

*Emilija Damjanović<sup>1</sup>, Marija Nefovska-Danilović<sup>2</sup>, Miloš Jočković<sup>3</sup>, Miroslav Marjanović<sup>3</sup>, Nevenka Kolarević<sup>3</sup>*

## **SLOBODNE VIBRACIJE PLOČA SA UKRUĆENJIMA PRIMENOM METODE DINAMIČKE KRUTOSTI**

### **Rezime:**

**S-43**

U okviru ovog rada analizirane su slobodne vibracije ploča sa ukrućenjima primenom metode dinamičke krutosti. Razvijena je transformisana dinamička matrica krutosti potpuno slobodne pravougaone Mindlin-ove ploče korišćenjem matrice transformacije. Takođe, izvedena je globalna dinamička matrica krutosti sistema ploča koristeći sličan postupak kao u metodi konačnih elemenata. Određene su sopstvene frekvencije ploča sa ukrućenjima za različite konturne uslove i upoređene sa vrednostima dobijenim po metodi konačnih elemenata primenom programskog paketa Abaqus. Dobijeni su rezultati visoke tačnosti.

*Ključne reči: slobodne vibracije, dinamička matrica krutosti, ploče sa ukrućenjima*

## **DYNAMIC STIFFNESS ELEMENTS FOR FREE VIBRATION ANALYSIS OF STIFFENED PLATES**

### **Summary:**

The free vibration analysis of stiffened plate assemblies is presented in this paper by using the dynamic stiffness method. The transformed dynamic stiffness matrix of completely free rectangular Mindlin plate is derived by using the transformation matrix. In addition, the global dynamic stiffness matrix of plate assembly is derived by using similar assembly procedure as in the finite element method. The natural frequencies of stiffened plate assemblies with arbitrary boundary conditions are computed and validated against the results obtained by using the finite element software Abaqus. High accuracy of the results is demonstrated.

*Key words: free vibrations, dynamic stiffness matrix, stiffened plates*

<sup>1</sup> Student doktorskih studija, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

<sup>2</sup> Dr, Docent, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

<sup>3</sup> Asistent, student doktorskih studija, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

## 1 UVOD

Primena građevinskih materijala visokih mehaničkih karakteristika, pre svega čelika, uzrokuje upotrebu ploča sa ukrućenjima. Time se postiže veća nosivost za manju količinu materijala, kao i ušteda u ceni. Takođe, ukrućenja ojačavaju ploču i smanjuju njenu osetljivost na izbočavanje i torziju. Ploče sa ukrućenjima imaju široku primenu u građevinarstvu, posebno pri projektovanju mostova većih raspona i manjih poprečnih preseka, izradu paluba brodova, konstrukcije aviona, itd. Tokom svog radnog veka, ove konstrukcije su često izložene dinamičkom opterećenju, te je precizan proračun njihovog dinamičkog odgovora od velikog značaja u inženjerskoj praksi. U takvim slučajevima neophodno je predvideti osnovne dinamičke karakteristike sistema, kao što su sopstvene frekvencije i oblici oscilovanja.

Dinamički odgovor tankih ploča može se odrediti primenom Kirchhoff-ove klasične teorije ploča (classical plate theory - CPT). U slučaju debelih ploča ova teorija ne daje adekvatne rezultate zbog zanemarivanja deformacije smicanja, pa je potrebno primeniti Mindlin-ovu teoriju (first order shear deformation theory - FSDT), koja uzima u obzir uticaj deformacije smicanja pretpostavljajući da je klizanje konstantno po visini ploče. Paralelno sa razvojem različitih teorija ploča, razvijale su se i analitičke metode [1]. Ove metode se zasnivaju na tačnom rešenju diferencijalne jednačine kretanja i pokrivaju samo specijalne uslove oslanjanja. Leissa [2] je dao sveobuhvatan pregled analitičkih rešenja slobodnih vibracija ploča različitih oblika, zasnovane na Kirchhoff-ovoj teoriji. Liew i ostali [3] su analizirali slobodne vibracije debelih ploča sa proizvoljnim konturnim uslovima, primenom Rayleigh-Ritz-ove metode. Primena pomenutih metoda je ograničena na analizu slobodnih vibracija individualnih ploča i ne može se lako proširiti na analizu složenijih sistema ploča sa različitim geometrijskim i materijalnim karakteristikama, kakvi se najčešće sreću u inženjerskoj praksi (ploče sa ukrućenjima, sendvič ploče i sl.). U takvim slučajevima u analizi se primenjuju numeričke metode, kao što je metoda konačnih elemenata (MKE) [4]. U dinamičkoj analizi primenom MKE tačnost rezultata zavisi i od najviše frekvencije koja se javlja u analizi. Minimalan broj konačnih elemenata direktno je proporcionalan najvišoj razmatranoj frekvenciji, pa kod složenih konstrukcija kod kojih je u analizi potrebno u obzir uzeti i više tonove oscilovanja, potreban broj konačnih elemenata postaje veliki, čime se povećava ukupno trajanje proračuna.

