70
4.3.1 Funções crescentes e decrescentes	70
4.3.2 Concavidade	72
4.4 Máximos e mínimos locais e globais	76
4.4.1 Extremos absolutos	79
4.4.2 Extremos locais (ou relativos)	81
4.5 Regras de L'Hôpital	85
<b>II – ATIVIDADES DO TEXTO BÁSICO</b>	<b>87</b>
<b>III - SÍNTESE DO MÓDULO</b>	<b>87</b>
<b>IV - REFERÊNCIAS</b>	<b>88</b>



## **SOBRE O CURSO**

Prezado(a) aluno(a), bem vindo à disciplina “Cálculo I” do Curso de Licenciatura em Matemática – EaD. Depois de ter passado pela disciplina de “Introdução ao Cálculo”, chegou a hora de aprendermos um pouco de uma teoria muito importante para a Matemática e para as outras ciências, que é o cálculo diferencial. Os problemas, em todas as áreas da ciência, estão se tornando cada vez mais complexos; conseqüentemente, os pesquisadores que investigam soluções eficientes para os mesmos necessitam de conhecimentos diversificados que, em geral, vão além da área específica de suas atuações profissionais. Um dos conhecimentos imprescindíveis na resolução de problemas está relacionado aos métodos e teorias do Cálculo Diferencial, fundamental para alunos de graduação.

Este material é seu guia principal para direcioná-lo no estudo. A leitura deste guia não corresponde à leitura de um livro de cabeceira. Quero dizer com isso que, numa primeira etapa de estudo individual, você deve ler este guia munido de lápis e papel, para conferir contas, completar raciocínios que aqui apareçam, fazer anotações de dúvidas; além de consultar materiais complementares sugeridos. Numa segunda etapa, você poderá se comunicar com seu tutor, com os colegas da turma e comigo por meio do Ambiente Virtual de Aprendizagem – AVA (Moodle). Além disso, você deve estar atento às orientações que receberá ao longo do curso, por meio do seu tutor.

Neste guia pretendo apresentar as noções elementares do Cálculo Diferencial, divididas nos seguintes conteúdos programáticos:

- Limite de uma função: Módulos 1 e 2;
- Continuidade: Módulo 2;
- Sequências: Módulo 3;
- Derivadas: Módulos 3 e 4.

Cada um desses módulos tem a duração de duas semanas, conforme você verá no cronograma geral e nos mapas de atividades. Nossas atividades iniciam-se sempre às segundas e finalizam-se sempre aos domingos, para que tenhamos um acompanhamento quinzenal. Tenha sempre em mente essas referências temporais, para a organização de seus estudos. Procure ler com atenção o material e fazer as atividades propostas.

Desejamos-lhe sucesso em mais esta etapa do curso!

### **OBJETIVOS DA DISCIPLINA**

O objetivo desta disciplina é o de familiarizar o aluno com a linguagem, idéias e conceitos relacionados ao estudo de limite, continuidade e diferenciação de funções de uma variável real, que são conhecimentos fundamentais no estudo das ciências básicas e tecnológicas. Além disto, pretende-se apresentar ao aluno as aplicações do cálculo diferencial em várias áreas do conhecimento.

### **PRINCIPAIS MATERIAIS DIDÁTICOS UTILIZADOS NA DISCIPLINA**

1. Guia;
2. Ambiente Virtual de Aprendizagem – Moodle;
3. Materiais complementares.

### **TEMPO DE DEDICAÇÃO À DISCIPLINA**

Sugiro aqui uma distribuição do seu tempo no decorrer dos estudos, baseada na carga horária de 90 horas da disciplina, distribuídas em 4 semanas. Assim, sugiro reservar entre 22 e 23 horas de estudo por quinzena para cada módulo, entre o estudo deste guia e a realização das atividades.

### **PRINCIPAIS FORMAS DE AVALIAÇÃO**

A avaliação será processual e ocorrerá ao longo de todos os módulos do curso, sendo considerados dois critérios para a aprovação no curso:

- a participação em, pelo menos, 75% das atividades programadas.
- a obtenção de, pelo menos, 60% dos pontos distribuídos nas atividades avaliativas.

As atividades propostas durante o desenvolvimento da disciplina, avaliativas ou não, serão divididas em listas de exercícios, fóruns, chats e provas. Elas serão realizadas pelo AVA e presencialmente; divididas da seguinte forma:

- 60 pontos – prova presencial, individual e sem consulta
- 40 pontos – atividades complementares

### **APOIO E ACOMPANHAMENTO**

Durante todo o desenvolvimento da disciplina, você terá o apoio pedagógico e tecnológico para:

- Desenvolver as atividades propostas;
- Entrar no ambiente virtual de aprendizagem Moodle;
- Participar de fóruns, chats e demais atividades comunicativas;
- Enviar materiais relativos às atividades de colaboração;
- Realizar as avaliações;
- Esclarecer quaisquer dúvidas sobre a disciplina.

Algumas ações permanentes do aluno ao longo desta disciplina:

- Leitura frequente do quadro de avisos;
- Leitura frequente da caixa de e-mail;
- Envio de mensagens para desenvolvimento das atividades;
- Desenvolvimento de atividades colaborativas.

## INFORMAÇÕES

Prezado(a) aluno(a),

Ao longo deste guia impresso você encontrará alguns “ícones” que lhe ajudará a identificar as atividades.

Fique atento ao significado de cada um deles, isso facilitará a sua leitura e seus estudos.



Áudio



Vídeo



Leituras  
Indicadas



Multimídia



Atividades  
Guia Impresso



Atividades  
Ambiente Virtual



Saiba Mais



Pare e Pense



Pesquisando  
na rede



Referências

Destacamos alguns termos no texto do Guia cujos sentidos serão importantes para sua compreensão. Para permitir sua iniciativa e pesquisa não criamos um glossário, mas se houver dificuldade interaja no *Fórum de Dúvidas*.

# AGENDA

## MAPA DO DESENVOLVIMENTO DOS CONTEÚDOS E ATIVIDADES

Curso: **Matemática** na modalidade a Distância

Disciplina: Cálculo I

Carga horária: 90 horas

Professor(a): Érika Maria Chioca Lopes

QUINZENA	Módulo	Desenvolvimento do estudo	Avaliações
1ª	<b>Módulo 1 – Limites – definição e operações</b>	<b>Atividade 1</b> – Participar do fórum de apresentação <b>Atividade 2</b> – Assistir a vídeo aula introdutória do módulo 1 <b>Atividade 3</b> – Leitura do texto básico <b>Atividade 4</b> – Participar do fórum para discussão da lista de exercícios <b>Atividade 5</b> – Envio de arquivo <b>Atividade optativa</b> – Leitura do texto complementar	As atividades 4 e 5 serão avaliadas:  Atividade 4 – 4 pontos Atividade 5 – 6 pontos
QUINZENA	Módulo	Desenvolvimento do estudo	Avaliações
2ª	<b>Módulo 2 – Limites infinitos e Continuidade</b>	<b>Atividade 6</b> – Assistir a vídeo aula introdutória do módulo 2 <b>Atividade 7</b> – Leitura do texto básico <b>Atividade 8</b> – Participar do fórum para discussão da lista de exercícios <b>Atividade 9</b> – Envio de arquivo	As atividades 8 e 9 serão avaliadas:  Atividade 8 – 4 pontos Atividade 9 – 6 pontos



QUINZENA	Módulo	Desenvolvimento do estudo	Avaliações
3ª	Módulo 3 – Sequências e Derivadas	<p><b>Atividade 10</b> – Assistir a vídeo aula introdutória do módulo 3</p> <p><b>Atividade 11</b> – Leitura do texto básico</p> <p><b>Atividade 12</b> – Participar do fórum para discussão da lista de exercícios</p> <p><b>Atividade 13</b> – Envio de arquivo</p> <p><b>Atividade optativa</b> – Leitura do texto complementar</p>	<p>As atividades 12 e 13 serão avaliadas:</p> <p>Atividade 12 – 4 pontos Atividade 13 – 6 pontos</p>
QUINZENA	Módulo	Desenvolvimento do estudo	Avaliações
4ª	Módulo 4 – Aplicações das derivadas	<p><b>Atividade 14</b> – Assistir a vídeo aula introdutória do módulo 4</p> <p><b>Atividade 15</b> – Leitura do texto básico</p> <p><b>Atividade 16</b> – Participar do fórum para discussão da lista de exercícios</p> <p><b>Atividade 17</b> – Envio de arquivo</p>	<p>As atividades 16 e 17 serão avaliadas:</p> <p>Atividade 16 – 4 pontos Atividade 17 – 6 pontos</p>



# MÓDULO 1

## SUMÁRIO QUINZENAL

### Conteúdos básicos do módulo 1

- 1.1 Definição de limite
- 1.2 Limites laterais
- 1.3 Operações com limites
- 1.4 Teoremas do confronto e da conservação do sinal
- 1.5 Limites fundamentais

### Objetivos do módulo

Ao final do estudo do módulo 1 da disciplina Cálculo I, esperamos que você possa:

- apresentar o conceito de limite de uma função num ponto;
- apresentar o conceito de limites laterais;
- operar com limites.
- aplicar os teoremas do confronto e da conservação do sinal do limite.
- reconhecer os limites fundamentais.

### Prezado(a) aluno(a),

começamos este primeiro módulo da disciplina de Cálculo I com a noção de limite de uma função em um ponto, fundamental para o entendimento de tudo o que vem a seguir. Usamos limites para descrever como uma função  $f$  varia. Algumas funções variam continuamente, ou seja, pequenas mudanças em  $x$  produzem apenas pequenas mudanças em  $f(x)$ . Outras funções podem ter valores que saltam ou variam erráticamente. A noção de limite fornece um caminho preciso para distinguir esses comportamentos. Trabalharemos neste início tanto com a abordagem algébrica como também com a gráfica, de uma maneira mais intuitiva. Depois veremos os limites laterais e, por fim, as operações com limites, que nos permitirão calcular limites algebricamente.

### Principais materiais

Além deste guia de estudos, você assistirá a uma vídeo aula de apresentação do Módulo 1 e realizará atividades no Ambiente Virtual de Aprendizagem.

### Tempo de dedicação neste módulo

Para desenvolver as atividades deste módulo, recomendo uma dedicação de, pelo menos, 22 horas de estudo, distribuídas entre a leitura do material didático e realização das atividades.

### Principais avaliações

Participação nas atividades propostas para o módulo e envio de arquivo contendo exercícios resolvidos para uma das atividades.



## 1.1 Definição de limite

Primeiramente vamos ver alguns exemplos em que aparece a noção intuitiva de limite.



Exemplo 1: Desenhe um círculo de raio igual a um centímetro e centro num ponto dado C:

Etapa 0:

Na próxima etapa, desenhe outro círculo com mesmo centro C, de raio igual à metade do anterior, ou seja, 0,5 cm:

Etapa 1:

Depois, desenhe outro círculo com mesmo centro, de raio igual à metade do anterior, ou seja, 0,25 cm:

Etapa 2:

Continuando dessa forma, sucessiva e indefinidamente, o que você acha que vai acontecer?

É bem provável que você tenha percebido que, desenhando círculos com raios iguais à metade do anterior, se pudéssemos fazer isso “para sempre”, esses desenhos **tenderiam** a um ponto: o centro C dos círculos. Dizemos, então, que o **limite** desse desenvolvimento, quando o raio do círculo tende a zero (ou, de forma equivalente, quando o número de etapas tende a infinito), é o ponto C.



Se você tiver qualquer dúvida, converse com o seu tutor, ele está aqui para lhe auxiliar durante todo o curso.

Caso você tenha alguma crítica ou sugestão para melhorar o nosso curso, envie-as para o seu tutor!

Críticas e sugestões são sempre bem-vindas!

**Exemplo 2:** Em Física, temos os conceitos de velocidade média e velocidade instantânea. A **velocidade média** de um corpo em movimento durante um intervalo de tempo é obtida dividindo-se a distância percorrida pelo tempo gasto para percorrê-la.

Considere que um projétil é lançado de uma plataforma e que, nos primeiros 100 segundos, sua distância da plataforma, em metros, é dada por  $d(t) = t^2$ , onde  $t$  é o tempo, medido em segundos.



a) Com base nestes dados, calcule abaixo qual é a velocidade média do projétil entre os instantes  $t = 10\text{ s}$  e  $t = 20\text{ s}$ .

b) Calcule agora a velocidade média entre os instantes  $t = 10\text{ s}$  e  $t = 11\text{ s}$ .

c) Agora calcule mais algumas velocidades médias:

i) entre os instantes  $t = 10\text{ s}$  e  $t = 10,5\text{ s}$ ;

ii) entre os instantes  $t = 10\text{ s}$  e  $t = 10,1\text{ s}$ ;

iii) entre os instantes  $t = 10\text{ s}$  e  $t = 10,01\text{ s}$ ;

Você deve ter percebido que estamos fazendo um processo de aproximação, calculando velocidades médias com intervalos de tempo cada vez menores. Vamos conferir os resultados:

$$\text{a) } v_m = \frac{d(20) - d(10)}{20 - 10} = \frac{20^2 - 10^2}{20 - 10} = \frac{400 - 100}{10} = 30 \text{ m/s}$$

$$\text{b) } v_m = \frac{d(11) - d(10)}{11 - 10} = \frac{11^2 - 10^2}{11 - 10} = \frac{121 - 100}{1} = 21 \text{ m/s}$$

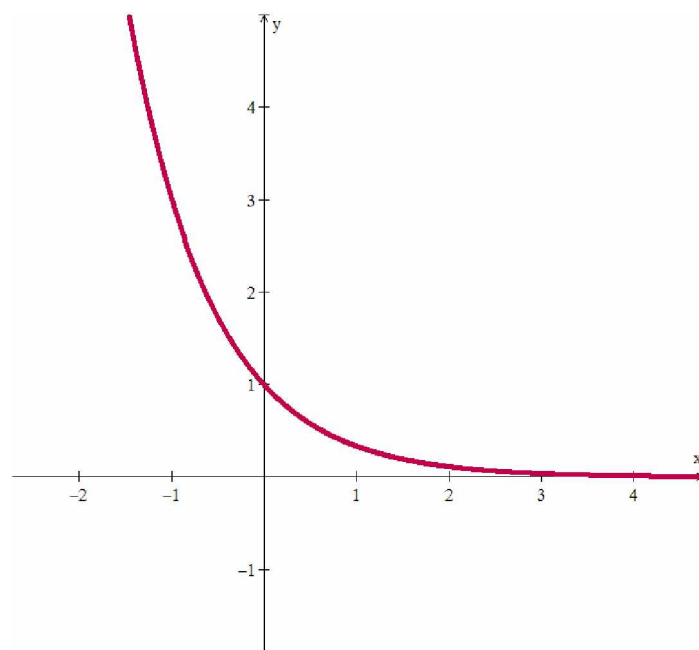
$$\text{c) i) } v_m = \frac{d(10,5) - d(10)}{10,5 - 10} = \frac{10,5^2 - 10^2}{10,5 - 10} = \frac{110,25 - 100}{0,5} = 20,5 \text{ m/s}$$

$$\text{ii) } v_m = \frac{d(10,1) - d(10)}{10,1 - 10} = \frac{10,1^2 - 10^2}{10,1 - 10} = \frac{102,01 - 100}{0,1} = 20,1 \text{ m/s}$$

$$\text{iii) } v_m = \frac{d(10,01) - d(10)}{10,01 - 10} = \frac{10,01^2 - 10^2}{10,01 - 10} = \frac{100,2001 - 100}{0,01} = 20,01 \text{ m/s}$$

Assim, percebemos que, à medida que o intervalo de tempo tende a zero, as velocidades médias se aproximam de  $20 \text{ m/s}$ , que vai corresponder então à **velocidade instantânea** do projétil no instante  $t = 10 \text{ s}$ . Ou seja, a velocidade instantânea num dado instante é o limite das velocidades médias calculadas com início naquele instante, quando o intervalo de tempo tende a zero.

**Exemplo 3:** Consideremos a função exponencial  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dada por  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ , cujo gráfico está representado abaixo.



Pela observação do gráfico, podemos dizer que, à medida que  $x$  vai assumindo valores cada vez maiores, o gráfico se aproxima do eixo  $x$ , ou seja,  $f(x)$  tende a zero. Também podemos dizer que, à medida que  $x$  se aproxima de 0,  $f(x)$  tende a 1.

Em todos estes exemplos, aparece a ideia de aproximação do valor de uma função. Podemos então falar da definição informal de limite:



**Definição 1:** Seja  $D \subset \mathbf{R}$  o domínio de uma função  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ . Dizemos que o **limite da função**  $f$ , quando  $x$  tende para  $a \in \mathbf{R}$ , é o valor real  $L$  se podemos fazer  $f(x)$  ficar arbitrariamente próximo de  $L$  para todos os valores de  $x$  suficientemente próximos de  $a$ . Quer dizer que  $f(x)$  se aproxima de  $L$ , quando  $x$  tende a  $a$ . Indicamos por  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

Vamos analisar mais um exemplo de função.

**Exemplo 4:** Como a função  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  se comporta próximo de  $x = 2$ ?

Esta função está definida para todo  $x$  real, exceto para  $x = 2$  (não podemos dividir por 0). Então, para todo  $x \neq 2$ , podemos simplificar a função da seguinte maneira:

$$f(x) = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = x + 2$$

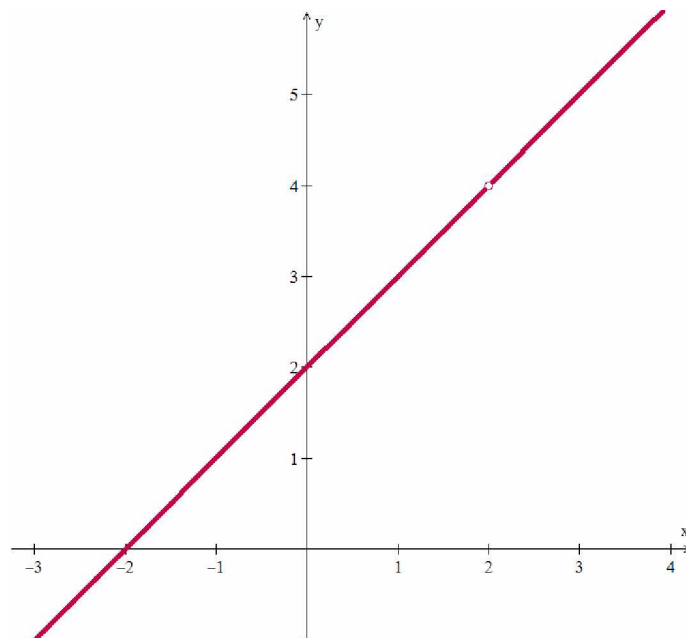
Passemos então a analisar seu comportamento próximo a  $x = 2$ , algébrica e graficamente.

**Algebricamente:** construímos uma tabela, atribuindo valores para  $x$  cada vez mais próximos de 2 e calculando suas correspondentes imagens  $f(x)$ .

$x$	$f(x) = x + 2$
1,9	3,9
2,1	4,1
1,99	3,99
2,01	4,01
1,999	3,999
2,001	4,001
1,9999	3,9999

Assim, quanto mais próximo  $x$  estiver de 2, mais próximo  $f(x)$  estará de 4.

**Graficamente:** traçamos o gráfico da função  $f$ , que é idêntico ao gráfico de  $g(x) = x + 2$ , exceto em  $x = 2$ , onde  $f$  não está definida. Esse ponto é apresentado como um “buraco” no gráfico da função  $f$ .



Embora  $f(2)$  não esteja definida, está claro que podemos tomar o valor de  $f(x)$  tão próximo de 4 quanto quisermos, escolhendo  $x$  suficientemente próximo de 2.

Portanto, podemos escrever  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ .



O valor do limite não depende do modo como a função é definida em  $a$ . Pense nas funções

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad g(x) = x + 2 \quad \text{e} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \end{cases}$$



Antes de passar para a próxima seção, vá ao ambiente virtual de aprendizagem para exercitar um pouco a noção de limite discutida até aqui. Você verá que a Atividade 4 consiste de uma lista de exercícios que será usada para seu estudo, individual e coletivo. Acesse a lista desta atividade e tente fazer os primeiros exercícios, referentes a esta seção. Se tiver dúvidas, volte aos exemplos apresentados neste guia, peça ajuda ao tutor e discuta com os colegas da turma no fórum aberto para isto.

## 1.2 Limites laterais

Agora que já entendemos a idéia informal do limite de uma função em um ponto  $a \in \mathbf{R}$ , podemos considerar os limites laterais, que são os limites de uma função quando a variável  $x$  se aproxima de  $a$  pela direita (ou seja,  $x > a$ ) ou pela esquerda (ou seja,  $x < a$ ). Assim, o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , estudado no tópico 1.1, é

também chamado de **limite bilateral**, pois a variável  $x$  neste caso se aproxima de  $a$  pelos dois lados. Vamos ver então as definições para os limites laterais.





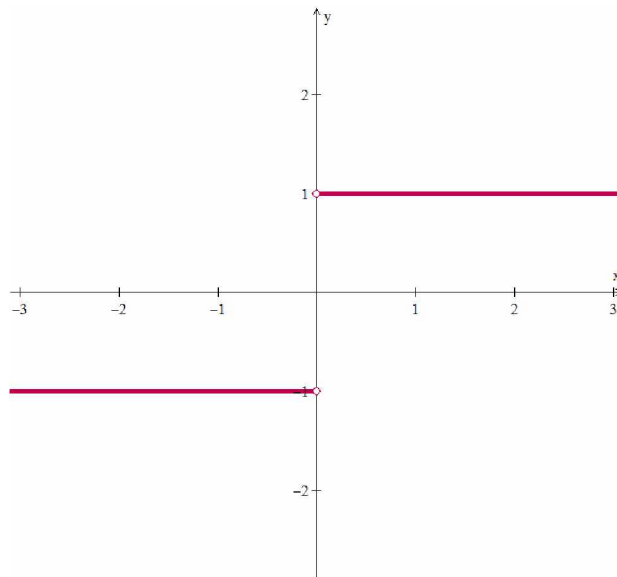
**Definição 2:** Se  $f(x)$  é definida em um intervalo  $(c, b)$ , onde  $c < b$ , então dizemos que o **limite à direita de  $c$  da função  $f$**  (ou o **limite de  $f$ , quando  $x$  tende a  $c$  pela direita**) é o **valor real  $L$**  se podemos fazer  $f(x)$  ficar arbitrariamente próximo de  $L$  para todos os valores de  $x$  suficientemente próximos de  $c$  e maiores que  $c$ . Indicamos por  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ .



**Definição 3:** Se  $f(x)$  é definida em um intervalo  $(a, c)$ , onde  $a < c$ , então dizemos que o **limite à esquerda de  $c$  da função  $f$**  (ou o **limite de  $f$ , quando  $x$  tende a  $c$  pela esquerda**) é o **valor real  $L$**  se podemos fazer  $f(x)$  ficar arbitrariamente próximo de  $L$  para todos os valores de  $x$  suficientemente próximos de  $c$  e menores que  $c$ . Indicamos por  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$ .

Vamos ver alguns exemplos.

