

## Optimizacija drugog reda geodetske mreže korišćenjem različitih kriterijum matrica TK strukture

JELENA PANDŽIĆ, Građevinski fakultet, Beograd

VERICA ERIĆ, Građevinski fakultet, Beograd

IVAN ALEKSIĆ, Građevinski fakultet, Beograd

Pregledni rad

UDC: 528.335

*Projektovanje geodetske mreže za razne potrebe u praksi (premer, obeležavanje karakterističnih tačaka nekog objekta u izgradnji, kontrola geometrije izgrađenog objekta, monitoring, itd.) predstavlja problem koji zahteva primenu poznatih metoda optimizacije. Cilj optimizacije je uspostavljanje geodetske mreže sa što većom pouzdanošću, tačnošću i uz što manje troškove. Optimizacija projektovanja geodetskih mreža klasifikuje se u različite redove ali je u okviru rada prikazana samo optimizacija drugog reda koja podrazumeva određivanje optimalnih težina planiranih merenja u geodetskoj mreži. U okviru optimizacije drugog reda neophodno je formirati kriterijum matricu koja zamenjuje realnu kovarijacionu matricu i definisati plan opažanja u mreži. Kriterijum matrica se formira na osnovu neke korelacione funkcije koordinata tačaka čiji su argumenti dužine između tačaka geodetske mreže. U radu je izvršena uporedna analiza rezultata optimizacije drugog reda trilateracione geodetske mreže dobijenih korišćenjem kriterijum matrica TK strukture, koje su formirane na osnovu Gausove i Bardine korelacione funkcije koordinata tačaka. Kao što se i očekivalo, Gausova korelaciona funkcija se pokazala kao bolji izbor prilikom kreiranja kriterijum matrice kofaktora jer zbog njene bolje prilagodljivosti uslovima koje geodetska mreža treba da ispuni (u odnosu na Bardinu korelacionu funkciju), dobijeni odgovarajući rezultati optimizacije dopuštaju merenje dužina sa manjom tačnošću.*

**Ključne reči:** geodetska mreža, optimizacija drugog reda, kriterijum matrica kofaktora

### 1. UVOD

Cilj optimizacije kao nauke je pronalaženje „najboljeg“ rešenja za određeni problem koji je jasno matematički definisan, a utemeljen je u fizičkoj realnosti [1]. Projektovanje geodetske mreže je jedan takav problem, pri čemu se kao cilj optimizacije nameće uspostavljanje geodetske mreže sa što većom pouzdanošću, tačnošću i uz što manje troškove [2]. Optimizacija projektovanja geodetskih mreža klasifikuje se u različite redove [3].

Ovaj rad bavi se optimizacijom drugog reda koja podrazumeva određivanje optimalnih težina odnosno tačnosti planiranih merenja u geodetskoj mreži, što je od velike važnosti za izbor optimalne metode merenja i instrumenata za merenje [1], [8] i [9].

U procesu optimizacije drugog reda se za kreira-

nu kriterijum matricu kofaktora  $Q_x$  i plan opažanja definisan kroz matricu dizajna  $A$  određuju nepoznate optimalne težine planiranih merenja (matrica težina  $P$ ), odnosno optimalna tačnost planiranih merenja.

### 2. FORMIRANJE KRITERIJUM MATRICE

Kriterijum matrica u procesu optimizacije drugog reda zamenjuje realnu kovarijacionu matricu (koja nije poznata u fazi optimizacije) i služi kao idealna matrica koja reprezentuje optimalni kvalitet planirane geodetske mreže u pogledu tačnosti koordinata tačaka mreže. Formira se na osnovu neke korelacione funkcije koordinata tačaka čiji su argumenti dužine između tačaka geodetske mreže [1]. Najčešće korišćene korelacione funkcije su Gausova, eksponencijalna, Beselova, Maislova, Bardina i eksponencijalno-kosinusna.

TK struktura kriterijum matrice podrazumeva da apsolutne elipse grešaka prelaze u krugove grešaka (lokalna izotropija) jednakih poluprečnika (lokalna homogenost), dok relativne elipse grešaka ostaju

Adreda autora: Jelena Pandžić, Građevinski fakultet, Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73

Rad primljen: 30.05.2012.

relativne elipse grešaka (lokalna neizotropija) različiti poluosa (lokalna nehomogenost).

TK struktura kriterijum matrice je prvi put primenjena u turbulentnoj teoriji hidrodinamike i to od strane njenih tvoraca, Tejlora i Karmana, dok je TK strukturu u geodeziju uveo Grafarend koristeći modifikovanu Beselovu korelacionu funkciju [1].

