

## Primena Husimijeve funkcije u vremensko-frekvencijskoj analizi signala

MILOŠ D. DAVIDOVIĆ, Univerzitet u Beogradu,  
Institut Vinča, Beograd

MILENA D. DAVIDOVIĆ, Univerzitet u Beogradu,  
Građevinski fakultet, Beograd

MILESA Ž. SREĆKOVIĆ, Univerzitet u Beogradu,  
Elektrotehnički fakultet, Beograd

Originalni naučni rad  
UDC: 621.317.36

*U ovom radu razmotrena je Husimijeva funkcija na prostoru kanonski spregnutih promenljivih vreme-frekvencija. Izvedene su neke njene nove osobine koje su ilustrovane na nekoliko analitički zadatih signala. Pokazano je da se Husimijeva funkcija može koristiti pri vremensko-frekvencijskoj analizi signala.*

**Cljučne reči:** Husimijeva funkcija, Vignerova funkcija, vremensko-frekvencijska analiza

### 1. UVOD

Husimijeva funkcija nastala je u formulaciji kvantne mehanike na faznom prostoru. Ona se na prirodan način pojavljuje kad god se na zatom kvantnom stanju vrši jednovremeno merenje koordinate i impulsa sa najvećom tačnošću koju dopuštaju Hajzenbergove relacije neodređenosti i predstavlja raspodelu verovatnoće za statistiku jednovremenog neoštrog merenja koordinate i impulsa. Osim za koordinatu i impuls Husimijeva funkcija može se na analogan način i sa istim smislom definisati i za bilo koji drugi par kanonski spregnutih veličina. U analizi vremenski promenljivih signala taj par veličina su vreme i frekvencija.

Najpopularniji pristup u analizi vremenski promenljivih signala predstavlja Furijeova analiza. U klasičnoj Furijeovoj analizi koriste se dve komplementarne reprezentacije za opis funkcije: sama funkcija  $f(x)$  i njena Furijeova transformacija:

$$\hat{f}(\omega) = \int f(x) \exp(-i\omega x) dx \quad (1)$$

U analizi signala,  $f(x)$  opisuje ponašanje signala u vremenu, a  $\hat{f}(\omega)$  njegovo ponašanje u frekvencij

skom domenu. Ako kvadrat modula signala interpretiramo kao gustinu raspodele energije signala, onda  $|f|^2$  daje samo informaciju o raspodeli energije po vremenu, dok  $|\hat{f}|^2$  daje informaciju o raspodeli energije samo po frekvenciji.

Vremensko – frekvencijska analiza je usmerena na to da se pronađu takve reprezentacije signala u kojima bi na pogodan način bile sadržane određene informacije i iz vremenskog i iz frekvencijskog domena [1-3]. Cilj je da se odjednom dobije najvažniji deo opisa i vremenskog i spektralnog ponašanja signala. Idealna vremensko-frekvencijska reprezentacija signala, bila bi ona, koja bi davala spektar frekvencija u svakom vremenskom trenutku. Princip neodređenosti pokazuje da je uvođenje pojma trenutne frekvencije nemoguće i da se mora tražiti kompromis u tačnosti jednovremenog određivanja vremenskog i frekvencijskog spektra. Ova situacija je potpuno analogna sa situacijom u kvantnoj mehanici, kada želimo da jednovremeno odredimo verovatnoću raspodele koordinate i impulsa kvantne čestice. Zato su istraživanja u obradi signala pri traženju kvazidistribucija na faznom prostoru vreme-učestanost često bila inspirisana odgovarajućim kvantnomehničkim pristupima, uprkos suštinski različitom karakteru fizičkih pojava, koje su proučavane u dvema oblastima. Prva uvedena kvantnomehnička kvazidistribucija, bila je Vignerova funkcija [4] koju je u oblasti analize signala potom uveo Vile [5].

Adresa autora: Miloš Davidović, Univerzitet u Beogradu, Institut Vinča, Beograd, PF 522

Rad primljen: 29.07.2013.

Rad prihvaćen: 14.10.2013.