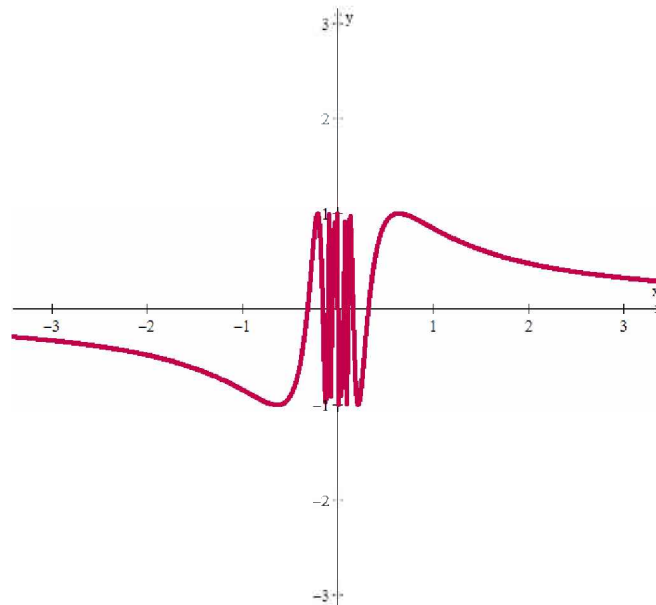
**Exemplo 5:** Considere a função  $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ , cujo gráfico está representado abaixo:



Pela observação do gráfico no ponto  $x = 0$ , vemos que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$  e que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ . No entanto, se pensarmos no comportamento desta função próximo ao ponto  $x = 2$ , vemos que  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$  e também  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ .

**Exemplo 6:** Mostre que  $y = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$  não possui limite quando  $x$  se aproxima de zero de ambos os lados.

Quando  $x$  se aproxima de zero, seu inverso,  $1/x$ , cresce sem limitação, e os valores de  $y = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$  se repetem ciclicamente de  $-1$  a  $1$ . Observe o comportamento desta função perto de  $x = 0$  através do gráfico. Não há nenhum número  $L$  do qual os valores da função ficam cada vez mais próximos quando  $x$  se aproxima de zero, mesmo se nos aproximarmos por apenas um dos lados do zero (à direita ou à esquerda).



**Teorema 1:** Sejam  $a \in I$ , onde  $I$  é um intervalo de  $\mathbf{R}$ ,  $f$  uma função cujo domínio contém  $I - \{a\}$  e  $L \in \mathbf{R}$ . Então o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe e é igual a  $L$  se, e somente se, os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  existem e são iguais a  $L$ .

No exemplo 5 anterior, temos que não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  e que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ .



Antes de passar para a próxima seção, vá ao ambiente virtual de aprendizagem para exercitar um pouco a noção de limite lateral discutida aqui. Acesse a lista de exercícios disponível para a Atividade 4 e tente fazer os exercícios deste assunto. Como nos primeiros exercícios, você pode usar o espaço do fórum desta atividade como um estudo em grupo.

### 1.3 Operações com limites

Depois das definições de limites, podemos começar a pensar em operações com limites, ou seja, nas propriedades para somar, subtrair, multiplicar, dividir, fazer potências, etc. com limites de funções. As propriedades listadas a seguir podem ser demonstradas a partir da definição formal de limite, mas, por fugir dos nossos objetivos, serão omitidas aqui. Elas serão utilizadas para calcular limites sem a definição, o que torna este trabalho viável e mais rápido em muitos casos.



**Teorema 2 (Propriedades dos limites):** Sejam  $f$  e  $g$  funções,  $a$  um número real e suponha que existem números reais  $L$  e  $M$  tais que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ . Então:

i)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

ii)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

iii)  $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  para todo número real  $c$

iv)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)] \cdot [\lim_{x \rightarrow a} g(x)]$

v) Se  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

vi)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$ , para todo número natural  $n$

vii)  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$ , para todo número natural  $n$ , se  $L > 0$ ; ou para todo número ímpar

$n$ , se  $L < 0$

viii)  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right|$

ix)  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ , para todo número real  $c$

x)  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

**Exemplo 7:** Calcule os seguintes limites, usando as propriedades.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 + 5x - 7) & \stackrel{\text{i, ii}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} (4x^2) + \lim_{x \rightarrow 2} (5x) - \lim_{x \rightarrow 2} (7) \stackrel{\text{iii}}{=} 4 \lim_{x \rightarrow 2} (x^2) + 5 \left( \lim_{x \rightarrow 2} x \right) - \lim_{x \rightarrow 2} (7) = \\ & \stackrel{\text{vi, ix}}{=} 4 \left( \lim_{x \rightarrow 2} t \right)^2 + 5 \left( \lim_{x \rightarrow 2} t \right) - 7 \stackrel{x}{=} 4(2)^2 + 5(2) - 7 = 16 + 10 - 7 = \\ & = 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{t \rightarrow 3} \sqrt[3]{\frac{t^2 + 5t + 3}{t^2 - 1}} & \stackrel{\text{vii}}{=} \sqrt[3]{\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 + 5t + 3}{t^2 - 1}} \stackrel{\text{v}}{=} \sqrt[3]{\frac{\lim_{t \rightarrow 3} (t^2 + 5t + 3)}{\lim_{t \rightarrow 3} (t^2 - 1)}} = \\ & \stackrel{\text{i, ii}}{=} \sqrt[3]{\frac{\lim_{t \rightarrow 3} (t^2) + \lim_{t \rightarrow 3} (5t) + \lim_{t \rightarrow 3} (3)}{\lim_{t \rightarrow 3} (t^2) - \lim_{t \rightarrow 3} (1)}} \stackrel{\text{iii, vi}}{=} \sqrt[3]{\frac{\left( \lim_{t \rightarrow 3} t \right)^2 + 5 \left( \lim_{t \rightarrow 3} t \right) + \lim_{t \rightarrow 3} (3)}{\left( \lim_{t \rightarrow 3} t \right)^2 - \lim_{t \rightarrow 3} (1)}} = \\ & \stackrel{\text{ix, x}}{=} \sqrt[3]{\frac{3^2 + 5 \cdot 3 + 3}{3^2 - 1}} = \sqrt[3]{\frac{9 + 15 + 3}{9 - 1}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



Observe que no caso desta letra b, podemos aplicar a propriedade **v**, pois o limite do denominador não é zero. Caso o limite do denominador seja zero, devemos tentar transformar a função em outra equivalente a ela, mas que não tenha o limite do denominador nulo. Veja o próximo exemplo.

$$\text{c) } \lim_{y \rightarrow 7} \frac{y^2 - 49}{y - 7} = \lim_{y \rightarrow 7} \frac{(y - 7)(y + 7)}{y - 7} = \lim_{y \rightarrow 7} (y + 7) \stackrel{\text{i}}{=} \lim_{y \rightarrow 7} y + \lim_{y \rightarrow 7} 7 \stackrel{\text{ix, x}}{=} 7 + 7 = 14$$



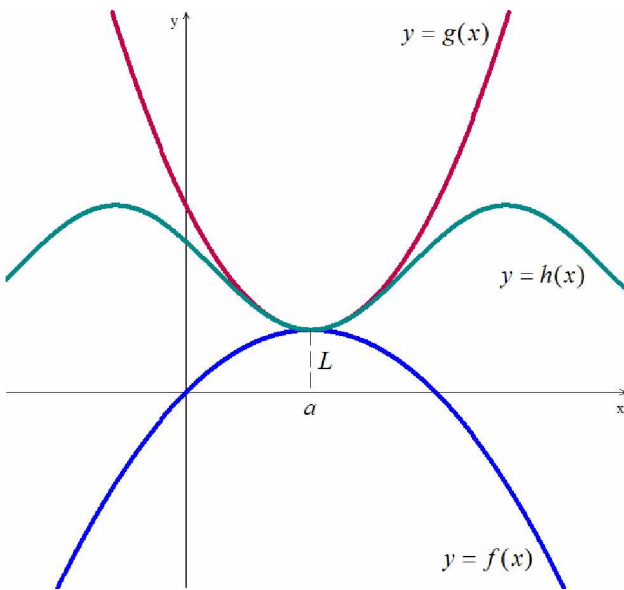
É possível demonstrar que os limites laterais têm as mesmas propriedades do limite, isto é, as dez propriedades continuam valendo se trocarmos  $\lim_{x \rightarrow a}$  por  $\lim_{x \rightarrow a^+}$  ou por  $\lim_{x \rightarrow a^-}$ .



Que tal praticar? Vá ao ambiente virtual de aprendizagem para exercitar um pouco as operações elementares com limites. Continue a lista da Atividade 4. Você pode também começar a se aventurar a ensinar um pouco do que já aprendeu, ajudando os colegas no fórum.

### 1.4 Teoremas do confronto e da conservação do sinal

O próximo teorema diz respeito a três funções  $f$ ,  $h$  e  $g$  tais que  $h(x)$  esteja entre  $f(x)$  e  $g(x)$ . Se  $f$  e  $g$  têm um limite comum  $L$  quando  $x$  tende para  $a$ , então, conforme afirma o teorema,  $h$  deve ter o mesmo limite.

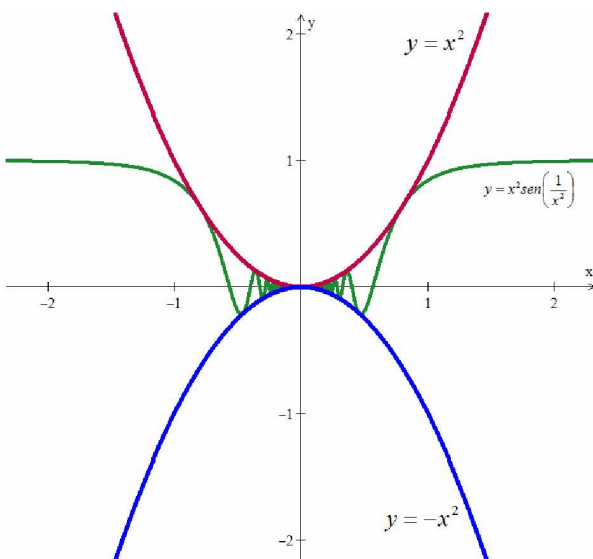


**Teorema do Confronto (ou do sanduíche):** Suponhamos que  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ , para todo  $x$  num intervalo aberto contendo  $a$ , exceto possivelmente no próprio  $a$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ .

**Exemplo 8:** Vamos usar o teorema do confronto para provar que  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ .



Observe que para este limite não é possível aplicar as propriedades vistas anteriormente, pois  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)$  não existe (ver exemplo 6).



Como  $-1 \leq \text{sen } t \leq 1$ , para todo número real  $t$ , então  $-1 \leq \text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$ , para todo  $x \neq 0$ . Multiplicando estas desigualdades por  $x^2$  (que é positivo, pois  $x$  não é zero), temos que  $-x^2 \leq x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^2$ .

Esta desigualdade implica que o gráfico de  $y = x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$  está entre os gráficos de  $y = -x^2$  e de  $y = x^2$  (veja a figura ao lado).

Como  $\lim_{x \rightarrow 0}(-x^2) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0}(x^2) = 0$ , pelo Teorema do Confronto, segue que  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ .

Outra propriedade importante dos limites é dada pelo teorema a seguir.



**Teorema 3:** Se  $f(x) \leq g(x)$ , para todo  $x$  em um intervalo aberto contendo  $a$ , exceto possivelmente no próprio  $a$ , e os limites de  $f$  e  $g$  existirem quando  $x$  se aproxima de  $a$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

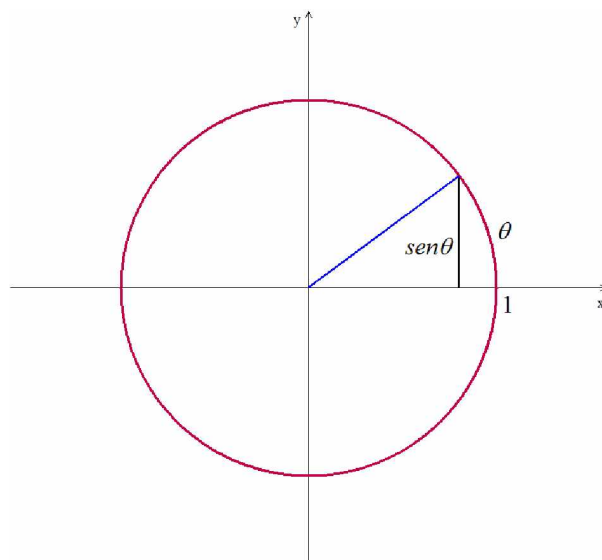
### 1.5 Limites fundamentais

Dois limites envolvendo as funções seno e cosseno serão chamados de fundamentais. Eles envolvem quocientes da forma  $0/0$  e serão utilizados mais adiante no estudo das taxas de variação das funções trigonométricas. Por fugirem dos objetivos deste curso, as demonstrações serão omitidas.

- $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}\theta}{\theta} = 1$ , onde  $\theta$  é medido em radianos.
- $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$ , onde  $\theta$  é medido em radianos.



Quando o ângulo  $\theta$  é medido em radianos, sua medida é o comprimento do arco determinado no ciclo trigonométrico. Veja na figura abaixo. Além disso,  $\text{sen}\theta$  é a medida da ordenada do ponto P. Assim, à medida que  $\theta$  se aproxima de zero, ou seja, à medida que  $\theta$  fica muito pequeno, podemos ver na figura que estas duas medidas ( $\text{sen}\theta$  e  $\theta$ ) se aproximam, ou seja, tendem a ficar iguais. Por isso,  $\frac{\text{sen}\theta}{\theta}$  tende a 1.



**Exemplo 9:** Calcule os seguintes limites, usando as propriedades e os limites fundamentais:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 + 1 = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \underset{\text{Rel. Fundamentais da Trigonometria}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \underset{v}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2}{5}\right) \cdot \operatorname{sen} 2x}{\left(\frac{2}{5}\right) \cdot 5x} \underset{iii}{=} \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} = \left(\frac{2}{5}\right) \cdot 1 = \frac{2}{5}$$



Para exercitar um pouco os teoremas vistos aqui e utilizar os limites fundamentais no cálculo de outros limites, vá ao ambiente virtual de aprendizagem. Acesse a lista de exercícios disponível para a Atividade 4 e continue nos exercícios sobre limites.



## II – ATIVIDADES DO TEXTO BÁSICO



Para você que foi estudando de acordo com as orientações deste guia, agora é o momento de finalizar a Atividade 4. Se você ainda não fez os exercícios, primeiro é preciso tentar fazê-los. Depois, todos devem postar a resolução de pelo menos um exercício da lista no fórum desta atividade. Você pode comentar as soluções apresentadas pelos colegas, esclarecer dúvidas ou apresentar soluções alternativas.



## III – LEITURA COMPLEMENTAR

É sempre bom conhecer um pouco das origens do que estamos estudando e das pessoas importantes que contribuíram para o desenvolvimento das ciências, você não acha? Sugiro a leitura do texto “Alguns fatos históricos sobre os Limites” (**ao clicar no link o aluno deverá ser direcionado para o seguinte endereço [http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia\\_limites.htm](http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_limites.htm)**). Esta é uma atividade optativa do AVA.

### III - SÍNTESE DO MÓDULO

Neste módulo você viu:

- a noção intuitiva de limite de uma função em um ponto como uma aproximação para os valores da função para pontos próximos ao ponto;
- as noções intuitivas de limites laterais de uma função em um ponto, do ponto de vista geométrico;
- como operar (ou seja, somar, subtrair, multiplicar, dividir, fazer potências, ...) com limites de funções em um ponto;
- os teoremas do confronto e da conservação do sinal dos limites;
- os limites fundamentais.



### IV - REFERÊNCIAS

- LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 2 Vols. 3ª Edição. Ed. Harbra, São Paulo: 1994.
- STEWART, J. *Cálculo*. 2 vols. 4a. ed. São Paulo: Editora Pioneira - Thomson Learning, 2001.
- THOMAS, G. B. *Cálculo*. 2 volumes. Addison Wesley, São Paulo, 2002.
- *Revista do Professor de Matemática*, números diversos associados ao tema em foco.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. Volume 1, LTC, São Paulo, 1987.
- SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*. 2 vols. 2a. ed. São Paulo: Editora Makron Books, 1994.
- MUNEM, M. A. & FOULIS, D. J. *Cálculo*. (2 vols.). Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, 1982.



#### Conteúdos básicos do módulo 2

- 2.1 Limites infinitos de funções
- 2.2 Limites no infinito
- 2.3 Assíntotas horizontais e verticais
- 2.4 Continuidade num ponto e num intervalo
- 2.5 Teorema do valor intermediário

#### Objetivos do módulo

Ao final do estudo do módulo 2 da disciplina Cálculo I, esperamos que você possa:

- Calcular limites infinitos e no infinito de funções;
- Calcular assíntotas horizontais e verticais e utilizá-las para a construção de gráficos de funções;
- Entender o conceito de continuidade, tanto pela definição como graficamente;
- Aplicar adequadamente o teorema do valor intermediário.

#### Prezado(a) aluno(a),

neste segundo módulo da disciplina de Cálculo I, continuaremos tratando dos limites de funções, mas agora associados à ideia do infinito. Estudaremos o comportamento da função nos seus extremos: veremos o que acontece com  $f(x)$ , quando  $x$  cresce indefinidamente (ou seja, quando  $x$  tende a infinito) e quando  $x$  decresce indefinidamente (ou seja, quando  $x$  tende a menos infinito). Também veremos como avaliar o limite de funções em pontos  $x$ , quando  $f(x)$  cresce ou decresce indefinidamente.

Este estudo nos ajudará muito a entender como construir o gráfico de uma função. Você aprenderá a fazer gráficos de funções, sem a necessidade do professor te dizer antecipadamente como é o seu formato (quem não se lembra do professor de Ensino Médio dizendo: “O gráfico da função de 1º grau é uma reta”, “O gráfico da função de 2º grau é uma parábola” e daí você fazia o gráfico a partir desta informação?). Sugiro que você faça manualmente esboços de todos os gráficos apresentados neste material, além dos gráficos que aparecem nos exercícios das atividades no AVA. É claro que é sempre possível programar um programa computacional para fazer estes gráficos por nós, mas a habilidade de desenhar gráficos e de raciocinar a partir do desenho será mais desenvolvida naqueles alunos que enfrentarem este desafio com empenho. Não se preocupe se seu gráfico ficar um pouco torto, o mais importante é o formato, que demonstra o comportamento da função ao longo do seu domínio.

Além disso, veremos o conceito de continuidade. Como foi dito no início do módulo 1, algumas funções variam continuamente, ou seja, pequenas mudanças em  $x$  produzem apenas pequenas mudanças em  $f(x)$ . Outras funções podem ter valores que saltam ou variam erráticamente. A noção de limite fornece um caminho preciso para distinguir esses comportamentos e a usaremos neste ponto para definir formalmente o que significa uma função ser contínua em um ponto. Trabalharemos também tanto com a abordagem analítica como também com a gráfica, de uma maneira mais intuitiva.

### **Principais materiais**

Além deste guia de estudos, você assistirá a uma vídeo aula de apresentação do Módulo 2 e realizará atividades no Ambiente Virtual de Aprendizagem.

### **Tempo de dedicação neste módulo**

Para desenvolver as atividades deste módulo, recomendo uma dedicação de, pelo menos, 22 horas de estudo, distribuídas entre a leitura do material didático e realização das atividades.

### **Principais avaliações**

Participação nas atividades propostas para o módulo e envio de arquivo contendo exercícios resolvidos para uma das atividades.



Caro(a) aluno(a), convidamos você a voltar ao AVA agora para conhecer um pouco mais sobre o conteúdo a ser trabalhado neste módulo. Assista à video aula de apresentação do Módulo 2, correspondente à Atividade 6.



## TEXTO BÁSICO

### 2.1 Limites infinitos de funções

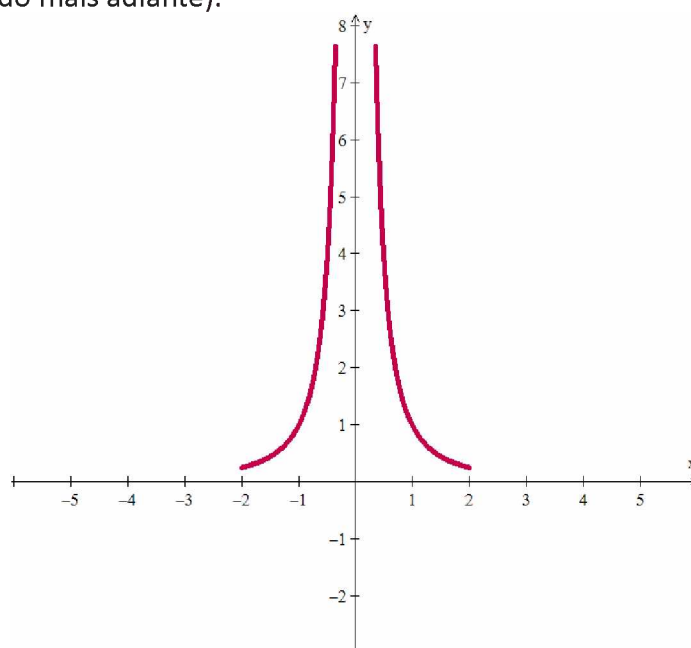
Algumas vezes o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  cresce ou decresce indefinidamente.

**Exemplo 10:** Considere a função  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Vamos avaliar o valor da função para valores de  $x$  próximos de 0, tanto pela direita quanto pela esquerda.

$x$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$		$x$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
0,1	100		-0,1	100
0,01	10.000		-0,01	10.000
0,001	1.000.000		-0,001	1.000.000
0,0001	100.000.000		-0,0001	100.000.000

Pela tabela de valores acima, podemos observar que, à medida que  $x$  se torna muito próximo de 0,  $f(x)$  vai ficando cada vez maior. Dizemos então que o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a 0, é igual a mais infinito. Em símbolos, temos  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

Podemos utilizar este limite para esboçar o gráfico da função  $f$  nos valores próximos a 0 (o gráfico completo será construído mais adiante).





Ao escrever  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ , não estamos dizendo que o limite existe. Nem estamos dizendo que há um número  $\infty$  real, porque tal número não existe. Em vez disso, estamos dizendo que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$  não existe porque  $f(x)$  cresce e se torna arbitrariamente grande e positivo quando  $x$  tende a 0.

Motivados por este exemplo, podemos entender a definição (informal) dos chamados limites infinitos de funções:



**Definição 4:** Sejam  $a \in I$  e  $f : I - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ . Dizemos que o **limite da função  $f$ , quando  $x$  tende para  $a$ , é mais infinito** se podemos fazer  $f(x)$  ficar arbitrariamente grande para todos os valores de  $x$  suficientemente próximos de  $a$ . Quer dizer que  $f(x)$  cresce indefinidamente, quando  $x$  tende a  $a$ . Indicamos por  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ .



**Definição 5:** Sejam  $a \in I$  e  $f : I - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ . Dizemos que o **limite da função  $f$ , quando  $x$  tende para  $a$ , é menos infinito** se podemos fazer  $f(x)$  ficar arbitrariamente pequeno para todos os valores de  $x$  suficientemente próximos de  $a$ . Quer dizer que  $f(x)$  decresce indefinidamente, quando  $x$  tende a  $a$ . Indicamos por  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .



