

Universidade Federal de Uberlândia  
Curso de Licenciatura em Matemática

# **Oficina de Prática Pedagógica e a Formação do Professor de Matemática**

*Fabiana Fiorezi de Marco  
Beatriz Aparecida Silva Alves  
Carolina Innocente Rodrigues*



**UFU**

2015

Fabiana Fiorezi de Marco, Beatriz Aparecida Silva Alves,  
Carolina Innocente Rodrigues  
Oficina de prática pedagógica e a formação do professor de  
matemática / Fabiana Fiorezi de Marco, Beatriz Aparecida Silva  
Alves, Carolina Innocente Rodrigues  
110p.:il.

Licenciatura em Matemática.

1. Oficina de prática pedagógica e a formação do professor de  
matemática

PRESIDENTE DA REPÚBLICA  
Dilma Vana Rousseff

MINISTRO DA EDUCAÇÃO  
Aloizio Mercadante

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL  
DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA/CAPES  
Jean Marc Georges Mutzig

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA - UFU  
REITOR  
Elmiro Santos Resende

VICE-REITOR  
Eduardo Nunes Guimarães

CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA  
DIRETORA E REPRESENTANTE UAB/UFU  
Maria Teresa Menezes Freitas

SUPLENTE UAB/UFU  
José Benedito de Almeida Júnior

FACULDADE DE MATEMÁTICA – FAMAT – UFU  
DIRETOR  
Luís Antonio Benedetti

COORDENADOR DO CURSO DE LICENCIATURA  
EM MATEMÁTICA – PARFOR  
Rogério de Melo Costa Pinto

COORDENAÇÃO DE TUTORIA  
Janser Moura Pereira

**EQUIPE DO CENTRO DE EDUCAÇÃO A  
DISTÂNCIA DA UFU - CEaD/UFU**

ASSESSORA DA DIRETORIA  
Sarah Mendonça de Araújo

EQUIPE MULTIDISCIPLINAR  
Alberto Dumont Alves Oliveira  
Dirceu Nogueira de Sales Duarte Júnior  
Gustavo Bruno do Vale  
João Victor da Silva Alves  
Otaviano Ferreira Guimarães

SETOR DE FORMAÇÃO CONTINUADA  
Marisa Pinheiro Mourão

EQUIPE DE ESTAGIÁRIOS DO CEAD  
E DO CURSO DE MATEMÁTICA  
Núbia Figueira Prado  
Ueslei Ferreira Costa



# SUMÁRIO

<b>SUMÁRIO</b> .....	<b>5</b>
<b>FIGURAS</b> .....	<b>9</b>
<b>INFORMAÇÕES</b> .....	<b>10</b>
<b>SOBRE AS AUTORAS</b> .....	<b>11</b>
<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>12</b>
<b>AGENDA</b> .....	<b>15</b>
<b>MÓDULO 1</b> .....	<b>19</b>
<i>Algumas Idéias sobre números inteiros, álgebra e geometria</i> .....	<b>21</b>
1. Números Inteiros .....	<b>21</b>
ATIVIDADE I – Fórum de Ideias .....	21
1.1. Sistema de Numeração .....	<b>22</b>
ATIVIDADE III - Leitura e Fichamento .....	25
ATIVIDADE IV - Animais sabem contar? .....	25
ATIVIDADE V - O problema do pastor .....	26
1.2 - Números inteiros positivos e negativos .....	<b>27</b>
ATIVIDADE VI - Pesquisa Bibliográfica – Forum de Ideias .....	28
1.3 - Números inteiros e a regra de sinais na reta numérica .....	<b>29</b>
ATIVIDADE VII - Os números inteiros no comércio .....	31
ATIVIDADE VIII - Explorando diferentes metodologias .....	34
ATIVIDADE IX - Interpretação da regra de sinais na reta numérica (mão única e mão dupla) .....	38
ATIVIDADE X - Um problema dos contrários.....	38
ATIVIDADE XI - Pensando sobre a multiplicação e a divisão na reta numérica ...	39
2. ÁLGEBRA .....	<b>40</b>
ATIVIDADE XII - Fórum de Ideias.....	40
2.1 CONCEPÇÕES SOBRE A ÁLGEBRA .....	<b>41</b>
ATIVIDADE XIV - Refletindo sobre as concepções da álgebra .....	44
ATIVIDADE XV - História da Álgebra.....	45
2.2. Alguns recortes sobre a história da Álgebra .....	<b>46</b>
ATIVIDADE XVI - As linguagens da álgebra.....	48
ATIVIDADE XVII - Resolvendo equações do 2º grau de forma geométrica.....	49

3. Geometria .....	<b>51</b>
ATIVIDADE XVIII - Fórum de Ideias.....	51
ATIVIDADE XIX - Memórias .....	52
ATIVIDADE XXI - Leitura e Fichamento.....	56
ATIVIDADE XXII - Vídeo Básico sobre Geometria .....	58
ATIVIDADE 23 – Trabalhando com tijolo <sup>9</sup> .....	59
ATIVIDADE XXIV - Pesquisa .....	62
ATIVIDADE XXV - Análise de Livro Didático .....	62
ATIVIDADE XXVI - Leitura .....	63
ATIVIDADE XXVII - Volume .....	63
ATIVIDADE XXVIII - Planejamento de Aula.....	65
<b>MÓDULO 2 .....</b>	<b>67</b>
<b><i>ALGUMAS IDEIAS SOBRE FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU, MATEMÁTICA FINANCEIRA E ESTATÍSTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO.....</i></b>	<b>69</b>
1. FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU .....	<b>69</b>
ATIVIDADE I - Fórum de Ideias.....	69
1.1 CONCEITO DE FUNÇÃO .....	<b>70</b>
1.3 O CONCEITO DE FUNÇÃO: UM OLHAR PARA SUA HISTÓRIA .....	<b>71</b>
1.4. OS NÍVEIS DE COMPREENSÃO DO CONCEITO .....	<b>78</b>
1.5. ALGUMAS DEFINIÇÕES DE FUNÇÃO POLINOMIAL DO PRIMEIRO GRAU .....	<b>79</b>
ATIVIDADE III - O ensino de funções e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).....	80
ATIVIDADE IV - O que é uma função? <sup>21</sup> .....	80
2. MATEMÁTICA FINANCEIRA: ALGUNS ELEMENTOS HISTÓRICOS .....	<b>80</b>
ATIVIDADE V - Posto das funções .....	81
ATIVIDADE VI - Observando movimentos.....	82
ATIVIDADE VII - A fábrica de computadores <sup>23</sup> .....	83
ATIVIDADE VIII - Alugando carros .....	83
ATIVIDADE IX - Fórum de Ideias.....	84
2.1 Matemática Financeira: Alguns elementos históricos .....	<b>85</b>
2.2 A matemática financeira e a educação básica .....	<b>89</b>
ATIVIDADE XI - A Matemática Financeira e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).....	
2.3 MATEMÁTICA FINANCEIRA: ALGUNS CONCEITOS .....	<b>91</b>
2.3.2 Juros.....	<b>92</b>

2.3.3 Capitalização Simples .....	<b>94</b>
2.3.4 Capitalização Composta .....	<b>95</b>
ATIVIDADE XII - Fórum de Ideias.....	98
3. ESTATÍSTICA .....	<b>98</b>
3.1 BREVE HISTÓRICO SOBRE ESTATÍSTICA .....	<b>99</b>
3.2 O ENSINO DE ESTATÍSTICA E O PCN .....	<b>102</b>
3.3 CONCEITO DE ESTATÍSTICA .....	<b>103</b>
ATIVIDADE XIV - O ensino de estatística e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).....	103
ATIVIDADE XV - Colocando em prática seus conhecimentos .....	104
REFERÊNCIAS .....	108





## FIGURAS

<i>Figura 1: QUIPU indígena chileno, mostrando números registrados por meio de nós em cordas. Nós maiores são múltiplos dos menores. Armazena 15.024 dados numéricos cujo significado pressupõe-se que seja o censo de uma população Inca em Arica no Chile. (Coleção Museu de Arte Precolombino, Chile).....</i>	<b>22</b>
<b>Figura 2: Escrita dos babilônios.....</b>	<b>24</b>
<i>Figura 3: Reta Numérica .....</i>	<b>29</b>
<i>Figura 4: Reta Numérica .....</i>	<b>29</b>
<i>Figura 5: Reta Numérica .....</i>	<b>30</b>
<b>Figura 6: Economia de subsistência.....</b>	<b>31</b>
<b>Figura 7: Economia de subsistência.....</b>	<b>31</b>
<b>Figura 8: Criação histórica da geometria .....</b>	<b>54</b>
<b>Figura 9: Decomposição de figuras geométricas .....</b>	<b>54</b>
<b>Figura 10: Tábua babilônica <i>Plimpton</i> .....</b>	<b>72</b>
<b>Figura 11: Segmentos de reta para representar a variação de tempo e velocidade ...</b>	<b>72</b>
<b>Figura 12: Atividade Posto das Funções<sup>2 2</sup>.....</b>	<b>81</b>

## INFORMAÇÕES

Prezado(a) aluno(a),

Ao longo deste guia impresso você encontrará alguns “ícones” que lhe ajudará a identificar as atividades.



Fique atento ao significado de cada um deles, isso facilitará a sua leitura e seus estudos.

Destacamos alguns termos no texto do Guia cujos sentidos serão importantes para sua compreensão. Para permitir sua iniciativa e pesquisa não criamos um glossário, mas se houver dificuldade interaja no *Fórum de Dúvidas*.

## SOBRE AS AUTORAS

Fabiana Fiorezi de Marco é licenciada em Matemática pela Universidade de Franca (UNIFRAN), especialista em Matemática Aplicada e Educação Matemática (UNIFRAN), mestrado e doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e Pós-Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo (USP). Desde 2005 é docente da Faculdade de Matemática da UFU, desenvolvendo pesquisas com foco na Formação de Professores de Matemática e Prática Pedagógica, atuando nos seguintes temas: Metodologia do Ensino de Matemática, Resolução de Problemas, Tecnologia Educacional, Jogo, Teoria Histórico-Cultural.

Beatriz Aparecida Silva Alves é licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia, Especialista em Matemática Financeira e Estatística pela Universidade Cândido Mendes, Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia. Atualmente é professora de matemática da educação básica na rede municipal de ensino de Uberlândia atuando nas séries finais do Ensino Fundamental e tutora à distância do Curso de Licenciatura em Matemática PARFOR – UFU.

Carolina Innocente Rodrigues é licenciada em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos, Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia. Atualmente é professora de matemática da educação básica na rede municipal de ensino de Uberlândia atuando nas séries finais do Ensino Fundamental.

# INTRODUÇÃO

Olá, Estudante!

É um prazer tê-lo conosco. Seja bem vindo (a) à disciplina “Oficina de Prática Pedagógica” oferecida ao Curso de Licenciatura em Matemática no contexto do Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica (PARFOR/UFU).

Esperamos que esta disciplina possa auxiliá-lo no entendimento acadêmico sobre aspectos relacionados ao ensino de alguns conteúdos de matemática e que o ajude a pensar em aulas de matemática que convidem seus futuros alunos a se embrenharem pelo mundo desta disciplina.

Neste Guia de Estudos dialogaremos sobre algumas propostas de ensino que poderão auxiliar-lhes nos caminhos a serem percorridos durante o processo de sua atividade pedagógica.

Esta disciplina, com carga horária de 75h, está dividida em dois módulos, divididos da seguinte forma:

- Módulo 1 - Algumas ideias sobre Números Inteiros, Álgebra e Geometria, com 35 horas.
- Módulo 2 - Estatística, Matemática Financeira e Funções, com 40 horas.

Para o desenvolvimento dos conteúdos, os módulos estão organizados com os seguintes materiais didáticos:

**1. Guia de Estudos;**

**2. Ambiente Virtual de Aprendizagem – Moodle;**

**3. Materiais complementares, como textos, web e vídeos.**

Como tempo de dedicação à disciplina, sugerimos que distribua o seu tempo no decorrer das semanas de estudos, com base na carga horária de 75 horas da disciplina. Sugerimos que reserve entre 10 a 12 horas de estudo por quinzena para cada módulo, entre o estudo deste guia, a realização das atividades propostas e leituras complementares que possa realizar.

Adotaremos uma abordagem de avaliação formativa, ou seja, você será avaliado durante

todo o processo de aprendizagem. As atividades desenvolvidas no Ambiente Virtual de Aprendizagem Moodle correspondem a 40% da nota final da disciplina e os 60% restantes referem-se à prova escrita realizada presencialmente, depois de concluídas as atividades do módulo 2, conforme o calendário do curso.

Organize-se e procure se dedicar da melhor forma possível às atividades referentes a esta disciplina. É muito importante, em cada módulo, você realizar as tarefas no tempo estipulado para isso. Se você tiver dificuldade para tal, procure trocar ideias com colegas que estão cursando a disciplina, com o tutor presencial, com o tutor a distância ou com o professor da disciplina.

Desejamos-lhe sucesso em sua caminhada!!!!

As autoras:

Fabiana

Beatriz

Carolina





## AGENDA

MÓDULO	ATIVIDADE	DESENVOLVIMENTO DO CONTEÚDO
Módulo 1 - Algumas idéias sobre Números Inteiros, Álgebra e Geometria (35 horas)	<b>Atividade 1</b> – Fórum de Ideias	Participação no fórum de ideias explorando o conceito de Números Inteiros, acompanhar as postagens de seus colegas e discuti-las.
	<b>Atividade 2</b> - Leitura do Guia de Estudos.	Leitura do item Números Inteiros do Guia de Estudos.
	<b>Atividade 3</b> – Vídeo	Para complementar a leitura do Guia de Estudos, sugerimos Leitura e Fichamento do texto Nexos conceituais de número natural como sustentação para o desenvolvimento de atividades de ensino, de João Paulo Rezende e José Antônio Araújo Andrade.
	<b>Atividade 4</b> – Leitura e Reflexão	Leia com atenção o trecho Animais sabem contar? e elabore suas reflexões a partir de algumas questões.
	<b>Atividade 5</b> - Tarefa	A partir da leitura “O problema do pastor”, responda as questões propostas para auxiliar suas reflexões.
	<b>Atividade 6</b> – Fórum de Ideias	Faça uma pesquisa bibliográfica (CBC, PCN, livros didáticos, paradidáticos, livros de História da Matemática e leitura complementar sugeridas) e socialize seus argumentos com o grupo por meio do Ambiente Virtual de Aprendizagem, no Fórum de Ideias.
	<b>Atividade 7</b> – Fórum de Dúvidas	Leia com atenção o trecho Os números inteiros no comércio e pense sobre as questões propostas. Em caso de dúvidas, utilize o Fórum de Dúvidas para que o grupo possa auxiliar em seu entendimento.

	<b>Atividade 8</b> – Jogo	A partir da vivência de dois jogos, elabore situações-problema envolvendo o conteúdo estudado até o momento.
	<b>Atividade 9</b> – Tarefa	Faça as atividades propostas para postar no moodle para avaliação.
	<b>Atividade 10</b> – Tarefa	Faça as atividades propostas para postar no moodle para avaliação.
	<b>Atividade 11</b> – Tarefa	Faça as atividades propostas para postar no moodle para avaliação.



Módulo	Atividade	Desenvolvimento do Conteúdo
Módulo 2 - Al gumas ideias sobre função pol inomial do 1º grau, matemática financeira e estatística para o ensino fundamental e médio (35 horas)	<b>Atividade 1 – Fórum de Ideias</b>	Participação no fórum de ideias registrando o que entende por função e acompanhamento das postagens de seus colegas e discuti-las.
	<b>Atividade 2 - Leitura do Guia de Estudos.</b>	Leitura do item Função Polinomial do 1º grau do Guia de Estudos.
	<b>Atividade 3 – Pesquisa</b>	Para complementar a leitura do Guia de Estudos, faça uma pesquisa no PCN de matemática sobre o que este documento orienta para o ensino de funções e faça uma reflexão crítica, ou seja, coloque seu ponto de vista sobre tal orientação relacionando ao estudo que acabamos de fazer por meio dos textos apresentados.
	<b>Atividade 4 – Tarefa</b>	A partir da leitura do Guia de Estudos e de conhecimentos obtidos ao longo de sua vida escolar, responda as questões propostas.
	<b>Atividade 5 - Tarefa</b>	Nesta atividade, você deverá fazer uma reflexão sobre o que vivenciou, pensou, aprendeu e também descrever suas dúvidas e possíveis sugestões para a melhoria da atividade.
	<b>Atividade 6 – Tarefa</b>	Nesta atividade você deverá identificar as grandezas e elaborar situações-problema.
	<b>Atividade 7 – Tarefa</b>	Leia com atenção a situação A fábrica de computadores e pense sobre as questões propostas. Em caso de dúvidas, utilize o Fórum de Dúvidas para que o grupo possa auxiliar em seu entendimento.

<b>Atividade 8 – Tarefa</b>	Leia com atenção a situação Alugando carros e pense sobre as questões propostas. Em caso de dúvidas, utilize o Fórum de Dúvidas para que o grupo possa auxiliar em seu entendimento.
<b>Atividade 9 – Fórum de Idéias</b>	Participação no fórum de ideias registrando o que entende por Matemática Financeira e acompanhamento das postagens de seus colegas e discuti-las.
<b>Atividade 10 – Leitura do Guia de Estudos</b>	Leitura do item Matemática Financeira do Guia de Estudos.
<b>Atividade 11 – Pesquisa</b>	Para complementar a leitura do Guia de Estudos, faça uma pesquisa no PCN de matemática sobre “Matemática Financeira” analisando o que este documento orienta e faça uma reflexão crítica.
<b>Atividade 12 – Fórum de Idéias</b>	Participação no fórum de ideias registrando o que entende por Estatística e acompanhamento das postagens de seus colegas e discuti-las.
<b>Atividade 13 – Leitura do Guia de Estudos</b>	Leitura do item Estatística do Guia de Estudos.
<b>Atividade 14 – Pesquisa</b>	Para complementar a leitura do Guia de Estudos, faça uma pesquisa no PCN de matemática sobre “O ensino de estatística”, no bloco Tratamento de Informações e analise o que este documento orienta e faça uma reflexão crítica.
<b>Atividade 15 – Projeto</b>	Nesta atividade serão abordados conceitos advindos dos conteúdos de função polinomial do 1º grau, matemática financeira e estatística mediante a escolha de um tema sugerido para o desenvolvimento da mesma.

# MÓDULO 1

## Algumas idéias sobre Números Inteiros, Álgebra e Geometria

Os objetivos deste módulo são:

- Fazer um resgate histórico para compreender os conceitos de Números Inteiros, Álgebra e Geometria.
- Refletir sobre o ensino de Números Inteiros, Álgebra e Geometria na educação brasileira atual.
- Desenvolver saberes docentes relativos à educação básica relativos à Números Inteiros, Álgebra e Geometria.



## ALGUMAS IDÉIAS SOBRE NÚMEROS INTEIROS, ÁLGEBRA E GEOMETRIA

---

### 1. Números Inteiros



#### ATIVIDADE I – Fórum de Ideias

Neste momento de nosso curso, sugerimos que você:

1. Procure registrar o que significa Números Inteiros para você e como o entende no processo ensino e aprendizagem.

2. Após seus registros pessoais, poste-os no Ambiente Virtual de Aprendizagem, no Fórum de Ideias, socializando com o grupo-classe o que registrou e discuta as questões, suas e dos colegas, que julgar mais relevantes.

Para iniciarmos nossos estudos, acerca do tema Números Inteiros, convidamos você a fazer uma breve viagem na História da Matemática e refletir sobre as dificuldades das civilizações em suas relações com os números.

Vamos lá?

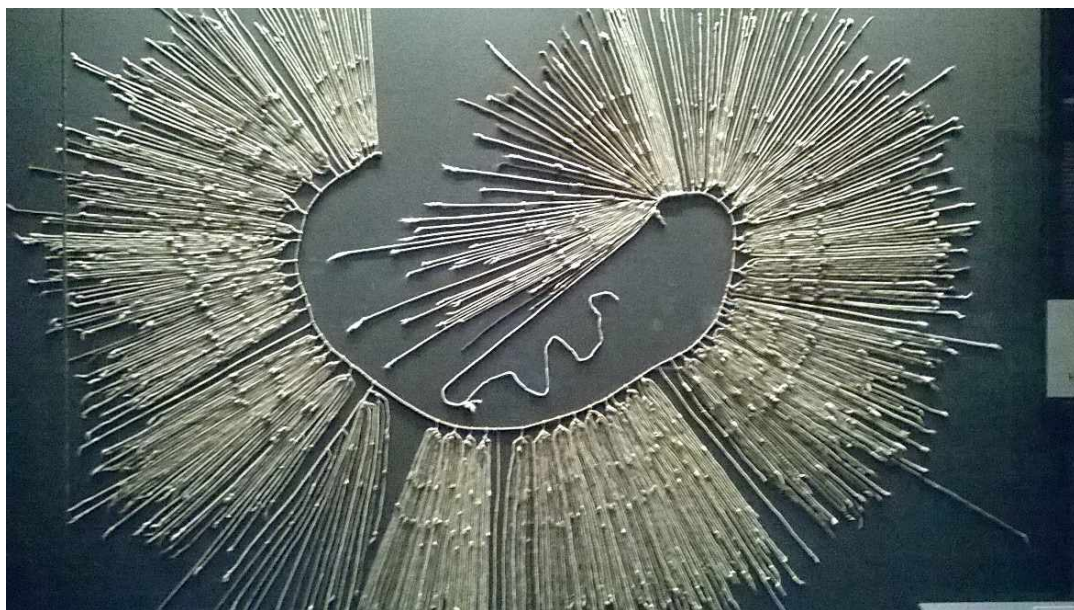
## 1.1. Sistema de Numeração

O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se antes dos registros históricos. Evidências antropológicas apontam que o homem já era capaz de contar há mais de 50.000 anos. Em épocas mais primitivas, o homem tinha o senso numérico, ao menos em reconhecer *mais* e *menos* ao se acrescentar ou retirar quantidades de objetos ou animais, desde que os conjuntos fossem pequenos. Aliás, existem estudos de que alguns animais possuem o senso numérico, como por exemplo, o corvo. (EVES, 2004).