U ovom radu ćemo proučiti do koje mere Husimijeva funkcija u kontekstu analize signala, u novom faznom prostoru vreme-učestanost, zadržava svoje glavne karakteristike iz kvantne mehanike, gde je najpre uvedena na običnom faznom prostoru koordinata-impuls ( $q, p$ ). U radu će biti razmotrene osnovne karakteristike Husimijeve funkcije, koje mogu biti važne u analizi signala. Njihova primena ilustrovana je na nekoliko konkretnih signala.

## 2. HUSIMIJEVA I VIGNEROVA FUNKCIJA NA PROSTORU VREME-UČESTANOST

I Vignerova i Husimijeva funkcija su kvantno mehaničke kvazidistribucije na faznom prostoru. One funkciji kvantnomehničkog stanja, koja je funkcija jedne promenljive, pridružuju funkciju dveju promenljivih. U najjednostavnijem slučaju talasne funkcije kvantne mehanike su ili samo funkcije koordinate, ili samo impulsa, dok su kvazidistribucije funkcije obe te promenljive. Zbog toga one igraju analognu ulogu klasičnim funkcijama raspodele na faznom prostoru [6].

U kvantnoj mehanici su koordinata i impuls kanonski spregnute veličine. U analizi signala njima odgovaraju kanonski spregnute veličine vreme i frekvencija. Zato Vignerova funkcija u analizi signala ima istu strukturu kao i Vignerova funkcija u kvantnoj mehanici, osim što u njoj ne figuriše Plankova konstanta, a figurišu promenljive vreme i učestanost. Zato je Vignerova funkcija nekog vremenski promenljivog signala  $f$  definisana na sledeći način

$$W(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-2i\omega\tau} f^*(t-\tau) f(t+\tau) \quad (2)$$

Funkcija zadata u (2) je realna funkcija dve realne promenljive. Ona ima sledeće interesantne osobine. Ako je integralimo po vremenu dobićemo:

$$\int W(t, \omega) dt = |\hat{f}(\omega)|^2 \quad (3)$$

Isto tako važi i simetrična relacija, posle integracije po učestanosti dobićemo:

$$\int W(t, \omega) d\omega = |f(t)|^2 \quad (4)$$

Ako se kvadrat modula signala interpretira kao energija, onda formula (3) daje raspodelu energije po frekvenciji, dok formula (4) daje raspodelu energije po vremenu. Iz te dve relacije moglo bi se očekivati da se Vignerova funkcija može interpretirati kao raspodela energije i po vremenu i po učestanosti, jer ona daje pravilne marginalne raspodele. Međutim, iako je realna funkcija svojih promenljivih, Vignerova funkcija u opštem slučaju nije pozitivna pa ne može biti

interpretirana kao verovatnoća. Sa ciljem da se dobiju funkcije koje se mogu interpretirati kao verovatnoća, uvedene su druge funkcije povezane sa Vignerovom, koje su uvek pozitivne. Prva od njih bila je Husimijeva funkcija koja je dobijena konvolucijom Vignerove funkcije i pogodno odabranog gausijana:

$$G(t, \omega) = \frac{1}{2\pi\sigma_t\sigma_\omega} \int dt' \int d\omega' e^{-\frac{(t-t')^2}{2\sigma_t^2}} e^{-\frac{(\omega-\omega')^2}{2\sigma_\omega^2}} W(t', \omega') \quad (5)$$

Kada se širine  $\sigma_t$  i  $\sigma_\omega$  izaberu tako da važi  $\sigma_t\sigma_\omega = \frac{1}{2}$ , tada i samo tada, gornji izraz postaje pozitivan za svaku Vignerovu funkciju [6], i on tada predstavlja Husimijevu raspodelu na vremensko-frekvencijskom području koja se, imajući u vidu definiciju Vignerove funkcije, može izraziti u obliku:

$$H(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \left| \int e^{-\kappa(\tau-t)^2/2} e^{-i\omega\tau} f(\tau) d\tau \right|^2 \quad (6)$$

gde je  $\kappa = \frac{1}{2\sigma_t^2} = 2\sigma_\omega^2$ . Konkretno vrednosti parametara  $\sigma_t$  ili  $\sigma_\omega$ , biraju se u zavisnosti od primene.