Podemos também pensar em definições informais para  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ . Que tal tentar?

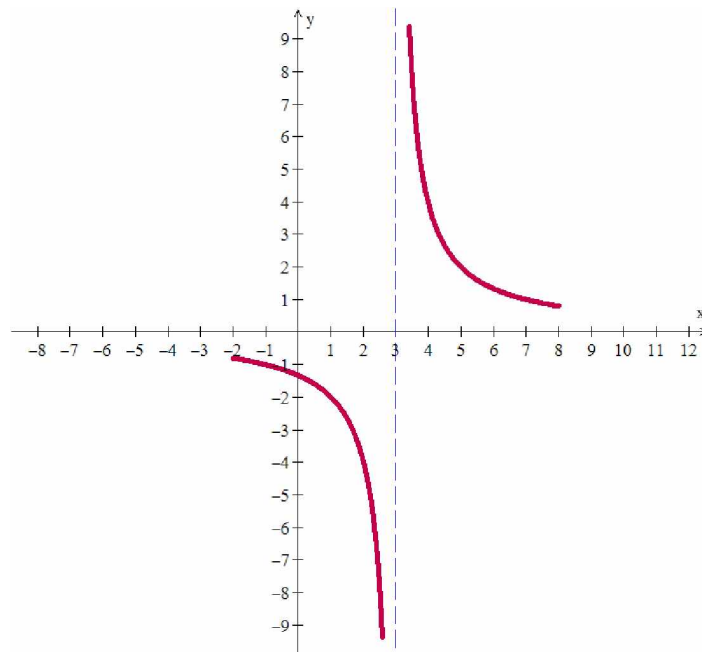
**Exemplo 11:** Considere a função  $g(x) = \frac{4}{x-3}$ . Vamos verificar o comportamento da função  $g$  para valores de  $x$  próximos de 3, tanto pela direita quanto pela esquerda.

$x$	$g(x) = \frac{4}{x-3}$ $g(x) = \frac{4}{x-3}$	$x$	$g(x) = \frac{4}{x-3}$
3,1	40	2,9	-40
3,01	400	2,99	-400
3,001	4.000	2,999	-4.000
3,0001	40.000	2,9999	-40.000

Pela tabela de valores acima, podemos observar que:

- à medida que  $x$  fica suficientemente próximo de 3 à sua direita (ou seja, por valores maiores que 3),  $g(x)$  vai ficando arbitrariamente grande. Dizemos então que o limite de  $g(x)$ , quando  $x$  tende a 3 pela direita, é igual a mais infinito. Em símbolos, temos  $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = +\infty$ .
- já à medida que  $x$  fica muito próximo de 3 à sua esquerda (ou seja, por valores menores que 3),  $g(x)$  vai ficando cada vez menor. Dizemos então que o limite de  $g(x)$ , quando  $x$  tende a 3 pela esquerda, é igual a menos infinito. Em símbolos, temos  $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -\infty$ .

Também podemos construir parte do gráfico da função  $g$ , nas proximidades do ponto 3 (completaremos o gráfico mais adiante).



Vale um teorema para limites infinitos análogo ao teorema 1 do Módulo 1:



**Teorema 4:** Sejam  $a \in I$ , onde  $I$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $f$  uma função cujo domínio contém  $I - \{a\}$ . Então:

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

Assim, no exemplo 11 anterior, podemos dizer que não existe  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ .

**Exemplo 12:** Considere a função  $h(x) = \frac{5x}{x-1}$ . Vamos verificar o comportamento da função  $h$  para valores de  $x$  próximos de 1, tanto pela direita quanto pela esquerda.

$x$	$h(x) = \frac{5x}{x-1}$		$x$	$h(x) = \frac{5x}{x-1}$
1,1	55		0,9	-45
1,01	505		0,99	-495
1,001	5.005		0,999	-4.995
1,0001	50.005		0,9999	-49.995

Pela tabela de valores acima, podemos observar que:

- à medida que  $x$  fica suficientemente próximo de 1 à sua direita (ou seja, por valores maiores que 1),  $h(x)$  vai ficando arbitrariamente grande. Dizemos então que o limite de  $h(x)$ , quando  $x$  tende a 1 pela direita, é igual a mais infinito. Em símbolos, temos  $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = +\infty$ .
- já à medida que  $x$  fica muito próximo de 1 à sua esquerda (ou seja, por valores menores que 1),  $h(x)$  vai ficando cada vez menor. Dizemos então que o limite de  $h(x)$ , quando  $x$  tende a 1 pela esquerda, é igual a menos infinito. Em símbolos, temos  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = -\infty$ .

De outra forma, poderíamos pensar sem necessariamente fazer uma tabela de valores, que o numerador da fração (que é  $5x$ ) tende a 5 – quando  $x$  tende a 1 tanto pela direita quanto pela esquerda – e que o denominador (que é  $x - 1$ ) tende a zero:

- por valores positivos, quando  $x$  tende a 1 pela direita;
- por valores negativos, quando  $x$  tende a 1 pela esquerda.
- 

Assim – pensamos – um número cada vez mais próximo de 5 dividido por um número cada vez mais próximo de 0 fica cada vez maior (desconsiderando o sinal). Logo, a fração tenderá a:

- $+\infty$ , quando  $x$  tende a 1 pela direita;
- $-\infty$ , quando  $x$  tende a 1 pela esquerda.

Pelo teorema 4, podemos dizer que não existe  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ .

Mais tarde, usaremos estes limites e outras informações para construir o gráfico da função.



Por abuso de notação, costumamos dizer que  $\frac{1}{0^+} = +\infty$  e que  $\frac{1}{0^-} = -\infty$ , querendo dizer, no primeiro caso, que uma fração cujo numerador tende a 1 e cujo denominador tende a 0 por valores positivos tenderá a mais infinito e, no segundo caso, que uma fração cujo numerador tende a 1 e cujo denominador tende a 0 por valores negativos tenderá a menos infinito.

Seguindo esta linha de raciocínio, podemos simbolizar estas ideias dos limites infinitos da seguinte forma:

i)  $\frac{a}{0^+} = \infty$ , se  $a > 0$       ii)  $\frac{a}{0^-} = \infty$ , se  $a > 0$

iii)  $\frac{a}{0^+} = -\infty$ , se  $a < 0$       iv)  $\frac{a}{0^-} = -\infty$ , se  $a < 0$

No entanto, se  $a = 0$ , dizemos que o limite representado por  $\frac{0}{0}$  é uma indeterminação. Isto significa que o limite de uma fração cujo numerador tende a 0 e cujo denominador também tende a 0 será determinado em cada caso específico, não sendo sempre o mesmo.

Para ilustrar, volte no exemplo 7, letra c, que a princípio é do tipo  $\frac{0}{0}$ , mas que no desenvolvimento das contas ficou igual a 14. Ou ainda o limite fundamental  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}\theta}{\theta} = 1$ , que também é da forma  $\frac{0}{0}$ .



Antes de passar para a próxima seção, vá ao ambiente virtual de aprendizagem para exercitar um pouco o cálculo de limites infinitos. Acesse a lista de exercícios disponível para a Atividade 8 e tente fazer o primeiro exercício.

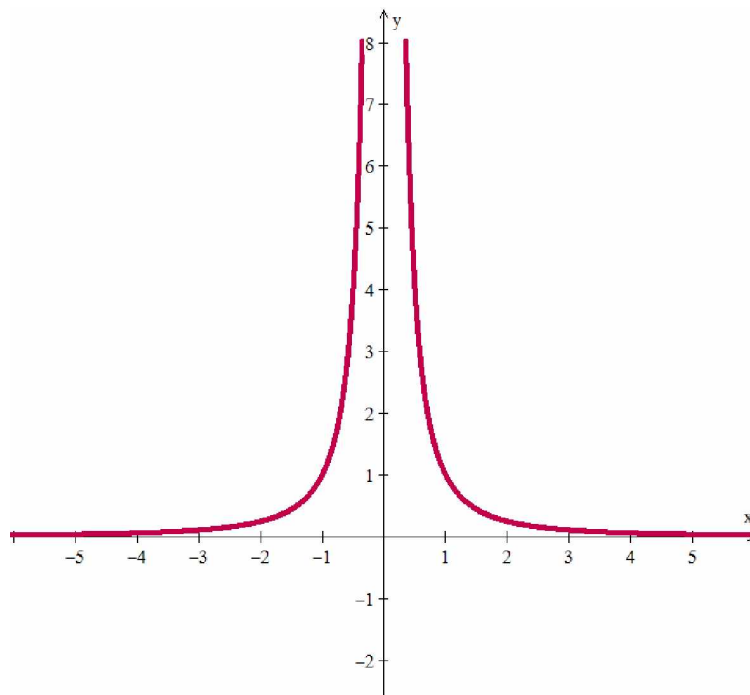
### 2.2 Limites no infinito

Vamos considerar agora limites em que a variável  $x$  cresce ou decresce indefinidamente.

**Exemplo 13:** Voltemos à função  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  do exemplo 10. Vamos avaliar o valor da função para valores de  $x$  muito grandes ou muito pequenos.

$x$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$		$x$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
10	0,01		-10	0,01
100	0,0001		-100	0,0001
1.000	0,000001		-1.000	0,000001
10.000	0,00000001		-10.000	0,00000001

Pela tabela de valores acima, podemos observar que, à medida que  $x$  cresce indefinidamente,  $f(x)$  vai ficando cada vez mais próximo de 0. Dizemos então que o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a mais infinito, é igual a 0. Em símbolos, temos  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Da mesma forma, à medida que  $x$  decresce indefinidamente,  $f(x)$  também vai ficando cada vez mais próximo de 0. Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ . Com estes limites calculados, podemos completar o gráfico da função  $f$ :



Observe que nas extremidades do eixo  $x$ , tanto à direita como à esquerda, o gráfico se aproxima do eixo, o que significa que  $f(x)$  está se aproximando de 0 (por valores positivos).



**Definição 6:** Sejam  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $L \in \mathbb{R}$ . Dizemos que o **limite da função  $f$ , quando  $x$  tende para infinito, é igual a  $L$**  se podemos fazer  $f(x)$  ficar arbitrariamente próximo de  $L$  para todos os valores de  $x$  suficientemente grandes. Quer dizer que  $f(x)$  se aproxima de  $L$ , quando  $x$  cresce indefinidamente. Indicamos por  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ .



**Definição 7:** Sejam  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $L \in \mathbb{R}$ . Dizemos que o **limite da função  $f$ , quando  $x$  tende para menos infinito, é igual a  $L$**  se podemos fazer  $f(x)$  ficar arbitrariamente próximo de  $L$  para todos os valores de  $x$  suficientemente pequenos. Quer dizer que  $f(x)$  se aproxima de  $L$ , quando  $x$  decresce indefinidamente. Indicamos por  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ .

**Exemplo 14:** Voltando à função  $g(x) = \frac{4}{x-3}$  do exemplo 11, podemos pensar no comportamento da função  $g$  nas extremidades do eixo  $x$ .

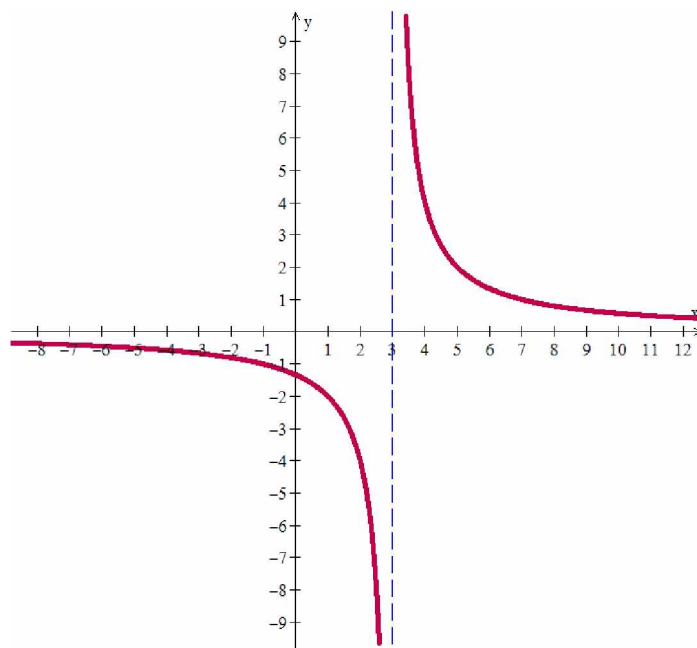
Para valores de  $x$  muito grandes (ou seja, tendendo a infinito),  $x-3$  continua sendo um número muito grande (imagine, por exemplo,  $1.000.000 - 3$ ). Neste caso, 4 dividido por este número tão grande tenderá a 0. Logo, dizemos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ .

Já para valores de  $x$  muito pequenos (ou seja, tendendo a menos infinito),  $x-3$  continua sendo um número muito pequeno (imagine, por exemplo,  $-1.000.000 - 3$ ). Neste caso, 4 dividido por este número



tão pequeno tenderá a 0. Logo, dizemos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ .

Podemos visualizar este comportamento no gráfico da função  $g$ , que agora fica completo:



Observe que, nos extremos do eixo  $x$ , o gráfico da função se aproxima deste eixo. E mais:

- quando  $x$  tende a mais infinito,  $g(x)$  tende a 0 por valores positivos (veja que o gráfico da função está acima do eixo  $x$ , se aproximando dele);
- quando  $x$  tende a menos infinito,  $g(x)$  tende a 0 por valores negativos (veja que o gráfico da função está abaixo do eixo  $x$ , se aproximando dele).



É possível demonstrar que os limites no infinito têm as mesmas propriedades do limite vistas no teorema 2, isto é, as dez propriedades continuam valendo se trocarmos  $\lim_{x \rightarrow a}$  por  $\lim_{x \rightarrow +\infty}$  ou por  $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ .



Por abuso de notação, costumamos dizer que  $\frac{a}{+\infty} = 0$  e que  $\frac{a}{-\infty} = 0$ , querendo dizer, no primeiro caso, que uma fração cujo numerador tende para  $a$  e cujo denominador tende para  $+\infty$  tenderá a 0 e, no segundo caso, que uma fração cujo numerador tende para  $a$  e cujo denominador tende para  $-\infty$  tenderá a 0.

Seguindo esta linha de raciocínio, podemos também simbolizar as seguintes ideias dos limites no infinito

$$\text{i) } +\infty + a = \infty \quad -a = \infty, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\text{ii) } -\infty + a = \infty \quad -a = \infty, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\text{iii) } +\infty - (\infty) = \infty \quad +\infty = \infty$$

$$\text{iv) } -\infty - \infty = \infty$$

$$\text{v) } +\infty \cdot a = (\infty) \cdot (-a) = \frac{+\infty}{a} = \infty, \forall a > 0$$

$$\text{vi) } +\infty \cdot a = \frac{+\infty}{a} = \infty, \forall a < 0$$

$$\text{vii) } +\infty \cdot \infty = (\infty) \cdot (\infty) = \infty$$

$$\text{viii) } +\infty \cdot (\infty) = \infty$$

$$\text{viii) } \sqrt[n]{+\infty} = \infty, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{ix) } \sqrt[n]{-\infty} = \infty, \forall n \text{ ímpar}$$

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$$

No entanto, dizemos que os limites representados por  $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$  e  $+\infty - \infty$  são indeterminações. No primeiro caso isto significa que o limite de uma fração em que numerador e denominador crescem indefinidamente será determinado em cada caso específico, não sendo sempre o mesmo. No segundo caso, dizer que  $+\infty - \infty$  é uma indeterminação significa que o limite da diferença de duas funções que tendem a crescer muito não é conhecido previamente. Veja os limites do exemplo 15.

**Exemplo 15:** Calcule os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{2x^2 - 3}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} (7x^2 + 3x^3)$$

**Solução:**

- a) Observe que, quando  $x$  cresce indefinidamente,  $x^2$  cresce mais ainda e  $5x^2$  também. No denominador, temos que  $2x^2$  cresce indefinidamente e, subtraído de 3, continua crescendo. Ou seja, este limite é a avaliação de uma fração em que numerador e denominador crescem muito. Nestes casos (frações do tipo  $\infty/\infty$ ), temos uma indeterminação, ou seja, não podemos afirmar nada sobre o resultado do limite. É preciso primeiramente modificar a expressão da função, de maneira a obter um limite que se pode determinar. Vejamos como fazer isto neste caso:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{2x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{\frac{x^2}{x^2} (2x^2 - 3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{2 - \frac{3}{x^2}} = \frac{5}{2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2}} = \frac{5}{2 - 0} = \frac{5}{2}$$

- b) Neste caso também temos uma indeterminação do tipo  $-\infty/\infty$  e procederemos, como na letra a, dividindo numerador e denominador por uma potência adequada de  $x$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 + 1}{x^2}}{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \infty$$

- c) Agora obtemos uma indeterminação do tipo  $+\infty - \infty$ . Colocando  $x^2$  em evidência, ficamos com o produto de duas funções,  $x^2$  e  $7 + 3x$ , a primeira tendendo a  $+\infty$  e a segunda, a  $-\infty$ . Logo, o produto tende para  $-\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (7x^2 + 3x^3) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2(7 + 3x) = \infty$$

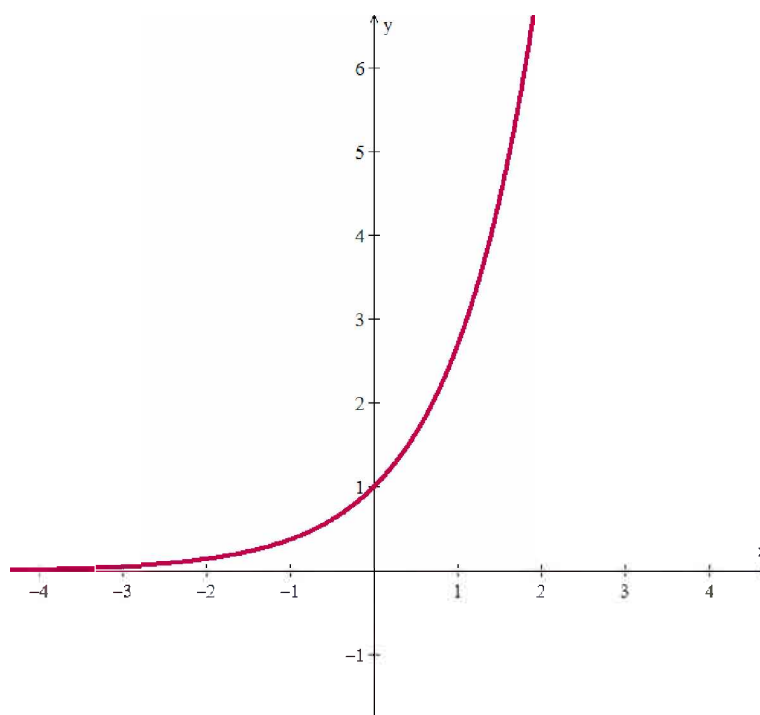


Vamos exercitar? Vá ao ambiente virtual de aprendizagem para trabalhar com limites no infinito. Acesse a lista de exercícios disponível para a Atividade 8 e tente fazer os exercícios sobre limites infinitos. Lembre-se do espaço do fórum para discussão.

### 2.3 Assíntotas horizontais e verticais

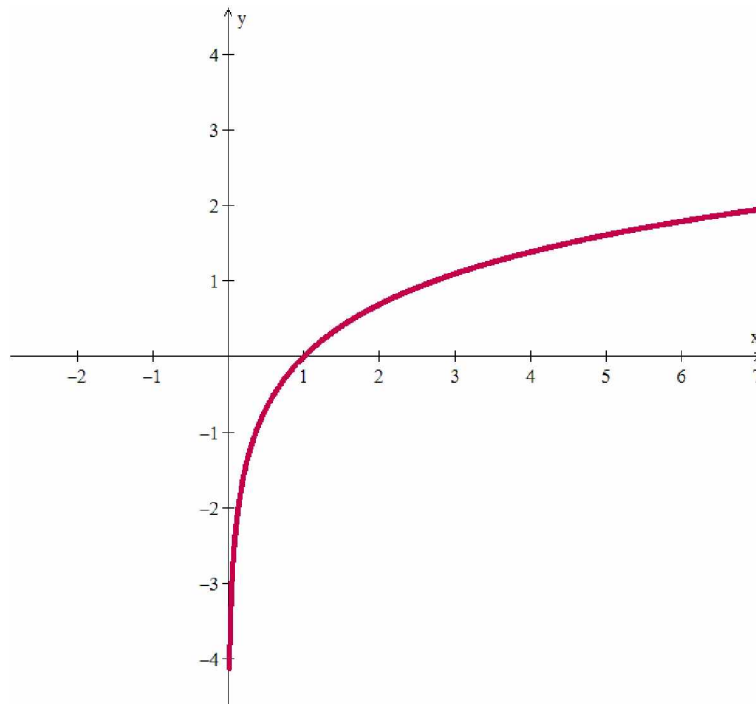
Se a distância entre o gráfico de uma função e alguma reta fixa se aproxima de zero quando um ponto fixo do gráfico se afasta cada vez mais da origem, dizemos que o gráfico se aproxima da reta assintoticamente e que a reta é uma **assíntota** do gráfico.

**Exemplo 16:** Ao olhar para o gráfico de  $y = e^x$ , vemos que o eixo  $x$  é uma assíntota horizontal.



**Definição 8:** Uma reta  $y = b$  é uma **assíntota horizontal** do gráfico de uma função  $y = f(x)$  se  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ .

**Exemplo 17:** Agora, ao olhar o gráfico de  $y = \ln(x)$ , vemos que o eixo  $y$  é uma assíntota vertical.



**Definição 9:** Uma reta  $x = a$  é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função  $y = f(x)$  se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$ .

**Exemplo 18:** Vamos analisar se o gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  possui assíntotas horizontais ou verticais.

Calculando os limites no infinito, temos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

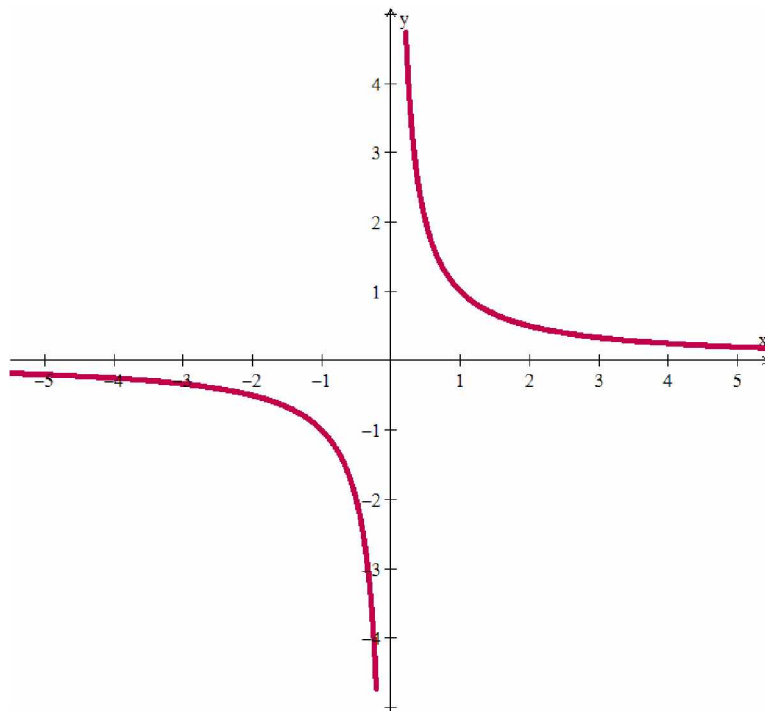
Logo, a reta  $y = 0$  (ou seja, o eixo  $x$ ) é uma assíntota horizontal do gráfico de  $f$ .