O processo de contagem se modificou de acordo com a evolução gradual da sociedade, à medida que era preciso saber quantos membros, quantos inimigos, quantos animais pertenciam à tribo e etc. Sendo que o método de registro dessas contagens também era simples e foi se tornando mais complexo e completo também a partir das necessidades das sociedades. (EVES, 2004).

O princípio de correspondência biunívoca (ou correspondência um a uma) era utilizado como método de registro, dobrando um dedo da mão para cada animal,








podia-se também contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda. Então, talvez mais tarde, desenvolveu-se um arranjo de sons vocais para registrar verbalmente o número de objetos de um grupo pequeno. (EVES, 2004, p. 26).



*Figura 1: QUIPU indígena chileno, mostrando números registrados por meio de nós em cordas. Nós maiores são múltiplos dos menores. Armazena 15.024 dados numéricos cujo significado pressupõe-se que seja o censo de uma população Inca em Arica no Chile. (Coleção Museu de Arte Precolombino, Chile)*

A sistematização do processo se tornou necessário para efetuar contagens mais complexas, o que originou a ideia de base, pois dispunha-se os números em grupos básicos (de acordo com a conveniência) e a ordem da grandeza era determinado pelo processo de correspondência utilizado. A ideia de base 10 surge da correspondência que os homens utilizavam os dedos da mão. Contudo, não somente a base 10 fez e faz parte dos sistemas de numeração. Até os dias de hoje utilizamos a base 60 para marcarmos o tempo e ângulos (minutos e segundos). Algumas tribos da América do Sul utilizam a numeração de base 5 (*um, dois, três, quatro, mão, mão e um, ..., equivalendo-se a: um, dois, três, quatro, cinco, seis, ...*).

De acordo com Eves (2004), o sistema de agrupamento simples, seria talvez o sistema de numeração mais antigo, em que se agrupavam quantidades a partir de uma base escolhida e a esse agrupamento atribuía-se um símbolo específico, ao que conhecemos hoje por *potências*. Um exemplo são os *hieróglifos egípcios*, a base usada é a 10:

1		Bastão vertical	1
10		Ferradura	10
		Rolo de Pergaminho	100
		Flor de Lótus	1.000
		Dedo curvado	10.000
		Barbato	100.000
		Homem espantado	1.000.000

Assim, qualquer número poderia ser expresso utilizando esses símbolos aditivamente, da direita para a esquerda. Os registros eram feitos em papiros, madeira e cerâmica, numa escrita mais cursiva.

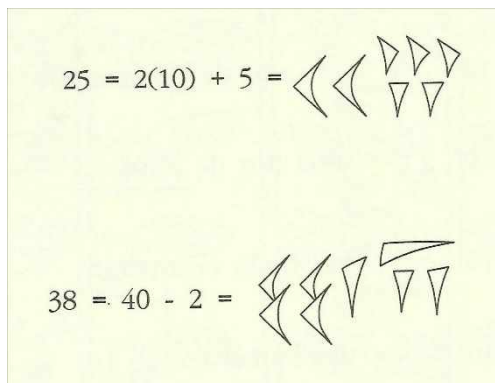


Figura 2: Escrita dos babilônios  
Fonte: História da Matemática (EVES, 2004, p.32)

Outro exemplo é a escrita *cuneiforme* dos babilônios, também de base 10. Por registrarem em tábulas de argila, era mais prático dar formas à símbolos semelhantes à cunhas, podendo também aproximar os símbolos à triângulos. Sua particularidade está na posição que esses símbolos podiam assumir, quando escritos verticalmente expressavam agrupamentos aditivos, porém caso algum símbolo tivesse ligeira inclinação, expressava agrupamento subtrativo.

Os agrupamentos não apenas poderiam ser aditivos como também multiplicativos, como o sistema de numeração chinês-japonês de base 10.

Aproximando do sistema de numeração utilizado por nossa cultura (hindu-arábico), temos os sistemas posicionais, este sistema é uma consequência lógica do sistema de agrupamentos multiplicativos, em que cada dígito representa alguma potência da base.

Todos os sistemas de numeração, conforme breve explanado, advinham das necessidades humanas relacionadas à evolução cultural. Portanto, a relação do homem com o número iniciou-se com os números naturais, que é uma particularidade dos números inteiros.

Para esclarecermos algumas ideias sobre números, temos de compreender os nexos conceituais<sup>1</sup> de número: senso numérico, correspondência um-a-um, qualidade e quantidade, agrupamento, ordenação, valor posicional, base e composição e decomposição (CARAÇA, 1984).

Porém, antes de explorarmos o conceito dos números inteiros, consideramos importante refletir sobre alguns destes nexos conceituais, por isso propomos algumas atividades<sup>2</sup>.

1 Nexos conceituais são os elos internos dos conceitos, ou seja, é a ligação entre o saber pensar e o saber fazer.

2 Atividades elaboradas por: Profª Drª Anna Regina Lanner de Moura, Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura, Elaine S. Araújo, Erica Moreira Ferreira, Fabiana Fiorezi de Marco, Maria do Carmo de Sousa, Maria Elisa M. Bernardes, Micheline Kanaan, Sílvia C. A. Tavares, Wellington L. Cedro





### ATIVIDADE III - Leitura e Fichamento

Para auxiliá-los nas atividades que seguem indicamos a leitura do texto Nexos conceituais de número natural como sustentação para o desenvolvimento de atividades de ensino, de João Paulo Rezende e José Antônio Araújo Andrade. In: Anais... X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Salvador, BA. 7 a 9 de Julho de 2010.

Após atenciosa leitura, faça um fichamento elencando os aspectos que mais lhe chamaram a atenção.

[http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T3\\_CC1762.pdf](http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T3_CC1762.pdf)



### ATIVIDADE IV - Animais sabem contar?

Faça uma leitura atenta do trecho a seguir para, em seguida, refletir sobre ele.

*Contam a história de um homem que decidiu matar um corvo que havia feito um ninho no seu castelo. Ele tentava surpreender o pássaro, mas o corvo percebia e deixava o ninho. O homem chamou um amigo, e eles entraram na torre. Um saiu e o outro ficou escondido, esperando. Mas, o corvo esperto, só retornou ao ninho depois que o segundo, cansado de esperar, também foi embora.*

*No outro dia, eles foram em três pessoas. Dois saíram e o terceiro ficou. O corvo só voltou ao ninho depois que o terceiro foi embora. Repetiram a experiência com cinco pessoas.*

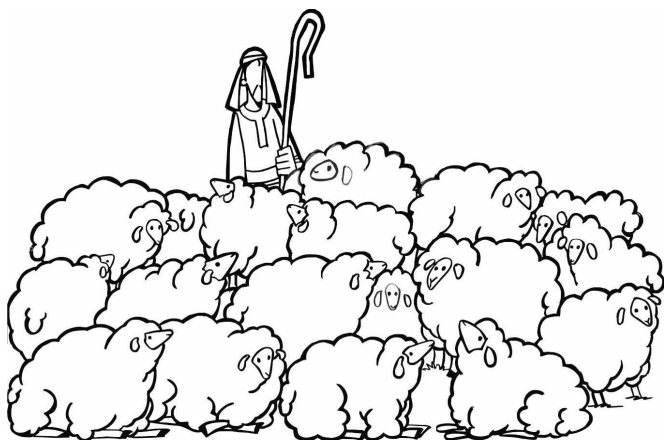
*Depois que a quarta se retirou, o corvo voltou e foi morto pelo quinto homem.*

Refleta individualmente e escreva sobre as questões:

- Será que o corvo sabia contar? Por quê?
- O que vem a ser contagem?
- O que vem a ser senso numérico?



## ATIVIDADE V - O problema do pastor



O pastor guarda as ovelhas no curral.

De manhã precisa soltá-las para que pastem. À tarde o pastor as recolhe.

Como o pastor deve fazer para saber se a quantidade de ovelhas que voltam é a mesma que saíram?

- a) O pastor está contando as ovelhas que saem do seu curral. Mas ele levanta mais dedos do que ovelhas. Neste caso há correspondência biunívoca entre os dedos e as ovelhas? Explique sua resposta.
- b) O pastor está contando os cavalos que saem do seu curral. Mas ele esquece de levantar alguns dedos.
  - a. Neste caso há correspondência biunívoca entre os dedos e os cavalos? Explique sua resposta.
  - b. É possível fazer correspondência biunívoca só no pensamento?
- c) Um pastor contou as ovelhas com pedrinhas. Deixou as pedrinhas no saquinho e as guardou. À tarde as ovelhas voltaram. Para cada ovelha que entrava no curral, o pastor retirava uma pedrinha do saquinho.
  - a. Se sobrassem pedrinhas no saquinho, o que teria acontecido?
  - b. E se faltassem pedrinhas, o que teria acontecido?
  - c. Em qual dos casos houve correspondência biunívoca? Justifique sua resposta.

## 1. 2 - Números inteiros positivos e negativos

Na História da Matemática, as quantidades inteiras positivas (números naturais), foram tratadas naturalmente ao longo dos anos e aqui brevemente a apresentamos, porém ao tratarmos de quantidades inteiras negativas, há certa imprecisão. Como verificar as quantidades inteiras negativas, observando a natureza? Como admitir um número inteiro negativo como solução de um problema?

Os povos primitivos dependiam diretamente da natureza. Ao invés de dominar os diversos movimentos quantitativos, por eles eram dominados. Essa relação com o Universo era harmônica, sem contradições, estável. (LIMA & MOISÉS, 1998). Portanto, como aceitar movimentos contrários, que pareciam desestabilizar tal harmonia? Como manipular quantidades positivas e negativas, numa época em que apenas os números naturais eram utilizados?

Para as civilizações antigas, o número era ferramenta, utilizado como trabalho, como já dito anteriormente. À época, pensar em um número com movimento era um problema, estavam longe da ideia de número abstrato. Essa mudança iniciou-se na Grécia, com Heráclito em 530 a.C., quando o homem não dependia tão exclusivamente da natureza.

Mas o problema de aceitar números negativos como solução ainda era presente, pois predominavam as ideias de Aristóteles, Sócrates e Platão. Tal fato é explícito nos problemas algébricos, quando Diofanto trata de quantidades subtraídas e regra de sinais, mas não admite solução para a equação , por ser absurda.

Na Índia, do século XII, os números positivos são tratados de “propriedades” ou “bens”, enquanto os números negativos são chamados de “dívidas” (SCHUBRING, 2000, p.54).

Nossa história dá um salto, pois as quantidades negativas foram por muitos anos ignoradas, já que as sociedades das diferentes épocas, tratavam tais quantidades de maneiras diferentes, mas sempre rejeitando a existência de um número negativo.

Euler, no entanto, no século XVIII indica no manual de Álgebra admissão de um estatuto de entes matemáticos verdadeiros para os números negativos (SCHUBRING, 2000, p.55) e considera duas séries: 0, 1, 2, 3, 4, 5... e ..., -4, -3, -2, -1, 0.

Para reuni-las sob um único conceito, o dos números inteiros (Euler, 1940 pp.19ss). Euler define também as quatro operações sobre esses números. Embora utilize a interpretação das quantidades como bens ou dívidas, é com o objetivo único de fornecer uma motivação ao cálculo feito com os números inteiros. (SCHUBRING, 2000, p.55).

Os números negativos também foram considerados como falsas posições de quantidades positivas, no século XIX por D'Alembert, Bezout, La Croix, Bourdon, entre outros.

Desta forma, brevemente fizemos um resgate histórico e assim podemos inferir que a necessidade da civilização para os números inteiros deu-se para facilitar os registros e cálculos de contabilidade para o comércio. E, apesar de nos dias atuais aceitarmos as soluções negativas para as equações algébricas, tal fato não é de simples compreensão para estudantes da educação básica.



## ATIVIDADE VI - Pesquisa Bibliográfica – Forum de Ideias

Faça uma pesquisa bibliográfica (CBC, PCN, livros didáticos, paradidáticos, livros de História da Matemática e leitura complementar) em que possam ser respondidas as questões seguintes e a socialização de seus argumentos com o grupo deve ser via Ambiente Virtual de Aprendizagem, no Fórum de Ideias.

- i. Quais os elementos que formam a base do pensamento dos números negativos propostos pelas várias publicações? Exemplifique.
- ii. Quais foram as necessidades internas à matemática que levaram a sistematização dos números inteiros?
- iii. Qual orientação há nos PCNs (BRASIL, 1998) sobre este tema?
- iv. Como este ensino é abordado nos livros didáticos?
- v. Existe algum impedimento de pensarmos nos números inteiros negativos enquanto dívidas ou como oposto de números inteiros positivos?
- vi. Na sua opinião, quais os aspectos dessas publicações que você poderia ter dificuldades/dúvidas para explicar aos alunos? Quais os que facilitariam?
- vii. É possível arriscar a elaborar uma definição conceitual para os números inteiros que não seja a formal?

Você pode utilizar as sugestões abaixo (disponíveis no Ambiente Virtual de Aprendizagem) e outras que considerar pertinente.

- I. BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasília: MEC/ SEF, Brasília, 1998.
- II. CARAÇA, B. J. Conceitos Fundamentais de Matemática, 1ª Edição, Lisboa, Livraria Sá da Costa Editora, 1984.
- III. MARTINI, G. Estratégias de trabalho para a aprendizagem de operações com números inteiros. Rio Grande do Sul: UFRS, 2010.
- IV. SCHUBRING, G. Rupturas no estatuto matemático dos números inteiros. Trad. ROSA, M.M.R. Boletim GEPEM, n. 37, p. 51-64, 2000.
- V. TEIXEIRA, L.R.M. Aprendizagem operatória de números inteiros: obstáculos e dificuldades. Pro-Posições, Campinas, vol. 4, n. 1, 1993.

### 1. 3 - Números inteiros e a regra de sinais na reta numérica

Se pensarmos na reta numérica, podemos afirmar que um número negativo é associado ao seu oposto (número positivo), retomando a ideia dos contrários:

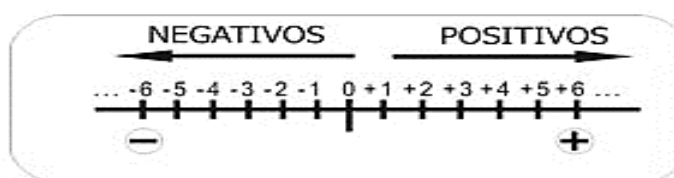


Figura 3: Reta Numérica

Iremos agora, exemplificar uma possibilidade de tratamento da regra de sinais, afastando-nos da mecanização pela repetição da mesma. Recorremos à reta numérica e vejamos a expressão: .

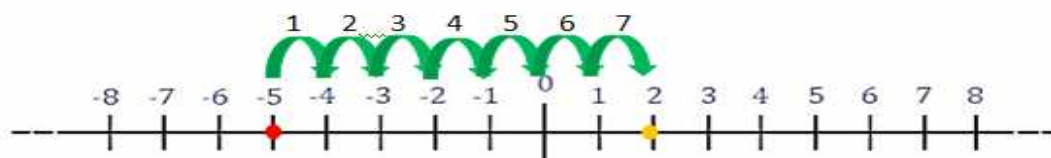


Figura 4: Reta Numérica

Neste, o lugar geométrico do valor -5 (ponto vermelho), no sentido dos números negativos, ao lermos, deve-se continuar na direção do zero, indo no sentido dos números positivos, “avançando” sete posições. Localizando na reta numérica o resultado da expressão, o +2 (ponto laranja).

Este pensamento, Lima & Moisés (1998) chama de **pensamento em mão única**.

Pensamento em mão única é aquele que concebe o movimento sem oposição, acontecendo apenas num só sentido.



Outro exemplo :

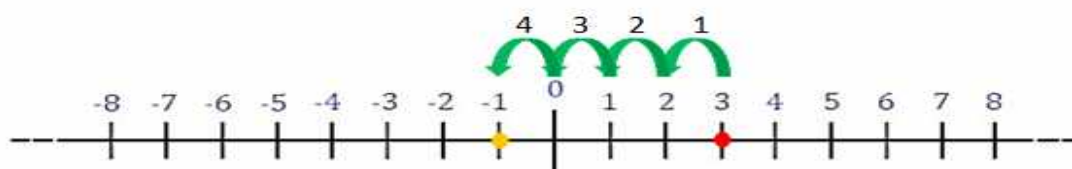


Figura 5: Reta Numérica

Iniciamos na reta numérica, marcando o lugar geométrico do valor +3 (ponto vermelho), estamos no sentido dos números positivos, ao lermos, entendemos que deve-se mudar a direção, nos aproximando da origem (zero), indo no sentido dos números negativos, “voltando” quatro posições. Localizando na reta numérica o resultado da expressão, o -1 (ponto laranja).

Este pensamento também é em mão única?

**Contar em mão única** é a ideia, originada com o número natural, de que todas as contagens ocorrem num só sentido.



Como seria então **contar em mão dupla**?

Veremos esta ideia a seguir.

## ATIVIDADE VII - Os números inteiros no comércio



Sempre que um povo, em qualquer lugar do planeta, passa da produção para consumo próprio (também chamada economia de subsistência), para a produção para troca de mercado (também chamada de economia mercantil): o trabalho humano passa a atuar intensamente com a mão-dupla dos movimentos quantitativos.

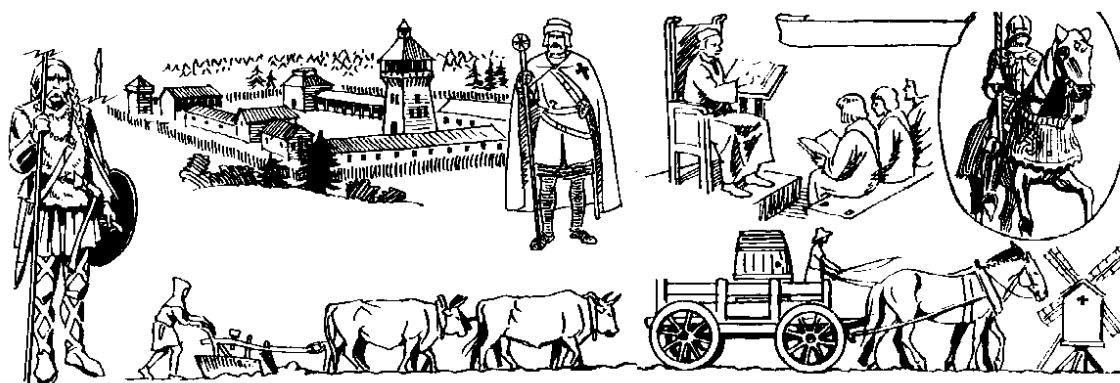


Figura 6: Economia de subsistência



Figura 7: Economia de subsistência

Até certo tempo atrás, nosso personagem, Brancalone trabalhava apenas para si próprio: fazia as suas próprias roupas, os seus objetos, plantava e colhia seu próprio alimento. Acontece que na região em que vivia as pessoas começam a comprar e vender as coisas que necessitam. Brancalone resolve entrar de cabeça na economia mercantil e abre um armazém para comercializar arroz e vinho. Logicamente nesta época o homem ainda não sabe o que é contabilidade: não possui livros e cadernos (tão pouco computador) de administração e controle do movimento financeiro e do estoque.

Lá está  
Brancalone,



um enorme tonel  
para guardar o vinho,



atrás de um balcão,



e, é claro, uma  
pequena caixa para  
guardar o dinheiro.



com uma enorme saca para guardar  
arroz,



Brancalone iniciou o seu negócio  
comercial escrevendo com palavras  
todo o movimento de dinheiro, de  
arroz e de vinho



“Hoje, às seis horas do dia treze de outubro de mil e trezentos, sob as graças do senhor, me veio vender trinta e oito quilos de arroz o mui gentil senhor de Pistóia, obrigando-me a despendar a bela quantia de seiscentos dinares de prata. Eu possuía em caixa, graças ao meu digno trabalho: um mil e oitocentos dinares de prata. Logo após quinze minutos desta transação, adentra a meu estabelecimento a mui formosa senhora de Lascio, de quem compro exatamente vinte litros do bom vinho tinto de sua videira, gastando, nesta transação trezentos dinares de prata. Após vinte e dois minutos faço a minha primeira venda que é ao servo do Castelo de Labria que me compra três quilos de arroz e um litro de vinho pelo que pagou setenta dinares de prata. Setenta minutos após este sucedido entra, em minha loja ...”.