Opšti član kriterijum matrice kofaktora  $Q_x$  za geodetsku 2D mrežu je:

$$\phi_{i_k, j_k}(r_k^i) = \phi_T(r_k^i) \cdot \delta_{ij} + \{ \phi_L(r_k^i) - \phi_T(r_k^i) \} \frac{\Delta i_k^i \Delta j_k^i}{(r_k^i)^2} \quad (1)$$

gde su:

$\phi_T(r_k^i)$  - transverzalna korelaciona funkcija između k-te i l-te tačke,

$$Q_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi_T(r_k^i) + \{ \phi_L(r_k^i) - \phi_T(r_k^i) \} \frac{\Delta x_k^i \Delta x_k^i}{(r_k^i)^2} & \{ \phi_L(r_k^i) - \phi_T(r_k^i) \} \frac{\Delta x_k^i \Delta y_k^i}{(r_k^i)^2} \\ \cdot & 1 & \{ \phi_L(r_k^i) - \phi_T(r_k^i) \} \frac{\Delta x_k^i \Delta y_k^i}{(r_k^i)^2} & \phi_T(r_k^i) + \{ \phi_L(r_k^i) - \phi_T(r_k^i) \} \frac{\Delta y_k^i \Delta y_k^i}{(r_k^i)^2} \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Za korelacionu funkciju  $\phi(r)$ , koristeći jednodimenzionalnu Hankelovu ili dvodimenzionalnu Furijeovu transformaciju [1] dobija se:

$$f(r) = -\phi(r) + \frac{2}{r^2} \int_0^r x \cdot \phi(x) dx \quad (3)$$

pa su transverzalna i longitudinalna korelaciona funkcija potencijalnog polja respektivno:

$$\phi_T(r) = f(r) + \phi(r), \quad (4)$$

$$\phi_L(r) = -f(r) + \phi(r). \quad (5)$$

Gausova korelaciona funkcija između dve tačke ima oblik:

$$\phi(r) = e^{-(r/d)^2} \quad (6)$$

gde su:

$r$  - dužina između dve tačke,

$d$  - karakteristična dužina ( $d \leq r_{\min}$ ).

Gausova transverzalna korelaciona funkcija potencijalnog polja između dve tačke prema (3), (4) i (6) ima oblik:

$$\phi_T(r) = \frac{d^2}{r^2} \left( 1 - e^{-(r/d)^2} \right), \quad (7)$$

$\phi_L(r_k^i)$  - longitudinalna korelaciona funkcija između k-te i l-te tačke,

$r_k^i = \sqrt{(\Delta x_k^i)^2 + (\Delta y_k^i)^2}$  - dužina između k-te i l-te tačke,

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  za  $i, j = x, y$  - Kronekerov simbol,

$\Delta i_k^i, \Delta j_k^i$  - koordinatne razlike između k-te i l-te tačke po x, odnosno y osi.

Kriterijum matrica kofaktora TK strukture za dve tačke u ravni je oblika:

dok je longitudinalna prema (3), (5) i (6) oblika:

$$\phi_L(r) = \left( 2 + \frac{d^2}{r^2} \right) e^{-(r/d)^2} - \frac{d^2}{r^2}. \quad (8)$$

Bardina korelaciona funkcija između dve tačke ima oblik:

$$\phi(r) = 1 - m \cdot r, \quad (9)$$

gde su:

$r$  - dužina između dve tačke,

$m$  - uspon funkcije ( $m \leq 1/r_{\max}$ ).

Bardina transverzalna korelaciona funkcija potencijalnog polja između dve tačke prema (3), (4) i (9) ima oblik:

$$\phi_T(r) = 1 - \frac{2m \cdot r}{3}, \quad (10)$$

dok je longitudinalna prema (3), (5) i (9) oblika:

$$\phi_L(r) = 1 - \frac{4m \cdot r}{3}. \quad (11)$$

Kriterijum matrica kofaktora  $Q_x$  kreirana na ovakav način je u opštem slučaju regularna, tj.  $\det Q_x \neq 0$ , i odgovara korelacionoj matrici realne geodetske mreže. Imajući u vidu da korelaciona funkcija na osnovu koje se kreira kriterijum matrica kofaktora zavisi isključivo od dužina između tačaka mreže, a kako se dužine invarijantne veličine u odnosu

na translacije i rotacije koordinatnog sistema, jasno je da je i kriterijum matrica kofaktora invarijantna u odnosu na iste. Kako kofaktorska matrica realne geodetske mreže zavisi i od koordinatnog sistema geodetske mreže, u optimizaciji drugog reda slobodne geodetske mreže regularna kriterijum matrica kofaktora  $\mathbf{Q}_x$  transformiše se u singularnu transformacijom sličnosti:

$$\mathbf{Q}_{x_s} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}_x \cdot \mathbf{S}^T, \quad (12)$$

gde je:

$\mathbf{S}$  - matrica transformacije sličnosti.