Calculando os limites laterais nos pontos onde a função não está definida (ou seja, pontos fora do domínio da função, neste caso no ponto  $x = 0$ ), temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Logo, a reta  $x = 0$  (ou seja, o eixo  $y$ ) é uma assíntota vertical do gráfico de  $f$ .

Portanto, podemos usar os limites calculados para construir o gráfico da função:



**Exemplo 19:** Vamos analisar se o gráfico da função  $h(x) = \frac{5x}{x-1}$  possui assíntotas horizontais ou verticais.

Calculando os limites no infinito, temos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{5}{1-0} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{5}{1-0} = 5$$

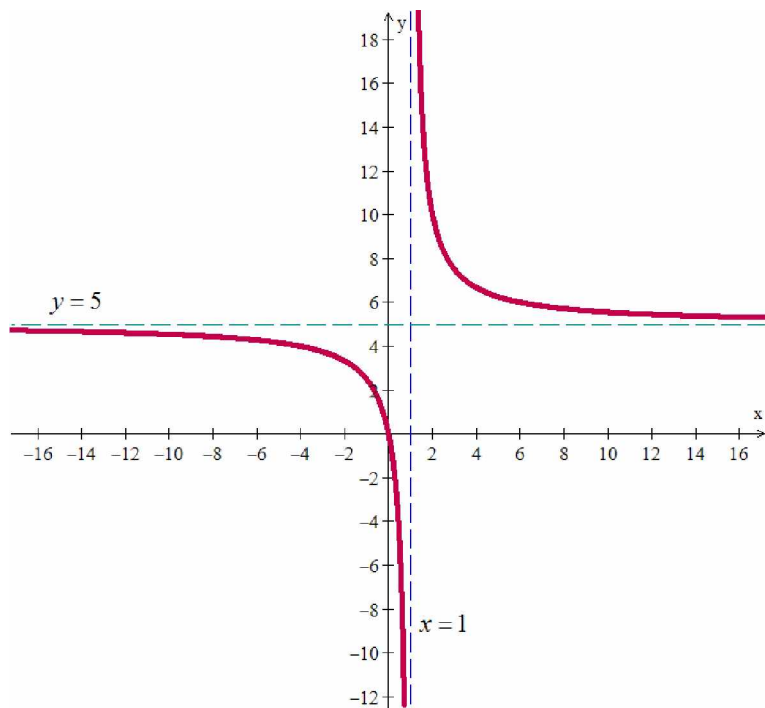
Logo, a reta  $y = 5$  (ou seja, uma reta paralela ao eixo  $x$ ) é uma assíntota horizontal do gráfico de  $h$ .

Para os limites laterais nos pontos onde a função não está definida (neste caso, no ponto  $x = 1$ ), já fizemos os cálculos no exemplo 12, obtendo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = -\infty$$

Logo, a reta  $x = 1$  (ou seja, uma reta paralela ao eixo  $y$ ) é uma assíntota vertical do gráfico de  $h$ .

Portanto, podemos usar estes limites para construir o gráfico da função, obtendo:

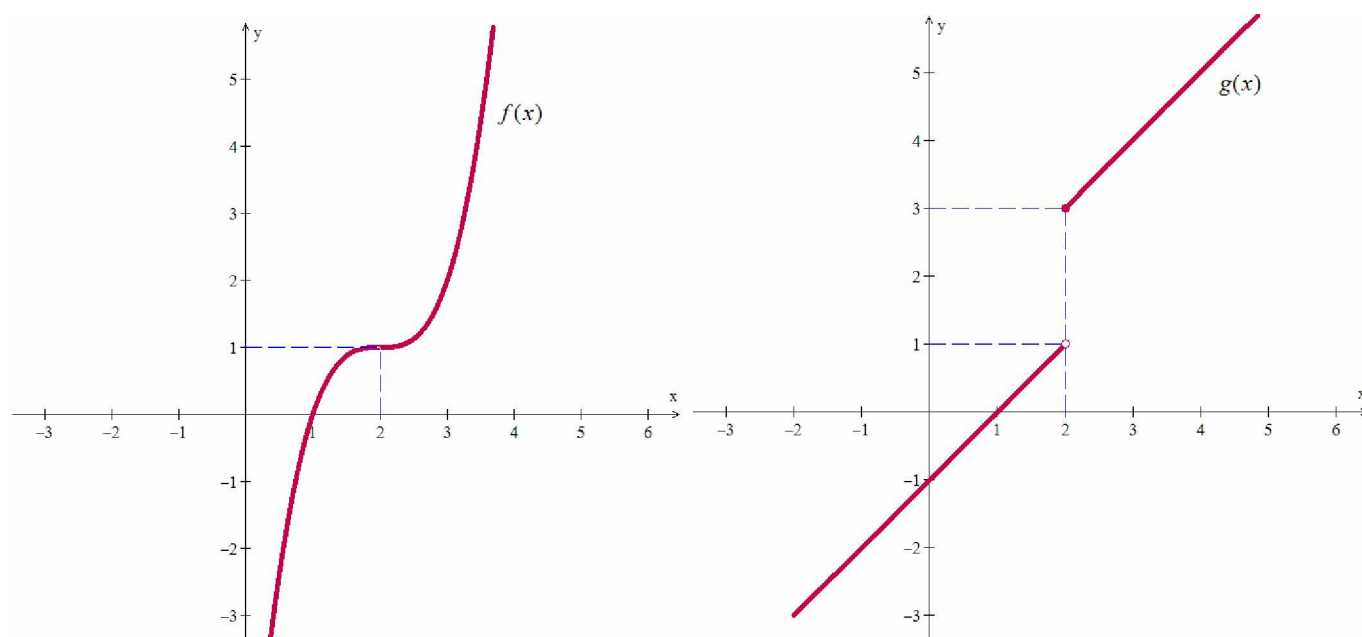


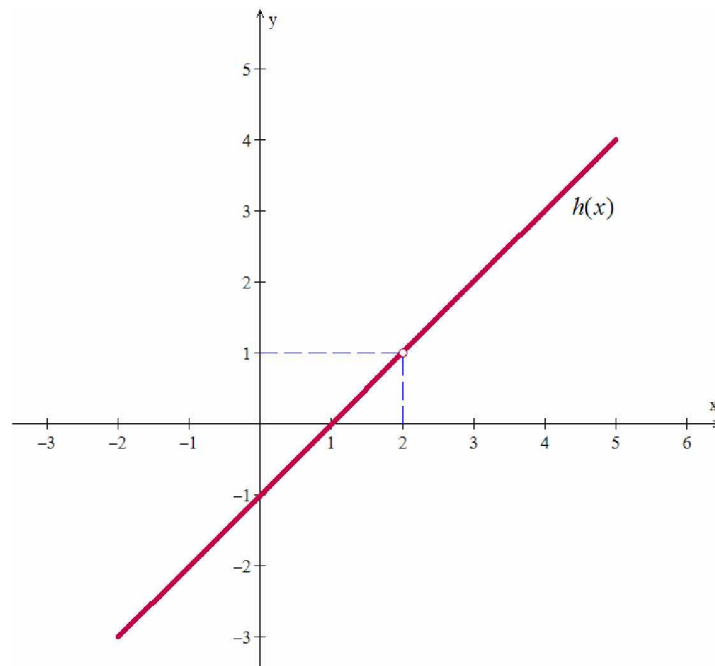
Este é um bom momento para uma pausinha no conteúdo! Vá ao ambiente virtual de aprendizagem e calcule limites para fazer muitos gráficos. Acesse a lista de exercícios disponível para a Atividade 8. Depois de terminado, me responda: você não se sentiu mais poderoso, fazendo gráficos de tantas funções, que você nem imaginava como seriam? E sem precisar de um computador ou do professor te contar como ficaria o formato! No último módulo iremos apurar melhor a construção de gráficos.

## 2.4 Continuidade num ponto e num intervalo

Intuitivamente, dizemos que uma função  $f$  é contínua num ponto  $a$  de seu domínio se nesse ponto o gráfico da função não dá “saltos” nem apresenta “furos”. Vejamos alguns exemplos gráficos.

### Exemplo 20:





Pelos gráficos vemos que, no ponto  $x=2$ ,  $f$  é contínua,  $g$  é descontínua (pois seu gráfico tem um “salto” neste ponto) e  $h$  também é descontínua (pois seu gráfico tem um “furo” neste ponto).

Observemos que a função  $f$  está definida em 2, ou seja, existe  $f(2)$ . Além disso, também existe  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  e temos que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ .

A função  $g$  está definida em 2 ( $g(2) = 3$ ), mas não existe  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ , pois  $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 3$ .

Já a função  $h$  não está definida em 2, ou seja,  $h(2)$  não existe, embora exista  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ .



**Definição 10:** Uma função  $f$  é **contínua num ponto**  $a$  de seu domínio se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

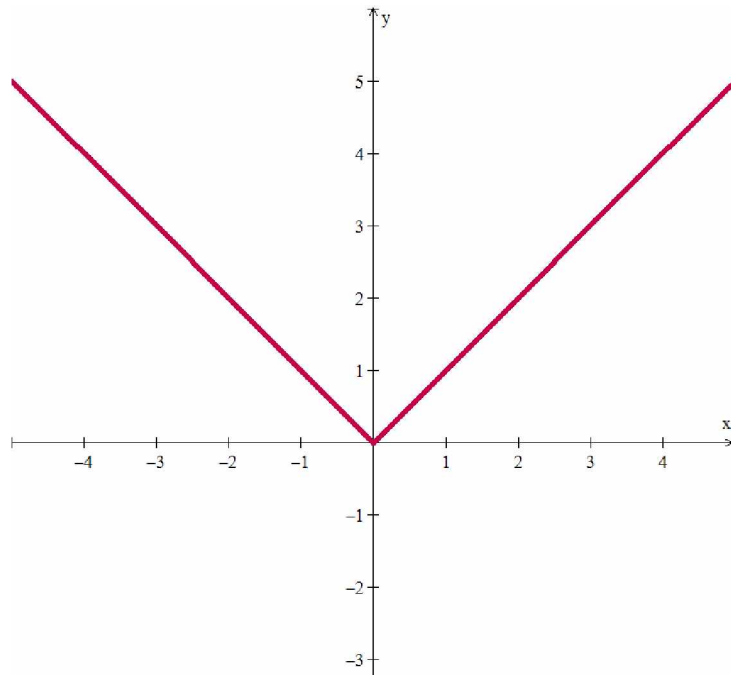
- i. existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ;
- ii.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



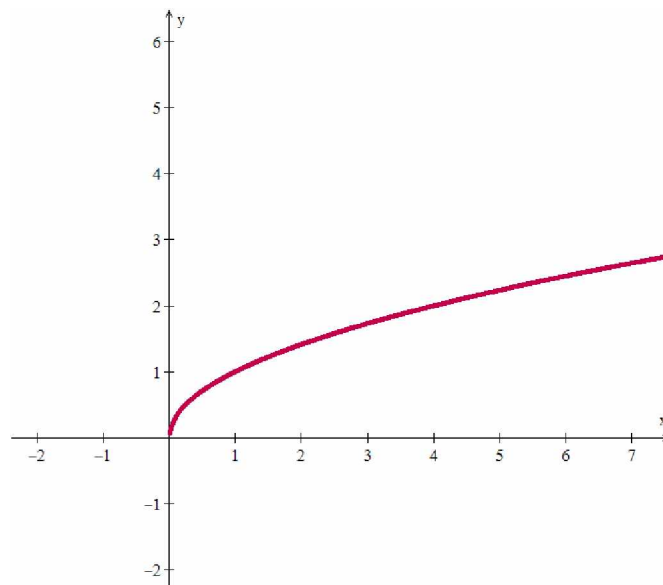
**Definição 11:** Dizemos que uma função  $f$  é **contínua** se  $f$  é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Observando os gráficos já conhecidos de algumas funções, podemos rapidamente citar vários exemplos de funções contínuas:

- a) Toda função polinomial  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  é contínua em  $\mathbf{R}$ , pois  $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$ .
- b) A função exponencial  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , dada por  $f(x) = a^x$ , onde  $a > 0$  é contínua em  $\mathbf{R}$ .
- c) A função logarítmica  $f: \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ , dada por  $f(x) = \log_a x$ , onde  $a > 0$  e  $a \neq 1$  é contínua em seu domínio.
- d) Todas as funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante) são contínuas em seus respectivos domínios.
- e) A função  $f(x) = |x|$  é contínua em  $\mathbf{R}$ .

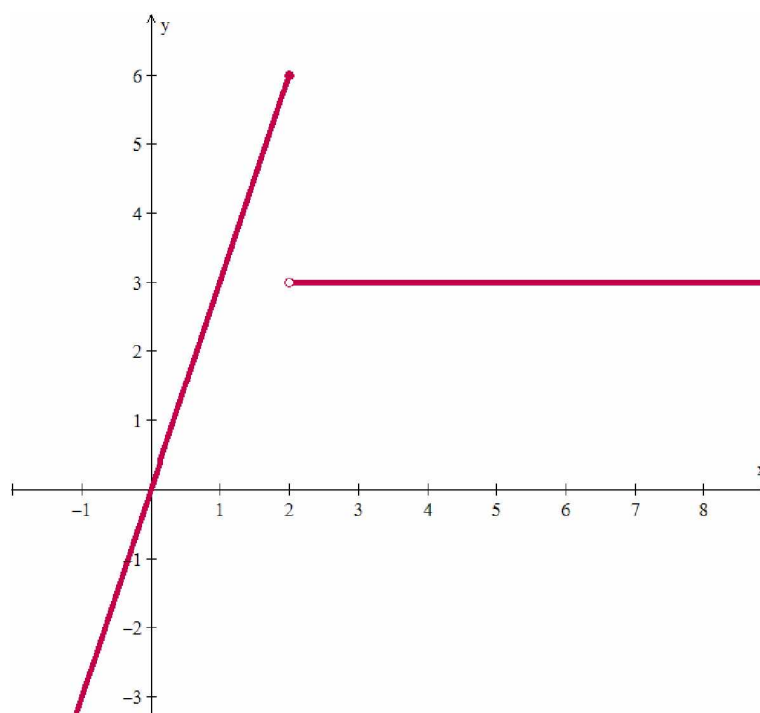


- f) A função  $f: \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$  dada por  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ , onde  $n$  é um número natural, é contínua em seu domínio. Observe que no ponto 0 apenas o limite lateral à direita da função está definido. Como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} = 0 = \sqrt[n]{0}$ , então consideramos que  $f$  é contínua também neste ponto.





Um exemplo de função descontínua em um ponto é a função definida por  $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{para } x \leq 2 \\ 3, & \text{para } x < 2 \end{cases}$ , cujo gráfico segue abaixo. Neste caso  $f(2) = 6$ , mas não existe  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ , pois os limites laterais são diferentes. Portanto esta função é descontínua em 2.



Em decorrência das propriedades dos limites, seguem as propriedades análogas para funções contínuas. Assim, se  $f$  e  $g$  são funções contínuas em um ponto  $a$ , segue que  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $k \cdot f$  (onde  $k$  é constante),  $f \cdot g$ ,  $f/g$  são contínuas (se  $g(a) \neq 0$ ) e  $g \circ f$  são contínuas em  $a$ .



Volte ao ambiente virtual de aprendizagem para fazer um exercício sobre continuidade. Acesse a lista de exercícios disponível para a Atividade 8. Você pode analisar o gráfico ou calcular o limite da função.

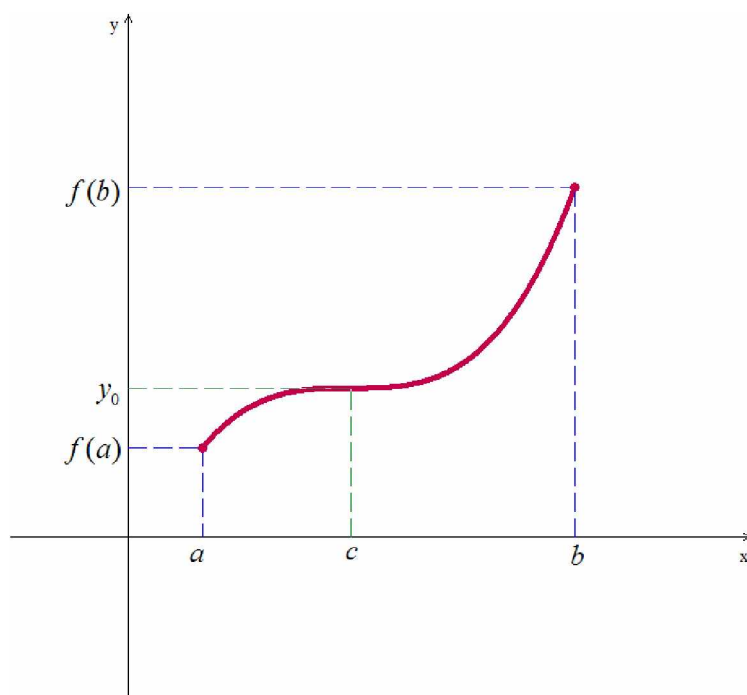
## 2.5 Teorema do valor intermediário

Funções contínuas em intervalos possuem propriedades que as tornam particularmente úteis na matemática e suas aplicações. Uma delas é a propriedade do valor intermediário.



**Teorema do valor intermediário:** Se  $f$  é uma função contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$  e se  $y_0$  é qualquer valor real entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , então  $y_0 = f(c)$ , para algum  $c$  em  $[a, b]$ .

Geometricamente, o teorema do valor intermediário diz que qualquer reta horizontal  $y = y_0$  que cruza o eixo  $y$  entre os números  $f(a)$  e  $f(b)$  cruzará a curva  $y = f(x)$  pelo menos uma vez no intervalo  $[a, b]$ .



Como consequência, temos que, se uma função contínua muda de sinal em um determinado intervalo, então sabemos que ela tem uma raiz neste intervalo.

**Exemplo 21:** Mostre que a função polinomial  $f(x) = x^3 - x - 1$  tem uma raiz entre 1 e 2.

Como  $f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0$  e  $f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0$ , vemos que  $y_0 = 0$  é um valor entre  $f(1)$  e  $f(2)$ . Uma vez que  $f$  é contínua em  $\mathbf{R}$ , o teorema do valor intermediário garante que existe pelo menos um  $c \in [1, 2]$  tal que  $f(c) = 0$ . Isto significa que existe uma raiz da função entre 1 e 2.



## II – ATIVIDADES DO TEXTO BÁSICO



Chegou o momento de compartilhar os conhecimentos deste módulo com os colegas e tutores. Acesse a página do nosso curso e complete a Atividade 8, que consiste de uma lista de exercícios usada para seu estudo, individual e coletivo. Resolva pelo menos um exercício da lista e poste a solução no fórum desta atividade. Você pode comentar as soluções apresentadas pelos colegas, esclarecer dúvidas ou apresentar soluções alternativas. Eu sugiro que você resolva TODOS os exercícios desta lista!

### III - SÍNTESE DO MÓDULO

Neste módulo você viu:

- o conceito de limites infinitos e no infinito de uma função;
- como calcular as assíntotas horizontais e verticais e utilizá-los na construção do gráfico de uma função;
- o que significa uma função ser contínua em um ponto, analiticamente e graficamente;
- sob que condições aplicar o teorema do valor intermediário.



### IV - REFERÊNCIAS

- LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 2 Vols. 3ª Edição. Ed. Harbra, São Paulo: 1994.
- STEWART, J. *Cálculo*. 2 vols. 4a. ed. São Paulo: Editora Pioneira - Thomson Learning, 2001.
- THOMAS, G. B. *Cálculo*. 2 volumes. Addison Wesley, São Paulo, 2002.
- *Revista do Professor de Matemática*, números diversos associados ao tema em foco.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. Volume 1, LTC, São Paulo, 1987.
- SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*. 2 vols. 2a. ed. São Paulo: Editora Makron Books, 1994.
- MUNEM, M. A. & FOULIS, D. J. *Cálculo*. (2 vols.). Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, 1982.

## MÓDULO 3

### SUMÁRIO QUINZENAL

#### Conteúdos básicos do módulo 3

- 3.1 Sequências: definição e convergência
- 3.2 Definição e interpretação de derivadas
- 3.3 Derivabilidade x Continuidade
- 3.4 Regras de derivação
- 3.5 Regra da cadeia

#### Objetivos do módulo

Ao final do estudo do módulo 3 da disciplina Cálculo I, esperamos que você possa:

- Apresentar o conceito de limite de uma sequência e calculá-lo;
- Apresentar o conceito de derivadas e interpretá-lo;
- Discutir sobre a derivabilidade e a continuidade de funções;
- Calcular derivadas laterais e analisar se uma dada função é derivável em um intervalo;
- Aplicar as regras de derivação para calcular derivadas de funções.

#### Prezado(a) aluno(a),

começamos este módulo discutindo a noção de limite de uma sequência de números reais, fundamental para um estudo posterior sobre séries numéricas e muitas aplicações matemáticas. Usamos limites para descrever o comportamento de uma sequência infinita de números e sua convergência ou não.

A seguir, passaremos ao estudo das derivadas, que serão definidas formalmente a partir dos limites de funções. A derivada é uma das ideias fundamentais em cálculo e é utilizada para resolver uma ampla gama de problemas, por isso faremos aqui as interpretações física e geométrica das derivadas. Também confrontaremos os conceitos de derivabilidade e continuidade e aprenderemos a usar regras para calcular derivadas de um grande número de funções.

Este módulo é o cerne desta disciplina, visto que as discussões realizadas nele o acompanharão durante toda a continuação de seu estudo do Cálculo Diferencial e Integral e também nas suas aplicações.

#### Principais materiais

Além deste guia de estudos, você assistirá a uma vídeo aula de apresentação do Módulo 3 e realizará atividades no Ambiente Virtual de Aprendizagem.

#### Tempo de dedicação neste módulo

Para desenvolver as atividades deste módulo, recomendo uma dedicação de, pelo menos, 23 horas de estudo, distribuídas entre a leitura do material didático e realização das atividades.

#### Principais avaliações

Participação nas atividades propostas para o módulo e envio de arquivo contendo exercícios resolvidos para uma das atividades.



Caro(a) aluno(a), convidamos você a voltar ao AVA agora para entender um pouco mais do que será estudado neste módulo. Assista à video aula de apresentação do Módulo 3, correspondente à Atividade 10.