U poslednje vreme se za analizu slobodnih vibracija ploča sve češće koristi metoda dinamičke krutosti (MDK) [5-13]. MDK kombinuje karakteristike MKE, kao što su fizička diskretizacija i mogućnost povezivanja elemenata u jedinstveni globalni sistem, sa rešenjem polja pomeranja koje predstavlja tačno rešenje diferencijalne jednačine slobodnih vibracija. Kako interpolacione funkcije, kojim se opisuje polje pomeranja u MDK, predstavljaju tačno rešenje diferencijalne jednačine kretanja u frekventnom domenu, greške usled diskretizacije su eliminisane. Podela ploče na manje dinamičke elemente je neophodna samo ukoliko unutar ploče postoji neki geometrijski i/ili fizički diskontinuitet. Time se smanjuje broj elemenata u analizi, broj stepeni slobode, kao i vreme potrebno za rad i mogućnost javljanja greške, u poređenju sa MKE.

U okviru ovog rada prikazan je numerički model za analizu slobodnih vibracija Mindlin-ovih ploča sa ukrućenjima sa proizvoljnim graničnim uslovima, primenom MDK. Na osnovu dinamičkih matrica krutosti za analizu slobodnih poprečnih vibracija i vibracija u ravni, izvedena je matrica transformacije za različite položaje ploča koje su pod pravim uglom u odnosu na referentnu ravan [14]. Primenjen je sličan postupak kao u MKE za formiranje globalne dinamičke matrice krutosti ploče sa ukrućenjima i razvijen je računarski program u MATLAB-u [15] za analizu slobodnih vibracija sistema ploča. Verifikacija prikazanog

postupka izvršena je upoređivanjem rezultata sa rezultatima dobijenim primenom programskog paketa Abaqus[16].

## 2 POSTUPAK FORMIRANJA DINAMIČKE MATRICE KRUTOSTI PRAVOUGAONE PLOČE

Postupak formiranja dinamičke matrice krutosti pravougaonog elementa ploče za poprečne i vibracije u ravni detaljno je prikazan u radovima [11, 13], dok će ovde biti prikazani osnovni koraci u postupku formiranja dinamičke matrice krutosti. Polaznu tačku predstavljaju jednačine kretanja elementa Mindlin-ove ploče u vremenskom domenu. Pretpostavlja se da su pomeranja harmonijske funkcije frekvencije  $\omega$ , tj.:

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \hat{\mathbf{u}}(x, y, \omega)e^{i\omega t} \quad (1)$$

gde je:

$\hat{\mathbf{u}}(x, y, \omega)$  amplituda polja pomeranja u frekventnom domenu.

Na osnovu ove pretpostavke, jednačine kretanja se iz vremenskog transformišu u frekventni domen. Na slici 1a prikazano je polje pomeranja pravougaone ploče po Mindlin-ovoj teoriji. Polje pomeranja se prikazuje kao superpozicija rešenja za četiri slučaja simetrije u odnosu na  $x$  i  $y$  koordinatne ose: simetrija-simetrija (SS), simetrija-antisimetrija (SA), antisimetrija-simetrija (AS) i antisimetrija-antisimetrija (AA):

$$\hat{\mathbf{u}}(x, y, \omega) = \hat{\mathbf{u}}^{SS}(x, y, \omega) + \hat{\mathbf{u}}^{SA}(x, y, \omega) + \hat{\mathbf{u}}^{AS}(x, y, \omega) + \hat{\mathbf{u}}^{AA}(x, y, \omega) \quad (2)$$

Na slici 1b prikazana je simetrična deformacija ploče (SS) oko obe koordinatne ose. Na ovaj način moguće je analizirati samo jednu četvrtinu ploče, čime se značajno umanjuje red dinamičkih matrica krutosti i ubrzava proračun. Rešenje jednačina kretanja u frekventnom domenu pretpostavlja se u obliku beskonačnog Fourier-ovog reda u sledećem obliku:

$$\hat{\mathbf{u}}^{ij}(x, y, \omega) = \sum_{m=0,1}^{\infty} C_m f_m^i(x) g_m^j(y) \quad (3)$$

gde su:

$f_m^i(x), g_m^j(y)$  bazne trigonometrijske funkcije,

$C_m$  integracione konstante.