E assim segue o registro de Brancaleone...

Sendo assim, responda:

- a) Que problemas esta forma de registrar o movimento comercial traz para Brancaleone?
- b) O movimento na loja de Brancaleone vai aumentando. Ao invés de receber freguês de cinquenta em cinquenta minutos, passa a receber de vinte em vinte, dez em dez, cinco em cinco até que começam a se formar filas no seu balcão. É possível ele continuar com aquela forma de registro? Por quê?
- c) O número natural possibilita o registro que Brancaleone precisa? Por quê?
- d) Afinal, qual é o problema numérico que Brancaleone está enfrentando?

## ATIVIDADE VIII - Explorando diferentes metodologias

Neste momento, podemos pensar em diferentes metodologias de ensino para o conteúdo escolar de números inteiros. Sendo assim, leia com atenção as duas propostas seguintes, permita que seu pensamento tenha um movimento em mão-dupla e desenvolva o que for solicitado.

A)

### Subindo e escorregando

Vamos escalar a montanha?  
Cuidado que ela é escorregadia!

Para jogar são necessários dois dados: um verde e outro branco.

Este jogo pode ser disputado por duas ou mais pessoas, cada uma tendo seu peãozinho.

Quando chegar sua vez, cada jogador lança os dois dados. O dado verde mostra quantas casas ele vai subir e o branco quantas vai escorregar, tudo na mesma jogada.

Aí é a vez do próximo jogador. Quem volta até o  $-10$  cai fora da brincadeira.

O jogo terminará quando restar apenas um jogador ou quando alguém chegar no topo.



O registro de uma jogada pode ser feito assim:



○ Uma jogada foi registrada assim:  $4 + 4 - 6 = 2$ . Que número saiu no dado branco?

□ Veja:  $-5 + 2 - 6 = ?$   
Nessa jogada, em que casa foi parar o peão?

▽ Você lançou os dados:  $4$  e  $3$   
Assim você foi parar acima ou abaixo da casa em que você estava? Quantas casas acima ou abaixo?

☆ O jogo mal começou e Liliana mostrou que está com sorte. Foi o

mais alto que se pode ir na primeira rodada. Responda: em que casa ela foi parar?

➤ É possível alguém, na primeira rodada, já vencer o jogo? E na segunda? Explique.

◇ Na primeira rodada, é possível alguém cair fora da brincadeira? E na segunda? Explique.

⇨ Ao fim da primeira rodada, a diferença máxima possível entre dois jogadores é de quantas casas?

Fonte: IMENES, Luís Márcio et al. Números Negativos. Coleção Pra que Serve Matemática? Editora Atual, 2004.

B)

## Vamos jogar?



Neste jogo usam-se fichas, azuis e brancas, e os cartões do encarte.

As fichas azuis são positivas: cada uma vale +1. As brancas são negativas: cada uma vale -1. Assim, uma azul e uma branca, juntas, "não valem nada".

São cinco participantes: um banqueiro e quatro jogadores. O banqueiro dá 12 fichas azuis para cada jogador e fica com as demais. Embaralha os cartões, colocando-os no meio da mesa, com a parte escrita para baixo.

Pronto, o jogo pode começar. O primeiro jogador compra um cartão e o mostra para todos. Aí, esse jogador faz o que manda o cartão e passa a vez ao próximo. Cada jogador fica com seu cartão e assim o jogo prossegue até acabarem-se os cartões da mesa.

Na sua vez, se necessário, o jogador deve pedir ao banqueiro, por exemplo, 3 fichas azuis e 3 brancas, porque, juntas, elas "não valem nada".

No fim, cada ficha branca desconta uma azul. Feito o desconto, vence quem tiver mais fichas azuis. Se todos "ficarem negativos", vence quem tiver menos fichas brancas. Quem ficar com zero vence de quem ficar negativo, mas perde de quem ficar positivo.

Jogue em casa ou na escola.



NO FIM, SE DER DISCUSSÃO, OS RESULTADOS PODERÃO SER CONFERIDOS PELOS CARTÕES.

25

Fonte: IMENES, Luís Márcio et all. Números Negativos. Coleção Pra que Serve Matemática? Editora Atual, 2004.

O registro de uma jogada pode ser feito assim:

- com uma adição, quando se recebem fichas;
- com uma subtração, quando se pagam fichas.

Por exemplo: Tenho 10 fichas azuis e tiro: *Receba 3 brancas do banqueiro*. Registro:  $10 + (-3) = 7$

Outro exemplo: Tenho 3 fichas brancas e tiro: *Pague 2 brancas ao jogador seguinte*. Registro:  $(-3) - (-2) = -1$



26

Fonte: IMENES, Luís Márcio et all. Números Negativos. Coleção Pra que Serve Matemática? Editora Atual, 2004.

A partir da proposta acima, elabore três situações-problemas para este jogo.



## ATIVIDADE IX - Interpretação da regra de sinais na reta numérica (mão única e mão dupla)

Explique como podemos descrever a regra de sinais, utilizando a interpretação pela reta numérica e as ideias de mão única e mão dupla.

+ (+) :

+ (-) :

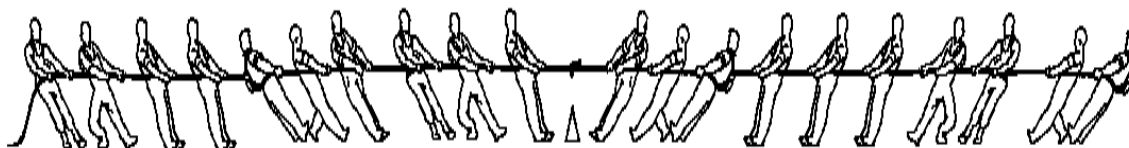
- (+) :

- (-) :



## ATIVIDADE X - Um problema dos contrários

Num jogo de cabo de guerra temos a disputa entre duas equipes cada uma formada por



10 homens que possuem exatamente a mesma força cada um. Responda:

- Qual o número que representa o contrário que puxa para a direita?
- Qual o número do contrário que puxa para a esquerda?
- Qual o número que resulta da luta entre os contrários?
- Qual o movimento que resulta?
- Que movimento resulta desta nova configuração?
- A equipe da direita resolve integrar 8 novos homens com força normal. Que número e movimento resultam?
- Então entram na equipe da esquerda três homens com força quadruplicada e na direita dois homens com força dobrada. Que número e movimento resultam?

## ATIVIDADE XI - Pensando sobre a multiplicação e a divisão na reta numérica

A partir das explicações anteriores, reflita como as operações de multiplicação e divisão se desenvolveriam utilizando a reta numérica. E,

- a) Escreva uma expressão numérica para multiplicação e divisão de números inteiros.
- b) Resolva utilizando a reta numérica.
- c) Explique quais as dificuldades para esta solução.
- d) Resolva utilizando a regra de sinais.
- e) Compare as soluções do item b e c, refletindo sobre as consequências das mesmas no ensino de matemática.

## 2. ÁLGEBRA

### ATIVIDADE XII - Fórum de Ideias

Para iniciarmos nossos estudos, acerca do tema Álgebra, convidamos você a pensar um pouco a respeito. Para tanto, seguem algumas questões para que possa refletir:

1. Você já parou para pensar o que significa Álgebra?
2. O que você se lembra de seus estudos sobre Álgebra ao longo de sua vida escolar?
3. A Álgebra se restringe ao trabalho com letras?
4. Quais ideias perpassam sobre o tema Álgebra? Estas se restringem ao trabalho com equações?
5. Quais metodologias são interessantes para o estudo da Álgebra?
6. Quais são as maiores dificuldades no que diz respeito ao estudo da Álgebra?
7. Como você entende que deveria ocorrer o ensino de Álgebra no decorrer do ensino básico



2. Após seus registros pessoais, poste-os no Ambiente Virtual de Aprendizagem, no Fórum de Ideias, socializando com o grupo-classe o que registrou e discuta as questões, suas e dos colegas, que julgar mais relevantes.



## 2.1 CONCEPÇÕES SOBRE A ÁLGEBRA

Diante das socializações das ideias acerca da Álgebra, vamos agora expor algumas concepções sobre seu ensino, à luz de alguns autores. Vamos começar?

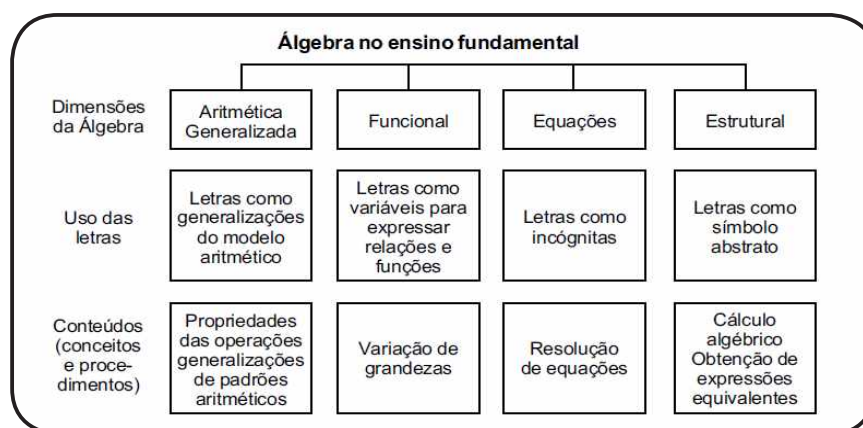
Iniciamos apresentando nossa compreensão acerca do que vem a ser álgebra, de acordo com a literatura:

- a) Arte de tratar os problemas de aritmética representando os números (desconhecidos) através de letras. Ciência dos números indeterminados.
- b) Método geral de representação das relações e funções matemáticas e lógicas por meio de símbolos.
- c) Ciência das propriedades dos polinômios e das formas algébricas; arte de resolver as equações algébricas.
- d) Ciência da ordem. (LALANDE, 1993, p.41-42 *apud* CEDRO, 2004, p.74).

Entendemos álgebra, como generalização de sequências; conjunto de regras para solucionar problemas numéricos, mediante uso de letras; estudo dos cálculos algébricos e, por fim, estudo das estruturas matemáticas, tais como, grupos, anéis, corpos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) sugerem que o estudo da Álgebra pode possibilitar um ambiente potencialmente significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, “além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas” (p.115).

Uma opção para o ensino de álgebra, segundo os PCN, constitui-se em propor situações que direcionem o aluno à observação de regularidades introduzindo o pensamento algébrico, contraponto numerosas listas de exercícios com foco apenas na manipulação de expressões e equações, comumente mecânicas (BRASIL, 1998). O quadro a seguir, descreve as concepções do PCN (BRASIL, 1998) sobre a álgebra escolar:



Quadro 1- Álgebra no Ensino Fundamental.  
Fonte: BRASIL, 1998, p.116.

Notamos no Quadro 1, que a álgebra, segundo o PCN, assume quatro dimensões:

- Aritmética Generalizada: temos, nessa dimensão, as letras como forma de generalização, transição da aritmética para álgebra, assim como, a abordagem das propriedades das operações justificando as generalizações apresentadas (a citar, o uso de letras para generalizar operações com potências);
- Funcional: nesse momento as letras assumem o papel de variáveis, interagindo com situações que envolvam relações e funções, o professor busca então trabalhar a variação de grandezas;
- Equações: as letras serão entendidas como incógnitas e busca-se resolver equações (isto é, descobrir valores desconhecidos);
- Estrutural: na qual as letras são tidas como símbolo abstrato, objetivando-se o cálculo algébrico e obtenção de expressões equivalentes, por exemplo, cálculo de produtos notáveis, fatoração de polinômios, entre outros.

Usiskin (1995) alega que um grande dilema do ensino da álgebra na educação básica, seja o fato de limitar esse ensino a capacidade de manipular técnicas, desconsiderando a maneira como se utilizam as variáveis, perante as diferentes concepções sobre a ideia de variável. Na década de 50, as variáveis eram vistas como um número mutável, posteriormente, como um número literal que pode assumir dois ou mais valores perante uma situação. Contudo, entende-se que “as variáveis comportam muitas definições, conotações e símbolos. Tentar enquadrar a ideia de variável numa única concepção implica uma super simplificação que, por sua vez, distorce os objetos da álgebra.” (USISKIN, 1995, p.12). À luz das ideias de Usiskin (1995), temos quatro concepções para o uso das variáveis:

- **Concepção 1** (álgebra como aritmética generalizada): as variáveis são pensadas como generalizadoras de modelos, por exemplo, o produto de qualquer número por zero, é zero, para todo  $n$ ,  $n \cdot 0 = 0$ . Nessa concepção o aluno traduz e generaliza.
- **Concepção 2** (álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas): permite resolver problemas como, por exemplo, a soma de um número com oito, resulta em 10, qual é esse número? Nessa concepção as variáveis são ou incógnitas ou constantes e, o aluno busca simplificar ou resolver a situação na qual se encontra.
- **Concepção 3** (álgebra como estudo das relações de grandeza): a variável é tratada como um argumento, ou seja, representa os valores do domínio de uma função, ou como um parâmetro, representando um número no qual dependem outros números. Nesse contexto, aparecem as ideias de variável independente e variável dependente.
- **Concepção 4** (álgebra como estudo das estruturas): a álgebra do ensino superior, referindo-se a estruturas como anéis, grupos, corpos e espaços vetoriais. Nesse caso, a variável torna-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas variáveis.

Fiorentini et al. (1993) citados por Fernandes, Fiorentini e Cristovão (2006), defendem o ensino da álgebra buscando o desenvolvimento articulado entre a linguagem e o pensamento matemático do aluno, nas suas palavras, se faz interessante que o ensino de álgebra seja iniciado “mediante a exploração de situações-problema relativamente abertas ou problematização de fatos tidos como aritméticos ou geométricos que demandem a construção de generalizações, a representação de número generalizado ou de grandezas incógnitas e variáveis” (FERNANDES; FIORENTINI E CRISTOVÃO, 2006, p.232).

Ao olhar para essas diferentes concepções, podemos entender a álgebra tanto como uma linguagem quanto como um conjunto de procedimentos e técnicas que buscam desenvolver o pensamento, assim como, estruturar a linguagem algébrica.

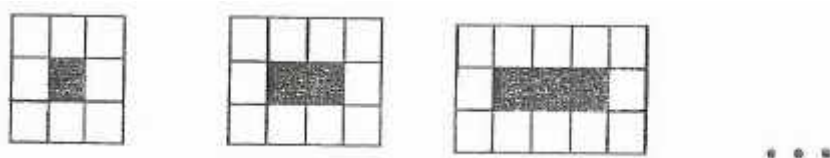
## ATIVIDADE XIV - Refletindo sobre as concepções da álgebra

A seguir, apresentamos duas propostas para você refletir acerca das dimensões da álgebra apresentadas acima.

- **ÁLGEBRA COMO ARITMÉTICA GENERALIZADA**

Essa proposta tem como objetivo desenvolver a linguagem e o pensamento algébrico, mediante o processo de generalização, percepção e representação de regularidades. Vamos lá???

Observe as três primeiras posições da sequência de quadradinhos brancos e pretos abaixo:



Que tal tentar descobrir algumas relações entre a forma como a sequência foi construída, a quantidade de quadradinhos brancos e pretos e suas posições na sequência? Quais serão as próximas configurações?

Para tanto apresentamos alguns direcionamentos para seu estudo.

- a) Continue a sequência, desenhando até a 10ª posição.
- b) Quantos quadradinhos brancos teremos na 10ª posição? E, quadradinhos pretos?
- c) Você seria capaz de escrever uma regra que pudesse representar a relação entre o número de quadradinhos brancos e pretos num padrão geométrico?

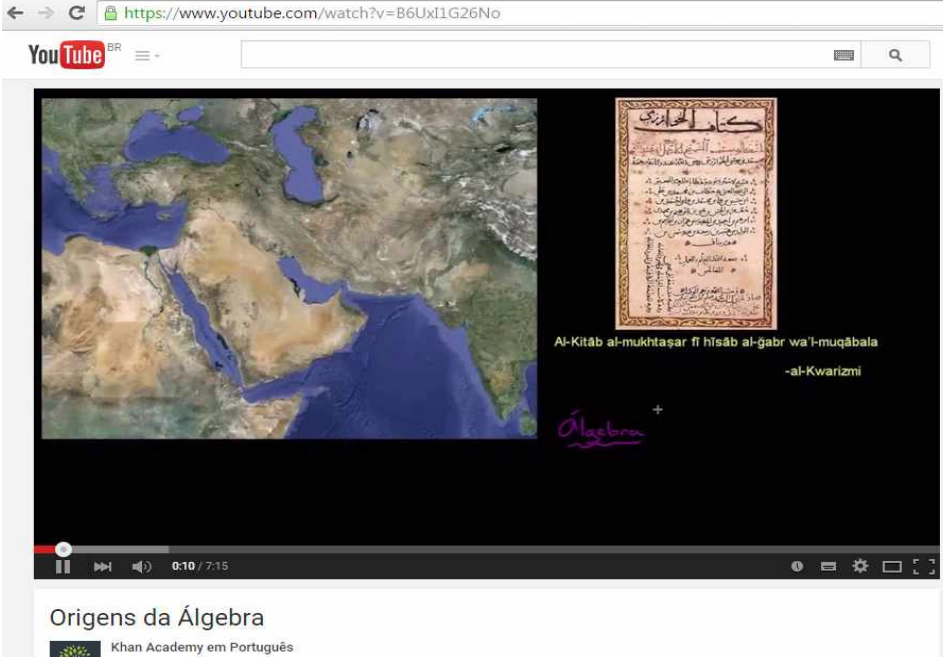
- **ÁLGEBRA COMO UM ESTUDO DE PROCEDIMENTOS PARA RESOLVER CERTOS TIPOS DE PROBLEMAS<sup>3</sup>**

Apresentamos agora, um problema para que você possa resolvê-lo por meio dos seus conhecimentos algébricos. Como ele poderia ser explorado no ambiente escolar? Gostaríamos que você apresentasse uma proposta para a resolução desse problema em uma turma do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

Mãos à obra... Roberta retirou de um caixa eletrônico R\$ 330,00 entre cédulas de R\$ 50,00 e R\$10,00, num total de 17 cédulas. Qual a quantidade de cada um dos tipos de cédulas?

## ATIVIDADE XV - História da Álgebra

Vamos descobrir alguns caminhos que levaram a álgebra como a conhecemos hoje? Sugerimos abaixo que você assista o vídeo que irá apresentar as origens da álgebra. Assista o vídeo Origens da Álgebra. Em seguida, elabore um texto contendo suas reflexões sobre as ideias neles apresentadas.



The screenshot shows a YouTube video player. The video content is split into two panels. The left panel displays a satellite map of the Middle East region, highlighting the area around the Mediterranean and Red Seas. The right panel shows a page from an ancient manuscript with Arabic text and a decorative border. Below the manuscript, the text reads: "Al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa'l-muqābala" and "-al-Kwārizmī". A purple handwritten word "Álgebra" is overlaid on the bottom right of the video frame. The video player interface includes a progress bar at the bottom showing 0:10 / 7:15, and the video title "Origens da Álgebra" by "Khan Academy em Português" is visible below the player.

<https://www.youtube.com/watch?v=B6Ux1G26No>

## 2.2. Alguns recortes sobre a história da Álgebra

Cedro (2004) nos revela que a história das origens da álgebra entre os hindus e árabes, segundo os estudos de Hogben (1970) possui três grandes correntes:

- A necessidade de criar regras de calcular mais simples ou algoritmos (a aritmética, no século XIII, era assim chamada, por ter como principal divulgador o algebrista árabe Al-Khowarizmi);
- A solução de problemas de caráter prático, que envolvessem o uso de números, isto é, a solução de equações;
- O estudo das séries, que revelou novas descobertas sobre as propriedades dos números naturais, levando ao início do desenvolvimento da chamada álgebra abstrata. (CEDRO, 2004, p.64).

Eves (2002) nos relata que Nesselmann, caracterizou três estágios no desenvolvimento da notação algébrica. Primeiro deles, a álgebra retórica, “em que os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos” (p.206), seguido da álgebra sincopada, “em que se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais frequentemente” (p.206) e, por fim, o último estágio, chamado de álgebra simbólica, “em que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos que aparentemente nada têm a ver com os entes que representam” (p.206). De acordo com Eves (2002) os estudos na Europa Ocidental permaneceram na álgebra retórica até o século XV, havendo de fato a imposição da álgebra simbólica na metade do século XVII.