## I - TEXTO BÁSICO

### 3.1 Sequências: definição e convergência



**Definição 12:** Uma **sequência** é uma lista infinita de números reais  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  em uma ordem determinada. Cada  $a_i$ , com  $i \in \mathbf{N}$  é chamado um **termo** da sequência. Logo,  $a_1$  é o primeiro termo da sequência,  $a_2$  é o segundo termo, e assim por diante. O  $n$ -ésimo termo  $a_n$  é chamado de **termo geral** da sequência.

**Exemplo 22:** Represente os primeiros 6 termos de cada sequência abaixo, dada por seu termo geral.

a)  $a_n = 2n$                       b)  $b_n = 10^{1-n}$                       c)  $c_n = \frac{n-1}{n}$

Resolução:

a) Para  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , temos a sequência 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

b) Para  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , temos a sequência  $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1.000}, \frac{1}{10.000}, \frac{1}{100.000}, \dots$

c) Para  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  temos a sequência  $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$



**Definição 13:** Dizemos que uma sequência  $\{a_n\}$  **converge para o limite**  $L$ , e denotamos  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ , se a diferença entre  $a_n$  e  $L$  pode ser feita arbitrariamente, desde que  $n$  seja suficientemente grande. Também dizemos neste caso que a sequência  $\{a_n\}$  é **convergente**. Caso contrário, dizemos que  $\{a_n\}$  é **divergente**.

**Exemplo 23:** Determine se cada sequência dada converge ou diverge. Caso convirja, determine seu limite.

a)  $a_n = 2n$                       b)  $b_n = 10^{1-n}$                       c)  $c_n = \frac{n-1}{n}$

Resolução:

a) A sequência  $\{2n\}$  diverge, pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty$ .

b) A sequência  $\left\{ 10^{1-n} \right\}$  converge para 0, pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} 10^{1-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^{n-1}} = 0$ .

c) A sequência  $\left\{ \frac{n-1}{n} \right\}$  converge para 1, pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = 1 - 0 = 1$ .



A base dos logaritmos naturais é o número irracional representado por  $e$ , chamado número de Euler.

Ele é o limite da sequência  $\{a_n\}$  de números reais, dada por  $a_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$  e explicitada abaixo:

$$\begin{array}{cccccccc} \left(1 + \frac{1}{1}\right), & \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, & \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, & \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4, & \dots, & \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10}, & \dots, & \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 2,0000 & 2,2500 & 2,3703 & 2,4414 & & 2,5937 & & 2,7048 & \end{array}$$

Assim, é possível mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ .

Como as sequências podem ser vistas como funções reais cujo domínio é o conjunto dos números naturais, então as propriedades operatórias com limites de sequências são as mesmas já citadas no módulo 1 para limites de funções.



**Teorema 5 (propriedades dos limites de sequências):** Sejam  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  duas sequências convergentes e seja  $c \in \mathbf{R}$ .

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$e) \text{ Se } b_n \neq 0, \forall n \in \mathbf{N} \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0, \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n^k} = 0, \text{ se } k > 0$$

$$g) \text{ Se } |a| < 1, \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \text{ e se } |a| > 1, \text{ então } \{a^n\} \text{ diverge.}$$

**Exemplo 23:** Analise a convergência das sequências.

$$a) \left\{ \frac{3n^2 + 7n + 11}{8n^2 - 5n + 3} \right\}$$

$$b) \left\{ \frac{2^n}{3^{n+1}} \right\}$$

$$c) \left\{ \frac{n^3 + 5n}{7n^2 + 1} \right\}$$

Resolução:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 7n + 11}{8n^2 - 5n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{7n}{n^2} + \frac{11}{n^2}}{\frac{8n^2}{n^2} - \frac{5n}{n^2} + \frac{3}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{7}{n} + \frac{11}{n^2}}{8 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{3 + 0 + 0}{8 - 0 + 0} = \frac{3}{8}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 5n}{7n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3}{n^2} + \frac{5n}{n^2}}{\frac{7n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{5}{n}}{7 + \frac{1}{n^2}} = \infty, \text{ logo esta sequência diverge.}$$



Antes de passar para a próxima seção, vá ao ambiente virtual de aprendizagem para exercitar um pouco a noção de convergência de uma sequência discutida aqui. Você verá que a Atividade 12 consiste de uma lista de exercícios que será usada para seu estudo, individual e coletivo. Acesse a lista desta atividade e tente os primeiros exercícios. Se tiver dúvidas, volte aos exemplos apresentados neste guia, peça ajuda ao tutor e discuta com os colegas da turma no fórum aberto para isto.

### 3.2 Definição e interpretação de derivadas

Usaremos o conceito de limite para discutirmos dois problemas: encontrar a taxa de variação de uma quantidade variável e achar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto dado.

#### Problema 1: Taxa de variação

Suponha que um automóvel é dirigido através de uma estrada da cidade A para a cidade B e seja  $d = f(t)$  a função que determina a distância percorrida por ele a partir de A em função do tempo  $t$  gasto desde o início da jornada. Escolha e fixe (temporariamente) um valor de  $t$ . Depois, deixe decorrer um pequeno intervalo de tempo adicional  $h$ . Assim, entre os instantes  $t$  e  $t+h$ , temos:

$$\text{Distância percorrida: } \Delta d = d_{\text{final}} - d_{\text{inicial}} = f(t+h) - f(t)$$

$$\text{Velocidade média: } v_m = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Quando o intervalo de tempo  $h$  vai diminuindo, as velocidades (marcadas no velocímetro do automóvel) vão se tornando cada vez mais próximas e a velocidade no instante  $t$  é dada por  $v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ , chamada de **velocidade instantânea**.

Se você voltar no Exemplo 2 do Módulo 1, recordará que calculamos a velocidade instantânea de um projétil que é lançado de uma plataforma num dado instante a partir de um limite como o que está escrito aqui, ou seja, a velocidade é a taxa de variação instantânea da distância em relação ao tempo.

Generalizando esta ideia, podemos considerar quaisquer quantidades  $x$  e  $y$  tais que  $y = f(x)$ , onde  $f$  é uma função. Fixando (temporariamente)  $x$  e chamando de  $h$  uma pequena variação em  $x$ , teremos a **taxa de variação média de  $y$  em relação a  $x$ , quando  $x$  sofre uma variação  $h$** , definida por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \text{ Quando } h \text{ tende a zero, esta taxa será chamada de } \textbf{taxa de variação instantânea}$$

**de  $y$  em relação a  $x$**  e será dada por  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ .

**Exemplo 24:** Um cubo de metal com aresta  $x$  é expandido uniformemente como conseqüência de ter sido aquecido. Calcule:

- a taxa de variação média de seu volume em relação à aresta quando  $x$  aumenta de 2cm para 2,01 cm.
- A taxa de variação instantânea de seu volume em relação à aresta no instante em que  $x = 2$  cm.

Resolução: O volume de um cubo de aresta  $x$  é dado por  $V = x^3$ .

$$\text{a) } \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{2,01^3 - 2^3}{0,01} = 12,0601 \text{ cm}^3 / \text{cm}$$

$$\text{b) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 6h + h^2) = 12 \text{ cm}^3 / \text{cm}$$

Obs.: este limite será a derivada de  $V$  em relação a  $x$  no ponto  $x = 2$  cm, que será definida mais adiante.

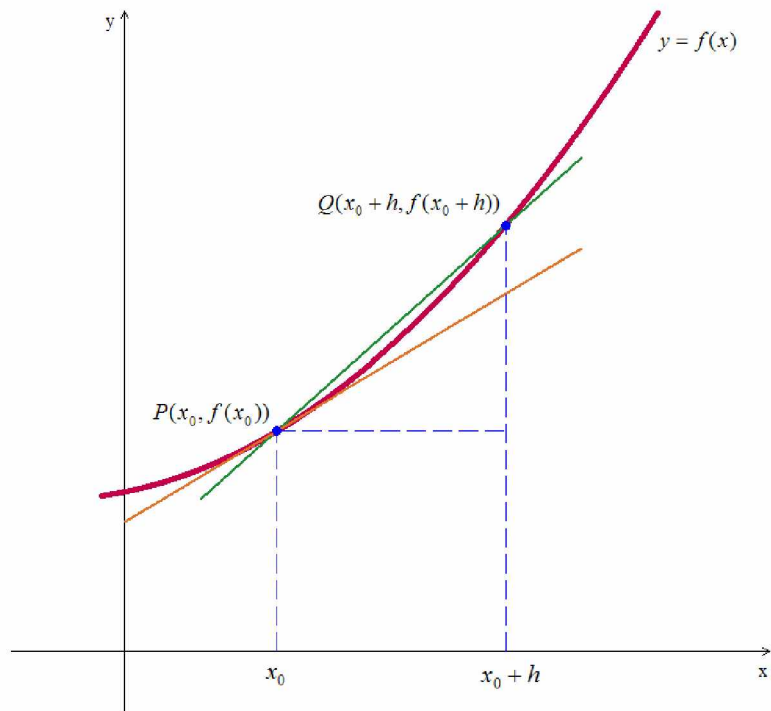


## Problema 2: Coeficiente angular da reta tangente ao gráfico

Dada uma função  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ , onde  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbf{R}$  e  $x_0 \in I$ , queremos calcular a equação da reta tangente ao gráfico da função que passa por  $P(x_0, f(x_0))$ . Para isso, é preciso calcular o coeficiente angular  $m$  de tal reta.

A ideia que usaremos é de aproximar a reta tangente por retas secantes. Se  $h$  é um número real pequeno o suficiente para que  $x_0 + h \in I$ , então a reta secante que corta o gráfico em  $P(x_0, f(x_0))$  e

$Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$  tem coeficiente angular igual a  $m_h = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ .



Se fizermos  $h \rightarrow 0$ , então o ponto  $Q$  se moverá no gráfico de  $f$  e tenderá a  $P$ , de forma que a reta secante irá tender à reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $P$ . Assim, o coeficiente angular de tal reta será dado

por  $m = \lim_{h \rightarrow 0} m_h = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ , desde que este limite exista.

**Exemplo 25:** Qual o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = x^2$  no ponto  $(1,1)$ ? E no ponto  $(0,0)$ ?

Resolução:

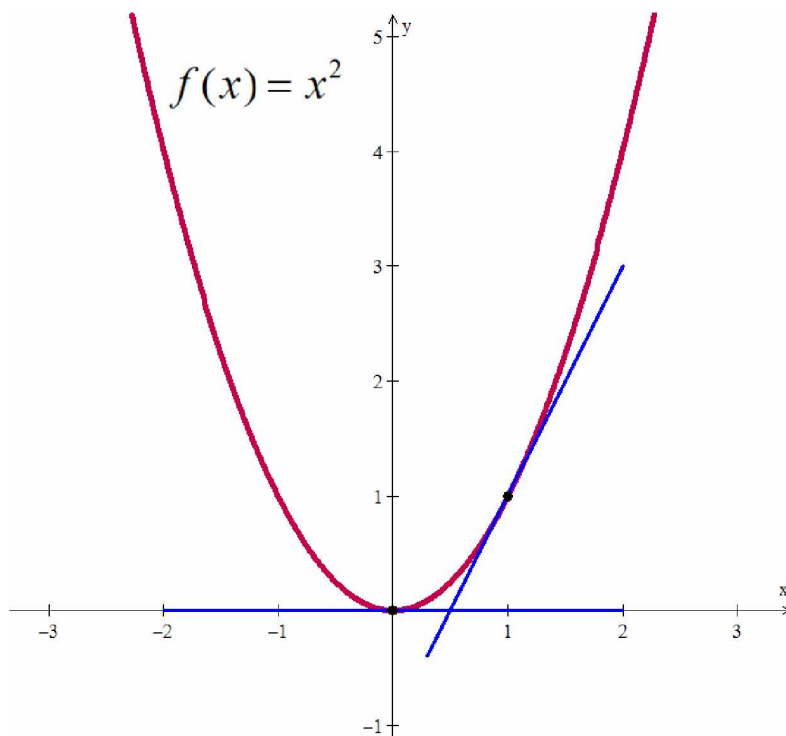
Para o ponto  $(1,1)$ , substituímos  $x_0 = 1$  na fórmula deduzida acima:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2$$

Para o ponto  $(0,0)$ , substituímos  $x_0 = 0$  na fórmula deduzida acima:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)^2 - 0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h) = 0$$

Se observarmos o gráfico desta função e as retas tangentes ao gráfico nestes dois pontos, vemos que a reta tangente no ponto  $(0,0)$  é horizontal (o que confere com o coeficiente angular 0 calculado) e que a reta tangente no ponto  $(1,1)$  é crescente (o que está coerente com o valor positivo encontrado para o coeficiente angular desta reta).



Podemos perceber que os dois problemas são resolvidos pelo cálculo do mesmo limite. Limites da forma

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  aparecem com tanta freqüência no cálculo que é necessário introduzir uma notação e uma terminologia especial para eles.



**Definição 13:** Dada uma função  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ , onde  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbf{R}$  e  $a \in I$ , chamamos de **derivada de  $f$  no ponto  $a$**  ao número real  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ , desde que tal limite exista. Neste caso, também dizemos que  $f$  é **derivável em  $a$** .

**Exemplo 26:** Determine a derivada de  $f(x) = |x|$  no ponto  $x = 0$ .

Calculando esta derivada pela definição, temos:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

Lembrando que  $|h| = \begin{cases} h, & \text{se } h \geq 0 \\ -h, & \text{se } h < 0 \end{cases}$ , separamos os limites laterais para calcular este limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1 \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

Como os limites laterais são diferentes, então o limite não existe. Isto significa que não existe  $f'(0)$ , ou seja, a função não é derivável em  $x = 0$ .

Obs.: Quando o gráfico de uma função apresenta um “bico” – como no caso da função modular – podemos concluir que a função não é derivável neste ponto.



Outra notação para a derivada de uma função  $y = f(x)$  num ponto  $x = a$  é  $\frac{df}{dx}(a)$ .

### 3.3 Derivabilidade x Continuidade



**Definição 14:** Dizemos que  $f$  é uma **função diferenciável** se  $f$  é derivável em todo ponto de seu domínio. Assim, podemos falar na **função derivada**, representada por  $f'$ , que associa a cada  $x \in I$  a

derivada  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ .

**Exemplo 27:** Calcule a função derivada  $f'$ , se  $f(x) = x^2$ .

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \text{ Assim, se}$$

quiséssemos calcular  $f'(1)$ , poderíamos substituir  $x = 1$  na função derivada:  $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$ .

Como a derivada existe para todo  $x$  real, esta função é diferenciável.

Da forma semelhante ao que foi feito no exemplo 27, poderíamos calcular pela definição a derivada das funções diferenciáveis mais conhecidas. Para economizar nosso tempo, vou apresentar apenas os resultados aqui e, se você tiver interesse ou curiosidade, pode consultar um livro de Cálculo para ver as demonstrações.

**Função constante:**  $f(x) = c$ , com  $c \in \mathbf{R} \Rightarrow f'(x) = 0$

**Função identidade:**  $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

**Função de 1º grau:**  $f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$

**Função potência:**  $f(x) = x^n$ , com  $n \in \mathbf{R} \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

**Funções trigonométricas:**

- $f(x) = \text{sen}(x) \Rightarrow f'(x) = \text{cos}(x)$

- $f(x) = \text{cos}(x) \Rightarrow f'(x) = -\text{sen}(x)$

**Função exponencial:**  $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

**Função logarítmica:**  $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

Observe que todas as funções listadas acima são contínuas em seus domínios (e também diferenciáveis). Vamos ver um exemplo de função para confrontar estes dois conceitos.

**Exemplo 28:** Considere a função  $f(x) = \begin{cases} 5 - 2x, & \text{se } x < 3 \\ 4x - 13, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$ . Temos que  $f$  é contínua em 3, pois:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (4x - 13) = 4 \cdot 3 - 13 = -1$$
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (5 - 2x) = 5 - 2 \cdot 3 = -1$$

, logo  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1 = f(3)$ .

No entanto, não existe  $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ , pois:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4(3+h) - 13 - (-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{12 + 4h - 13 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 4 = 4$$
$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{5 - 2(3+h) - (-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{5 - 6 - 2h + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-2) = -2$$

Logo,  $f$  não é derivável em 3.



**Definição 15:** Seja  $[a, b]$  um intervalo contido no domínio de uma função  $f$ .

i) Definimos a **derivada à direita de  $f$  no ponto  $a$**  como sendo  $f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .

ii) Definimos a **derivada à esquerda de  $f$  no ponto  $a$**  como sendo  $f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .

Observe que, como toda derivada é um limite, pelo Teorema 1, a derivada de  $f$  num ponto  $a$  existe e é igual a  $L$  se, e somente se, existem as derivadas laterais de  $f$  em  $a$  e elas são iguais a  $L$ . No exemplo 28,  $f'_+(3) = 4$  e  $f'_-(3) = -2$ . Mas, para pontos  $x \neq 3$ , temos que  $f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x) = \begin{cases} -2, & \text{se } x < 3 \\ 4, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$ , isto é,  $f$  é derivável nestes pontos.



**Teorema 6:** Seja  $f$  uma função derivável em  $a$ . Então  $f$  é contínua em  $a$ .

A recíproca deste teorema não é verdadeira: o exemplo 28 mostra uma função que é contínua em 3, mas não é derivável em 3.

### 3.4 Regras de derivação

Partindo das propriedades operatórias dos limites de funções (Teorema 2) e da definição de derivada, é possível mostrar como ficam as propriedades operatórias para as derivadas de funções reais.



**Teorema 7:** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções deriváveis em  $a$  e seja  $c \in \mathbf{R}$ . Então:

- a)  $f + g$  é derivável em  $a$  e  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- b)  $c \cdot f$  é derivável em  $a$  e  $(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$
- c)  $f \cdot g$  é derivável em  $a$  e  $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
- d)  $\frac{f}{g}$  é derivável em  $a$  e  $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$



Toda função polinomial do tipo  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  é derivável.

**Exemplo 29:** Calcule  $f'(x)$  em cada caso:

- a)  $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x - 1$
- b)  $f(x) = \frac{\ln(x)}{3} + 2 \cos(x)$
- c)  $f(x) = xe^x$
- d)  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$

Resolução:

a) Usaremos as letras a e b do Teorema 7 para calcular a derivada de cada parcela da soma:

$$f'(x) = 3 \cdot (x^5)' - 4 \cdot (x^3)' + 2 \cdot (x)' - (1)' = 3 \cdot 5x^4 - 4 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 1 - 0 = 15x^4 - 12x^2 + 2$$

b) Da mesma forma que na letra a:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (\ln x)' + 2 \cdot (\cos x)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot (-\operatorname{sen} x) = \frac{1}{3x} - 2\operatorname{sen} x = 15x^4 - 12x^2 + 2$$

c) Usaremos agora a regra do produto de funções (letra c do Teorema 7):

$$f'(x) = (x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x)$$

d) Como  $f(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ , usaremos a regra do quociente (letra d do Teorema 7):

$$f'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$



Faça você mesmo a dedução das seguintes derivadas das outras funções trigonométricas:

$$f(x) = \operatorname{cotg}(x) \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{cosec}^2(x)$$

$$f(x) = \sec(x) \Rightarrow f'(x) = \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x)$$

$$f(x) = \operatorname{cosec}(x) \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{cosec}(x) \cdot \operatorname{cotg}(x)$$



Dê uma paradinha na teoria: vá ao ambiente virtual de aprendizagem para calcular algumas derivadas, incluídas na lista da atividade 12. Se tiver dúvidas, volte aos exemplos apresentados neste guia, peça ajuda ao tutor e discuta com os colegas da turma no fórum aberto para isto.

### 3.5 Regra da cadeia

Varemos agora como calcular derivadas de funções que são compostas de outras funções.



**Teorema 8:** Seja  $g$  uma função diferenciável no ponto  $a \in I$ , onde  $I$  é um intervalo aberto contido no domínio de  $g$  tal que  $g(I) \subset J$  e  $J$  é um intervalo no domínio de uma função  $f$ . Se  $f$  é uma função diferenciável em  $g(a)$ , então a função composta  $f \circ g$  é uma função diferenciável em  $a$  e

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \text{ ou } \frac{d(f \circ g)}{dx}(a) = \frac{df}{dy}(g(a)) \cdot \frac{dg}{dx}(a)$$

**Exemplo 30:** Calcule a derivada de  $h(x) = \text{sen}^3 x$  em  $x = \pi/4$  rad.

Podemos escrever que  $h(x) = (f \circ g)(x)$ , onde  $g(x) = \text{sen} x$  e  $f(y) = y^3$ . Daí,  $f'(y) = 3y^2$  e  $g'(x) = \cos x$ . Substituindo no Teorema 8, segue que:

$$(f \circ g)'(\pi/4) = f'(g(\pi/4)) \cdot g'(\pi/4) = 3(\text{sen}(\pi/4))^2 \cdot \cos(\pi/4) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

**Exemplo 31:** Calcule a derivada de  $h(x) = \text{sen}(x^3)$  em  $x = \pi/4$  rad.

Agora a composição fica diferente do Exemplo 30:  $h(x) = (g \circ f)(x)$ , onde  $g(y) = \text{sen} y$  e  $f(x) = x^3$ . Daí,  $g'(y) = \cos y$  e  $f'(x) = 3x^2$ . Substituindo no Teorema 8, segue que:

$$(g \circ f)'(\pi/4) = g'(f(\pi/4)) \cdot f'(\pi/4) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\right) \cdot 3\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \cos\left(\frac{\pi^3}{64}\right) \cdot 3 \cdot \frac{\pi^2}{16} = \frac{3\pi^2}{16} \cdot \cos\left(\frac{\pi^3}{64}\right)$$

**Exemplo 32:** Calcule a derivada de  $h(x) = \ln(x^4 + 5)$ .

Temos que  $h(x) = (f \circ g)(x)$ , onde  $g(x) = x^4 + 5$  e  $f(y) = \ln y$ . Como  $g'(x) = 4x^3$  e  $f'(y) = \frac{1}{y}$ , então pelo Teorema 8, segue que:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{x^4 + 5} \cdot 4x^3 = \frac{4x^3}{x^4 + 5}$$

**Obs.:** É fácil ver que  $(f \circ g \circ h)'(a) = f'(g(h(a))) \cdot g'(h(a)) \cdot h'(a)$  e da mesma forma para a composta de  $n$  funções.

**Exemplo 33:** Calcule a derivada de  $h(x) = e^{\sqrt{x^4}}$ .

Podemos escrever  $h(x) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$ , onde  $f_1(x) = x^4$ ,  $f_2(y) = \sqrt{y}$  e  $f_3(t) = e^t$ . Como  $f_1'(x) = 4x^3$ ,  $f_2'(y) = \frac{1}{2} \cdot y^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$  e  $f_3'(t) = e^t$ , pelo Teorema 8, segue que:

$$h'(x) = f_3'(f_2(f_1(x))) \cdot f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) = e^{\sqrt{x^4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^4}} \cdot 4x^3 = \frac{2x^3 e^{\sqrt{x^4}}}{\sqrt{x^4}}$$

No caso da função  $f$  ser bijetora e derivável em um ponto  $a$ , é possível usar o Teorema 8 para calcular a derivada da função inversa  $f^{-1}$  no ponto  $f^{-1}(a)$ , a partir da derivada de  $f$  no ponto  $a$ .