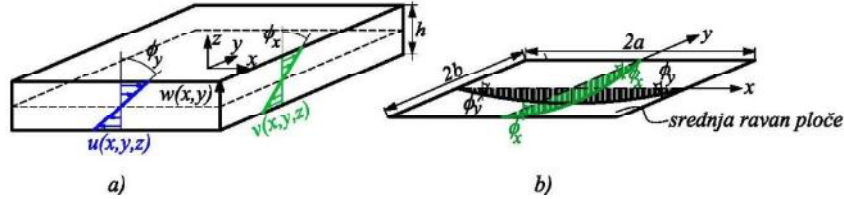
U jednačini (3) bazne funkcije zavise od slučaja simetrije i rešenja odgovarajućih jednačina kretanja, a  $i, j = S, A$ . Na osnovu kinematičkih i konstitutivnih relacija ploče, kao i jednačine (3), vektor sila u preseku u proizvoljnoj tački ploče može se napisati u obliku:

$$\hat{\mathbf{f}}^{ij}(x, y, \omega) = \sum_{m=0,1}^{\infty} C_m f_m^i(x) g_m^j(y) \quad (4)$$

gde su:

$f_m^i(x), g_m^j(y)$  izvodi baznih funkcija u zavisnosti od usvojene teorije ploče.

U praktičnoj primeni, beskonačni red u jednačinama (3) i (4) potrebno je prekinuti u tački  $M$ , tako da tačnost rešenja praktično zavisi samo od usvojenog broja članova reda.



Slika 1 – a) Polje pomeranja u Mindlin-ovoj toriji, b) Simetrična deformacija ploče (SS)

Sledeći korak predstavlja formiranje vektora pomeranja  $\hat{\mathbf{q}}^{ij}$  na konturama  $x = a$  i  $y = b$  četvrtine ploče za svaki od četiri slučaja simetrije, koji se dobijaju zamenom koordinata kontura u jednačinu (3):

$$\hat{\mathbf{q}}^{ij} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}^{ij}(a, y, \omega) \\ \hat{\mathbf{u}}^{ij}(x, b, \omega) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Slično, vektor sila  $\hat{\mathbf{Q}}^{ij}$  na konturama ploče dobija se zamenom koordinata kontura u jednačinu (4):

$$\hat{\mathbf{Q}}^{ij} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}^{ij}(a, y, \omega) \\ \hat{\mathbf{f}}^{ij}(x, b, \omega) \end{bmatrix} \quad (6)$$

S obzirom da su komponente vektora pomeranja i sila na konturama ploče funkcije prostornih koordinata  $x$  i  $y$ , nije moguće direktno uspostaviti vezu između tih vektora sa jedne strane i vektora integracionih konstanti  $\mathbf{C}$  sa druge strane. Ovaj problem se može rešiti pomoću metode projekcije, koja se bazira na predstavljanju funkcija pomeranja i sila na konturi ploče u vidu Fourier-ovog reda:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}^{ij} &= \frac{2}{L} \int_s \mathbf{H}^{ij} \hat{\mathbf{q}}^{ij} ds = \mathbf{D}^{ij} \mathbf{C} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{ij} &= \frac{2}{L} \int_s \mathbf{H}^{ij} \hat{\mathbf{Q}}^{ij} ds = \mathbf{F}^{ij} \mathbf{C} \end{aligned} \quad (7)$$

gde je:

$\mathbf{H}^{ij}$  matrica baznih funkcija za odgovarajući slučaj simetrije.