Eves (2002) considera Diofanto de Alexandria, como o maior responsável pelo desenvolvimento da álgebra, pois “pode ter sido ele o primeiro a dar os primeiros passos rumo a uma notação algébrica” (pp.208-209). Em sua obra intitulada Aritmética, Diofanto dedica-se a resolução de 130 problemas que levam a equações de primeiro e segundo grau, apresentava abreviações para incógnitas,

Nossa palavra “aritmética” provém da palavra grega arithmetike que se compõe de arithmos (“número”) e techne (“ciência”). Heath assinalou bastante convicentemente que o símbolo usado por Diofanto para a incógnita provavelmente derivava por fusão das duas primeiras letras gregas da palavra arithmos, a saber  $\alpha$  e  $\rho$ . Com o tempo esse símbolo veio a se parecer com o sigma final grego  $\varsigma$ . (EVES, 2002, p.209, grifos nossos).

A álgebra anterior à época de Diofanto era com certeza retórica, onde temos então a contribuição de Diofanto à matemática, a sincopação da álgebra grega. No Ocidente, a maior parte da álgebra permaneceu retórica até o século XV e, embora a aparição da álgebra simbólica tenha ocorrido no século XVI, somente no século XVII que o estilo se impôs, o que nos propicia perceber que a álgebra simbólica utilizada nos textos atuais não tem mais que 4000 anos.

O sinal de igualdade apareceu pela primeira vez, em 1557, na obra de Robert Thomas Harriot, justificando o uso de um par de segmentos de reta paralelos como o símbolo de igualdade, “imaginando que nada pudesse ser mais igual que um par de retas gêmeas de mesmo comprimento” (LIMA, TAKAZAKI, MOISÉS, 1998, p.12).

O matemático francês François Viète, introduziu o uso de vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes, “antes de Viète era comum se usarem letras ou símbolos diferentes para as várias potências de uma quantidade. Viète usava a mesma letra, adequadamente qualificada: A, A quadratum, A cubum” (EVES, 2002, p.309).

Assim, conforme nos diz Lanner de Moura e Sousa (2005)

Foi o simbolismo pensado por Viète que possibilitou a escrita de expressões de equações e suas propriedades, a partir de fórmulas gerais. Os objetos das operações matemáticas passaram a ser não problemas numéricos e sim as próprias expressões algébricas. (p.22).

Por meio desse breve relato, percebemos o quão importante se faz, conhecermos um pouco da História da Matemática, compreendendo que a criação dos símbolos esteve em consonância com o contexto vivido por seus protagonistas, se desenvolvendo com o passar da história mediante as necessidades com as quais foram se deparando.

Vamos agora pensar nas diferentes linguagens da álgebra.

## ATIVIDADE XVI - As linguagens da álgebra

- **DA ÁLGEBRA RETÓRICA PARA ÁLGEBRA SIMBÓLICA**

Escreva as frases abaixo na linguagem simbólica (com símbolos):

- Um número acrescido de cinco unidades.
- O produto de oito por um número.
- O dobro de um número diminuído de 12.
- A sexta parte de um número.
- O quadrado de um número menos três.
- Nove a menos que a diferença de um número e quatro.
- O cubo de um número.

Refletindo: Em algum(ns) item(ns) você teve dificuldade(s) sobre como fazer a passagem para linguagem simbólica? Qual(is)? Há mais de uma maneira de fazer tais transcrições? Em caso afirmativo, como?

- **DA ÁLGEBRA SIMBÓLICA PARA A ÁLGEBRA RETÓRICA**

Propomos agora o contrário, escreva na linguagem retórica, as seguintes expressões algébricas:

- $7y^2$
- $8z - 12$
- $a/b$
- $(n + 3)^3$
- $3/4x$

Refletindo: Em algum(ns) item(ns) você teve dificuldade(s) sobre como fazer a passagem para linguagem retórica? Qual(is)? Porque você acredita que houve essa dificuldade?



## ATIVIDADE XVII - Resolvendo equações do 2º grau de forma geométrica

Você já se perguntou como as pessoas resolviam as equações do 2º grau antigamente quando não existia a famosa fórmula de Bhaskara?

Ficou curioso(a) para descobrir que métodos eram esses? Se a resposta for positiva vamos apresentar a você um caminho...

Esse método era chamado de “completar quadrados” e foi criado pelo grande matemático [Al-Khwarizmi](#). Esse método consiste em, a partir de dados, construir um quadrado com área igual ao resultado da equação (LIMA, TAKAZAKI, MOISÉS, 1998, p.20-21). Vamos tentar???

A) O quadrado de um número acrescido de oito vezes esse número é igual a 48. Qual é o número?

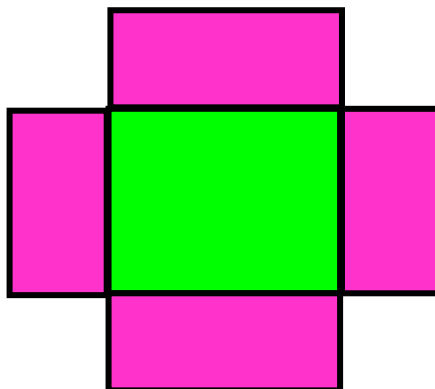
Inicialmente montava-se uma equação na forma da variável-geométrica: o quadrado e o retângulo correspondentes à sentença:



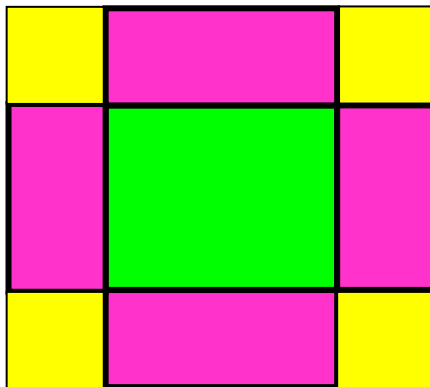
Em seguida dividia o retângulo em 4 retângulos de mesma área:



Separando-se os 4 retângulos, cada um era colocado ao longo dos lados do quadrado.



E então, completava-se o novo quadrado:



A área do novo quadrado é 48 mais  $4 \cdot 2 \cdot 2$ , ou seja,  $48 + 16 = 64$ .

Se o quadrado novo vale 64, então seu lado será 8, pois  $8^2$  é 64.

Sendo o lado do novo quadrado 8, o lado do antigo quadrado, vale 4!!!

Agora é sua vez, resolva o seguinte problema, o quadrado de um número acrescido de oito vezes esse número soma 33. Qual é o número?

**Refletindo** : Existe alguma desvantagem para esse método? Comente.

### 3. Geometria

#### ATIVIDADE XVIII - Fórum de Ideias

Neste momento de nosso curso, sugerimos que você:

1. Procure registrar o que é Geometria, Geometria Espacial e Geometria Plana para você e como entende estes elementos no processo ensino e aprendizagem.



2. Após seus registros pessoais, poste-os no Ambiente Virtual de Aprendizagem, no Fórum de Ideias, socializando com o grupo-classe o que registrou e discuta as questões, suas e dos colegas, que julgar mais relevantes.

## ATIVIDADE XIX - Memórias

Nesta atividade, você deve fazer uma “Viagem ao Passado” e resgatar lembranças de suas aulas de Geometria. Estas lembranças deverão ser registradas na forma de um texto e, para auxiliar-lhe nesta viagem, sugerimos algumas questões que poderão nortear seu registro.

- Ao recordar sua época de estudante, o que se lembra sobre o ensino de Geometria?
- Como os professores abordavam os conceitos geométricos?
- Havia uma separação entre Matemática e Geometria ou eram tratadas como mesma disciplina? Comente.
- Quais as facilidades/dificuldades que você encontrava na realização de atividades envolvendo conceitos geométricos?
- Quais fatores você considera que devem ser considerados no planejamento de situações a serem levadas para a sala de aula?

Geometria.

Ao ouvir este termo, muitas pessoas possivelmente a associam à formas geométricas, medidas ou demonstram certa aversão à ela.

E você, qual é o sentimento que vivencia ao ouvir esta palavra? Já parou para pensar o que o termo **Geometria** significa??

Neste texto, convidamos você a viajar conosco em algumas ideias que dialogaremos ao longo deste módulo. Vamos lá?

O bloco de conteúdo Espaço e Forma, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática<sup>4</sup>, afirmam que estudos “sobre a construção do espaço pela criança destacam que a estruturação espacial se inicia, desde muito cedo, pela constituição de um sistema de coordenadas relativo ao seu próprio corpo.” (BRASIL, 1997, p.81).

A partir desta ideia, o ensino de Geometria deveria possibilitar ao aluno perceber o espaço de diferentes pontos de vista como uma das condições necessárias à coordenação espacial, essencial à construção do pensamento geométrico. (BRASIL, 1997).

Segundo ainda os PCN (BRASIL, 1997), os entes abstratos ponto, reta, plano, quadrado não pertencem ao espaço perceptivo de uma criança. Estes podem ser concebidos de maneira ideal, mas rigorosamente não fazem parte desse espaço sensível, perceptível da criança. Podemos, então, entender que a Geometria parte do mundo sensível e o estrutura no mundo Geométrico — dos volumes, das superfícies, das linhas e dos pontos. Percebemos que a ideia seria explorar a Geometria Espacial, primeiramente e, em seguida, a Geometria Plana.

Se recorrermos à criação histórica da geometria, encontraremos Lima (s.d.<sup>5</sup>) que nos lembra que a

criação histórica da geometria aconteceu num movimento de decomposição permanente do espaço, partindo das três dimensões, passando pelas duas até criar a primeira dimensão para, ao retornar, compor sucessivamente as três dimensões a partir dos seus elementos mais simples (p.2).

A partir desta ideia podemos entender que a criação histórica da geometria não aconteceu num movimento linear; mas em síntese, podemos entender que a geometria,

4 <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> - 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental. Acesso em maio de 2015.  
<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf> - 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. Acesso em maio de 2015.  
<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> - Ensino Médio. Acesso em maio de 2015.

5 LIMA, Luciano Castro. A forma: movimento e número. (preprint), s.d.

historicamente, foi criada a partir da observação da natureza e seus elementos para, posteriormente, ser representada por entes geométricos e seus teoremas, postulados, axiomas. Esta ideia pode ser melhor compreendida por meio da observação e análise das figuras abaixo (Figuras 8 e 9):

Figura 8: Criação histórica da geometria<sup>6</sup>

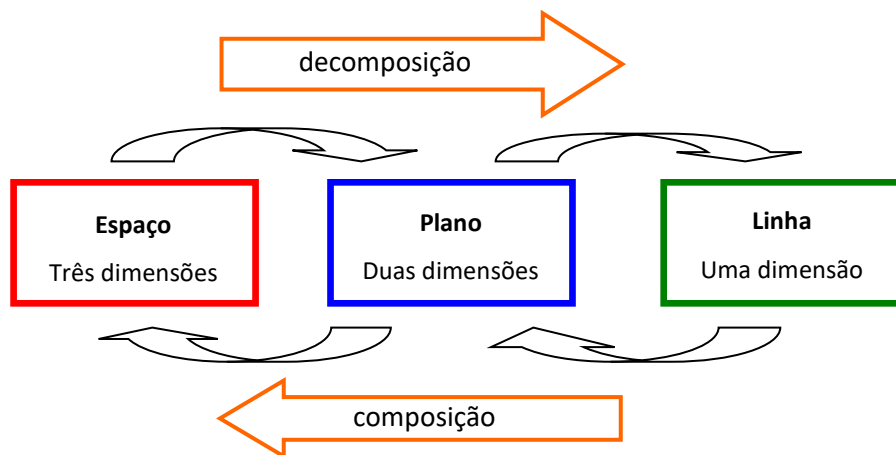
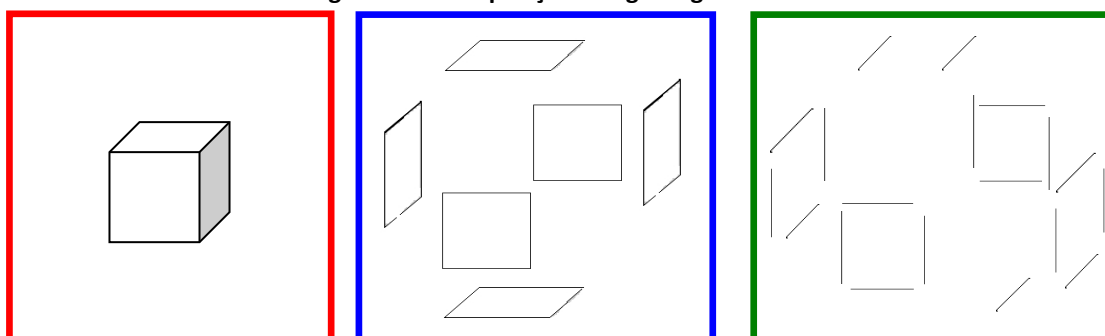


Figura 9: Decomposição de figuras geométricas<sup>7</sup>



Recorrendo ainda aos autores que discutem a História da Matemática, encontramos Eves (1994), que alega:

As primeiras considerações que o homem fez a respeito da geometria são, inquestionavelmente, muito antigas. Parecem ter se originado de simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos. (EVES, 1994, p.1).

Podemos reafirmar que a geometria pode ser percebida como uma forma de representação e compreensão do espaço, sendo este constituído de objetos com suas

6 Figura retirada de LIMA, Luciano Castro. *A forma: movimento e número*. (preprint), s.d.

7 Figura adaptada de Lima e Moisés (1998a).

variadas formas, cores, texturas e relações, cabendo aos sujeitos a percepção dos mesmos.

Outro autor ligado à História da Matemática, Boyer (1996), nos diz que:

O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar. (BOYER, 1996, p. 4-5).

Por meio do exposto, é possível dizer que foi por meio da utilização dos sentidos que homem primitivo desenvolveu a geometria perceptiva do espaço, a *geometria sensorial*.

A partir de novas necessidades advindas como, por exemplo, a de fixar-se em um espaço territorial, percebemos o indício do desenvolvimento de sociedade. Com isto, surgiu a necessidade das civilizações de delimitarem as terras (EVES, 1994). Isto desencadeou também a elaboração da ideia de algumas figuras geométricas, tais como retângulo e quadrado para a delimitação de terras.

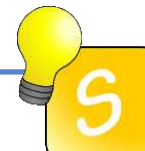
Diante destas evidências, algumas questões nos surgem: como nas escolas, ainda hoje, o ensino de Geometria tem seu início a partir da Geometria Plana? Será que se o professor, intencionalmente, elaborasse atividades de ensino, levando seus alunos a pensar sobre os conceitos matemáticos abordados e não simplesmente a decorar ou aplicar regras e fórmulas de modo mecânico, não poderíamos resolver muitos dos problemas de aprendizagem apresentados pelos alunos? Talvez, esta perspectiva não fosse a grande panacéia dos problemas de uma turma, mas poderia auxiliar no processo de aprendizagem de matemática.

Assim, este é o caminho que escolhemos para a aprendizagem do conhecimento geométrico. Vamos criar os elementos da geometria num movimento de decomposição que parte do espaço e chega ao ponto para, a partir da criação dos elementos primários das formas, desenvolver a composição das figuras humanizadas.



## ATIVIDADE XXI - Leitura e Fichamento

No intuito de oferecer mais subsídios para seus estudos sobre Geometria, disponibilizamos o texto abaixo. Após atenciosa leitura, faça um fichamento elencando os aspectos que mais lhe chamaram a atenção.



### As formas naturais<sup>8</sup>

A natureza é uma fonte inesgotável de formas. As formas das folhas, das flores, das frutas, dos cristais, dos astros, das rochas, dos animais, dos organismos, compõem um espectro infinito em mutação permanente. Novas formas surgem das antigas, formas menores são descobertas nas maiores e maiores são visualizadas a partir das menores num movimento contínuo. A beleza, a plasticidade, a transformação, as particularidades, as generalidades deste movimento figurativo da natureza produzem um tremendo impacto nos nossos sentidos, principalmente o da visão. Sob seu efeito pensamos e produzimos as primeiras ideias geométricas – o que se chamou de geometria da natureza.

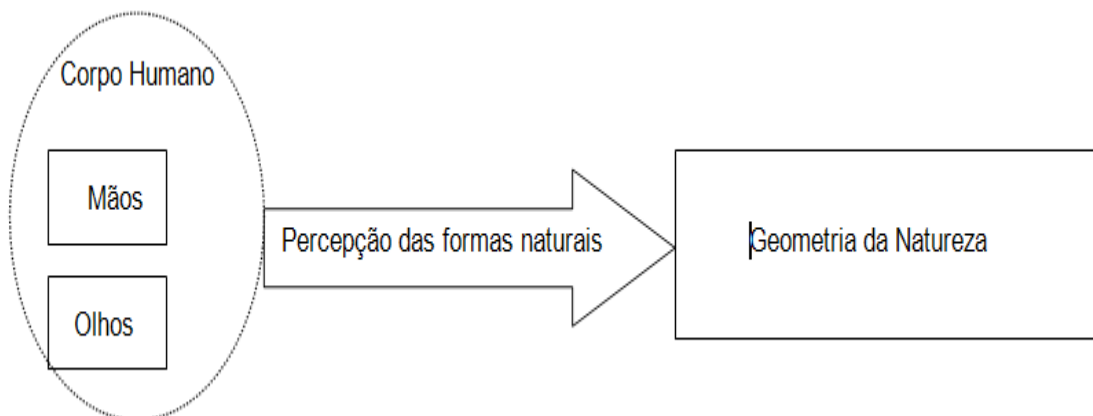
Toda arte figurativa e seu desdobramento racional, que constitui a geometria, é um esforço do trabalho humano de compreender este impacto e apreender este movimento figurativo da natureza. E a partir das formas naturais, e com elas, criamos as formas elaboradas que constituem as categorias geométricas: o cubo, o paralelepípedo, a esfera, a pirâmide, o quadrado, o triângulo, a circunferência, o ponto, a reta etc.

É no âmbito da geometria da natureza que criamos e desenvolvemos o princípio da simetria, básico para o estudo da forma.

O corpo humano é elemento integrante da natureza. Dispondo principalmente dos sentidos do tato (entre eles o manual) e da visão sente o movimento figurativo da natureza e, nele, cria a geometria com o seu núcleo central – a simetria.

<sup>8</sup> Material elaborado por: Profa. Dra. Anna Regina Lanner de Moura; Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura; Domício Magalhães Maciel; Erica Moreira Ferreira, Fabiana Fiorezi de Marco, Maria do Carmo de Sousa, Micheline Kanaan, Perci Moreira; Lucí Mara Gotardo Gonçalves; Heloisa Helena Saviani; Marilac Nogueira e Maria do Carmo Pereira da Silva tendo como referências os textos de Luciano Castro Lima & Mário Takazaki & Roberto P. Moisés.





### Da geometria espacial à plana

Com a arte penetramos no universo lógico da linguagem geométrica via geometria espacial. Construído este painel podemos desenvolvê-lo decompondo a figura - a anatomia da forma - buscando a diversidade dos seus elementos mais simples. Na decomposição das formas da geometria espacial criamos a geometria plana.

O geômetra grego Euclides viveu entre os séculos IV e III a.C. e lecionou na cidade de Alexandria (Egito), o grande centro de produção idéias daquele período. Na sua obra, “Os elementos”, sintetizou o conhecimento geométrico acumulado até então pelas grandes civilizações da antiguidade.

Na sua anatomia do espaço, chegou nos termos geométricos que não são definidos, mas intuídos, conhecidos por suas propriedades: o ponto, a reta e o plano, chamados de conceitos primitivos. As relações entre estas abstrações constituem o objeto da geometria plana. É a teoria da composição do espaço, do elemento mais simples - o ponto - ao mais amplo - o espaço.

Observamos até os dias de hoje a forte influência de Euclides nos livros didáticos. Repetimos sua sistematização a anos. Porém, nos dias atuais já há teorias que compreendem o espaço a partir de outros parâmetros. Isso nos ajuda a ver, mais uma vez, a característica histórica e infinita que a Matemática possui e que nos convida, de modo prazeroso, a vê-la em movimento constante.

### A medição e as relações métricas

A criação da medida acontece quando o trabalho humano combina o número e forma. A invenção da contagem gera o número natural; a invenção da medida gera o número racional; a invenção da continuidade gera o número real. A contagem cria a correspondência biunívoca número/ponto; a medida expande esta correspondência para a densidade; a continuidade expande esta correspondência para a infinitude mínima. A posição intermediária da medida neste movimento numérico torna-a um conceito chave: ela é, ao mesmo tempo gerada pela contagem e geradora da continuidade.

A medição é fundamental para o desenvolvimento das linguagens numérica e geométrica.

E um dos elementos fundamentais da medição é a criação da unidade de medida, pois ela envolve uma análise qualitativa e formal do que se quer medir. Certamente o movimento de criação de medidas se iniciou com espaço e tempo. E a partir daí foi se generalizado para outros movimentos: peso, som etc. O movimento de criação de unidades de medida transcende a geometria, mas a compreensão da medida geométrica implica necessariamente, na apreensão deste seu aspecto mais geral.