Za razliku od Vignerove funkcije, koja nije uvek pozitivna, ali ima tačne marginalne raspodele (formule (3) i (4)), Husimijeva funkcija je uvek pozitivna, ali ne daje tačne marginalne raspodele. Marginalne raspodele koje daje Husimijeva funkcija, mogu se dobiti iz jednakosti (6), integracijom po odgovarajućim promenljivim.

Da bismo izračunali marginalne raspodele napisaćemo (6) detaljnije kao:

$$H(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int \int e^{-\kappa(\tau-t)^2/2} e^{-i\omega\tau} f(\tau) e^{-\kappa(\tau'-t)^2/2} e^{-i\omega'\tau'} f(\tau') d\tau d\tau' \quad (7)$$

Iz poslednje relacije dobijamo

$$\int H(t, \omega) d\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int e^{-\kappa(\tau-t)^2} |f(\tau)|^2 d\tau \quad (8)$$

jer je

$$\int e^{-i\omega(\tau'-\tau)} d\omega = 2\pi\delta(\tau'-\tau)$$

pa se integracija po  $\tau'$  svodi na zamenu  $\tau'$  sa  $\tau$ .

Imajući u vidu da je  $\kappa = \frac{1}{2\sigma_t^2}$ , jednakost (8) možemo napisati kao:

$$\int H(t, \omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \int e^{-(\tau-t)^2/(2\sigma_t^2)} |f(\tau)|^2 d\tau \quad (9)$$

Na sličan način dobija se:

$$\int H(t, \omega) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \int e^{-(\omega'-\omega)^2/(2\sigma_\omega^2)} |\hat{f}(\omega')|^2 d\omega' \quad (10)$$

Iz navedenih formula, očigledno je da Husimijeva funkcija daje tačne marginalne raspodele samo u graničnim slučajevima kada  $\sigma_t$  odnosno  $\sigma_\omega$  teže nuli, što znači da se u graničnom slučaju te veličine mere tačno.

Iz formule (6) mogu se dobiti još dve granične relacije. Naime, na osnovu (6) a kada  $\kappa$  teži nuli imamo:

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} H(t, \omega) 2\pi \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} = \left| \int e^{-i\omega\tau} f(\tau) d\tau \right|^2 = |\hat{f}(\omega)|^2 \quad (11)$$

Analogno važi:

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} H(t, \omega) \sqrt{\pi\kappa} = |f(t)|^2 \quad (12)$$

U sledećem odeljku daćemo primenu izvedenih rezultata.

### 3. HUSIMIJEVA FUNKCIJA ZA NEKE KARAKTERISTIČNE SIGNALE

Kao primenu dobijenih teorijskih rezultata analiziraćemo kako vrednost parametra  $\kappa$  utiče na oblik Husimijeve funkcije za nekoliko karakterističnih nestacionarnih signala.

Kao prvi primer uzećemo pravougaoni impuls zadat sa:

$$f(t) = p\left(\frac{t-t_0}{t_1}\right), \quad (13)$$

gde funkcija  $p$  označava jedinični pravougaoni impuls:

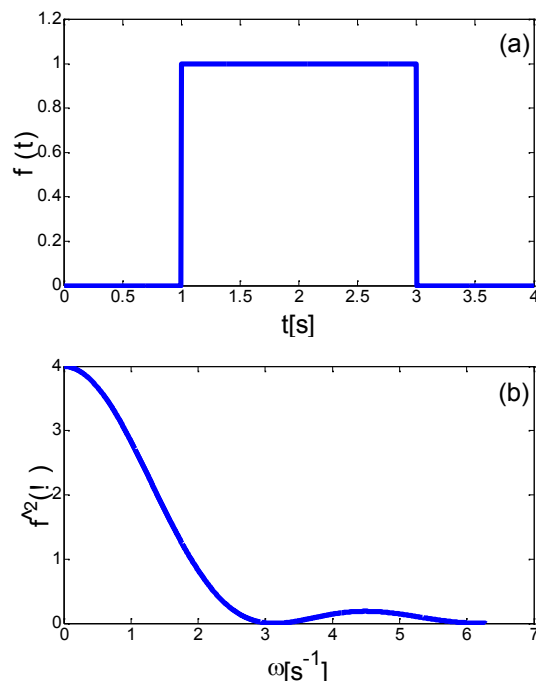
$$p(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \leq 0, x \geq 1 \end{cases} \quad (14)$$