U jednačinama (7)  $L = a$  za konturu paralelnu sa  $x$  osom, a  $L = b$  za konturu paralelnu sa  $y$  osom. Eliminacijom vektora integracionih konstanti iz jednačina (7) dobija se dinamička matrica krutosti četvrtine ploče  $\tilde{\mathbf{K}}_D^{ij}$  za svaki od četiri slučaja simetrije:

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{ij} = \mathbf{F}^{ij} (\mathbf{D}^{ij})^{-1} \tilde{\mathbf{q}}^{ij} = \tilde{\mathbf{K}}_D^{ij} \tilde{\mathbf{q}}^{ij} \quad (8)$$

Dinamička matrica krutosti cele ploče  $\tilde{\mathbf{K}}_D$  može se dobiti primenom transfer matrice [11, 13].

### 3 PLOČE SA UKRUĆENJIMA

Poprečne vibracije i vibracije u ravni za jednu izotropnu ploču predstavljaju dva nezavisna stanja. Stoga se dinamička matrica krutosti ploče može napisati kao:

$$\tilde{\mathbf{K}}_D = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{Dt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{Di} \end{bmatrix} \quad (9)$$

gde je:

$\tilde{\mathbf{K}}_{Dt}$  dinamička matrica krutosti ploče izložene poprečnim vibracijama,

$\tilde{\mathbf{K}}_{Di}$  dinamička matrica krutosti ploče za vibracije u ravni.

Saglasno jednačini (9), vektor projekcija pomeranja i sila na konturi ploče može se prikazati u sledećem obliku:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_t \\ \tilde{\mathbf{q}}_i \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_t \\ \tilde{\mathbf{Q}}_i \end{bmatrix}$$

(10)

Kod ploča sa ukrucenjima gde su ploče međusobno spojene pod pravim uglom, poprečne vibracije jedne ploče izazivaju vibracije u ravni druge ploče i obrnuto. Zbog toga je potrebno uspostaviti vezu između vektora projekcija pomeranja i sila  $\tilde{\mathbf{q}}$  i  $\tilde{\mathbf{Q}}$  u lokalnom i vektora  $\tilde{\mathbf{q}}^*$  i  $\tilde{\mathbf{Q}}^*$  u globalnom koordinatnom sistemu (Slike 2 i 3) pomoću matrice transformacije  $\mathbf{T}$ :

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{q}}^*$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{Q}}^* \quad (11)$$

U skladu sa definisanim relacijama projekcija u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu, dinamička matrica krutosti ploče u globalnom koordinatnom sistemu dobija se kao:

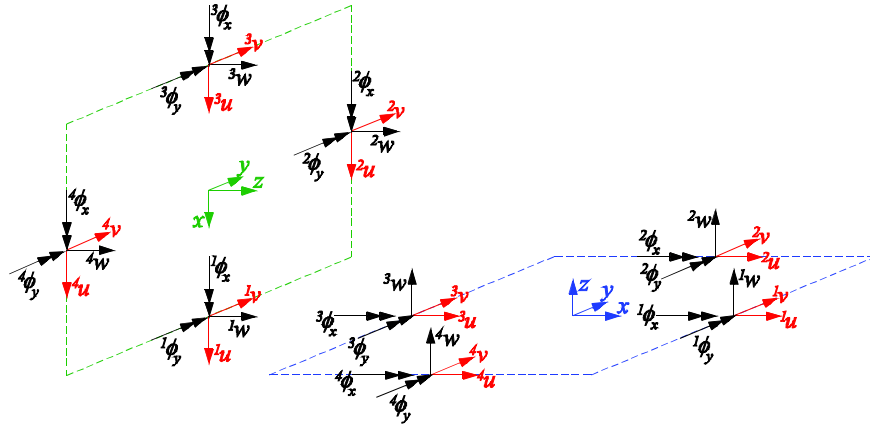
$$\tilde{\mathbf{K}}_D^* = \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{K}}_D \mathbf{T} \quad (12)$$

Dinamičke matrice krutosti pojedinačnih ploča sabiraju se u globalnu dinamičku matricu krutosti sistema ploča, slično kao u MKE, s tom razlikom što su ploče povezane duž kontura umesto u čvorovima. U analizi je moguće primeniti proizvoljne granične uslove uklaňanjem iz globalne dinamičke matrice krutosti sistema redove i kolone koje se odnose na sprečena pomeranja.