## ATIVIDADE XXII - Vídeo Básico sobre Geometria



O vídeo a seguir, uma entrevista do Prof. Ubiratan D'Ambrósio, reforça o que foi exposto até este momento e auxiliará sua compreensão sobre o tema abordado. Após assistir ao vídeo faça um registro sobre o que pode refletir sobre o ensino da geometria.

<http://tvescola.mec.gov.br/tve/video/entrevista-ubiratan-dambrosio>



## ATIVIDADE 23 – Trabalhando com tijolo<sup>9</sup>

1º momento: A medida e o tijolo

O tijolo é usado nas construções em larga escala. Assentando vários deles em diferentes formas obtemos casas, edifícios, muros e outras edificações bem variadas. A principal utilidade do tijolo é a de que podem ser combinados em grandes quantidades para a construção de diferentes formas. E novamente temos a combinação a harmonia de dois contrários:

Com vários tijolos iguais podemos construir várias formas diferentes.

Com o tijolo o homem criou o que chamaremos de composição homogênea:

Composição homogênea é a combinação de vários elementos iguais que resulta diferentes qualidades.

Mas, o movimento de **composição** sugere o seu contrário, a **decomposição**. Vamos vivenciar algumas situações:

**Atividade A:** Fazendo composições

Tome cinco tijolos<sup>10</sup> e faça todas as combinações possíveis, desenhando-as:


9 Atividade adaptada de FAFE – Fundação de Apoio à Faculdade de Educação – USP. Unidade X.

10 Podem ser utilizadas as unidades do material dourado.

**Atividade B:** Encontrando o plano

Recubra-o com papel alumínio uma das composições e desenhe-a novamente, também nas posições possíveis.

Marque bem os vincos no papel e abra-o, cuidadosamente. Observe o desenho registrado no papel alumínio e procure reproduzi-lo no seu caderno. A que conclusão podemos chegar?

**2º momento:** *Composição, decomposição e volume.*

Com quatro tijolos podemos fazer uma edificação. Sabemos que esta ocupa uma quantidade de espaço de quatro tijolos. À quantidade de quatro tijolos podemos ver a qualidade a que damos o nome de **volume**. E, ao dizermos que este volume é de quatro tijolos, estamos numeralizando uma grandeza usando outra – o tijolo – como **unidade padrão de medida**. Observe que, quando o homem inventou o tijolo:

1. descobriu uma qualidade das coisas, o espaço, ou volume;
2. inventou a medição do volume;
3. e inventou a medição feita na própria composição, a **medição por composição**.



Podemos fazer a contagem das superfícies de tijolos usando o princípio multiplicativo: trata-se de 7 colunas e 3 linhas, então,  $3 \times 7 = 21$  superfícies de tijolos. Juntos ou separados os tijolos vão apresentar sempre a mesma superfície. Podemos concluir que a superfície da figura corresponde à de 21 superfícies de tijolos. Esta é a numeralização da superfície ou da área.

Observe que o homem, quando descobriu o tijolo:

1. descobriu a qualidade *superfície* ou área;
2. inventou a medição da área;
3. e a medição é feita tanto na composição, a medição por composição, quanto na decomposição, a medição por decomposição.

#### 4º momento: *Da área ao comprimento*

Nos momentos anteriores vimos que o volume é decomposto em superfícies, isto é, em áreas. As áreas, por sua vez, podem ser decompostas em colunas ou linhas. Tomando-se apenas as arestas dos tijolos, ou o seu contorno externo, teremos os lados da superfície que correspondem às arestas das colunas e linhas. Estes lados são chamados de largura (a coluna) e comprimento (a linha). Estes lados foram compostos a partir das arestas dos tijolos. Juntos ou separados estas arestas vão apresentar sempre o mesmo comprimento. Podemos numeralizar os lados e extrair daí a sua qualidade **comprimento**.

Observe que o homem, quando descobriu o tijolo:

- descobriu a qualidade *comprimento*;
2. inventou a medição do *comprimento*
  3. e a medição é feita tanto na composição, a medição por composição, quanto na decomposição, a medição por decomposição.



## ATIVIDADE XXIV - Pesquisa

Você já leu ou ouviu falar sobre o que tem sido proposto para o ensino de Geometria, para o ensino Fundamental e Médio, nas propostas curriculares oficiais (Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, Conteúdo Básico Comum – CBC ) e outras publicações?

Faça uma pesquisa em escolas conversando com professores, analisando o PCN de Matemática, o Conteúdo Básico Comum (CBC) e em artigos de pesquisas científicas e elabore um texto com as informações obtidas.



## ATIVIDADE XXV - Análise de Livro Didático

Escolha uma coleção de Livro Didático (para o ensino fundamental ou médio) para análise sobre o conteúdo de Geometria e procure responder as seguintes questões.

1. Qual o título da coleção, autor, editora e ano de publicação?
2. Qual a idéia de Geometria proposta nesta coleção?
3. Como o conteúdo de Geometria encontra-se estruturado nesta coleção?
4. Você conseguiu detectar algum erro conceitual na coleção analisada? Se sim, qual? Como percebeu?
5. Você adotaria esta coleção para trabalhar conceitos geométricos? Justifique.



## ATIVIDADE XXVI - Leitura

Para aprofundar seus estudos, deixamos como sugestão de leitura o texto “O Medir de Crianças Pré-Escolares”, de Anna Regina Lanner de Moura e Sergio Lorenzato. In: Revista ZETETIKÉ. FE/UNICAMP. v.9, n. 15/16, Jan/Dez de 2001.

<https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2496/2256>



## ATIVIDADE XXVII - Volume

Questão 1:

Construir, com os seus tijolos<sup>11</sup>, um tanque que tenha 6 tijolos de comprimento, 5 de largura e 3 de altura. Lembre-se que o fundo do tanque é feito com uma camada de tijolos. Em seguida responda as questões abaixo:

Se completássemos totalmente o espaço interior com tijolos, quantos deles teríamos no total?

Qual o cálculo que você fez?

Quantos tijolos de água poderíamos colocar no interior deste tanque?

Qual o cálculo que você fez?

Qual a diferença deste cálculo em relação ao anterior?

Questão 2:

Nos cálculos anteriores utilizamos como unidade de medida o tijolo; e se utilizássemos como unidade de medida apenas o comprimento da aresta do tijolo:

Quantos tijolos teríamos no total, se completássemos o interior do tanque com tijolos?

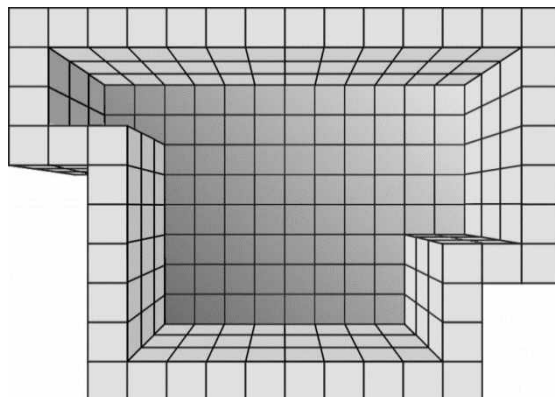
E quantos tijolos de água caberiam no tanque?

<sup>11</sup> Podem ser utilizadas as unidades do material dourado.

Qual é a diferença entre os cálculos feitos com esta nova unidade de medida e com a anterior?

Questão 3:

Temos no desenho abaixo a parte interna de um tanque visto de cima, com as marcações feitas, tomando como unidade de medida a aresta do tijolo. Responder os mesmos itens da questão 1.



Questão 6:

A partir de agora, ao falarmos de medidas de um tanque, estaremos nos referindo às suas medidas internas. Calcular:

- a) O volume de água em tijolos de um tanque que possui as seguintes medidas: seis arestas do tijolo de altura, 10 arestas de comprimento e 8 de largura.
- b) Um lavrador quer construir um tanque para armazenar 720 litros de água para a sua plantação.
  - b.1) Desenhe o tanque com as medidas que achar conveniente. Quais seriam elas?
  - b.2) Se o lavrador desejar que o tanque tenha 8 arestas de altura, quais poderiam ser as outras medidas?
  - b.3) Se o lavrador desejar que o tanque tenha 10 arestas de comprimento e 8 de altura, qual deve ser a largura do tanque?





## ATIVIDADE XXVIII - Planejamento de Aula

Para finalizar, lembrando do que foi abordado neste item, visite o site Salto para o Futuro<sup>12</sup>, em especial, ao tratar sobre Geometria<sup>13</sup>, explore as diversas informações que ali se encontram, elabore um planejamento de uma aula sobre um conteúdo do bloco Espaço e Forma. Não se esqueça que você é o autor de sua aula. Crie, ouse, invente!

Esta atividade deve ser inserida no Ambiente Virtual de Aprendizagem.

12 <<http://tvescola.mec.gov.br/tve/salto>>. Acesso em abril de 2015.

13 <<http://tvescola.mec.gov.br/tve/search;jsessionid=27DDF28716946C35133DC1AE37CEBDE1?searchField=geometria&clearBreadCrumb=true>>. Acesso em abril de 2015.



# MÓDULO 2

Algumas idéias sobre função polinomial do 1º grau, matemática financeira e estatística para o ensino fundamental e médio

Os objetivos deste módulo são:

- Fazer um resgate histórico para compreender alguns conceitos de Função, Matemática Financeira e Estatística.
- Refletir sobre o ensino de Função, Matemática Financeira e Estatística na educação brasileira atual.
- Desenvolver conhecimentos docentes relativos à educação básica sobre Função, Matemática Financeira e Estatística.
- Possibilitar ao estudante uma compreensão de fenômenos coletivos por meio de análises estatísticas.
- Oferecer ao estudante a capacidade de analisar criticamente as operações financeiras de que faz uso diariamente, tendo o poder de optar ao que melhor lhe convier, interpretando e refletindo sobre as opções que o mercado oferece.



## ALGUMAS IDEIAS SOBRE FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU, MATEMÁTICA FINANCEIRA E ESTATÍSTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

---

### 1. FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

#### ATIVIDADE I - Fórum de Ideias

Neste momento de nosso curso, sugerimos que você:

1. Procure registrar o que significa função para você e como a entende no processo ensino e aprendizagem.



2. Após seus registros pessoais, poste-os no Ambiente Virtual de Aprendizagem, no *Fórum de Ideias*, socializando com o grupo-classe o que registrou e discuta as questões, suas e dos colegas, que julgar mais relevantes.

## 1.1 CONCEITO DE FUNÇÃO<sup>14</sup>

Pela leitura de livros relacionados à História da Matemática é possível percebermos que os conceitos matemáticos surgem de necessidades humanas, uma vez que sejam postos problemas de interesse capital, prático ou teórico: é o número natural, surgindo da necessidade da contagem, o número racional, da medida, o número real, para assegurar a compatibilidade lógica de aquisições diferentes, isto é, não se pode admitir a coexistência no mesmo raciocínio, de duas aquisições que se contradizem. Nas suas construções, o homem busca harmonia e acordos. Em nenhum estado de construção se pode tolerar desacordo.

Pode-se, ainda, afirmar que “Todos os estudos na Ciência são a partir do movimento: Biologia – estudo da vida, Física – estudo da matéria, Química – estudo das substâncias gerando novas substâncias, Astronomia – movimento do Universo, Filosofia – movimento das idéias, História – movimento dos homens” (MOISÉS, 1998, p.2).

É natural, portanto, que surja o conceito matemático próprio para o estudo das leis quantitativas (aquelas que dizem respeito à variação de quantidade) de movimentos observados e, que a necessidade crie o instrumento. E assim acontece de fato. Esse instrumento não surgiu de repente, pronto e acabado. Deu-se uma gestação lenta em que necessidade e instrumento interagiram, ajudando-se e esclarecendo-se mutuamente.

Diante disto, suponhamos que temos que estudar uma variação de quantidade, a variação quantitativa de espaço e tempo no fenômeno da queda de objetos no vácuo. Realizadas as condições físicas necessárias – o isolado conveniente – e procurada a *regularidade* do fenômeno – a lei quantitativa –, o que fazer?

Uma opção seria medir as alturas da queda em intervalos de tempo iguais e estudar a variação dessas alturas de queda, quanto menores os intervalos de tempo, melhor para conhecer a regularidade. Este registro poderia ser realizado como no quadro a seguir:

Tempo (em segundos)	0	1	2	3	4	5...
Espaços (em metros)	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,5...

Porém, não é, neste simples quadro que se encontra toda a *regularidade*, a lei quantitativa: mas ele oferece uma primeira idéia dessa lei. O que significa, na verdade, este quadro? Em duas sucessões, dois conjuntos de números – o dos tempos, que representaremos

14 Textos 1 e 2 adaptados do Grupo Caraça (São Paulo e Campinas).

por  $t$ , e os dos espaços, que representaremos por  $e$  – em correspondência unívoca um com o outro, no sentido de  $t$  para  $e$ , visto que não podemos considerar um movimento de queda em que, ao final de certo tempo, o mesmo corpo tenha percorrido dois espaços diferentes.

A lei quantitativa consiste na relação do conjunto  $t$  com o conjunto  $e$ , e se quisermos estudar leis quantitativas, temos que criar um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos.

Este objeto matemático é expresso pelo conceito de *função*.

## 1.2 NOÇÃO DE FUNÇÃO

No exemplo da queda dos objetos, a lei da queda consiste na correspondência do conjunto dos tempos ao conjunto dos espaços; encontrada a lei temos condições de criar o instrumento matemático cuja essência seja essa correspondência. O conceito de função aparece, no campo matemático como o instrumento próprio para o estudo das leis.

Quando escrevemos que  $e = f(t)$  ( $e$  é função de  $t$ ), temos muito mais do que o que está no quadro. Nele estão apenas indicados alguns pares de valores da correspondência, ao passo que na afirmação  $e = f(t)$  está implícito que a qualquer valor de  $t$  corresponde um valor (e um só) de  $e$ . Podemos perceber a força que este novo instrumento traz em si.

(Texto extraído do livro *Conceitos Fundamentais da Matemática*, B. J. Caraça, 1951).

## 1.3 O CONCEITO DE FUNÇÃO: UM OLHAR PARA SUA HISTÓRIA<sup>15</sup>

O conceito de função vem sendo definido pelos matemáticos desde o século XVII, sob várias formas.

A noção de função, segundo Chaves e Carvalho (2004), presente desde os primórdios da humanidade, buscava a compreensão dos fenômenos, suas razões e ligações. Os autores analisam, por exemplo, o desenvolvimento de uma planta que depende do clima e do solo, que por sua vez depende de fenômenos atmosféricos e marinhos. Para inferir, era necessário “recortar” a realidade analisando conjuntos de variáveis significativas e que se relacionavam. No exemplo da planta, as variáveis poderiam ser: crescimento versus chuva, ou crescimento versus nutriente, ou morte versus tempo.

<sup>15</sup> Texto adaptado de Lourenço, Murilo Pires. *Ensino de função via resolução e elaboração de problemas*. Trabalho de Conclusão de Curso. (Licenciatura em Matemática) — Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2010.

Segundo Sebastiani (2005), essa noção de função, na antiguidade, não levou à criação de um conceito de variável e de função, mas pelo fato da função ter um aspecto intuitivo não se sabe ao certo onde surgiu à primeira noção de função. Há evidências que os egípcios, os babilônios e os gregos antes de Cristo, e mesmo na Europa do século XVI, implicitamente, como dizem os historiadores, tinham uma noção do conceito de função.

Nos papiros egípcios e nas tábuas babilônicas temos representações de funções em forma de tabelas, por exemplo, a tábua babilônica *Plimpton* (figura 1), escrita aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C. Ela consiste de três colunas praticamente completas de caracteres que contém ternas pitagóricas, isto é, números que representam a medida da hipotenusa e de um cateto de triângulos retângulos cujos três lados têm medida inteira<sup>16</sup>.



Figura 10: Tábua babilônica *Plimpton* <sup>17</sup>

Na Grécia antiga a noção de função aparece como gráficos de curvas principalmente em Arquimedes e Apolônio (SEBASTIANI, 2005).

Sebastiani (2005) lembra-nos que os Pitagóricos também estabeleceram relações entre grandezas, como as alturas do som e o comprimento das cordas vibrantes. Entretanto, a raiz do conceito de função apareceu pela primeira vez com o Bispo Nicolas Oresme, o qual utilizou segmentos de reta para representar a variação de tempo e velocidade, como no desenho a seguir.

16 Fonte: [www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/babilonia.html](http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/babilonia.html). Acesso em 27/02/2010.

17 Fonte: [www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/babilonia.html](http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/babilonia.html). Acesso em 27/02/2010.



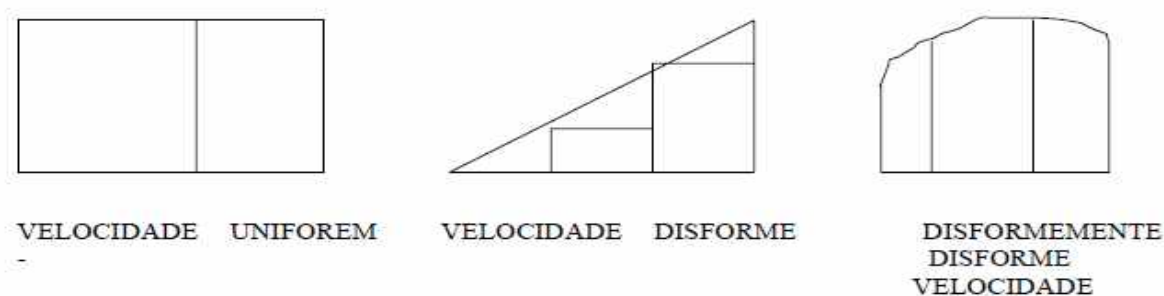


Figura 11: Segmentos de reta para representar a variação de tempo e velocidade <sup>18</sup>

Segundo Sebastiani (2005), o matemático e filósofo René Descarte teve sua grande contribuição e inventou os eixos cartesianos, permitindo a correspondência entre os pontos do plano e os pares de números. Por volta de 1673, num manuscrito, Leibniz usa pela primeira vez a palavra função. Mais tarde com a grande preocupação do rigor da linguagem matemática os matemáticos Bernoulli, Euler, Fourier e Dirichlet fizeram suas grandes contribuições para o rigor da definição de função.

Johann Bernoulli adota a terminologia de Leibniz para função de  $x$ , isto em 1698 e, em 1718, Bernoulli faz a distinção entre função e valor da função, mas não fala da unicidade. Euler, que foi aluno de Bernoulli, em 1748 escreveu: “Uma função é um valor variável numa expressão analítica, que é composta do valor variável e valores constantes”. Euler dá como exemplo de função a raiz quadrada de uma variável; para ele também só tinha sentido funções contínuas, mas já assumia que a função podia ter duas representações, sua expressão analítica e a curva traçada a mão livre. Não se falava em domínio nem de contradomínio (SEBASTIANI, 2005).

Fourier (1768–1830) restringe de alguma maneira o domínio de definição da função; dizia que não era para qualquer número, mas poderia ser só para um intervalo, geralmente, para um conjunto. Outro estudo importante de Fourier foi o de funções não contínuas. Finalmente em 1837 aparece a definição de Dirichlet que introduz o sentido mais amplo de função, a que conhecemos até hoje (SEBASTIANI, 2005).

Com o movimento da matemática moderna, passou-se a ensinar funções para estudantes a partir dos 10 anos. No Brasil, isto aconteceu entre 1955 e 1970. Muito do formalismo Bourbakiano<sup>19</sup> impregnou o ensino desse tópico nessa época, ignorando razões que determinaram o surgimento do conceito de função, tais como, a necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências e fazer generalizações. (CARAÇA, 1951).

<sup>18</sup> Fonte: [www.ime.unicamp.br/~lem/publica/e\\_sebast/conc\\_fun.pdf](http://www.ime.unicamp.br/~lem/publica/e_sebast/conc_fun.pdf). Acesso em 18/03/2010.

<sup>19</sup> Esta linha tinha como objetivo inicial o de “fundamentar o ensino de Matemática sobre bases e procedimentos mais rigorosos. Defendia-se a unidade na matemática baseada em três estruturas-mãe: algébricas, topológicas e de ordem”. Levando a uma “economia de pensamento” (NOVAES et al, 2008). Fonte: [http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2008/anais/pdf/653\\_790.pdf](http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2008/anais/pdf/653_790.pdf). Acesso em 08 de setembro de 2015.

No ensino atual e nos livros didáticos, podemos perceber duas características enfatizadas nas funções: a concepção de função como expressão analítica e a introdução do conceito como conjunto de pares ordenados e como caso particular das relações entre as grandezas que constituem o fenômeno.

Essas características refletem a tendência de privilegiar o aspecto da definição de função e que podemos perceber essas características nos resultados obtidos por meio de análises das dificuldades dos alunos. Em pesquisas atuais, pode-se observar que o ensino de função está voltado para o desenvolvimento do conceito no nível formal e/ou na utilização das máquinas e computadores nesse processo.