**Teorema 9:** Sejam  $f$  uma função bijetora,  $g$  sua função inversa e  $a$  um ponto no domínio de  $g$ . Se  $f$  é diferenciável em  $g(a)$  e  $f'(g(a)) \neq 0$  então  $g$  é diferenciável em  $a$  e  $g'(a) = \frac{1}{f'(g(a))}$ .

**Exemplo 34:** Seja  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dada por  $f(x) = x^3$ . Esta função é bijetora (você pode verificar isto!), logo ela possui inversa, que é a função  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dada por  $g(x) = \sqrt[3]{x}$ . Temos que  $f'(x) = 3x^2$ , logo

$f'(g(x)) = 3(\sqrt[3]{x})^2 \neq 0$ , para  $x \neq 0$ . Como  $f$  é diferenciável, podemos aplicar o Teorema 8 para calcular a derivada de  $g$ . Temos:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{3(g(x))^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

Observe que, se tivéssemos calculado diretamente a derivada de  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  pela regra da potência, encontraríamos este mesmo resultado.

Usando este teorema da derivada da função inversa, podemos calcular agora a derivada de funções exponenciais de outras bases diferentes de  $e$ , do tipo  $g(x) = a^x$ . Para isso, primeiro vamos encontrar a derivada da função  $f(x) = \log_a x$ , cuja inversa é  $g$ .

**Exemplo 35:** Determine a derivada da função  $f(x) = \log_a x$ , onde  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .

Pela propriedade de mudança de base do logaritmo e lembrando que  $\ln y = \log_e y$ , temos

$$f(x) = \log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x. \text{ Logo, aplicando a letra } b \text{ do teorema 7, podemos calcular sua}$$

derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

**Exemplo 36:** Determine a derivada da função  $g(x) = a^x$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .

Como  $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$ , então  $g$  é a inversa da função  $f$  do Exemplo 34, que é diferenciável. Pelo Teorema 8, temos:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\frac{1}{g(x) \cdot \ln a}} = g(x) \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$





## II – ATIVIDADES DO TEXTO BÁSICO



Mais exercícios! É a única forma de se aprender bem o Cálculo. Acesse a página do nosso curso e faça a Atividade 12.



## III – LEITURA COMPLEMENTAR 1

### LEITURA INDICADA

Para saber mais um pouco da história do Cálculo e dos grandes pensadores que contribuíram para o seu desenvolvimento, sugiro a leitura do texto “O Nascimento do Cálculo” **(ao clicar no link o aluno deverá ser direcionado para o seguinte endereço [http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia\\_derivadas.htm](http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm))**. Esta é uma atividade optativa do AVA.



## IV - SÍNTESE DO MÓDULO

Neste módulo você viu:

- exemplos de sequências numéricas e aprendeu a analisar sua convergência;
- que a derivada de uma função em um ponto é dada por um limite do tipo  $\frac{0}{0}$  e que ela pode significar duas coisas: o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto ou a taxa de variação instantânea da função no ponto;
- a diferença entre funções contínuas e diferenciáveis e aprendeu a usar as derivadas laterais para analisar a diferenciabilidade em um ponto;
- como calcular a derivada de um grande número de funções, a partir de propriedades operatórias com algumas funções elementares.



## V - REFERÊNCIAS

- LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 2 Vols. 3ª Edição. Ed. Harbra, São Paulo: 1994.
- STEWART, J. *Cálculo*. 2 vols. 4a. ed. São Paulo: Editora Pioneira - Thomson Learning, 2001.
- THOMAS, G. B. *Cálculo*. 2 volumes. Addison Wesley, São Paulo, 2002.
- *Revista do Professor de Matemática*, números diversos associados ao tema em foco.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. Volume 1, LTC, São Paulo, 1987.
- SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*. 2 vols. 2a. ed. São Paulo: Editora Makron Books, 1994.
- MUNEM, M. A. & FOULIS, D. J. Cálculo. (2 vols.). Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, 1982.

## MÓDULO 4

### SUMÁRIO QUINZENAL

#### Conteúdos básicos do módulo 4

- 4.1 Teorema de Rolle e teorema do valor médio
- 4.2 Derivadas de ordem superior a um
- 4.3 Construção de gráficos de funções
- 4.4 Máximos e mínimos locais e globais
- 4.5 Regras de L'Hôpital

#### Objetivos do módulo

Ao final do estudo do módulo 4 da disciplina Cálculo I, esperamos que você possa:

- entender e aplicar corretamente os teoremas de Rolle e do valor médio;
- calcular derivadas de ordem superior a um;
- usar derivadas e limites para construir gráficos de diversas funções;
- entender o significado geométrico e calcular valores máximos e mínimos de funções;
- aplicar adequadamente as regras de L'Hôpital.

#### Prezado(a) aluno(a),

sabemos que funções constantes têm derivadas iguais a zero, mas poderia existir uma função mais complicada cujas derivadas fossem sempre zero? Responderemos a essa e outras perguntas neste módulo por meio da aplicação do teorema do valor médio. Primeiro, veremos um caso especial, conhecido como teorema de Rolle, que é usado para demonstrar o teorema do valor médio.

A seguir, passaremos ao estudo das aplicações das derivadas em dois problemas importantes em muitas áreas: a determinação de valores máximos e mínimos de uma função (problema de otimização) e o traçado do gráfico de uma função com mais detalhes.

Por fim, voltaremos ao cálculo de alguns limites apresentados como indeterminações, que serão eliminadas por meio de um método conhecido como regra de L'Hôpital. É uma regra bastante simples, que utiliza de derivadas de funções para eliminar indeterminações no cálculo de limites. Faremos alguns exemplos ilustrativos desta regra.

#### Principais materiais

Além deste guia de estudos, você assistirá a uma vídeo aula de apresentação do Módulo 4 e realizará atividades no Ambiente Virtual de Aprendizagem.

### **Tempo de dedicação neste módulo**

Para desenvolver as atividades deste módulo, recomendo uma dedicação de, pelo menos, 22 horas de estudo, distribuídas entre a leitura do material didático e realização das atividades.

### **Principais avaliações**

Participação nas atividades propostas para o módulo e envio de arquivo contendo exercícios resolvidos para uma das atividades.

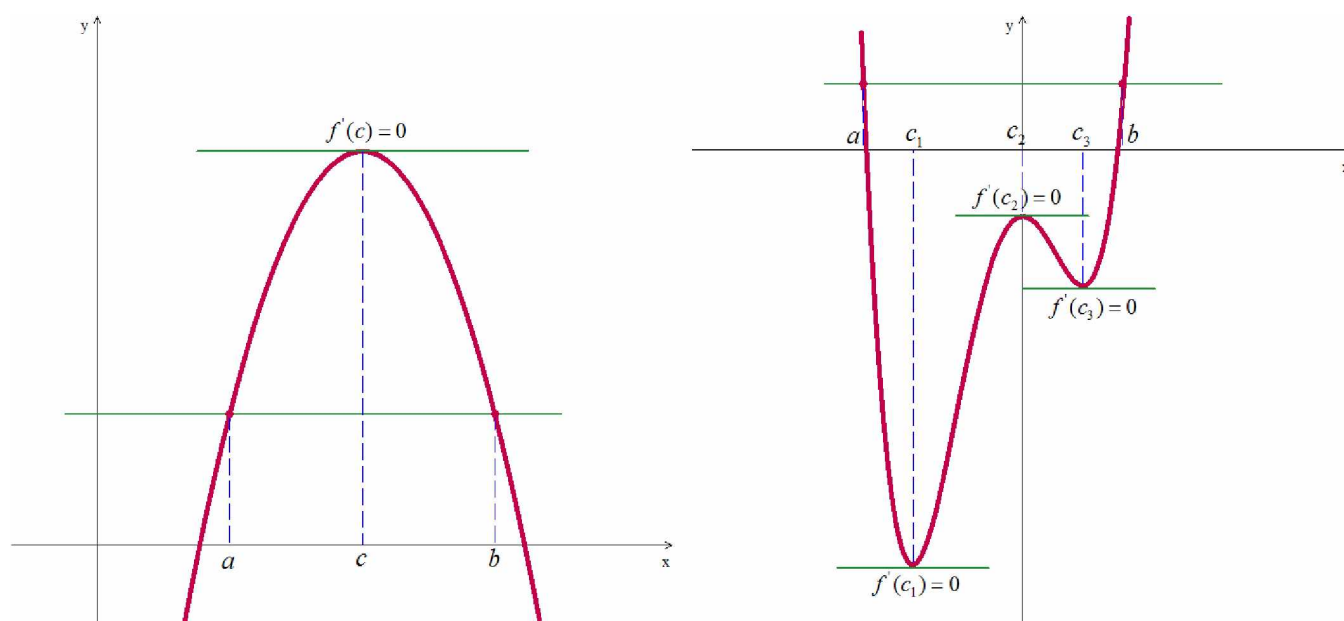
Caro(a) aluno(a), convidamos você a voltar ao AVA agora para entender um pouco mais do que será estudado neste módulo. Assista à video aula de apresentação do Módulo 4, correspondente à Atividade 14.



## I - TEXTO BÁSICO

### 4.1 Teorema de Rolle e Teorema do valor médio

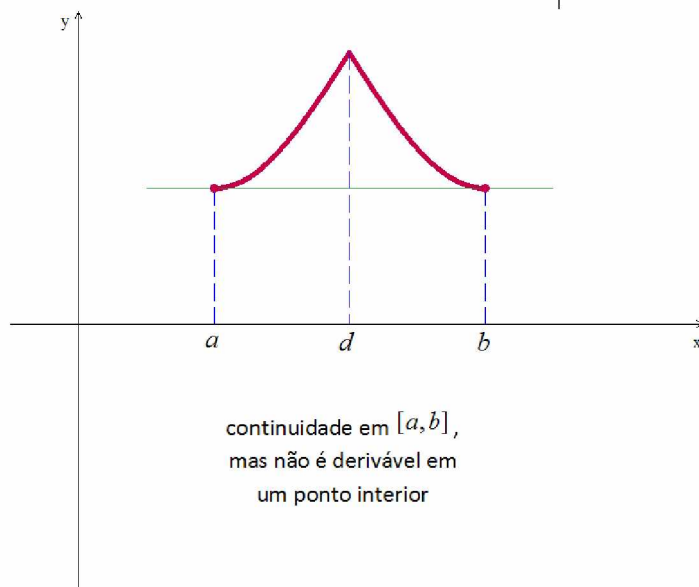
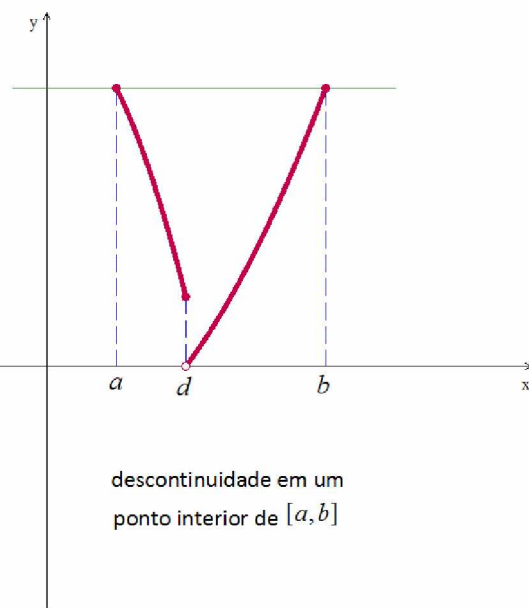
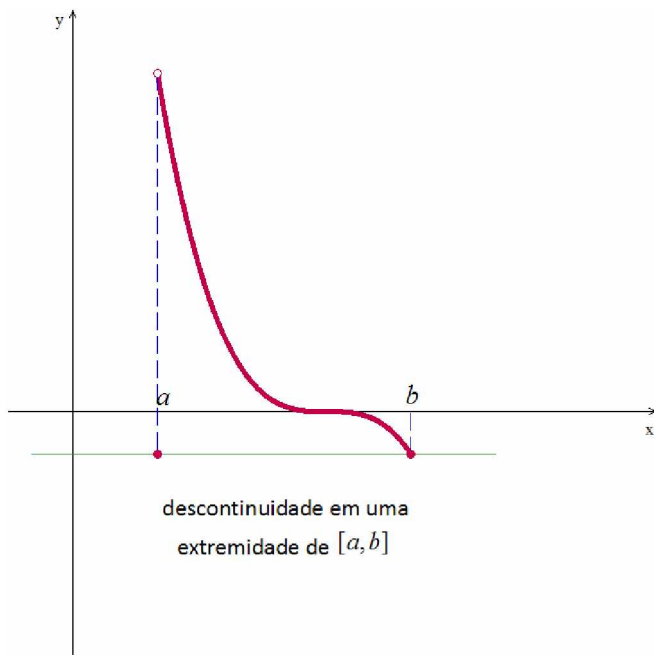
Observando o gráfico representado abaixo, se uma função derivável cruza uma reta horizontal em dois pontos diferentes, existe pelo menos um ponto entre eles em que a tangente é horizontal ao gráfico e a derivada é zero. Ela pode ter apenas uma tangente horizontal (letra a) ou mais de uma (letra b).



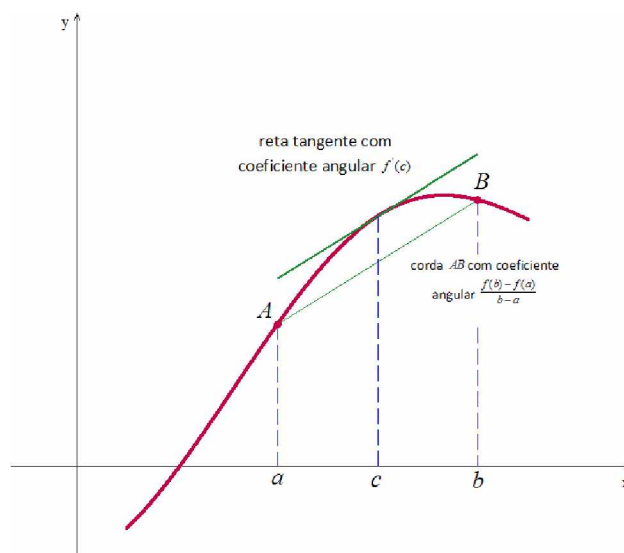
**Teorema de Rolle:** Suponha que  $y = f(x)$  seja contínua em todos os pontos do intervalo fechado  $[a, b]$  e derivável em todos os pontos de seu interior  $(a, b)$ . Se  $f(a) = f(b)$ , então há pelo menos um número  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .



Observe nos gráficos abaixo que as hipóteses do teorema de Rolle são essenciais. Mesmo que elas não sejam verdadeiras em apenas um ponto, o gráfico pode não apresentar uma tangente horizontal.



O principal uso do teorema de Rolle é na demonstração do teorema do valor médio. Este último foi estabelecido por Joseph-Louis Lagrange e corresponde a uma versão inclinada do teorema de Rolle. Ele garante a existência de um ponto onde a reta tangente é paralela à corda  $AB$ .





**Teorema do valor médio:** Suponha que  $y = f(x)$  seja contínua em todos os pontos do intervalo fechado  $[a, b]$  e derivável em todos os pontos de seu interior  $(a, b)$ . Então, há pelo menos um

número  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**Exemplo 37:** Seja a função  $f$  definida por  $f(x) = x^3 - 8x - 5$ . Calcule diretamente um número  $c \in (1, 4)$  tal que a tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(c, f(c))$  seja paralela à secante entre os dois pontos  $(1, f(1))$  e  $(4, f(4))$ .

Sendo  $f$  um polinômio, já sabemos que esta função é contínua em  $[1, 4]$  e diferenciável em  $(1, 4)$ . O teorema do valor médio garante que existe um número  $c \in (1, 4)$  tal que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , onde  $a = 1$  e  $b = 4$ . Pelas regras de derivação, temos que  $f'(x) = 3x^2 - 8$ , logo  $f'(c) = 3c^2 - 8$ . Além disso,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(4^3 - 8 \cdot 4 - 5) - (1^3 - 8 \cdot 1 - 5)}{3} = \frac{27 - (-12)}{3} = 13. \text{ Assim,}$$

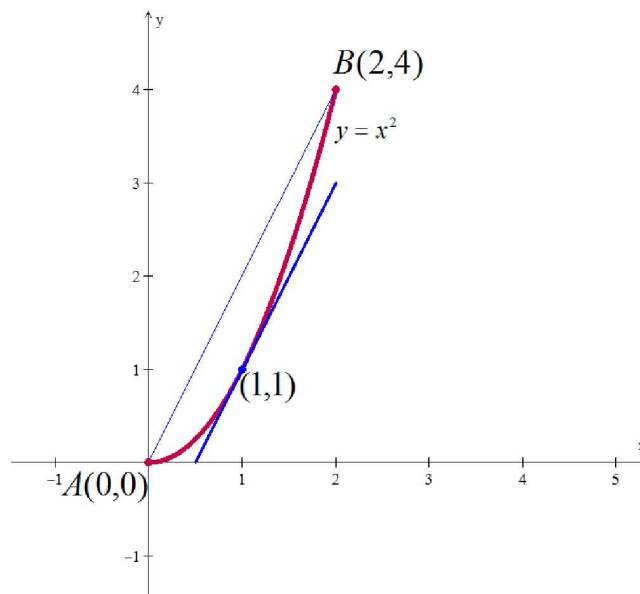
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow 3c^2 - 8 = 13 \Rightarrow 3c^2 = 21 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \pm\sqrt{7}. \text{ Considerando que } c \in (1, 4),$$

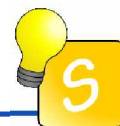
concluimos que  $c = \sqrt{7}$ .

**Exemplo 38:** A função  $f$  definida por  $f(x) = x^2$  é contínua para  $0 \leq x \leq 2$  e derivável para  $0 < x < 2$ . Como  $f(0) = 0$  e  $f(2) = 4$ , o teorema do valor médio diz que, em algum ponto  $c \in (0, 2)$ , a derivada

$f'(x) = 2x$  deve ter o valor  $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2} = 2$ . Nesse caso, podemos identificar  $c$  resolvendo a

equação  $2c = 2$  para obter  $c = 1$ . Veja o gráfico.





Nem sempre é fácil calcular algebricamente, apesar de sabermos que ele sempre existe.



**Significado físico do teorema do valor médio:** Podemos pensar no número  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  como a variação média de  $f$  em  $[a,b]$  e em  $f'(c)$  como uma variação instantânea. O teorema do valor médio diz que, em algum ponto interior, a variação instantânea deve ser igual à variação média ao longo de todo o intervalo.

**Exemplo 39:** Se uma moto que acelera a partir de zero leva 8 segundos para percorrer 100 metros, sua velocidade média no intervalo de 8 s é  $100/8 = 12,5$  m/s. Segundo o teorema do valor médio, em algum momento durante a aceleração o velocímetro deverá marcar exatamente 12,5 m/s.

No início da seção, perguntamos que tipo de função teria uma derivada nula ao longo de todo um intervalo dado. A primeira consequência (corolário) do teorema do valor médio fornece a resposta: somente funções constantes possuem derivadas zero.



**Corolário 1:** Se  $f'(x) = 0$  em todos os pontos de um intervalo aberto  $(a,b)$ , então  $f(x) = c$ , para qualquer  $x \in (a,b)$ , onde  $c$  é uma constante.



Você pode tentar demonstrar este corolário 1: tomando dois pontos  $x_1$  e  $x_2$  do intervalo  $(a,b)$ , com  $x_1 < x_2$ , use o teorema do valor médio para demonstrar que  $f(x_1) = f(x_2)$ .



Uma pausa na teoria para praticar: vá ao ambiente virtual de aprendizagem para iniciar os exercícios da Atividade 16, referentes a esta seção.



## 4.2 Derivadas de ordem superior a um

Já vimos que se  $r(t)$  é a posição de um projétil em movimento, então sua velocidade é definida como a taxa de variação instantânea de  $r$  em relação ao tempo, ou seja,  $v(t) = \frac{dr}{dt}(t) = r'(t)$ . Além disso, a aceleração do projétil é a taxa de variação instantânea da velocidade em relação ao tempo. Logo,

$a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}(t)\right)$  ou  $a(t) = v'(t) = (r'(t))'$ , isto é, para encontrar a aceleração, devemos derivar a posição duas vezes em relação ao tempo.

Em geral, se  $f$  é uma função diferenciável em todo o seu domínio, escrevemos  $f'$  (ou  $\frac{df}{dx}$ ) para sua função derivada. Se  $f'$  também é diferenciável, podemos calcular sua derivada, que será chamada de **segunda derivada de  $f$**  e simbolizada por  $f''$  (ou  $\frac{d^2f}{dx^2}$ ). Continuando, se for possível, obtemos  $f'''$  (ou  $\frac{d^3f}{dx^3}$ ) e assim por diante.

**Exemplo 40:** Encontre as três primeiras derivadas de cada função.

$$\text{a) } f(x) = 15x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x + 4 \quad \text{b) } g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Resolução:

a) Como esta função é um polinômio, então ela é diferenciável e suas derivadas também serão polinômios. Logo, poderíamos derivar quantas vezes quiséssemos.

$$\frac{df}{dx}(x) = 60x^3 - 24x^2 + 6x - 2$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) = 180x^2 - 48x + 6$$

$$\frac{d^3f}{dx^3}(x) = 360x - 48$$

b) Considerando que  $x \neq 0$  para que esta função seja definida, podemos derivá-la escrevendo primeiramente  $g(x) = 2x^2 + x^{-2}$  e depois usando as regras da soma e da potência.

$$\frac{dg}{dx}(x) = 4x - 2x^{-3} = 4x - \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2}(x) = 4 - 2(-3x^{-4}) = 4 + 6x^{-4} = 4 + \frac{6}{x^4}$$

$$\frac{d^3 g}{dx^3}(x) = 6(-4x^{-5}) = -24x^{-5} = -\frac{24}{x^5}$$



Em outras disciplinas serão utilizadas as derivadas de ordem  $n$ , para  $n$  qualquer. Por enquanto, nesta disciplina de Cálculo 1, trabalharemos apenas com as derivadas de primeira e segunda ordem.



Volte ao AVA para se divertir com exercícios desta seção, continuando na lista da Atividade 16.