Na slici 1a je prikazan ovaj signal, sa konkretno zadatim vrednostima parametara  $t_0$  i  $t_1$ . Furijeova transformacija ove funkcije se može jednostavno izračunati po definiciji (1) i data je sledećim izrazom:

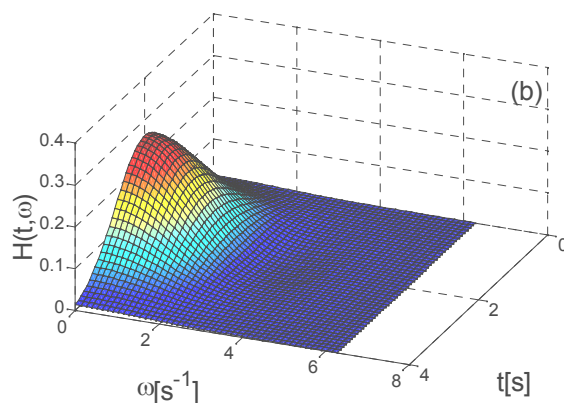
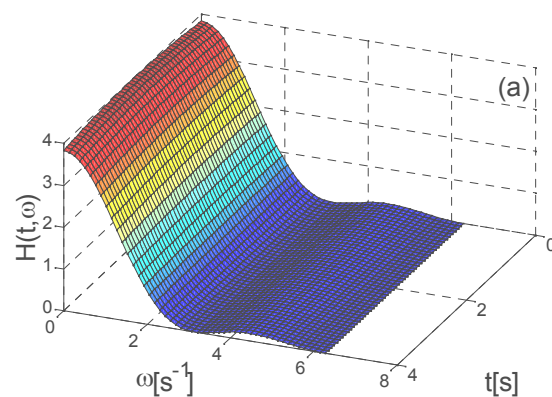
$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{t_0}^{t_0+t_1} p\left(\frac{t-t_0}{t_1}\right) e^{-i\omega t} dt = \int_{t_0}^{t_0+t_1} e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{t_0}^{t_0+t_1} = -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t_0} (e^{-i\omega t_1} - 1) = (15) \\ &= e^{-i\omega t_0} \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right) e^{-i\frac{\omega t_1}{2}} \end{aligned}$$

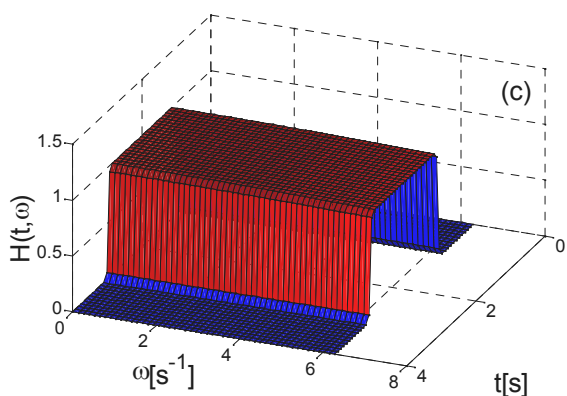
Na slici 1b je prikazan kvadrat modula Furijeove transformacije (energetski spektar) signala  $f$  za vrednosti parametra  $t_1 = 2$  (koji kontrolise trajanje impulsa), i  $t_0 = 1$  (koji kontrolise vremenski početak sig-

nala). Iz izraza (15) možemo uočiti da ovaj spektar ne zavisi od  $t_0$ .