Uma das dificuldades apontadas nesses resultados é a falta da construção do conceito de grandeza ao longo dos primeiros anos de escolaridade. No desenvolvimento do conceito de função é importante que se leve em consideração a concepção de Caraça (2000) sobre função: instrumento matemático necessário à análise de fenômenos de variação.

Aqui surge a necessidade de criar um instrumento matemático que represente esta correspondência entre os dois conjuntos. Foi neste momento que surgiu a necessidade da criação da variável (CARAÇA, 2000) que pode ser definida da seguinte forma:

Seja  $E$  um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionamos representar qualquer de seus elementos por um símbolo, por ex.:  $x$ . A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto  $E$ , chamamos variável. (CARAÇA, 2000, p.119).

Caraça (2000) alega que a noção de **variável** é uma das mais difíceis para a compreensão dos alunos. É um número qualquer de determinado conjunto, mas não é especificamente nenhum dos números desse conjunto. É um número que, sem coincidir individualmente com nenhum dos números de um intervalo, é susceptível de representar a todos.

Além disso, o entendimento dos conceitos de variável dependente e independente também é de grande confusão para os alunos, uma vez que eles não conseguem relacionar estes termos ao seu par ordenado.

É importante que a relação de **dependência** entre grandezas variáveis seja salientada aos alunos sempre que possível, destacando exemplos do cotidiano que confirmam que todas as coisas estão relacionadas umas com as outras. Além disso, numa relação

funcional, uma das grandezas (a variável dependente) é perfeita e univocamente determinada pela variação da outra (variável independente). Em uma função, diz-se que há duas variáveis: a variável dependente e a variável independente. A variável independente pode assumir qualquer valor em um determinado conjunto, já a variável dependente, possui seus valores calculados a partir da variável independente, ou seja, a variável dependente depende da outra variável para existir. Essa característica da função deve surgir lentamente ao longo do processo de ensino e ser explicitada o mais naturalmente possível.

**É importante notar também que** muitos fenômenos da natureza e da vida fluem com certa **regularidade**, que, se detectada permite fazer previsões sobre etapas que não podem ser observadas. O reconhecimento de regularidades em situações reais, em sequências numéricas ou padrões geométricos é uma habilidade essencial à construção do conceito de função. Por outro lado, é importante que o professor explore situações em que não haja regularidade, para evitar a concepção de que todos os fenômenos obedecem a uma lei geral (SOUSA, 2004).

O conceito de regularidade também não é explorado em nossas salas de aula ao se trabalhar com o conteúdo de função, relegando-se aos alunos apenas identificar os elementos perceptíveis do conceito (SOUSA, 2004) para representá-los formalmente e, dificilmente, pensarem se estão ou não frente a um movimento.

Os fenômenos que ocorrem com regularidade podem ser **generalizados**. A capacidade de generalizá-los é importante e envolve, em geral, abstração. Segundo Sousa (2004) poucas crianças conseguem fazer generalizações, sendo que para “a maioria dessas crianças, a generalização está relacionada com um longo processo comparativo de fatos similares e a associação gradual dos mesmos em uma certa classe ou operações do tipo discursivo empírico”(DAVYDOV, 1982 apud SOUSA, 2004, p.144).

Muitas vezes, generalizamos situações que apresentam regularidades, verificando apenas se certa lei se aplica a casos particulares. É importante desenvolver nos alunos a capacidade de apresentar argumentos na linguagem corrente, que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, registrando-os. O registro das leis gerais em linguagem algébrica ou geométrica é passo decisivo para que o conceito de função seja construído.

Os nexos conceituais *variável, dependência, regularidade e generalização* se fazem importantes e essenciais para que possamos compreender o conceito de função, pois a partir deles podemos dar movimento às variáveis e relacioná-las com maior compreensão (SOUSA 2004).

Em nossas escolas dá-se ênfase, principalmente, à última forma de representação da função, não proporcionando aos alunos imaginar, filosofar, pensar sobre conceitos matemáticos.

Consideramos ser importante também, que em nossas escolas existam espaços com atividades que propiciem aos alunos, a partir de seu próprio entendimento sobre um conceito, que “reformulem e (re)elaborem em sua subjetividade o pensar matemático de tal modo que, durante o estudo das atividades, sintam necessidade de se (re)verem profissionalmente, à medida que passam a fazer relação direta entre o que estão aprendendo” (LANNER DE MOURA et al., 2003, p.9) e o que poderiam ensinar.

É preciso que em nossas salas de aula proporcionemos situações em que a idéia de movimento esteja presente para, a partir daí, o aluno entender os conceitos de variável e função (LANNER DE MOURA e SOUSA, 2005) com interesse e prazer em estudar a matemática e não apenas decorar “macetes” para resolver exercícios e “passar de ano”.

Muitos professores, ao trabalharem o conceito de função procuram priorizar funções que tenham “domínio e imagem no conjunto dos números reais, ainda que, na realidade fluente, existam movimentos diversos, como por exemplo, os irregulares, ou ainda aqueles que são contínuos” (SOUSA, 2004, pp.155-6).

Concordamos com Lanner de Moura e Sousa (2005) quando afirma que a “função é a ferramenta atual de todos os matemáticos, ferramenta que permite ao homem dar nexos e compreender os movimentos fluentes do cotidiano, da realidade, da vida, que ora podem ser regulares, ora podem ser irregulares” (p.40).

Segundo Caraça (2000), o “conceito de função aparece, no campo matemático como o instrumento próprio para o estudo das leis” (p.121). Este instrumento se faz importante, pois

queremos encontrar regularidades nos movimentos da vida para que possamos elaborar generalizações. Queremos criar fórmulas gerais para tentarmos compreendermos os diversos movimentos do mundo. Só conseguimos elaborar essas fórmulas quando conseguimos apreender movimentos regulares que se apresentam nos fenômenos da vida.(LANNER DE MOURA e SOUSA, 2005, p.33-4).

Observando o processo construtivo do conceito de função ao longo da história da matemática, percebemos que podemos desenvolver o mesmo em sala de aula

proporcionando que o aluno aprenda de forma intuitiva e que perceba a necessidade da concretização do conteúdo com o rigor matemático.

Concordamos com Ávila (1985), quando considera que:

A preocupação excessiva com apresentações formais é uma falha grave no ensino, pois atrapalha o desenvolvimento do aluno já que obscurece o que há de mais importante na Matemática: as idéias. (p.14).

É importante que os professores convidem seus alunos a pensar sobre os conceitos estudados de forma criativa, de modo a aprofundarem seus pensamentos e conhecimentos e não os apresentar como algo pronto e acabado, como um pensamento de operações formais.

O desenvolvimento dessas ideias pode ser feito por meio de atividades ligadas ao dia-a-dia, as quais os alunos estejam familiarizados, inclusive, com as diversas formas de representar funções: **Verbal** (em palavras, oralmente ou por escrito), **Gráfica** (gráficos formais e informais, tabelas,...) ou **Analítica**(por expressões matemáticas).

A flexibilidade na passagem de uma representação a outra e o uso da representação em linguagem corrente, oralmente ou por escrito são fundamentais para a construção do conceito de função.

## 1.4. OS NÍVEIS DE COMPREENSÃO DO CONCEITO

	Níveis			
	Compreensão intuitiva	Matematização Inicial	Abstração	Formalização
Características	Utilização do conhecimento informal da vida  Pensamento com base na percepção visual  Ações espontâneas	Organização e quantificação das primeiras noções intuitivas  O conceito é confundido com o procedimento que leva à sua construção	O conceito se destaca do procedimento e alcança uma existência própria  Generalização	Uso da linguagem simbólica  Descontextualização  Justificação lógica das operações
Para Funções	Reconhecimento de dependência (não quantificada)  Estabelecimento de leis de formação simples e visuais  Construção e interpretação de tabelas e gráficos de colunas e setor	Quantificação das leis.  Reconhecimento de variáveis dependentes e independentes  Interpretação de gráficos cartesianos  Construção de gráficos cartesianos simples  Reconhecimento do domínio (analisado no contexto)	Escrita de expressões analíticas.  Distinção entre equações e funções  Construção e interpretação de gráficos convencionais e não-convencionais.  Caracterização de relações funcionais.	Notações funcionais  Domínio e imagem  Classificação  Operações com funções
Ens. Fund. I				
5a e 6ª séries				
7a e 8ª séries				
E. Médio				

Fonte: Construindo o Conceito de Função (IM/UFRJ)

## 1.5. ALGUMAS DEFINIÇÕES DE FUNÇÃO POLINOMIAL DO PRIMEIRO GRAU <sup>20</sup>

Para nos auxiliar no entendimento de funções polinomial do primeiro grau, abaixo relacionamos algumas definições elaboradas por alguns autores renomados.

Caraça (2000, p.121) define função como “sejam  $x$  e  $y$  duas variáveis representativas de conjuntos de números, diz-se que  $y$  é função de  $x$  e escreve-se  $y=f(x)$ , se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido  $A \times$  chama-se variável independente, e a  $y$  variável dependente”. Ou seja, dois conjuntos que de alguma maneira se relacionam e que conseguimos obter uma regra ou lei de formação que satisfaz esta relação.

Para Guidorizzi (1987, p.37), função é “uma regra que nos permite associar a cada elemento  $a$  de  $A$  um único elemento  $b$  de  $B$ . O conjunto  $A$  é o domínio de  $f$  e  $B$  o contradomínio de  $f$ ”.

Dante (2011, p.75), define função como “dados dois conjuntos não vazios  $A$  e  $B$ , uma função de  $A$  em  $B$  é uma regra que indica como associar cada elemento  $x \in A$  um único elemento  $y \in B$ ”.

Já para Hoffmann e Colledge (1990, p.1), função é “uma regra que associa cada objeto de um conjunto  $A$  a um e somente um objeto de um conjunto  $B$ ”.

Os autores Guidorizzi, Dante, Hoffmann e Colledge definem função como uma regra que pode ser compreendida como lei de formação de uma função, o que determina a existência da função. Entendemos como lei de formação de função polinomial do primeiro grau uma regularidade, uma generalização que, independente do elemento do conjunto que utilizarmos, conseguiremos satisfazer uma relação.

A partir da leitura realizada, passamos a refletir sobre algumas questões.

---

<sup>20</sup> Texto adaptado de Araújo, Istael Pereira de. *Exploração de conceitos iniciais de funções por meio de uma atividade computacional de ensino*. Trabalho de Conclusão de Curso. (Licenciatura em Matemática) — Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2014.



### ATIVIDADE III - O ensino de funções e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

Faça uma pesquisa no PCN de matemática sobre o que este documento orienta para o ensino de funções e faça uma reflexão crítica, ou seja, colocando seu ponto de vista sobre tal orientação relacionando ao estudo que acabamos de fazer por meio dos textos apresentados acima.



### ATIVIDADE IV - O que é uma função?<sup>21</sup>

I - Imagine a seguinte situação:

O viajante na floresta põe um pé diante do outro e a cada passo o caminho por ele vencido se acresce de uma nova porção. O trajeto guarda com o número de passos uma relação fixa e determinada.

Responda:

- a. Quais são as grandezas que envolvem a interdependência desse movimento?
- b. Qual a lei obedecida por esta interdependência? Expresse-a:
  - i. a partir de uma frase;
  - ii. a partir da matemática simbólica
- c. Localize a variável dependente e a variável independente desse movimento.

II - Suponhamos que o viajante distraído que caminha pela floresta seja um soldado em férias, que tem no sangue a cadência constante das marchas.

- a) Se o comprimento do passo desse soldado vale 0,75m, como poderíamos expressar a lei que rege o seu trajeto? Por quê?
- b) Nesta situação, qual será o campo de variação dessa lei? Por quê?
- c) Construa uma tabela com o trajeto possível do soldado.
- d) Se não quisermos medir o trajeto pelo número de passos e sim pela relação tempo e caminho percorrido, haverá mudanças na lei que estabelecemos

## 2. MATEMÁTICA FINANCEIRA: ALGUNS ELEMENTOS HISTÓRICOS

21 Atividades 2 e 4 adaptadas dos livros: "Elementar é o essencial" (de Luciano Castro Lima; Mário Takazaki e Roberto P. Moisés, São Paulo: CTEAC, 1998); "A variável – ser e não ser" (de Luciano Castro Lima e Roberto P. Moisés, São Paulo: CTEAC, 2000); O cálculo algébrico: operações com "Número Algébrico" – A linguagem Algébrica 2. São Paulo/SP, CTEAC, edição de 1993; **Apostila básica de Matemática**. Secretaria de Estado da Educação – Projetos de Educação Continuada – Pólo 3 – Universidade de Mogi das Cruzes. São Paulo/SP, CTEAC, 1998.



anteriormente? Por quê?

e) E quanto ao campo de variação? Explique.

III - O caminhante prossegue em sua marcha com velocidade constante, sem orientar o modo de andar pelo seu estado de ânimo. Suponhamos que em um segundo o homem percorre 1,5 metros, em dois,  $2 \cdot 1,5$  metros e, assim por diante:

- Como expressar a lei desse movimento?
- Qual será o campo de variação?
- Como representar esse movimento a partir de uma tabela?
- Como dispor esses dados em um gráfico?

## ATIVIDADE V - Posto das funções



Nesta atividade, os objetivos são: compreender a definição de função polinomial do 1º grau por meio de várias situações; determinar a lei de formação de uma função afim; e, relacionar as variáveis presentes no trabalho de um taxista.

Nesta proposta os alunos não necessitam memorizar uma fórmula, mas é possível compreenderem onde e como uma função pode ser utilizada e aprenderem a determinar a lei de formação de uma função polinomial do 1º grau.



Figura 12: Atividade Posto das Funções <sup>22</sup>

Nesta atividade, você deverá fazer uma reflexão sobre o que vivenciou, pensou, aprendeu e também descrever suas dúvidas e possíveis sugestões para a melhoria desta atividade.

22

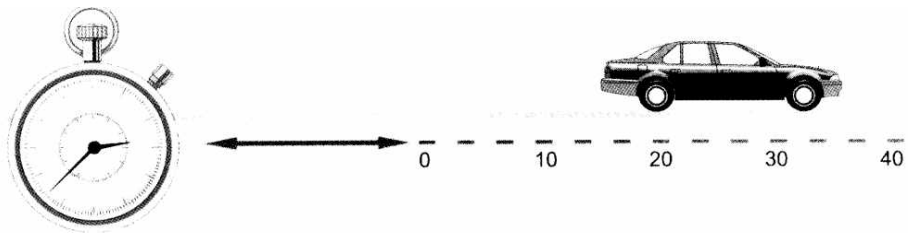
Elaborada por elaborada por Istaell Pereira de Araújo e integrante do Trabalho de Conclusão de Curso da mesma.



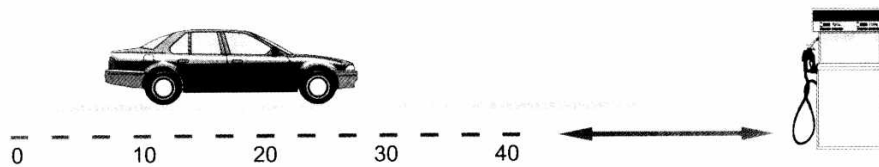
## ATIVIDADE VI - Observando movimentos

Observe cada um dos movimentos representados pelas figuras abaixo, identifique as grandezas e elabore uma situação-problema que destaque apenas duas delas.

a)



b)





## ATIVIDADE VII - A fábrica de computadores<sup>23</sup>

Mario trabalha em uma fábrica de montagem de computadores. Para montar cada aparelho ele e sua equipe gastam 20 minutos:

Quantidade de computadores	1	2	3	4	5
Tempo/minutos	20	40	60	80	100

- Quais grandezas envolvem a interdependência deste movimento?
- O que é possível estabelecer entre as duas grandezas neste movimento?
- Como podemos representar algebricamente este movimento?
- Como podemos dispor esses dados em um gráfico?



## ATIVIDADE VIII - Alugando carros

Em uma cidade turística, duas empresas de aluguel de carros praticam as seguintes taxas: Empresa A: R\$ 35,00 fixos e R\$ 3,00 por quilômetro rodado. Empresa B: R\$ 55,00 fixos e R\$ 2,00 por quilômetro rodado.

- Encontre a função que representa o valor do aluguel da empresa A.
- Encontre a função que representa o valor do aluguel da empresa B.
- Olhando para as funções das empresas A e B, em qual você alugaria um carro?
- Se um cliente rodar 45 quilômetros, em qual das duas empresas ele vai pagar menos pelo aluguel do carro?

23 Atividade extraída de FRANCO, Patrícia Lopes Jorge. O desenvolvimento de motivos formadores de sentido no contexto das atividades de ensino e estudo na escola pública brasileira. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação, Universidade FEDERAL DE UBERLÂNDIA, Uberlândia, MG, 2015.

## ATIVIDADE IX - Fórum de Ideias

Neste momento de nosso curso, sugerimos que você:

- 4 Procure registrar suas experiências pessoais com a matemática financeira.
- 5 Busque resgatar em suas memórias momentos em sala de aula onde foram abordados conceitos da matemática financeira.
- 6 Como o professor pode trabalhar os conteúdos da matemática financeira buscando um ambiente de apropriação do conhecimento e não apenas de cálculos sem significados ao aluno?



2. Após seus registros pessoais, poste-os no Ambiente Virtual de Aprendizagem, no Fórum de Ideias, socializando com o grupo-classe o que registrou e discuta as questões, suas e dos colegas, que julgar mais relevantes.

## 2.1 Matemática Financeira: Alguns elementos históricos

A matemática financeira se faz comumente associada a movimentos comerciais, entretanto como nas civilizações primitivas os homens sobreviviam usufruindo dos produtos retirados da natureza, apenas para suprir suas necessidades, não havia a necessidade de trocas comerciais (GRANDO e SCHNEIDER, 2010).

À medida que os homens foram estabelecendo a comunicação entre as diferentes civilizações, desenvolvendo sua cultura e artesanato, e em virtude da repartição desigual de diversos produtos naturais, iniciaram-se as trocas de mercadorias, onde determinado grupo dispunha daquilo que possuía em excesso. Contudo, ainda não notava-se a preocupação com equivalência de valores entre as mercadorias a serem trocadas. Para Ifrah (1992),

o primeiro tipo de intercâmbio foi a *troca*, fórmula segundo a qual se permutam diretamente (sem a intervenção de uma “moeda” no sentido moderno do termo) gêneros e mercadorias correspondentes a matéria prima ou a objetos de grande necessidade. (IFRAH, 1992, p. 72, grifo do original).

Como não havia uma equivalência entre os produtos a serem trocados e essas trocas se tornaram cada vez mais constantes, o homem sentiu a necessidade da criação de uma maneira mais adequada que a direcionasse, um sistema mais estável de avaliação e de equivalência “fundado num princípio (semelhante ao da base de um sistema de numeração) que definisse algumas *unidades* ou *padrões* fixos” (IFRAH, 1992, p.72). Essas unidades permitiam que fosse possível estimar valores para as trocas de caráter econômico, mas também, valores para momentos da cultura de determinados povos como o “valor da noiva” – estimativa de bens de consumo de uma mulher a ser tomada como esposa, “valor do sangue” – valor da agressão causadora da morte de um indivíduo (IFRAH, 1992).

Alguns povos como os gregos e romanos avaliavam seus gêneros e mercadorias em cabeças de gado. Segundo Ifrah (1992),

Na *Ilíada* de Homero (XXIII, 705, 749-751 e VI, 236), “uma mulher capaz de mil tarefas” foi avaliada em quatro bois, a armadura em bronze de Glauco em nove bois e a de Diomedes, que era de ouro em cem bois. (p.146).

Acreditamos que a escolha do boi, se deu pela vantagem do mesmo pela locomoção própria, por sua reprodução e por seu uso na prestação de serviços. Outro padrão de equivalência utilizado a época foi o sal, devido seu uso na conservação de alimentos, a “palavra “salário” (remuneração, geralmente em dinheiro, devida pelo empregador ao empregado para pagamento de serviços prestados), no Império Romano, teve sua origem creditada à utilização do sal” como equivalência nas trocas comerciais (GRANDO e SCHNEIDER, 2010).

Na região ártica do Canadá, assim como na Sibéria e na Groenlândia, os valores eram estimados em peles de animais ou peças de tecidos. No México, os astecas usavam a peça de um tecido (o *quachtli*) com seu múltiplo, o peso que valia vinte vezes mais. Na América Central pré-colombiana, os maias usavam algodão, cacau, cerâmicas (IFRAH, 1992). Na China, na segunda metade do II milênio a.C., trocavam-se gêneros e mercadorias por padrões como cascas de tartarugas, peles ou chifres de animais.

Contudo, esses métodos tornavam difíceis de serem utilizados à medida que pensamos o quanto a comunicação entre as diferentes comunidades é um processo diversificado e se intensificavam com o desenvolvimento da agricultura, artesanato e das trocas comerciais. “Se dois grupos distintos empregavam frequentemente padrões monetários diferentes, com bases também diferentes, ficava difícil encontrar um ponto de entendimento” (IFRAH, 1992, p.74). Acreditamos também que não devia ser fácil passar de um sistema de valor para outro.