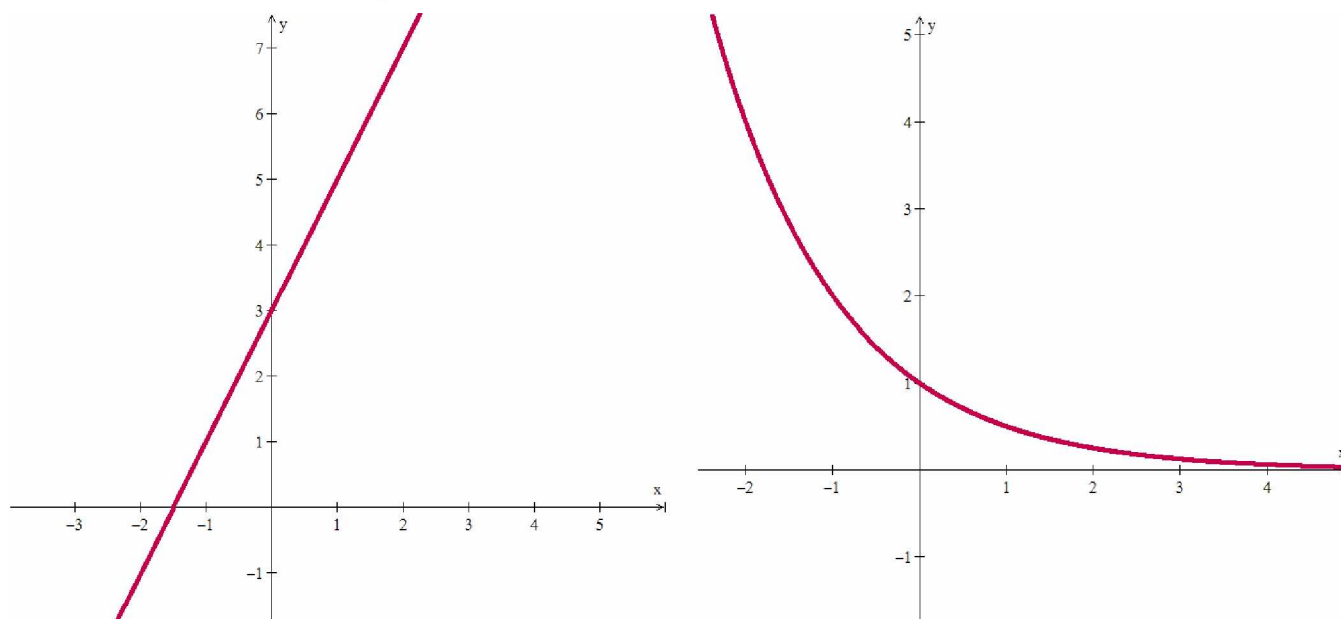
### 4.3 Construção de gráficos de funções

Depois de tantos conceitos aprendidos até aqui, vamos usá-los como ferramentas que refinam mais a construção do gráfico de uma função. Antes de estudar Cálculo, você provavelmente construía gráficos usando aquele procedimento aprendido no ensino Médio: atribuir alguns valores para a variável  $x$ , calcular suas imagens  $f(x)$ , marcar os pares ordenados  $(x, f(x))$  no plano cartesiano e por fim “ligar” os pontos para formar o gráfico. Agora, veremos que para esboçar o gráfico de uma função derivável, podemos utilizar a primeira e segunda derivada da função, obtendo um gráfico que ressalta as principais características da função.

#### 4.3.1 Funções crescentes e decrescentes

Ao esboçar o gráfico de uma função derivável, convém saber onde ela cresce (sobe da esquerda para a direita) ou decresce (cai da esquerda para a direita) ao longo de um intervalo.

**Exemplo 41:** Observe as duas funções representadas pelos seus gráficos. A primeira é crescente e a segunda é decrescente em  $\mathbf{R}$ .





**Teorema 10:** Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ .

i) Se  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $f$  é crescente em  $[a, b]$ .

ii) Se  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $f$  é decrescente em  $[a, b]$ .



Já sabíamos determinar quando uma função de 1º grau – cujo gráfico é uma reta – é crescente ou decrescente, por meio do sinal do coeficiente angular. Agora também podemos ver isto através de sua derivada. Compare os dois métodos.

**Exemplo 42:** Determine os intervalos onde a função  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  é crescente ou decrescente e esboce seu gráfico.

Resolução: O primeiro passo é calcular a primeira derivada de  $f$  e estudar o sinal desta função.

Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$ , que é uma função de 2º grau cujas raízes são 1 e -1. Como o coeficiente de  $x^2$  é igual a 3 (positivo), sabemos que o gráfico desta função é uma parábola voltada para cima. Dessa forma, podemos descobrir o sinal de  $f'$  em cada intervalo:

Intervalo	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
Sinal da função $f'$	+	-	+
Crescimento de $f$	crescente	decrescente	crescente

Assim,  $f(x)$  é crescente para  $x < -1$  ou para  $x > 1$  e  $f(x)$  é decrescente para  $-1 < x < 1$ .

O segundo passo é calcular a imagem dos pontos nos quais  $f'$  troca de sinal, ou seja, nos pontos -1 e 1.

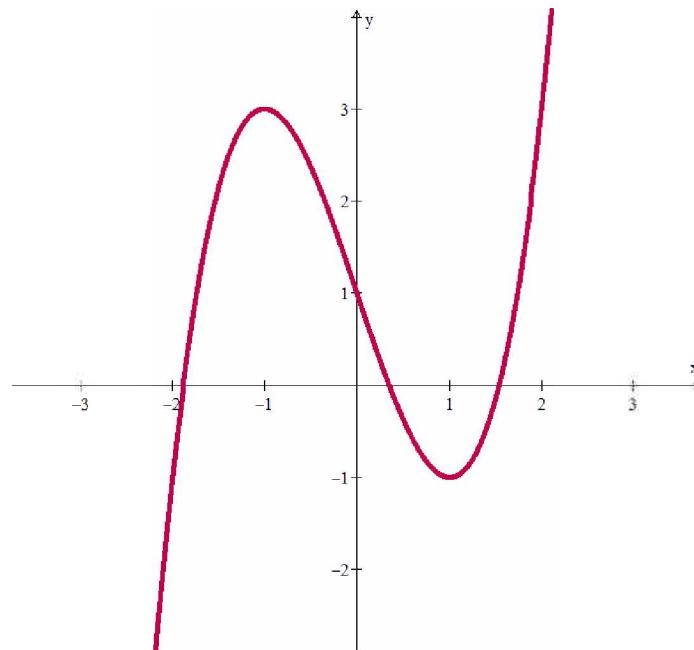
Temos que  $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$  e  $f(1) = 1^3 - 3(1) + 1 = -1$ .

O terceiro passo para completar o gráfico da função é calcular os limites no infinito. Temos:

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^3 \cdot \left( 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] = +\infty$ , pois  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = 1 - 0 + 0 = 1$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x^3 \cdot \left( 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] = -\infty$ , pois  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = 1 - 0 + 0 = 1$

Por fim, podemos usar todas estas informações para esboçar o gráfico desta função:



### 4.3.2 Concavidade

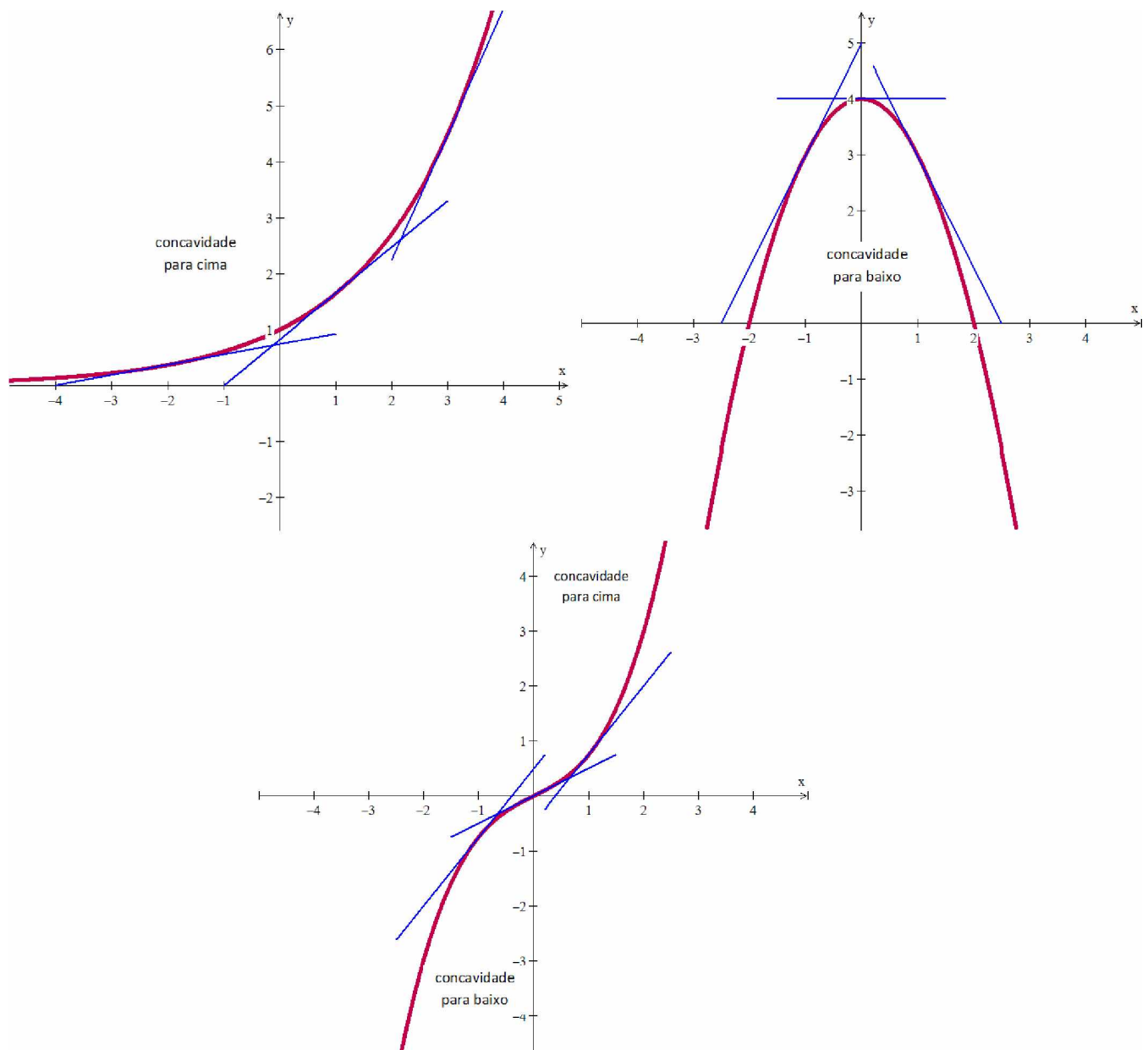
Outro aspecto que pode ser analisado para a construção do gráfico de uma função é a sua concavidade, que será definida abaixo. Veremos como a segunda derivada nos fornece informações sobre o modo como o gráfico de uma função derivável entorta ou muda de direção. Juntando o conhecimento sobre o crescimento da função – visto na seção anterior – e o comportamento das assíntotas – visto no módulo 2 – podemos agora esboçar um gráfico preciso de uma função. Ao organizar todas essas ideias em um procedimento coerente, fornecemos um método para esboçar gráficos que revela as principais características da função. A análise gráfica e interpretação de dados tem um papel importante nas aplicações da matemática em diversas áreas do conhecimento.



**Definição 16:** Seja  $I$  um intervalo aberto contido no domínio de uma função  $f$ .

- i) Dizemos que o gráfico de  $f$  tem a **concavidade voltada para cima** em  $I$  se  $f'$  é crescente em  $I$ .
- ii) Dizemos que o gráfico de  $f$  tem a **concavidade voltada para baixo** em  $I$  se  $f'$  é decrescente em  $I$ .

**Exemplo 43:** Observe os gráficos representados abaixo. No primeiro, vemos que o gráfico da função tem a concavidade voltada para cima. Podemos perceber que a definição 16 está adequada, pois a derivada desta função é sempre crescente, já que os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico da função aumentam à medida que  $x$  aumenta. No segundo gráfico, vemos que sua concavidade é sempre voltada para baixo, o que corresponde à definição 16 também, visto que a derivada neste caso é sempre decrescente (o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico diminui à medida que  $x$  aumenta). E no terceiro gráfico, vemos que a função muda de concavidade no ponto  $x = 0$ .



Veremos no teorema abaixo que é possível analisar a concavidade do gráfico da função a partir do sinal da segunda derivada dela.



**Definição 17:** Um ponto  $(c, f(c))$  do gráfico de uma função  $f$  é chamado **ponto de inflexão** se  $f$  é contínua em  $c$  e existe um intervalo aberto contendo  $c$  no qual o gráfico de  $f$  muda de concavidade.

Assim, o ponto  $x = 0$  é um ponto de inflexão do terceiro gráfico acima.



**Teorema 11:** Seja  $f$  uma função duas vezes diferenciável em um intervalo aberto  $I$ .

- i) Se  $f''(x) > 0$ , para todo  $x \in I$ , então o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima em  $I$ .
- ii) Se  $f''(x) < 0$ , para todo  $x \in I$ , então o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo em  $I$ .

**Exemplo 44:** Estude a concavidade no gráfico de  $f(x) = 12 + 2x^2 - x^4$  e esboce seu gráfico.

Temos que  $f'(x) = 4x - 4x^3$  e  $f''(x) = 4 - 12x^2$ .

Como o gráfico de  $f''(x) = 4(1 - 3x^2)$  é uma parábola voltada para baixo cujas raízes são  $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$  (verifique esta afirmação!), o estudo do sinal de  $f''$  nos fornece:

<b>Intervalo</b>	$x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$	$x > \frac{\sqrt{3}}{3}$
<b>Sinal da função <math>f''</math></b>	-	+	-
<b>Concavidade do gráfico de <math>f</math></b>	Côncavo para baixo	Côncavo para cima	Côncavo para baixo

Assim, pelo teorema 11, podemos dizer que o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima para  $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$  e que o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo para  $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$  ou  $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Como  $f$  é uma função contínua em todos os reais, segue pela definição 17 que  $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$  são as abscissas dos pontos de inflexão.

Para esboçar o gráfico de  $f$  com mais precisão, ainda podemos estudar o sinal da primeira derivada e calcular os limites no infinito. Vamos lá?

Como  $f'(x) = 4x(1 - x^2) = 4x(1 - x)(1 + x)$ , podemos estudar o sinal de cada parcela deste último produto de funções e depois multiplicar os sinais em cada intervalo obtido:

<b>Intervalo</b>	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
<b>Sinal da função <math>4x</math></b>	-	-	+	+
<b>Sinal da função <math>1 - x</math></b>	+	+	+	-
<b>Sinal da função <math>1 + x</math></b>	-	+	+	+
<b>Sinal da função <math>f'</math></b>	+	-	+	-
<b>Crescimento de <math>f</math></b>	crescente	decrecente	crescente	decrecente

Assim, concluímos pelo teorema 10 que  $f$  é crescente para  $x < -1$  ou  $0 < x < 1$  e que  $f$  é decrescente para  $-1 < x < 0$  ou  $x > 1$ .

Quanto aos limites no infinito, temos:

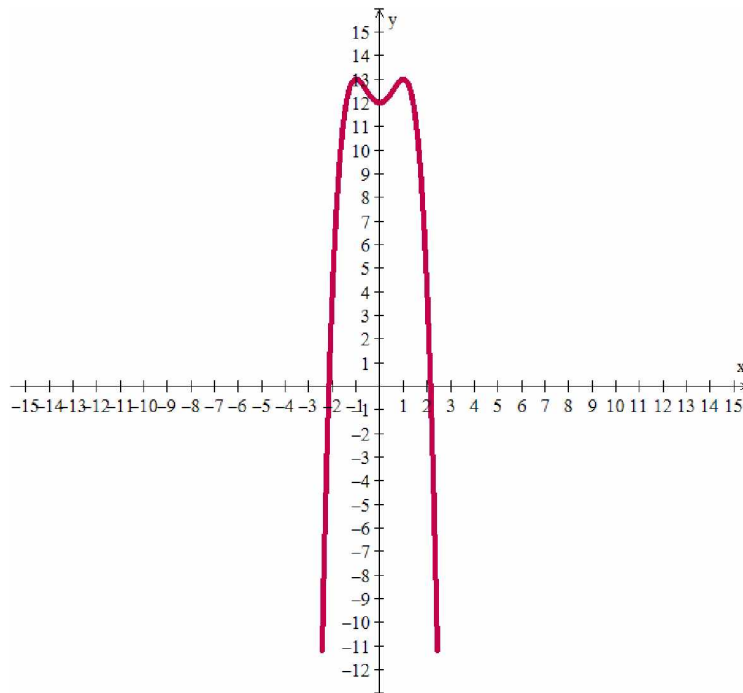
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (12 + 2x^2 - x^4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^4 \left( \frac{12}{x^4} + \frac{2}{x^2} - 1 \right) \right] = -\infty, \text{ pois } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{12}{x^4} + \frac{2}{x^2} - 1 \right) = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (12 + 2x^2 - x^4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x^4 \left( \frac{12}{x^4} + \frac{2}{x^2} - 1 \right) \right] = -\infty, \text{ pois } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{12}{x^4} + \frac{2}{x^2} - 1 \right) = 0 + 0 - 1 = -1.$$

Além disso, é bom calcular as imagens destes pontos onde  $f'$  e  $f''$  mudam de sinal para plotar no gráfico:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{113}{9}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{113}{9}, \quad f(-1) = 13, \quad f(0) = 12, \quad f(1) = 13$$

Por fim, podemos agrupar todas as informações obtidas e montar o gráfico da função:



### Diretrizes para a construção do gráfico de uma função

Para esboçar à mão o gráfico de uma função  $f$ , devemos tentar responder às seguintes perguntas:

- ✓ Qual o domínio de  $f$ ? Determinar os valores de  $x$  para os quais  $f$  existe. Nestes pontos, calcular os limites laterais, que poderão ser assíntotas verticais.
- ✓ Em que pontos (se existirem)  $f$  é descontínua? Nestes pontos, calcular os limites laterais, que poderão ser assíntotas verticais.

- ✓ Onde o gráfico de  $f$  intercepta os eixos coordenados? Basta fazer  $x=0$  e depois  $y=0$ , se possível.
- ✓ O gráfico de  $f$  possui alguma assíntota horizontal? Basta calcular os limites no infinito.
- ✓ Em que intervalos  $f$  é crescente? E decrescente? Basta estudar o sinal de  $f'$ .
- ✓ Em que intervalos  $f$  é côncava para cima? E para baixo? Basta estudar o sinal de  $f''$ .



Chegou a hora de praticar bastante: no AVA, trabalhe com exercícios para construção de alguns gráficos, continuando na lista da Atividade 16. Siga as diretrizes listadas acima, mas não se preocupe se não for possível responder a todas as perguntas. Mesmo assim é possível construir o gráfico. E veja quantos gráficos você é capaz de fazer agora que aprendeu um pouco de Cálculo!

#### 4.4 Máximos e mínimos locais e globais

Nesta seção veremos como identificar e localizar valores extremos (máximos ou mínimos) de uma função a partir de sua derivada. Este assunto é de extrema importância nos problemas de otimização, nos quais o pesquisador procura identificar a melhor forma de fazer algo. Por exemplo: a quantidade de material necessária para uma produção no menor custo, a força que deve ser aplicada numa partícula para que o deslocamento ocorra no menor tempo.



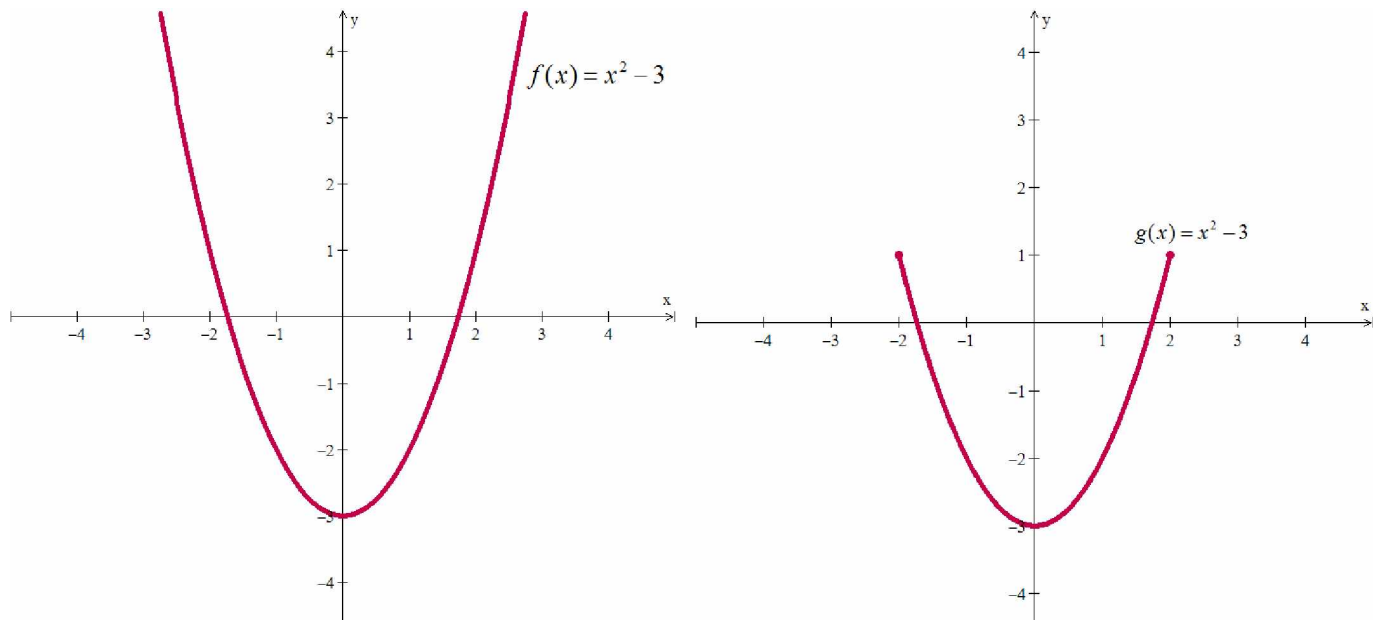
**Definição 18:** Seja  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $c \in D$ .

i) Dizemos que  $f$  tem um **valor máximo absoluto** em  $c$  se  $f(x) \leq f(c)$ , para todo  $x \in D$ . Neste caso,  $c$  é chamado de **ponto de máximo absoluto** de  $f$ .

ii) Dizemos que  $f$  tem um **valor mínimo absoluto** em  $c$  se  $f(x) \geq f(c)$ , para todo  $x \in D$ . Neste caso,  $c$  é chamado de **ponto de mínimo absoluto** de  $f$ .

**Exemplo 45:** Nos gráficos abaixo, podemos observar se as funções  $f$  e  $g$  têm valores máximos e mínimos





O domínio da função  $f$  é o conjunto dos números reais. Neste caso  $f$  tem o valor mínimo absoluto igual a  $-3$  e não tem máximo absoluto. O ponto  $x = 0$  é o ponto de mínimo absoluto.

Já a função  $g$  tem como domínio o intervalo  $[-2, 2]$  e neste intervalo  $g$  tem o valor mínimo absoluto igual a  $-3$  e o valor máximo absoluto igual a  $1$ . O ponto  $x = 0$  é o ponto de mínimo absoluto e os pontos  $x = -2$  e  $x = 2$  são os pontos de máximo absolutos.