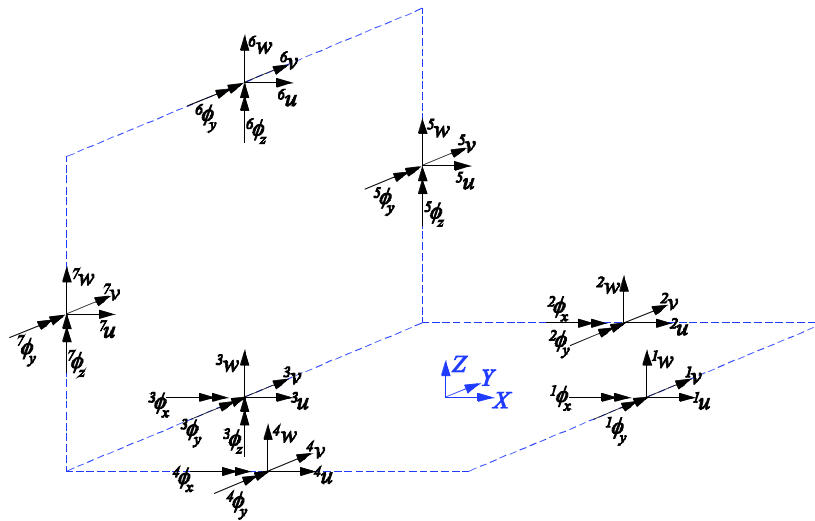
Dinamička matrica krutosti je kvadratna, frekventno zavisna matrica čiji red zavisi od broja članova reda  $M$  usvojenog rešenja. Sopstvene frekvencije određuju se iz sledeće jednačine:

$$\det \left| \tilde{\mathbf{K}}_{DG,m}^* (\omega) \right| = 0 \quad (13)$$

gde je:



Slika 2 - Komponente pomeranja na konturama ploča u lokalnom koordinatnom sistemu



Slika 3 - Komponente pomeranja na konturama ploča u globalnom koordinatnom sistemu

$\tilde{\mathbf{K}}_{DG,m}^*$  globalna dinamička matrica krutosti sistema uz nepoznata pomeranja.

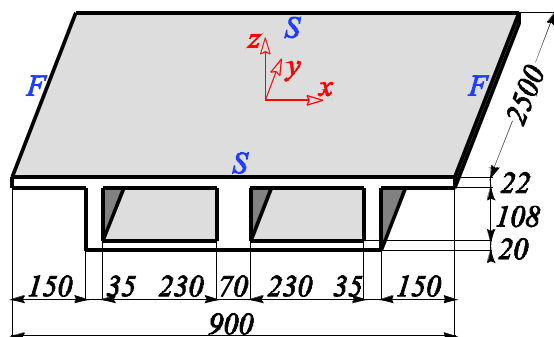
Pošto je jednačina (13) transcendentna, rešenja se mogu dobiti primenom neke od tehnika pretraživanja. Kako bi se izbegle numeričke poteškoće prilikom određivanja nule jednačine (13), sopstvene frekvencije se mogu odrediti kao maksimumi izraza:

$$g(\omega) = \log \frac{1}{\det|\tilde{\mathbf{K}}_{DG,m}^*(\omega)|} \quad (14)$$

## 4 NUMERIČKI PRIMERI

Primena metode dinamičke krutosti u analizi slobodnih vibracija ploča sa ukrućenjima ilustrovana je u narednim primerima. Na osnovu izloženog postupka napisan je program u MATLAB-u [15] za određivanje sopstvenih frekvencija i oblika oscilovanja ploča sa ukrućenjima za različite uslove oslanjanja. Dobijeni rezultati su upoređeni sa rezultatima dobijenim primenom komercijalnog software-a Abaqus [16].

U prvom primeru razmatran je armirano-betonski nosač sandučastog poprečnog preseka, ( $E = 31.5GPa$ ,  $\nu = 0.2$  i  $\rho = 2500kg/m^3$ ), čija je geometrija i granični uslovi prikazana na Slici 4. Ploča je diskretizovana minimalnim brojem od 9 elemenata i 26 kontura. Konture paralelne sa  $x$  osom su slobodno oslonjene (S), dok su konture paralelne sa  $y$  osom slobodne (F). Prvih 10 sopstvenih frekvencija  $f = \omega/2\pi$  sračunato je primenom različitog broja članova reda kako bi se utvrdila konvergencija rešenja. Rezultati su prikazani u Tabeli 1 i upoređeni sa numeričkim rešenjem dobijenim primenom 46250 konačnih elemenata tipa S4R u Abaqus-u (dimenzija elementa 0.1 m). Za rešenje sa  $M=7$  članova reda sračunato je odstupanje  $\Delta$  od rešenja u Abaqus-u.