Surgiu, assim, a necessidade de um material e de um sistema de avaliação mais estável e prático, difundindo o uso de peças de metais.

A partir de uma certa época eles [os metais] passaram a ter um papel cada vez mais importante nas transações comerciais e se tornaram gradualmente a “moeda de troca” preferida dos vendedores e dos compradores, relegando os velhos padrões apenas à lembrança de sua antiga preponderância. (IFRAH, 1992, p. 75).

Esses objetos de metais eram facilmente manejáveis, de peso igual. No Egito dos faraós, o metal foi dividido inicialmente em pepitas, lâminas ou lingotes e anéis dos quais se determinavam depois o peso, onde a unidade principal foi o *dében*, que equivale a noventa e um dos nossos gramas. Vejamos um exemplo apresentado por Ifrah (1992):

Entregue a Hay, pelo brigadeiro Nebsmen:

1 boi, ou seja: 120 *débens*(de cobre)

Recebido em troca:

2 boiões de gordura, ou seja: 60 *débens*

5 tangas de tecido fino, ou seja: 25 *débens*

1 vestimenta de linho meridional, ou seja: 20 *débens*

e 1 pele, ou seja: 15 *débens*

(IFRAH, 1992, p.76)

Segundo Ifrah (1992), a ideia de peça de moeda de troca no sentido moderno do termo, surgiu provavelmente no século VII, simultaneamente entre os povos da Ásia Menor e os chineses quando o metal passou a ser fundido em pequenos lingotes ou peças, que eram facilmente manejáveis, de peso igual e selados com a marca oficial de uma autoridade pública, a única que podia certificar o bom preço e o bom quilate.

Com o maior desenvolvimento do comércio no mundo, inicialmente os centros comerciais eram a Fenícia, Cartago e as cidades estado da Grécia. Mais tarde, com a criação do Império Romano, o centro passou a ser Roma. Na Idade Média, o comércio prosperou especialmente nas cidades-estado da Itália, como Veneza, Pisa, Gênova e Florença, que negociavam muito com o Oriente. A partir do século XV, outros países, como Holanda, Espanha, Portugal e, posteriormente (século XVII), Inglaterra, fortaleceram-se, assumindo a liderança do comércio. (GRANDO e SCHNEIDER, 2010, p.46).

Conforme o comércio caminhava para atingir o auge com a figura do mercador, teve início uma nova atividade, o comércio do próprio dinheiro, que no contexto do século XVII, destinava-se ao ouro e a prata.

Com as relações entre países cada vez mais crescentes, as trocas de moedas se intensificavam, mas uma questão vinha a preocupar, a quantidade de ouro em cada moeda, uma vez que “o país comprador paga com sua moeda uma soma equivalente à quantidade de ouro contida na moeda do país vendedor” (ROBERT, 1989, p. 31), como

estabelecer a relação entre os valores das moedas nas relações internacionais?

Para tanto, definiu-se o critério para se determinar a equivalência entre moedas, baseando-se na quantidade de ouro em poder de cada país, aguçando a vontade de alguns comerciantes em acumular quantidades de moedas para realizar a troca, surgindo assim os cambistas.

Paulatinamente, foram se ocupando de uma nova atividade: guardar e emprestar dinheiro. Imaginemos um cambista qualquer que tenha acumulado, desta forma, em seus cofres, imensa quantidade de dinheiro. Era natural que a seguinte ideia lhe ocorresse: porque estas grandes somas de dinheiro haverão de permanecer em nosso poder sem qualquer lucro para mim? [...] emprestarei parte deste dinheiro a quem pedir, sob a condição de que seja devolvido num prazo determinado. E como meu devedor empregará o dinheiro como quiser durante este período – talvez em transações comerciais -, é natural que eu obtenha alguma vantagem. Por isso, além do dinheiro emprestado, deverá entregar-me, no vencimento do prazo estipulado, uma soma adicional. (ROBERT, 1989, p. 55-56).

Pelo trecho acima, vemos o homem pensando na ideia de ganho, o lucro, conceberia a ideia de Juros. Vemos o homem apropriando-se das primeiras ideias de operações de crédito, assim como emerge desse contexto à origem as palavras banqueiro e banco, vindas do modo “como os cambistas exerciam sua profissão, sentados num banco de madeira em algum lugar do mercado, local onde faziam o intercâmbio de sua mercadoria específica, o dinheiro” (GRANDO e SCHNEIDER, 2010, p.48).

Segundo as civilizações egípcias e babilônicas, e, tempo depois, os gregos e os romanos, costumavam recorrer aos sacerdotes para o confinamento de seu ouro, assim os primeiros bancos foram criados pelos sacerdotes, que emprestavam quantias que depois de certo tempo deveriam ser devolvidas com juros, em ouro e prata.

A Igreja Católica criou, então, o Banco do Espírito Santo, já comum fabuloso capital inicial, com o objetivo de facilitar a cobrança de impostos, dízimos e indulgências de seus fiéis, como também de realizar operações de empréstimos. Desse modo, a Igreja exercia um domínio nesta atividade, proibindo ou até condenando os cidadãos que emprestavam dinheiro a juros. (GRANDO e SCHNEIDER, 2010, p.48).



Contudo, a Igreja Católica não conseguiu monopolizar essa prática e, o primeiro banco privado foi fundado em Veneza em 1157, pelo duque Vitali. Com a descoberta da América, o comércio europeu se viu em ascensão surgindo poderosas casas bancárias nos finais do século XVI e no século XVII na Europa Ocidental.

Com o desenvolvimento das atividades bancárias fez-se necessária a matemática comercial e financeira, pois “para alcançar uma precisão nos cálculos, houve toda uma evolução histórica nas formas utilizadas para resolver os problemas, a partir das primeiras trocas comerciais” (GRANDO e SCHNEIDER, 2010, p.50).

*Aritmética de Treviso*, publicada em 1478 é considerada a mais antiga aritmética impressa, anônima e trata de uma aritmética amplamente comercial, dedica-se a explicar a escrita dos números, efetuar cálculos e contém aplicações envolvendo sociedades e escambo.

Outras publicações sobre a aritmética também tiveram sua relevância, como a aritmética comercial escrita por Piero Borghi, em Veneza, em 1484, e que alcançou dezessete edições até 1557; a aritmética de Filippo Calandri, publicada em Florença em 1491. (GRANDO e SCHNEIDER, 2010, p.52).

E assim caminhamos para a compreensão da matemática financeira.

## 2. 2 A matemática financeira e a educação básica

Tendo como base que uma das funções da escola seja formar cidadãos críticos e pensantes, ministrar o conteúdo de matemática financeira se estabelece como um grande aliado do professor, por permitir um ensino contextualizado, por meio de situações problemas, que detenham a atenção dos alunos e possibilite a habilidade de pensar matematicamente e enxergar por entre linhas. Como se verifica na fala de Lima e Sá (2010), podemos perceber que ensinar matemática financeira

(...) não é só ensinar a lidar com o dinheiro, mas sim fazer com que eles [os alunos] rejeitem a corrupção, façam negociações justas, cumpram prazos e valores combinados, tenham consciência ambiental usando sem desperdiçar os recursos naturais tendo um pensamento coletivo e humanitário e por fim que sejam responsáveis socialmente. (LIMA e SÁ, 2010, p.5).

A educação financeira pode permitir um ensino consolidado, rico em interpretações, desmistificando o ensino da matemática essencialmente feito por exercícios repetitivos e cansativos. Em função disso, Carvalho (1999) nos diz que

[...] a contribuição da matemática nas tarefas que lidam com o dinheiro não reside apenas em apoiar as ações do cálculo correto, no que se refere a especificações de determinadas somas ou casos como troco ou pagamento de um total no caixa. Diversos conceitos e procedimentos da matemática são acionados para entendermos nossos holerites (contracheques), calcular ou avaliar aumentos e descontos nos salários, aluguéis, mercadorias, transações financeiras, entre outros. (CARVALHO, 1999, p.61).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) fazem referência aos conteúdos da matemática financeira no item Números e Operações, ao sugerirem o trabalho com juros por meio da “resolução de situações-problema que envolvam juros simples e alguns casos de juros compostos, construindo estratégias variadas, particularmente as que fazem o uso de calculadora” (p.87), assim o documento evidencia a importância desse conteúdo ser abordado na sala de aula concomitante às situações que estejam relacionadas ao contexto do aluno.

## **ATIVIDADE XI - A Matemática Financeira e os Parâmetros**



Faça uma pesquisa nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e, mediante as orientações desse documento, quais você julga estarem relacionadas aos conceitos da matemática financeira? Quais são as orientações desse documento para o ensino de matemática financeira?

## 2.3 MATEMÁTICA FINANCEIRA: ALGUNS CONCEITOS

Schneider (2008), dialogando com alguns autores, discute que até há pouco tempo existia a denominação matemática comercial e financeira.

Carvalho e Cylleno (1971) distinguiram a matemática comercial (juros e descontos simples, ligas, moeda, câmbio e títulos de renda) da matemática financeira (juros edescontos compostos, rendas certas, empréstimos, depreciação e as tábuas financeiras). Acredita-se que a classificação de comercial ou financeira esteja mesmo ligada à forma de resolução dos problemas. Os cálculos relacionados à utilização de fórmulas matemáticas, porcentagens, juros e descontos simples, por exemplo, estão mais próximos do conceito de comércio. Por outro lado, os cálculos de juros compostos, séries de pagamentos, amortizações de empréstimos bancários são entendidos como financeiros, pois, em geral, utilizam-se calculadoras financeiras para a solução dos problemas apresentados. (SCHNEIDER, 2008, p.52).

Contudo, atualmente usamos o termo Matemática Financeira, entendendo como o ramo da Matemática que busca quantificar as transações que ocorrem no universo financeiro levando em conta a variável tempo, ou seja, o valor monetário no tempo, onde razão, proporção, porcentagem, juros simples e composto podem ser considerados como conteúdos básicos da matemática financeira, constituindo um sistema de conhecimentos pela relação existente entre eles. Apresentamos a seguir alguns desses conceitos básicos da matemática financeira.

### 2.3.1 Porcentagem

A porcentagem é um tema bastante presente em nosso cotidiano, principalmente em situações financeiras. Podemos dizer que a porcentagem representa uma razão centesimal, ou seja, uma razão cujo denominador é 100. Vejamos um exemplo.

Na tabela abaixo, apresentamos a produção, em peças, de duas empresas nos anos de 2013 e 2014.

	Produção em 2013	Produção em 2014	Aumento da Produção
Empresa A	600	750	150
Empresa B	500	640	140

Vamos determinar a razão entre o aumento da produção e a produção no ano de 2013:

Empresa A: 150/600    Empresa B: 140/500

Qual empresa obteve o maior aumento de produção relativo?

Uma das maneiras de comparar essas razões consiste em expressá-las sob a forma de razões centesimais ou taxas percentuais ou porcentagens. Assim:

Empresa A:  $= 150/600 = 25/100 = 25\%$     Empresa B:  $= 140/500 = 28/100 = 28\%$

Concluimos que a Empresa B obteve maior aumento de produção relativo, tendo como referência o ano de 2013.

### **2.3.2    Juros**

Santos (2005) define juro como sendo

[...] aquela quantia que é cobrada ou recebida a mais sobre um valor emprestado ou aplicado durante certo tempo à referida taxa. Quando pedimos dinheiro emprestado a um banco, sempre teremos que pagar juros pelo empréstimo obtido. Quando efetuamos depósitos em poupança ou outro tipo de investimento, o valor excedente que recebemos por mantermos nosso capital aplicado é o juro. É como se fosse um aluguel que se paga pelo uso do dinheiro. (SANTOS, 2005, p. 161 apud GRANDO e SCHNEIDER, 2010, p.55).

Os juros são classificados em simples ou compostos, dependendo do regime de capitalização. Capitalizar significa “aplicar uma determinada taxa de juros sobre um dado capital e em seguida agregar esses juros produzidos ao capital” (SANTOS, 2013).

No caso do regime de juros simples, a taxa percentual incide somente sobre o capital inicial e não se incorpora ao capital, tendo um crescimento linear, apresenta-se em situações de compras para pagamento em curto prazo.

No regime de juros compostos, o regime de capitalização é diferente, porque a cada período o juro gerado é incorporado ao capital atual (saldo devedor) e sua acumulação se dá de forma exponencial. O regime de capitalização do juro composto é o mais utilizado no sistema financeiro e nos cálculos de empréstimos: compras a médio e longo prazo,

compras com cartões de crédito, empréstimos bancários, aplicações em Cadernetas de Poupança, entre outras.

A seguir, apresentam-se uma tabela comparativa entre juros simples e composto e um gráfico, evidenciando as diferentes formas de capitalização. O exemplo demonstrado considera um capital de R\$ 1.000,00 aplicado a uma taxa de 20% ao ano, por quatro períodos consecutivos, mostrando a forma de acumulação dos juros nos dois regimes de capitalização, encontrado em Mathias e Gomes (2008, p. 103).

n	Juros simples		Juros Compostos	
	Juro por período	Montante	Juro por período	Montante
1	$1000 \times 0,20 = 200$	1.200,00	$1000 \times 0,20 = 200$	1.200,00
2	$1000 \times 0,20 = 200$	1.400,00	$1200 \times 0,20 = 240$	1.440,00
3	$1000 \times 0,20 = 200$	1.600,00	$1440 \times 0,20 = 288$	1.728,00
4	$1000 \times 0,20 = 200$	1.800,00	$1728 \times 0,20 = 346$	2.074,00

Tabela 1: Quadro comparativo entre juros simples e juros composto  
Fonte: Mathias e Gomes, 2008, p. 103.

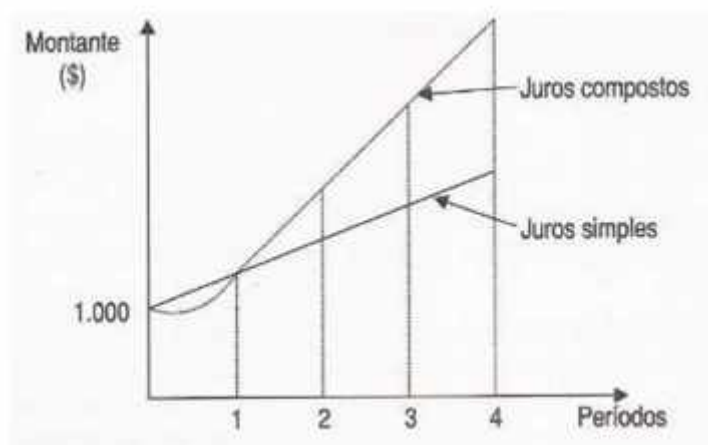


Gráfico 1: Comparativo entre juros simples e juros composto  
Fonte: Mathias e Gomes, 2008, p. 103.

Notamos pelo gráfico acima que no regime de juros compostos tem-se um montante maior que no regime de juros simples e, mais ainda, percebemos que no regime de juros simples o montante se comporta como uma função polinomial de 1º grau, em contrapartida, no regime de juros compostos, temos uma função exponencial, o que explica o crescimento tão rápido do mesmo.

Para compreendermos melhor o regime de juros simples e composto, vamos considerar as seguintes notações:

Capital (C): É o valor que se empresta, ou se pede emprestado, também conhecido como

principal.

Juros (J): É toda compensação em dinheiro que se paga, ou que se recebe, pelo dinheiro que se empresta, ou se pede emprestado.

Taxa de juros (i): A taxa de porcentagem que se paga ou recebe pelo “aluguel” do dinheiro.

Período (n): tempo que decorre desde o início até o final de uma operação financeira.

Montante (M): É a soma do capital emprestado (ou investido) com o juro.

### 2.3.3 Capitalização Simples

O juro é a remuneração pelo uso de capital por um período de aplicação. Poderá ser obtido por meio da fórmula:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

Observamos que o juro simples é diretamente proporcional ao capital inicial e ao tempo de aplicação, sendo a taxa de juro por período o fator de proporcionalidade. Vejamos um exemplo, trago por Santos (2013, p.36):

Qual o juro simples obtido por um capital de R\$ 2.250,00 durante cinco anos com taxa de 10% ao ano?

Resolução:

$$n = 5, i = 0,1 \text{ e } C = 2.250 \text{ então}$$

$$J = 2.250 \cdot 0,1 \cdot 5 = 1.125$$

Logo o juro simples obtido será de R\$1.125,00.

O montante (M) será obtido pela soma do capital e do juro, ou seja,

$$M = C + J$$

$$M = C + (C \cdot i \cdot n) \quad \rightarrow \quad M = C \cdot (1 + i \cdot n)$$

### 2.3.4 Capitalização Composta

Capitalização composta, ou regime de juros compostos é o juro formado ao final de cada período incorporado ao capital do início do período, passando esse montante a render juro no próximo período.

Para encontrarmos o montante (M) de uma operação comercial ou financeira, vamos considerar um capital (C), uma taxa (i) e calculemos o montante (M), obtido a juros compostos, após (n) períodos de tempo:

- Montante após período 1:

$$M_1 = C + C \cdot i = C (1 + i)$$

- Montante após período 2:

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = C (1 + i) (1 + i) = C (1 + i)^2$$

- Montante após período 3:

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = C (1 + i)^2 (1 + i) = C (1 + i)^3$$

- Montante após período n:

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-1} \cdot i = C (1 + i)^{n-1} (1 + i) = C (1 + i)^n$$

Portanto,  **$M = C (1 + i)^n$** .

Para obter o valor do juro, quando os valores do capital e do montante são conhecidos, pode-se utilizar a definição  $J = M - C$  (juro igual à diferença entre o montante e o capital inicial). Vejamos um exemplo:

Calcule o montante de um capital de R\$6.000,00, aplicado a juros compostos, durante 1 ano, à taxa de 3,5% ao mês. (Use  $\log 1,035=0,0149$  e  $\log 1,509=0,1788$ ).

Resolução:

Temos que:

$$C = \text{R\$ } 6.000,00$$

$$n = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses}$$

$$i = 3,5\% \text{ ao mês} = 0,035$$

$$M = ?$$

Usando a fórmula  $M=C(1+i)^n$ , obtemos:

$$M = 6000 \cdot (1+0,035)^{12}$$

$$M = 6000 \cdot (1,035)^{12}$$

Fazendo  $x = 1,035^{12}$  e aplicando logaritmos, encontramos:

$$\log x = \log 1,035^{12} \Rightarrow \log x = 12 \log 1,035 \Rightarrow \log x = 0,1788 \Rightarrow x = 1,509$$

$$\text{Então } M = 6000 \cdot 1,509 = 9054.$$

Portanto o montante é R\$9.054,00

### **Aplicando nossos Conhecimentos** (Adaptada ENEM<sup>24</sup> - 2012):

Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: Pagar à vista, por R\$ 55.000,00.
- Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R\$ 30.000,00, e mais prestação de R\$ 26.000,00 para dali a 6 meses.
- Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R\$ 20.000,00, mais uma prestação de R\$ 20.000,00, para dali a 6 meses e outra de R\$ 18.000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
- Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada de R\$ 15.000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R\$ 39.000,00.
- Opção 5: Pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R\$ 60.000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, no regime de juros simples, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

24

Fonte: <http://www.ebc.com.br/educacao/questoesenem>. Acesso em 05 de setembro de 2015.



Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher qual opção?

Analisemos cada opção:

Opção 1: pagar à vista por R\$ 55.000,00.

Opção 2: pagando a entrada de 30.000,00, restará para investir R\$ 25.000,00 que retorna  $1,1 \cdot (25.000,00) = 27.500,00$ , o que após o pagamento da prestação ainda sobrá R\$ 1.500,00.

Opção 3: investir R\$ 35.000,00, que retorna  $1,1 \cdot (35.000,00) = 38.500,00$ ; pagando a prestação de R\$ 20.000,00 sobram R\$ 18.500,00, que gera um montante de  $1,1 \cdot (18.500,00) = 20.350,00$ , que gera um excedente de R\$ 2.350,00 após a 2ª prestação.

Opção 4: aplica-se R\$ 40.000,00 que gera  $40.000,00 \cdot (1,1)^2 = 48.400,00$ , que gera um excedente de R\$ 9.400,00 após a prestação paga.

Opção 5: aplica-se R\$ 55.000,00, que gera  $55.000,00 \cdot (1,1)^2 = 66.500,00$ , que gera um excedente de R\$ 6.500,00 após o pagamento da parcela.

Portanto, a melhor opção será a alternativa D.

Assim, diante do breve recorte histórico, das orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais e dos exemplos apresentados, acreditamos que a matemática financeira escolar pode contribuir para a formação de cidadãos críticos e conscientes, por possibilitar acesso a um tema que foi se consolidando mediante a necessidade do homem e, quando inserido no contexto escolar pode desenvolver o pensamento teórico, a capacidade argumentativa dos alunos, agregando à suas conclusões a formalidade e sustentabilidade aos seus pensamentos e suas soluções algébricas.