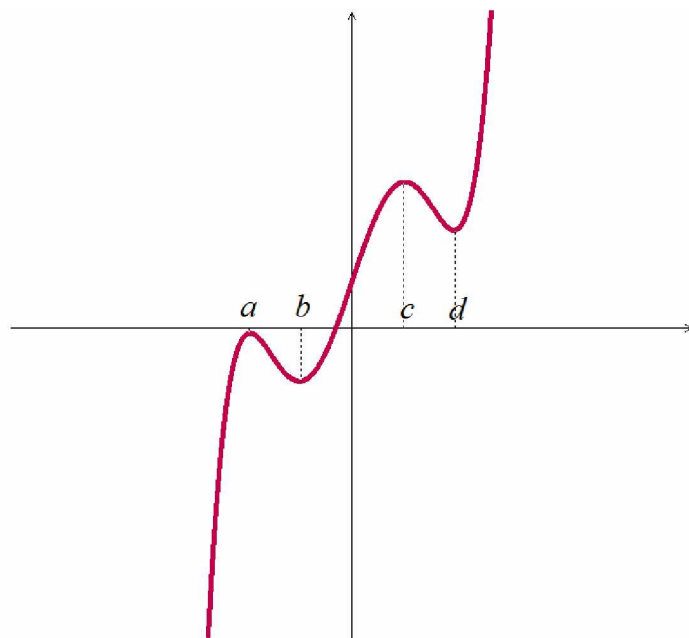


**Definição 19:** Seja  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$  uma função e  $c \in D$ .

- i) Dizemos que  $f$  tem um **valor máximo local** (ou **relativo**) em  $c$  se  $f(x) \leq f(c)$ , para todo  $x$  em um intervalo aberto contendo  $c$ .
- ii) Dizemos que  $f$  tem um **valor mínimo local** (ou **relativo**) em  $c$  se  $f(x) \geq f(c)$ , para todo  $x$  em um intervalo aberto contendo  $c$ .

**Exemplo 46:** No gráfico abaixo, podemos ver que esta função  $f$  tem valores extremos locais. O ponto  $x = a$  é um ponto de máximo local da função, já que perto dele não há valor de  $f$  maior que  $f(a)$ . Da mesma forma, o ponto  $x = c$  também é ponto de máximo local de  $f$ . Já os pontos  $x = b$  e  $x = d$  são pontos de mínimo locais de  $f$ . Perto de  $x = b$  não há valor de  $f$  menor que  $f(b)$ .

No entanto, considerando todo o domínio de  $f$  - que neste caso é  $\mathbf{R}$  - a função não possui nem valor mínimo nem valor máximo absolutos.



Um máximo absoluto também é um máximo local pois, sendo o maior valor de todos, é também o maior valor numa vizinhança sua. Assim, uma lista com todos os máximos locais inclui automaticamente o máximo absoluto, se houver. De modo análogo, uma lista de mínimos locais inclui automaticamente o mínimo absoluto, se houver.

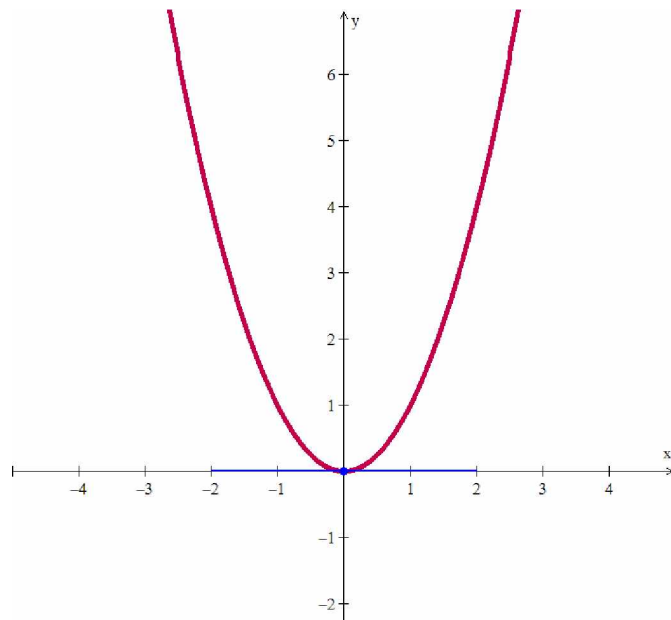
Se voltarmos aos gráficos dos exemplos 43 e 44, poderemos observar que a reta tangente em todo extremo (local ou absoluto) será sempre horizontal. Motivados por essa característica, podemos dar nome para os pontos onde isto acontece e ver no teorema a seguir que esta de fato é uma característica de todos os extremos locais.



**Definição 20:** Dizemos que um ponto  $c$  no interior do domínio de uma função  $f$  é **ponto crítico** de  $f$  se  $f'(c) = 0$  ou se  $f'(c)$  não existe.

**Teorema 12:** Seja  $f$  uma função diferenciável em  $c$ , onde  $c$  é um ponto no interior do domínio de  $f$ . Se  $c$  é um mínimo ou máximo local de  $f$ , então  $f'(c) = 0$ .

**Exemplo 47:** Já sabemos que o gráfico da função  $f(x) = x^2$  é uma parábola voltada para cima com vértice na origem.



Da observação do gráfico podemos dizer que 0 é ponto de mínimo local da função. Podemos calcular a derivada da função neste ponto e verificar a validade do Teorema 12:

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

Assim, 0 é ponto crítico da função.



Cuidado! O teorema 12 não diz que os pontos críticos sempre serão pontos de máximo ou mínimo da função. Se pensarmos no gráfico da função  $f(x) = x^3$ , você verá que  $x = 0$  é ponto crítico, mas não é máximo nem mínimo local dela. Ele será na verdade um ponto de inflexão.

Vamos ver nas seções a seguir critérios que utilizam as derivadas da função para identificar extremos locais e absolutos dela.

#### 4.4.1 Extremos absolutos

Algumas funções podem não ter máximos ou mínimos absolutos. Mas, se estiverem definidas num intervalo fechado de  $\mathbf{R}$ , o teorema abaixo garante a existência destes extremos absolutos.



**Teorema 13:** Se  $f$  é contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ , então  $f$  atinge um valor máximo e um valor mínimo em  $[a, b]$ . Ou seja, existem números  $c_1, c_2 \in [a, b]$  tais que  $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ , para todo  $x \in [a, b]$ .

Assim, pelos teoremas 12 e 13, os únicos pontos do domínio que poderão ser pontos de máximo ou mínimo de uma função definida num intervalo fechado e limitado são os pontos críticos e as extremidades.



**Diretrizes para determinar extremos absolutos de uma função contínua  $f$  em um intervalo  $[a, b]$ :**

- ✓ Calcule os pontos críticos de  $f$ .
- ✓ Calcule a imagem de cada ponto crítico e das extremidades  $a$  e  $b$  pela função  $f$ .
- ✓ Compare os valores obtidos: o maior deles será o valor máximo de  $f$  e o menor deles será o valor mínimo de  $f$ .

**Exemplo 48:** Determine os máximos e mínimos absolutos da função  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$  em  $[-3, 3]$ .

Esta função é contínua em  $[-3, 3]$  (por quê?), logo pelo Teorema 13, os extremos absolutos de  $f$  existem neste intervalo.

Vamos primeiramente calcular os pontos críticos de  $f(x) = (9-x^2)^{1/2}$ . Usando a regra da cadeia, temos que  $f'(x) = \frac{1}{2}(9-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$ . Logo,  $f'(x) = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ . Isto significa que o único ponto crítico de  $f$  é 0.

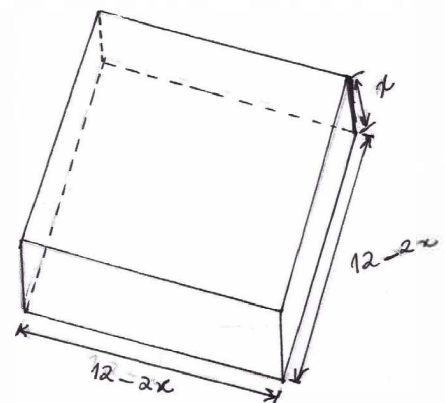
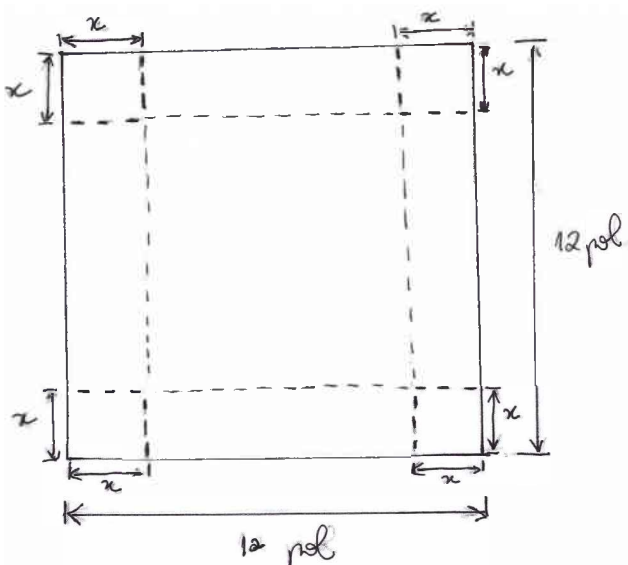
Agora calculamos a imagem deste ponto crítico e das extremidades do intervalo  $[-3, 3]$ :

$$f(0) = 3, f(-3) = 0 \text{ e } f(3) = 0.$$

Por comparação, concluímos que 0 é ponto de máximo de  $f$  com valor máximo correspondente 3 e que 3 e -3 são pontos de mínimo de  $f$  com valor mínimo correspondente 0.

Você pode, como complemento deste exemplo, esboçar o gráfico desta função e visualizar no gráfico estes extremos absolutos.

**Exemplo 49:** Uma caixa sem tampa será construída recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha de estanho que mede 12 X 12 polegadas e dobrando-se os lados para cima. Que tamanho os quadrados das bordas devem ter para que a caixa tenha a capacidade máxima?



Desenhando uma figura onde os quadrados nos cantos têm  $x$  polegadas de lado, o volume total da caixa é uma função de  $x$ , dado pelo produto da área da base pela altura da caixa:

$$V(x) = x(12-2x)^2 = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

Como os lados da folha de estanho medem 12 polegadas, então  $x \leq 6$ . Assim, o domínio de  $V$  é o intervalo  $0 \leq x \leq 6$ .

Esta função  $V$  é contínua em  $[0,6]$  (por quê?), logo pelo Teorema 13, os extremos absolutos de  $V$  existem neste intervalo e queremos determinar um ponto de máximo de  $V$ .

Calculando os pontos críticos de  $V$ :

$$V'(x) = 144 - 96x + 12x^2 = 12(12 - 8x + x^2)$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 6$$

Desses dois pontos críticos, apenas  $x = 2$  pertence ao domínio de  $V$ .

Calculando as imagens deste ponto crítico com as extremidades do intervalo  $[0,6]$ :

$$V(2) = 2(12 - 2 \cdot 2)^2 = 128, \quad V(0) = 0(12 - 2 \cdot 0)^2 = 0 \quad \text{e} \quad V(6) = 6(12 - 2 \cdot 6)^2 = 0$$

Comparando estes valores, concluímos que o volume máximo da caixa é de 128 polegadas cúbicas, obtido quando os quadrados dos cantos são recortados com 2 polegadas de tamanho para os lados.



Assim como este último exemplo, existem muitos problemas em que se quer encontrar um valor máximo ou mínimo de uma função, chamados problemas de otimização. As derivadas são utilizadas na solução destes problemas, que aparecem em áreas como matemática, física, economia e negócios.

#### 4.4.2 Extremos locais (ou relativos)



**Teste da primeira derivada:** Seja  $f$  uma função contínua no intervalo aberto  $(a,b)$ . Seja  $c \in (a,b)$  e suponha que  $f$  seja diferenciável em todo ponto do conjunto  $(a,b)$ , exceto em  $c$ .

i) Se  $f'(x) > 0$ , para todo  $x \in (a,c)$  e  $f'(x) < 0$ , para todo  $x \in (c,b)$ , então  $c$  é ponto de máximo local de  $f$ .

ii) Se  $f'(x) < 0$ , para todo  $x \in (a,c)$  e  $f'(x) > 0$ , para todo  $x \in (c,b)$ , então  $c$  é ponto de mínimo local de  $f$ .

Se voltarmos ao Teorema 10, este teste da primeira derivada fica bastante natural. Veja o caso i): se  $f'(x)$  passa de positiva para negativa no ponto  $c$ , significa que  $f$  passa de crescente para decrescente neste ponto. Pensando no significado gráfico desta última afirmação, é natural concluir que  $c$  é ponto de máximo da função.

**Exemplo 50:** Encontre os pontos de máximo e mínimo locais de  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$  e esboce seu gráfico.

Para usar o teste da primeira derivada, devemos inicialmente estudar o sinal desta derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{3}$$

Intervalo	$x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	$x > 1$
Sinal da função $f'$	+	-	+
Crescimento de $f$	crescente	decrecente	crescente

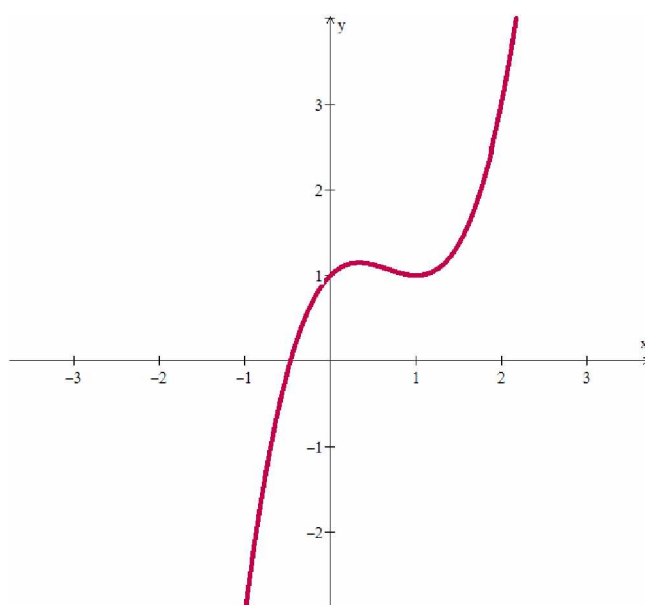
Pelo teste da primeira derivada, vemos que  $x = \frac{1}{3}$  é ponto de máximo local de  $f$  e que  $x = 1$  é ponto de mínimo local de  $f$ .

Além disso, podemos calcular os limites no infinito para depois esboçar o gráfico de  $f$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$$

Por fim, calculamos  $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{31}{27}$  e  $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 1 = 1$  e podemos esboçar o gráfico de  $f$ :



Outra forma de identificar extremos locais de uma função é verificar o sinal da segunda derivada aplicada nos pontos críticos da função, chamado de teste da segunda derivada.



**Teste da segunda derivada:** Seja  $f$  uma função diferenciável num intervalo  $(a, b)$  e seja  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$  e tal que  $f''(c)$  exista.

i) Se  $f''(c) > 0$ , então  $c$  é um ponto de mínimo de  $f$ .

ii) Se  $f''(c) < 0$ , então  $c$  é um ponto de máximo de  $f$ .



A vantagem deste teste é que precisamos analisar o sinal de  $f''$  apenas em  $c$ , enquanto que no teste da primeira derivada era preciso estudar o sinal de  $f'$  em um intervalo contendo  $c$ . A desvantagem é que o teste é inconclusivo quando  $f''(c) = 0$  ou quando  $f''(c)$  não existe. Quando isso ocorre, deve-se utilizar o teste da primeira derivada para identificar os extremos locais.

**Exemplo 51:** Encontre os pontos de máximo e mínimo locais da função  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  e esboce seu gráfico.

Desta vez vamos aplicar o teste da segunda derivada.

Calculando as derivadas:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4(x^2 + 1)^2 - 4x \cdot 2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{4x^4 + 8x^2 + 4 - 16x^4 - 16x^2}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-12x^4 - 8x^2 + 4}{(x^2 + 1)^4}$$

Calculando os pontos críticos de  $f$ :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Logo, 0 é o único ponto crítico de  $f$ .

Aplicando o teste da segunda derivada:

$$f''(0) = \frac{-8 \cdot 0^4 - 8 \cdot 0^2 + 4}{(0^2 + 1)^4} = 4 > 0$$

Portanto, 0 é ponto de mínimo local de  $f$ .

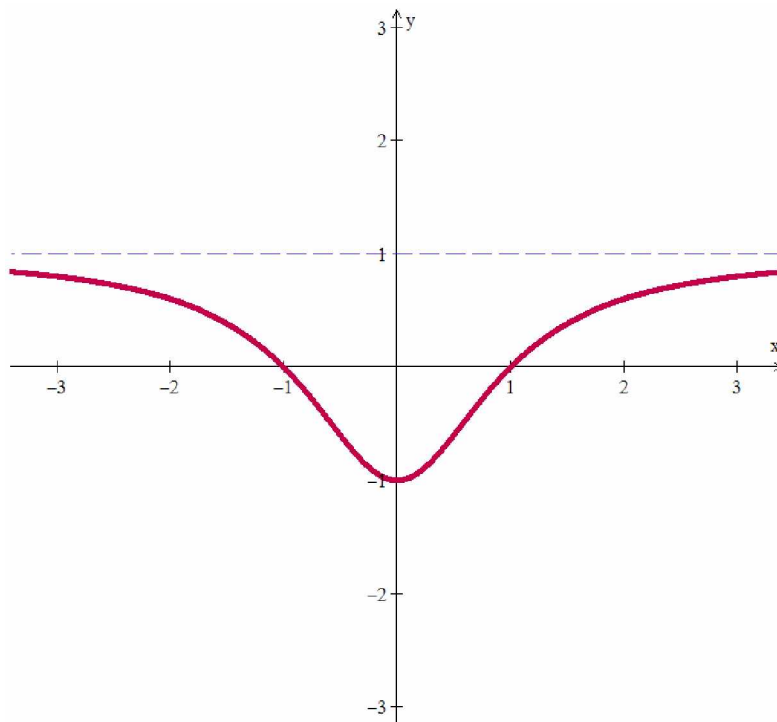
Calculando os limites no infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

Logo, a reta  $y = 1$  é uma assíntota horizontal do gráfico de  $f$ .

Calculando a imagem de 0, temos que  $f(0) = -1$  e daí podemos esboçar o gráfico de  $f$ :



Neste exemplo 49 é possível estudar o sinal de  $f'$  e  $f''$  para fazer o gráfico bem detalhado. Você pode verificar isto?





Volte ao AVA para fazer exercícios sobre extremos – locais e absolutos – de funções, disponíveis na lista da Atividade 16.

#### 4.5 Regras de L'Hôpital

Bernoulli descobriu uma regra usando derivadas para calcular limites de frações cujos numeradores e denominadores se aproximam de zero ou de infinito. Ela é conhecida hoje como regra de L'Hôpital, em homenagem ao nobre francês que escreveu o primeiro texto introdutório de cálculo, onde ela aparece.



**Regra de L'Hôpital (para a forma indeterminada  $\frac{0}{0}$ ):** Seja  $I$  um intervalo aberto contido no domínio de uma função diferenciável  $f$ , seja  $J$  um intervalo aberto contido no domínio de uma função diferenciável  $g$  e seja  $a \in I \cap J$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ,  $g'(x) \neq 0$ , para todo  $x \in J \setminus \{a\}$  e  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Exemplo 52:** Calcule os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2x - 2}$

Resolução:

a) Ao substituir  $x$  por 0 na função, obtemos uma indeterminação da forma  $\frac{0}{0}$ , logo podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

b) Também neste caso temos que o limite é da forma  $\frac{0}{0}$ , então pela regra de L'Hôpital segue que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2x - 2} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{2} = \frac{1}{2}$$

**Observações:**

- 1) Esta regra de L'Hôpital também é válida para limites laterais, isto é, podemos substituir  $\lim_{x \rightarrow a}$  por  $\lim_{x \rightarrow a^+}$  ou por  $\lim_{x \rightarrow a^-}$  no teorema anterior que o seu enunciado continua válido.
- 2) Esta regra de L'Hôpital continua válida para limites no infinito, isto é, podemos substituir  $\lim_{x \rightarrow a}$

por  $\lim_{x \rightarrow \infty}$  (ou por  $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ ) no teorema anterior. Nesse caso, devemos supor que  $f$  e  $g$  sejam diferenciáveis em um intervalo da forma  $(M, \infty)$  (respectivamente,  $(-\infty, M)$ ) e que  $g'$  não se anula neste intervalo.

- 3) É possível aplicar a regra de L'Hôpital sucessivas vezes, desde que se continue obtendo limites da forma  $0/0$ .

**Exemplo 53:** Calcule o limite  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5}{x}\right)$ .

Neste caso, temos uma indeterminação na forma  $\infty \cdot 0$ , mas podemos transformá-la em  $0/0$  para aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{5}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos\left(\frac{5}{x}\right) \cdot \left(-\frac{5}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{5}{x}\right) = 5 \cdot 1 = 5$$



**Regra de L'Hôpital (para a forma indeterminada  $\infty/\infty$ ):** Seja  $I$  um intervalo aberto contido no domínio de uma função diferenciável  $f$ , seja  $J$  um intervalo aberto contido no domínio de uma função diferenciável  $g$  e seja  $a \in I \cap J$ . Se  $\left|\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right| = +\infty$ ,  $\left|\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right| = +\infty$ ,  $g'(x) \neq 0$ , para todo  $x \in J \setminus \{a\}$  e  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe, então  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Valem também as mesmas observações feitas para a primeira regra de L'Hôpital.

**Exemplo 54:** Calcule os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{e^{1/x}}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}$

Resolução:

a) Como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$ , então o limite pedido é da forma  $\infty/\infty$ . Usando L'Hôpital, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{e^{1/x}} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{1/x}} = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x\right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{1/x}}\right) = 0 \cdot 0 = 0$$

b) Este limite também é da forma  $\frac{\infty}{\infty}$  e teremos que aplicar L'Hôpital três vezes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$$



Cuidado: a regra de L'Hôpital é simples, mas não pode ser aplicada em qualquer situação, apenas nas indeterminações do tipo  $\frac{0}{0}$  e  $\frac{\infty}{\infty}$ .



## II – ATIVIDADES DO TEXTO BÁSICO



Estamos chegando ao fim desta disciplina! Volte à página do nosso curso e complete a Atividade 16. Aproveite os tutores e colegas para discutir as questões.



## III - SÍNTESE DO MÓDULO

Neste módulo você viu:

- como aplicar corretamente os teoremas de Rolle e do valor médio;
- como calcular derivadas de ordem superior a um;
- a aplicação dos teoremas sobre derivadas e dos conceitos de limites laterais e no infinito para construir gráficos de diversas funções;
- o significado geométrico e o método analítico para calcular valores máximos e mínimos de funções;
- como aplicar adequadamente as regras de L'Hôpital no cálculo dos limites de algumas indeterminações.



## IV - REFERÊNCIAS

- LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 2 Vols. 3ª Edição. Ed. Harbra, São Paulo: 1994.
- STEWART, J. *Cálculo*. 2 vols. 4a. ed. São Paulo: Editora Pioneira - Thomson Learning, 2001.
- THOMAS, G. B. *Cálculo*. 2 volumes. Addison Wesley, São Paulo, 2002.
- *Revista do Professor de Matemática*, números diversos associados ao tema em foco.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. Volume 1, LTC, São Paulo, 1987.
- SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*. 2 vols. 2a. ed. São Paulo: Editora Makron Books, 1994.
- MUNEM, M. A. & FOULIS, D. J. Cálculo. (2 vols.). Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, 1982.