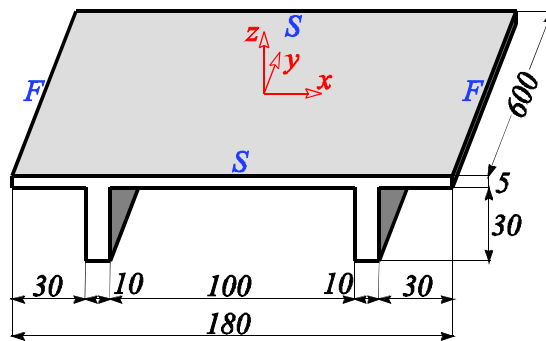
Slika 4 - Geometrija i granični uslovi armirano-betonskog nosača sandučastog preseka

Tabela 1 - Sopstvene frekvencije [Hz] armirano-betonskog nosača sandučastog preseka

MDK	Ton									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M=1	7.8	8.6	9.7	10.2	12.1	13.3	13.6	14.0	16.0	17.6
M=3	10.0	16.8	24.3	27.7	27.9	31.0	33.8	34.0	36.3	38.4
M=5	9.9	16.7	23.9	27.4	27.8	29.1	37.9	38.1	39.0	43.7
M=7	9.9	16.6	23.8	27.3	27.7	29.0	37.8	38.0	38.9	43.7
Abaqus	9.865	16.552	23.676	27.177	27.713	28.884	37.578	37.860	38.742	43.683
$\Delta$ [%]	0.35	0.29	0.52	0.45	-0.05	0.40	0.59	0.24	0.41	0.04

Prvih 10 sopstvenih frekvencija se odlično poklapaju sa rešenjem dobijenim primenom MKE (prosečno odstupanje je 0.33%), što potvrđuje izuzetne mogućnosti primene izvedenih dinamičkih matrica krutosti u analizi vibracija armirano-betonskih ploča, čak i kada se uzme u obzir mali broj članova reda. Diskretizacija modela svedena je na minimum, čime se smanjuje ukupno trajanje proračuna u odnosu na klasičnu metodu konačnih elemenata.

U drugom primeru razmatrane su slobodne vibracije armirano-betonske korube ( $E = 31.5GPa$ ,  $\nu = 0.2$  и  $\rho = 2500kg/m^3$ ), čija je geometrija i granični uslovi prikazana na Slici 5. Ploča je diskretizovana sa 5 elemenata (16 kontura). Prvih 10 sopstvenih frekvencija  $f = \omega/2\pi$  sračunate su primenom različitog broja članova reda kako bi se utvrdila konvergencija rešenja. Rezultati su prikazani u Tabeli 2 i upoređeni sa MKE rešenjem dobijenim primenom 23520 konačnih elemenata tipa S4R u Abaqus-u (dimenzija elementa 0.025m). Za rešenje sa  $M=7$  članova reda sračunato je odstupanje  $\Delta$  od rešenja u Abaqus-u. Kao i u prethodnom primeru, sračunate frekvencije primenom prikazanog modela se odlično poklapaju sa numeričkim rešenjem (prosečno  $\Delta = 0.22\%$ ).



Slika 5 - Geometrija i granični uslovi armirano-betonske korube

Tabela 2 - Sopstvene frekvencije [Hz] armirano-betonske korube

MDK	Ton									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M=1	33.9	36.4	40.7	52.2	52.6	60.0	67.1	78.4	79.4	82.8
M=3	33.0	35.5	55.4	77.8	87.2	91.7	96.9	109.7	129.3	133.9
M=5	32.9	35.4	58.0	76.9	86.2	90.5	96.3	108.6	133.1	136.1
M=7	32.9	35.3	57.9	76.7	85.9	90.1	96.1	108.3	132.7	135.6
Abaqus	32.788	35.251	57.936	76.459	85.532	89.843	95.844	108.250	132.320	135.580
$\Delta$ [%]	0.34	0.14	-0.06	0.32	0.43	0.29	0.27	0.05	0.29	0.01