Slika 1- Pravougaoni impuls sa parametrima  $t_0 = 1$  i  $t_1 = 2$  (a) i njegov energetski spektar (b)





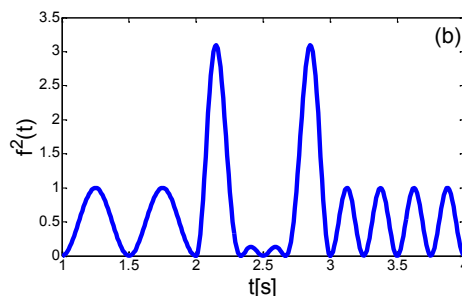
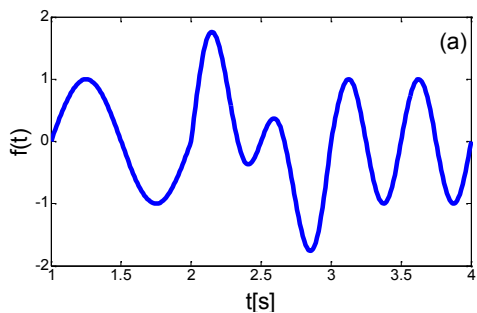
Slika 2 - Husimijeva funkciju za tri karakteristične vrednosti parametra  $\kappa$  (a)  $\kappa \ll 1$ , (b)  $\kappa = 1$  i (c)  $\kappa \gg 1$ .

Na slici 2 prikazana je Husimijeva funkciju ovog signala za tri karakteristične vrednosti parametra  $k$  ( $k \ll 1$ ,  $k = 1$  i  $k \gg 1$ ). Sa slike 2a se vidi da pri malim vrednostima parametra  $k$  Husimijeva funkcija praktično ne zavisi od vremena, a da je zavisnost od frekvencije praktično ista kao energetski spektar signala prikazan na slici 1a. Pri vrednosti parametra  $k = 1$ , Husimijeva funkcija ima jasnu i vremensku i frekvencijsku zavisnost. Sa slike 2b se može uočiti da signal nije počeo od trenutka  $t = 0$ , već da se pojavio nešto kasnije. Pri velikim vrednostima parametra,  $\kappa$ , kao što se vidi sa slike 2c Husimijeva funkcija nema izraženu zavisnost od frekvencije dok je zavisnost od vremena ista kao zavisnost kvadrata vremenskog oblika signala prikazanog na slici 1a.

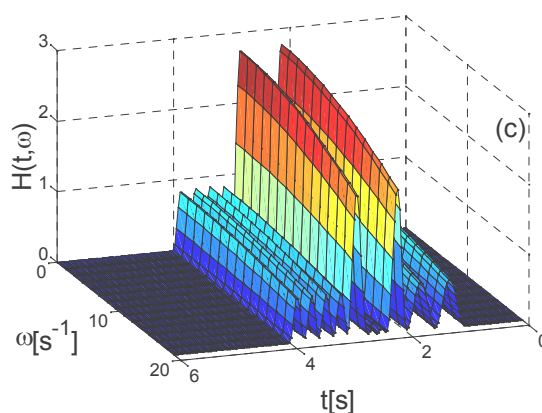
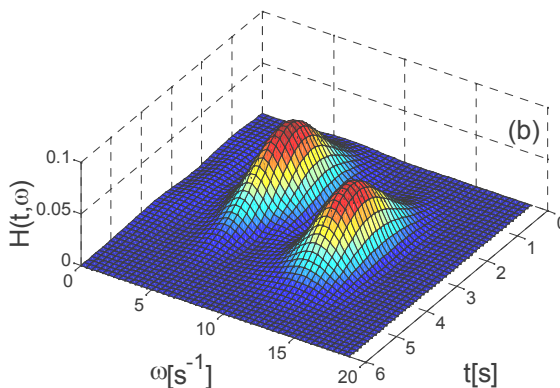
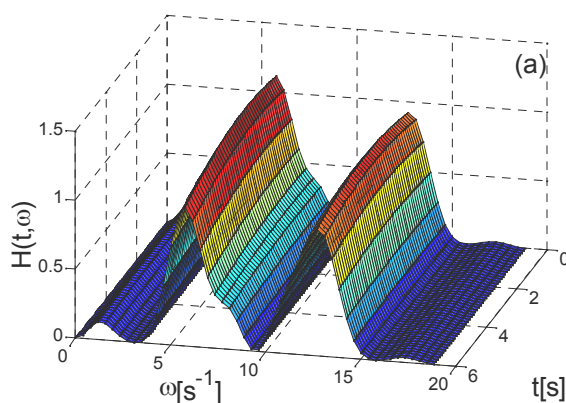
Kao drugi primer razmotrimo zbir dve sinusoide konačnog trajanja, različitih frekvencija, koje su međusobno pomerene u vremenu:

$$x(t) = p\left(\frac{t-t_0}{t_1}\right)\sin(\omega_1 t) + p\left(\frac{t-t_2}{t_3}\right)\sin(\omega_2 t) \quad (16)$$

gde je  $p$  pravougaoni impuls zadat izrazom (13). Na ovom primeru ćemo ilustrovati kako pomoću Husimijeve funkcije mogu da se uoče različite frekvencije prisutne u signalu (što je moguće i klasičnom Furijeovom analizom) ali uz dodatnu informaciju o vremenskom trajanju određenih komponenti signala (pri vrednosti parametra  $k = 1$ ).



Slika 3 - Analizirani signal dat izrazom (16) (a) i kvadrat tog signala (b)



Slika 4 - Husimijeva funkciju za tri karakteristične vrednosti parametra  $\kappa$  (a)  $\kappa \ll 1$ , (b)  $\kappa = 1$  i (c)  $\kappa \gg 1$ .

Husimijeva funkcija prikazana na slici 4a, se praktično ne menja sa vremenom, a frekvencijska osa jasno pokazuje dve jake komponente. Funkcija prikazana na slici 4b, pri optimalnoj vrednosti parametra  $\kappa = 1$ , pokazuje da postoje dve komponente u signalu, i da su one vremenski pomerene. Slika 4c, pokazuje Husimijevu funkciju, koja praktično nema frekvencijsku zavisnost. Vremenska zavisnost ima oblik kvadrata analiziranog signala (slika 3b), tj. energetska raspodelu signala po vremenu.

#### 4. ZAKLJUČAK

U radu je prikazana vremensko-frekvencijska analiza zasnovana na Husimijevoj funkciji, koja se često koristi u kvantnoj mehanici. Optimalna vremensko-frekvencijska reprezentacija, dobija se podešavanjem kontrolnog parametra  $\kappa$ . Dobijeni su analitički izrazi koji opisuju ponašanje Husimijeve funkcije za granične vrednosti kontrolnog parametra  $\kappa$ . Pored dobijenih analitičkih izraza, navedeni su i primeri kroz koje je dat jasan grafički prikaz da za male vrednosti kontrolnog parametra Husimijeva funkcija sadrži informacije o signalu samo u frekvencijskom domenu, za velike vrednosti samo u vremenskom domenu, dok su za međuvrednosti parametra u Husimijevoj funkciji sadržane informacije o signalu i u vre-

menskom i u frekvencijskom domenu. Dobijeni rezultati pokazuju da Husimijeva funkcija može biti od interesa u analizi signala, i da izvedene osobine mogu olakšati njenu primenu.

#### 5. ZAHVALNOST

Zahvaljujemo se Ministarstvu prosvete, nauke i tehnološkog razvoja na finasijskoj podršci preko projekta 171028.

#### LITERATURA

- [1] Cohen L., Time-Frequency Analysis, Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [2] Daubechies I., IEEE Trans. Inf. Theory, 36 961-1005, 1990.
- [3] Sweldens W., Appl. Comput. Harmon. Anal, 3, p. 186-200, 1996.
- [4] Wigner, E. P., Phys. Rev., 40, p. 749-759, 1932.
- [5] Ville, J., Cables et Transmission, 2A: 61-74, 1948.
- [6] Davidović D. M. and Lalović D., Physica A 182 643-648, 1992.

## SUMMARY

### USE OF HUSIMI FUNCTION IN TIME FREQUENCY SIGNAL ANALYSIS

*Husimi function originated in phase space formulation of quantum mechanics. This function appears naturally whenever simultaneous measurement of coordinate and impulse with maximal accuracy allowed by the Heisenberg uncertainty relation is performed on a given quantum state and it represents the probability distribution for simultaneous unsharp measurement of coordinate and impulse. Husimi function may analogously be defined for any pair of conjugated variables. In analysis of time varying signals these variables are time and frequency. In this paper we consider Husimi function in time-frequency space, we derive some properties of the function and give time-frequency analysis of some characteristic signals.*

**Key words:** *Husimi function, Wigner function, time frequency analysis*