### 3. ESTATÍSTICA



#### ATIVIDADE XII - Fórum de Ideias

Neste momento de nosso curso, sugerimos que você:

1. Procure registrar o que significa estatística para você e como a entende no processo ensino e aprendizagem.

2. Após seus registros pessoais, poste-os no Ambiente Virtual de Aprendizagem, no Fórum de Ideias, socializando com o grupo-classe o que registrou e discuta as questões, suas e dos colegas, que julgar mais relevantes.

2. Após seus registros pessoais, poste-os no Ambiente Virtual de Aprendizagem, no *Fórum de Ideias*, socializando com o grupo-classe o que registrou e discuta as questões, suas e dos colegas, que julgar mais relevantes.

### 3.1 BREVE HISTÓRICO SOBRE ESTATÍSTICA

No senso comum, o significado de Estatística está associado à coleta de dados numéricos apresentados em tabelas ou gráficos que contenham informações diversas, geralmente de interesse dos governos para que possam executar planos através do perfil da população (MEMORIA, 2004 *citado por* CUNHA, 2014, p. 29).

Pode-se afirmar que a Estatística está presente na vida do homem desde a Antiguidade, pois sempre foi uma necessidade de civilizações fazer certos tipos de censo realizados pelo Estado. A origem da palavra Estatística, nos remete ao Estado, mais precisamente ao estudo do Estado e significa “coleção de informação de interesse do estado sobre população e economia” (BAYER et al., 2004, p.2).

Ao longo da história tem-se conhecimento de dados estatísticos sobre presos de guerra; no antigo Egito, recenseamento dos judeus pelos cristãos; assim como dados das civilizações pré-colombianas (maias, astecas e incas). Todos esses estudos tinham como objetivo, contabilizar necessidade de mão-de-obra, contabilidades fiscais, alistamento para o trabalho militar, entre outros. (MEMORIA, 2014 *citado por* CUNHA, 2014). Até mesmo em passagens bíblicas é possível identificar a prática de censo,

Por aqueles dias, saiu um édito da parte de César Augusto para ser recenseada toda a terra. Este recenseamento foi o primeiro que se fez, sendo Quirino governador da Síria. Todos iam recensear-se, cada qual à sua própria cidade. Também José, deixando a cidade de Nazaré, na Galileia, subiu até à Judeia, à cidade de David, chamada Belém, por ser da casa e linhagem de David, a fim de se recensear com Maria, sua esposa, que se encontrava grávida (BÍBLIA SAGRADA. Lucas 2: 1-5,1997).

Segundo Cunha (2014), a Estatística não teve transformações significativas em sua evolução, ou seja, a Estatística tinha como serventia, apenas o recenseamento. Porém, ao final do século XVI, teve início a chamada “invenção política da estatística”, em que tal procedimento consistia em permitir que o Estado conhecesse as particularidades da população por meio de dados coletados e analisados, em que fosse possível intervir, como uma ferramenta de controle da população.

Já no século XVII, na Inglaterra, estudos de John Graunt (1620-1674) proporcionaram uma análise sistematizada do comportamento da população de Londres. Essa análise resultou na publicação de um livro em 1662, intitulado *Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index and Made upon the Bills of Mortality* (CUNHA, 2014, p.31). Tal análise concluiu que apesar de nascerem mais crianças do sexo masculino, havia uma alta mortalidade nos anos iniciais da vida e que por isso havia um equilíbrio na distribuição populacional de ambos os sexos e que tal mortalidade ocorria em sua maioria em zonas urbanas do que em zonas rurais. (CUNHA, 2014).

Esses recenseamentos geravam nas populações um sentimento de medo, pois eram também utilizados para fins militares, fiscais e religiosos, pois poderiam ocorrer perseguições, como realmente ocorreram, a exemplo de Hitler e seu *Reich* durante a Segunda Guerra Mundial.

As primeiras associações estatísticas surgiram na França, na primeira metade do século XIX, como destaque em 1830, foi fundada a Sociedade Francesa de Estatísticas. Seguiram o exemplo da França, os países: Estados Unidos, Rússia, Inglaterra e etc.

Criado em 1949, o *Statistical Education Committee* tinha como finalidade “realizar atividades educativas em estatística e colaborar com a organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura (UNESCO) e Organização das Nações Unidas (ONU)”. (CUNHA, 2014, p.34). Neste momento, já existia uma preocupação na formação Estatística em países em desenvolvimento, que ocorreu de 1976 a 1993 em escolas e universidades.

No Brasil, em 1829, foi criada uma Comissão de Estatística Geográfica e Natural, Política e Civil, por meio de um Decreto que objetivava organizar as estatísticas do Império, mas apenas criou normas e regras e, por isso, foi extinta após quatro anos. (SENRA, 2009 citado por CUNHA, 2014). Somente em 1854 é fundada a Sociedade Estatística do Brasil, com 71 inscritos e estatuto aprovado em fevereiro de 1855, iniciando suas atividades.

O primeiro recenseamento no Brasil ocorreu em 1870 e assim ficou determinado por lei que o mesmo seria feito a cada dez anos e assim, era determinada a criação da Diretoria Geral de Estatística (DGE). Para este recenseamento foram espalhadas fichas para a população em que deveriam ser preenchidos os dados: nome, idade, sexo, estado civil, nacionalidade, residência, cor dos indivíduos etc. Esses dados foram tabulados e analisados, resultando em 23 volumes num total de 8546 quadros, totalizando a população: 9.930.478 pessoas, sendo 8.419.672 livres e 1.510.806 escravos (feitos alguns ajustes, a população recenseada atingiria o montante de 10.110.090 pessoas) (SENRA, 2009 citado por CUNHA, 2014).

Dando um salto, nas passagens de recenseamento,

em 1907, ocorre, então, a criação do Conselho Superior de Estatística, com o objetivo de padronizar a apuração dos resultados dos dados coletados em todo território nacional [...] e, em 1934, é criado o Instituto Nacional de Estatística, que só passou a existir de fato dois anos depois, em 1936, mudando [...], em 1938, para Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Atualmente, o IBGE é integrado à Administração Federal, subordinado diretamente à Secretaria de Planejamento e Coordenação Geral da Presidência da República (SEPLAN/PR) e tem como finalidades: produção e análise de informações estatísticas; coordenação e consolidação das informações estatísticas; produção e análise de informações geográficas; coordenação e consolidação das informações geográficas; estruturação e implantação de um sistema de informações ambientais; documentação e disseminação de informações; coordenação dos sistemas estatístico e cartográfico nacionais (IBGE, 2015<sup>25</sup> ).

Quanto à Educação Estatística no Brasil, Cunha (2014) destaca que seu início foi marcado pelo estudo do cálculo das probabilidades, oferecido pela Real Academia de Artilharia, Fortificado e Desenho. Os estudos de estatística continuaram sendo oferecidos pelas academias militares.

A partir de 1947 em uma palestra proferida por Milton da Silva Rodrigues, que havia participado de uma reunião nos EUA em que deliberaram diversas decisões sobre o ensino de estatística, que o fez trazer parte destas decisões para o Brasil, dentre elas:

Que as autoridades responsáveis pelo ensino nos países americanos reconsideremos planos de estudo a fim de assegurar ao ensino da estatística, caso não o tenham feito até hoje, o lugar que lhe corresponde pela sua importância na civilização moderna. 2) Que no concernente ao ensino secundário e intermediário os planos de estudo incluam, pelo menos: a) No ensino de caráter comercial, noções de estatística com aplicação a problemas econômicos ou comerciais. b) No ensino pedagógico, noções de estatística com aplicação a educacionais. c) Nos demais ensinos secundários e intermediários, tanto

<sup>25</sup> Fonte: <http://memoria.ibge.gov.br/sinteses-historicas/historicos-dos-censos/censos-demograficos>. Acesso em 05 de setembro de 2015.

quanto possível, aplicações elementares de estatística, como ilustração, nos cursos de aritmética, álgebra, geografia e demais ciências (SENRA, 2009, p. 229 *citado por* CUNHA, 2014, p. 38).

Sugestões que podemos verificar nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) quanto aos conteúdos de Estatística, é o que veremos na próxima sessão.

### **3.2 O ENSINO DE ESTATÍSTICA E O PCN**

A primeira menção do documento quanto o ensino de estatística se encontra no item: *Matemática e Construção da Cidadania* (1998, p. 26) em que aponta que questões políticas e sociais dependem de uma leitura crítica, que a partir dos dados de informações complexas se possa interpretar e analisar para a compreensão do papel do indivíduo na sociedade. E justifica que a abordagem da estatística é pertinente em questões: políticas, econômicas, de saúde, culturais...

Ainda alerta ao fato que não só apenas e isoladamente se devem tratar conteúdos relacionados a Aritmética, Álgebra e Geometria, mas

Um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão tratar as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória. (BRASIL, 1998, p. 49).

Mais detalhadamente, no bloco Tratamento de Informações (BRASIL, 1998, p.52) é esmiuçada as orientações quanto ao ensino de estatística e probabilidade.

## ATIVIDADE XIV - O ensino de estatística e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)



Faça uma pesquisa no PCN de matemática, bloco Tratamento de Informações e liste em tópicos o que considera importante, justificando com suas palavras, sobre o que este documento orienta para o ensino de estatística e faça um paralelo sobre como o ensino de estatística ocorreu em sua formação na Educação Básica (Ensinos Fundamental e Médio).

### 3.3 CONCEITO DE ESTATÍSTICA

A compreensão de que a Estatística é um conjunto de métodos para obter e analisar dados (CUNHA, 2014) é comum. No entanto, por mais verdadeira que seja esta afirmação, precisa-se complementar informando que esses dados só terão sentido se estiverem em um contexto, ou seja, podemos entender que a Estatística é o estudo dos fenômenos coletivos, já que todas as suas análises não são feitas a partir de dados únicos e particulares.

Assim, como aponta Davydov (1982), o conceito, especificamos para a estatística, segue do geral para o particular e, corroboramos com Cunha (2014) quando diz que a Estatística é

caracterizada pela informação acerca de um coletivo ou universo, que constitui seu objeto material; possui um modo próprio de raciocínio, o método estatístico, o que constitui seu objeto formal e algumas previsões de frente com o futuro, que implica um ambiente de incerteza e que constitui seu objeto ou causa final. (CUNHA, 2014, p. 88)

Diversos autores tentam indicar em seus estudos o conceito de Estatística<sup>26</sup>, cada um de acordo com o referencial teórico adotado, porém concordam que o conceito de Estatística não se apresenta de forma clara.

Dentre as diferentes citações sobre o que é ou o que faz, dentro da Teoria Histórico-

<sup>26</sup> Lopes (2008), Pichler (2005), Crisafuli (2006), Pagan (2009), Souza (2009), Lima (2005), Vendramini (2000), Keener (2012), entre outros.

Cultural, Cunha (2014) coloca a ideia que corroboramos de que

*a Estatística é entendida como uma ciência que tem como objeto o comportamento quantitativo dos fenômenos coletivos inseridos em um universo variável, investigados e analisados pelo método de redução das informações e análise dos resultados em termos de representatividade simbólica de seus significados quantitativos, tendo em vista explicações do comportamento presente e previsões de comportamento futuro. (CUNHA, 2014, p. 91)*

Seguindo esta linha de pensamento, o ensino escolar de Estatística, objetiva que o estudante tenha possibilidades de analisar fenômenos coletivos por meio do pensamento estatístico. Para que isto ocorra, não é preciso somente saber fazer cálculos, gráficos ou textos e sim que tenha uma visão crítica e preferencialmente imparcial sobre os fenômenos; utilizando do conhecimento geral do tema, analisando as tabulações e seus gráficos e, podendo assim, escrever um texto que sintetize tais ideias.

Desta forma, esperamos que o estudante, dê movimento ao pensamento estatístico, saindo da zona de imobilismo (PRADO, 2000) e que possa ter um olhar menos engessado e pragmático sobre o ensino de matemática.



## **ATIVIDADE XV - Colocando em prática seus conhecimentos**

Segundo Moura et al. (2010), o aluno se coloca em atividade de aprendizagem quando está motivado por um problema e sente a necessidade de buscar caminhos para resolvê-lo. Como este é nosso objetivo, apresentamos a seguinte atividade, na qual, serão abordados conceitos advindos dos conteúdos de função, matemática financeira e estatística e, você irá delinear os caminhos para a conclusão da mesma, esse será o momento onde você, estudante, se colocará em movimento, apropriando-se do conhecimento teórico (DAVYDOV, 1982).

Os direcionamentos acontecerão no Fórum destinado a essa atividade e, serão acompanhados semanalmente pelo(a) tutor(a).

Inicialmente, retorne ao Guia de Estudos e faça uma releitura do mesmo, o que contribuirá para o caminhar desta atividade.



Escolha um dos temas abaixo para desenvolver sua atividade (a prioridade de escolha será do estudante que primeiro a fizer no Fórum desta atividade):

Empréstimos e juros.

Operadoras telefônicas.

Inflação.

Aumento da cesta básica.

Gasolina ou Etanol, qual a melhor opção?.

Variação do câmbio do Dólar.

Consumo (alimentos, produtos eletrônicos, lazer e etc.).

Fluxo de caixa.

Crise econômica atual: ações de diferentes países.

Preço de Imóveis.

Dificuldades encontradas para permanência no Curso a Distância.

Aumento da conta de energia.

Consumo de água.

Aprovação/reprovação do governo Dilma.

Alunos do Curso que atuam como docentes e/ou pretendem atuar na carreira docente.

A atividade acontecerá mediante o seguinte cronograma. Fique atento(a)!!!

Primeira semana: Informar no Fórum o assunto a ser abordado.

Segunda Semana: Postar uma pesquisa do tema e cinco questões em que você deverá direcionar sua análise estatística e financeira. Esta pesquisa servirá para lhe situar sobre o tema; você pode utilizar diferentes fontes, o público dependerá do tema escolhido e da abordagem que dará.

Para a pesquisa você poderá consultar sites na internet, artigos de periódicos, livros ou

outras fontes que estejam relacionadas ao seu tema. O(a) tutor(a) poderá auxiliá-lo nessa busca, caso seja necessário basta solicitá-lo(a) no Fórum destinado a essa atividade.

Você deverá postar a pesquisa e as questões na plataforma, no local destinado a essa parte da atividade. As dúvidas e possíveis orientações com relação às questões serão esclarecidas no Fórum dessa atividade.

O(a) tutor(a) realizará a leitura da pesquisa e das questões, podendo interferir, caso seja necessário, orientando o(a) estudante a reformular as questões.

Terceira semana: Postar a tabulação dos dados obtidos a partir do censo feito com as questões formuladas e orientações do(a) tutor(a).

Quarta e Quinta semana: Postar a análise financeira e, caso seja possível, estabeleça a lei quantitativa (função) para as variáveis (relação de interdependência).

Sexta semana: Postagem dos gráficos.

Sétima semana: Postagem da análise estatística.

Oitava semana: Postagem da Produção Textual considerando as análises financeira e estatística.

Semanalmente as postagens serão corrigidas e orientados os próximos passos, caso seja necessário, cuidando para que sua atividade não se perca ao longo do caminho!

Bom trabalho!!!

**FINALIZANDO...**

Que bom que você chegou ao final de mais uma etapa. Essa chegada é fruto de sua vontade, dedicação e persistência. Sabemos que não foi fácil essa caminhada.



Queremos destacar que nosso objetivo, ao longo desses dias, não foi esgotar os temas abordados, o que seria uma tarefa impossível, mas apontar caminhos que você pode percorrer para organizar suas futuras aulas de matemática ou em outros estudos que você possa realizar na área de Matemática ou Educação Matemática.

Esperamos que esse texto tenha sido agradável e proveitoso para você, assim como nos sentimos ao escrevê-lo.

Desejamos sucesso em seus estudos. Estamos muito felizes por termos percorrido com você esse caminho.

Cordialmente,  
Os autores.



## REFERÊNCIAS

ÁVILA G. Evolução do Conceito de Função e de Integral. In: **Sociedade Brasileira de Matemática** . p.14, julho 1985, São Paulo.

BAYER, A.; BITTENCOURT, H. R.; ROCHA, J.; ECHEVESTE, S. Estatística e a sua História. In: *Anais... XII Simpósio Sul Brasileiro de Ensino de Ciências, 2004, Canoas. Anais... XII Simpósio Sul Brasileiro de Ensino de Ciências, 2004. v. 1. p. 1-12.*

BÍBLIA. Português. 1997. *Antigo e Novo Testamento*. Traduzida em português por João Ferreira de Almeida. 2. ed. rev. e corrigida no Brasil. Rio de Janeiro: Liga Bíblica Brasileira, 1997.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1998.

\_\_\_\_\_. *Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE)*. Disponível em <<http://memoria.ibge.gov.br/sinteses-historicas/historicos-dos-censos/censos-demograficos>>. Acesso em 04/09/2015.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática** , 1ª Edição, Lisboa, Livraria Sá da Costa Editora, 1984.

CARVALHO, V. *Educação Matemática: Matemática e Educação para o Consumo*. Dissertação (Mestrado), UNICAMP-FE, Campinas, 1999.

CEDRO, W. L. **O espaço de aprendizagem e a atividade de ensino: O Clube de Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2004.

CHAVES, M. I. A.; CARVALHO, H. C. Formalização do conceito de função no ensino médio: uma seqüência de ensino-aprendizagem. In: *Revista SBEM*, 2004.

CUNHA, A. L. A. *Ensino de Estatística: uma proposta fundamentada na teoria do ensino desenvolvimental*. [Dissertação de Mestrado]. Goiânia: PUC-Goiás, 2014.

DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas*. São Paulo: Ática, 2000.

DAVYDOV, V. V. *Tipos de generalización en la enseñanza*. Editorial Pueblo y Educación, Moscú, 1982. 2ª reimpressão.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas/SP: Editora da UNICAMP, 2002.

FERNANDES, F. L. P.; FIORENTINI, D.; CRISTOVÃO, E. M. Investigações Matemáticas e o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos de 6ª série. In: FIORENTINI, D.; CRISTOVÃO, E. M. (Org.). **Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática**. Campinas: Alínea Editora, 2006. p.227-244.

GRANDO, N. I.; SCHNEIDER, I. J. Matemática Financeira: alguns elementos históricos e contemporâneos. In: **Zetetiké**. Unicamp, v.18, n.33, jan/jun, 2010.

IFRAH, G. **Os números**: história de uma grande invenção. São Paulo: Globo, 1992.

LANNER DE MOURA, A. R. et al. Movimento conceitual em sala de aula. In: **Anais... CIAEM - CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**, 11., 2003, Blumenau, SC. 2003.

LANNER de MOURA, A.R.; SOUSA, M.C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. In: **Zetetiké – CEMPEM -FE/UNICAMP**, SP, v.13, n.24, p.11-46, jul-dez. 2005.

LIMA, C. B.; SÁ, I. P. de. Matemática Financeira do Ensino Fundamental. **Revista TECCEN**, vol.3, n.1, p.34 – 43, abril, 2010.

LIMA, L. C. Da mecânica do pensamento ao pensamento emancipado da mecânica. In: **Caderno do professor “Trabalho e Tecnologia”**, Programa Integrar – CUT, São Paulo, SP, 1998.

LIMA, L.; TAKAZAKI, M.; MÓISES, R. P. **Equações: o movimento se particulariza** São Paulo/SP: CEVEC-CIARTE, 1998.

LIMA, L.; MOISÉS, R. P. **O número inteiro: a harmonia dos contrários**. São Paulo/SP, CTEAC, edição de 1998.

MATHIAS, W. F.; GOMES, J. M. **Matemática financeira**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

PRADO, E. P. A. de. **Uma reflexão sobre formação de professores no ensino de Matemática**. (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2000.

ROBERT, J. **A origem do dinheiro**. 2. ed. São Paulo: Global, 1989.

SANTOS, L. T. et al. História das Funções: Um Breve Resumo. In: **Jornal do Professor**

**de Matemática** , n° 4, UNICAMP, São Paulo, 2005. Disponível em <[www.ime.unicamp.br/~lem/jpm/jpm04.pdf](http://www.ime.unicamp.br/~lem/jpm/jpm04.pdf)>. Acesso em: 26/02/2010.

SANTOS, P. C. F. dos. **O ensino da matemática financeira no contexto do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro** – Campus Paracatu. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

SCHNEIDER, I. J. **Matemática financeira: um conhecimento importante e necessário para a vida das pessoas.** 2008. Dissertação (Mestrado em Educação)– Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2008.

SCHUBRING, G. **Rupturas no estatuto matemático dos números inteiros** . Trad. ROSA, M.M.R. Boletim GEPEM, n. 37, p. 51-64, 2000.

SEBASTIANI, E. F. **História do conceito de função.** UNICAMP, São Paulo, 2005. Disponível em <[www.ime.unicamp.br/~lem/publica/e\\_sebast/conc\\_fun.pdf](http://www.ime.unicamp.br/~lem/publica/e_sebast/conc_fun.pdf)>. Acesso em 18/03/2010.

SOUSA, Maria do Carmo de. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico- histórica** um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. Tese (Doutorado em educação: Educação Matemática) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004. 286p.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P.(Org). **As idéias da álgebra.** São Paulo: Atual, 1995.