## 5 ZAKLJUČAK

U ovom radu prikazana je primena metode dinamičke krutosti u analizi slobodnih vibracija ploča sa ukrućenjima. Prikazan je postupak dobijanja dinamičke matrice krutosti ploče, kao i matrica transformacije za različite položaje ploče koje su pod pravim uglom u odnosu na referentnu ravan. Primenjen je sličan postupak kao u MKE za formiranje globalne dinamičke matrice krutosti ploče sa ukrućenjima. Razvijen je računarski program u MATLAB-u za analizu slobodnih vibracija sistema ploča. Sopstvene frekvencije i oblici oscilovanja određeni su za različite tipove konturnih uslova. Verifikacija dobijenih rezultata izvršena je upoređivanjem sa rezultatima dobijenim primenom programskog paketa Abaqus. Tačnost rezultata dobijenih primenom MDK ne zavisi od broja elemenata, već isključivo od broja članova reda usvojenog rešenja. Uočena je brza konvergencija rezultata dobijenih po MDK.



Već sa tri do pet članova reda dobijaju se rezultati visoke tačnosti. Međutim, za više tonove oscilovanja povećava se broj potrebnih članova reda.

Na osnovu izvedenih zaključaka, može se zaključiti da MDK poseduje veliki potencijal u dinamičkoj analizi konstrukcija koji se može proširiti na kompozitne ploče, ploče zasnovane na teoriji višeg reda, kao i ploče spojene pod proizvoljnim uglom.

#### ZAHVALNICA

Autori se zahvaljuju Ministarstvu prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije na finansijskoj podršci u okviru projekta TR-36046.

#### LITERATURA

- [1] Leissa A. W. : *Vibration of plates*, National Aeronautics and Space Administration, 1969, Washington.
- [2] Leissa A. W. : *The free vibration of rectangular plates*, Journal of Sound and Vibration 31(3), 1973, 257-293.
- [3] Liew K. M., Xiang Y., Kitipornchai S. : *Transverse vibration of thick rectangular plates – I. Comprehensive sets of boundary conditions*, Computers and Structures 49(1), 1993, 1-29.
- [4] Bathe K. J., Wilson E. : *Numerical method in finite element analysis*, Prentice-Hall, 1976.
- [5] Doyle J. F. : *Wave propagation in structures*, 1997, New York: Springer-Verlag.
- [6] Boscolo M., Banerjee J. R. : *Dynamic stiffness elements and their application for plates using first order shear deformation theory*, Computers and Structures 89, 2011, 395-410.
- [7] Boscolo M., Banerjee J. R. : *Dynamic stiffness formulation for composite Mindlin plates for exact modal analysis of structures. Part I: Theory*, Computers and Structures 96-97, 2012, 61-73.
- [8] Boscolo M., Banerjee J. R. : *Dynamic stiffness formulation for composite Mindlin plates for exact modal analysis of structures. Part II: Results and application*, Computers and Structures 96-97, 2012, 74-83.
- [9] Fazzolari F., Boscolo M., Banerjee J. R. : *An exact dynamic stiffness element using a higher order shear deformation theory for free vibration analysis of composite plate assemblies*, Computers and Structures 96, 2013, 262-278.
- [10] Boscolo M., Banerjee J. R. : *Layer-wise dynamic stiffness solution for free vibration analysis of laminated composite plates*, Journal of Sound and Vibration 333, 2014, 200-227.
- [11] Kolarević N., Nefovska-Danilović M., Petronijević M. : *Dynamic stiffness elements for free vibration analysis of rectangular Mindlin plate assemblies*, Journal of Sound and Vibration 359, 2015, 84-106.
- [12] Kolarević N., Marjanović M., Nefovska-Danilović M., Petronijević M. : *Free vibration analysis of plate assemblies using the dynamic stiffness method based on the higher order shear deformation theory*, Journal of Sound and Vibration 364, 2016, 110-132.
- [13] Nefovska-Danilović M., Petronijević M. : *In-plane free vibration and response analysis of isotropic rectangular plates using dynamic stiffness method*, Computers and Structures 152, 2015, 82-95.

- [14] Damnjanović E. : *Slobodne vibracije ploče sa ukrućenjima primenom Metode spektralnih elemenata*, 2015, Građevinski fakultet Univerzitet u Beogradu.
- [15] MATLAB. : *MathWorks Inc. The Language of Technical Computing, MATLAB 2011b*, 2011.
- [16] Abaqus. : *User manual. Version 6.9, Providence, RI, USA: DS SIMULIA Corp*, 2009.