Matrica transformacije sličnosti se računa po formuli:

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} - \mathbf{R} \cdot (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{R}^T, \quad (13)$$

gde su:

$\mathbf{I}$  - jedinična matrica,

$\mathbf{R}$  - matrica datumskih uslova čija struktura zavisi od vrste geodetske mreže, merenih veličina i defekta datuma.

Transformacijom sličnosti donekle se narušava homogenost i izotropija kriterijum matrice.

### 3. OPTIMIZACIJA DRUGOG REDA GEODETSKE MREŽE

Optimizacija drugog reda geodetske mreže podrazumeva određivanje nepoznate dijagonalne matrice težina planiranih merenja  $\mathbf{P}$  ukoliko su poznate kriterijum matrica kofaktora  $\mathbf{Q}_x$  i matrica dizajna  $\mathbf{A}$ . Jedan od načina određivanja pomenute matrice težina je i direktna aproksimacija inverzne kriterijum matrice kofaktora modifikovanim metodom najmanjih kvadrata.

Sistem jednačina

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \cong \mathbf{Q}_x^+ \quad (14)$$

je u opštem slučaju nesaglasan (nema rešenje). Može se napisati i u obliku Katri-Rao proizvoda:

$$(\mathbf{A}^T \odot \mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{p} \cong \mathbf{q}, \quad (15)$$

gde su:

$(\mathbf{A}^T \odot \mathbf{A}^T)_{u^2 \times n}$  - Katri-Rao proizvod,

$\mathbf{p}_{n \times 1}$  - vektor dijagonalnih članova matrice težina  $\mathbf{P}$ ,

$\mathbf{q}_{u^2 \times 1}$  - vektor članova inverzne kriterijum matrice kofaktora  $\mathbf{Q}_x^+$ .

Sistem (15) čini  $u^2$  jednačina sa  $n$  nepoznatih (težine planiranih merenja) i takav nesaglasan sistem uvođenjem vektora popravaka  $\mathbf{r}$  prelazi u:

$$(\mathbf{A}^T \odot \mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{q} + \mathbf{r}, \quad (16)$$

gde je:

$\mathbf{r}_{u^2 \times 1}$  - vektor članova matrice  $\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{Q}_x^+$ .

Težine planiranih merenja dobijaju se uz uslov (metod najmanjih kvadrata):

$$\mathbf{r}^T \mathbf{r} = \min, \quad (17)$$

odnosno, za sistem linearnih jednačina (16) dobija se sistem normalnih jednačina:

$$(\mathbf{A}^T \odot \mathbf{A}^T)^T \cdot (\mathbf{A}^T \odot \mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{p} - (\mathbf{A}^T \odot \mathbf{A}^T)^T \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (18)$$

koji se može kraće zapisati u obliku:

$$(\mathbf{C}^T \mathbf{C}) \mathbf{p} - \mathbf{C}^T \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (19)$$

gde je:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A}^T \odot \mathbf{A}^T). \quad (20)$$

Ukoliko je matrica  $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$  regularna ( $\det \mathbf{C}^T \mathbf{C} \neq 0$ ) rešenje sistema (19) se dobija u obliku:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{q}. \quad (21)$$

U suprotnom, rešenje je oblika:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^+ \mathbf{C}^T \mathbf{q}. \quad (22)$$

Dobijeni vektor optimalnih težina može sadržati i određeni broj članova koji imaju negativne vrednosti čemu je uzrok loš dizajn geodetske mreže. U tom slučaju se planirana merenja za koja su dobijene negativne težine eliminišu iz plana opažanja, tj. brišu se odgovarajući redovi iz matrice dizajna i ceo postupak određivanja optimalnih težina se ponavlja sve dok rezultat ne bude vektor optimalnih težina čiji svi članovi imaju pozitivne vrednosti.

Rešenje (21) odnosno (22) dobijeno primenom metoda najmanjih kvadrata podrazumeva minimalno odstupanje matrice normalnih jednačina od pseudoinverzne kriterijum matrice kofaktora. Vektor optimalnih težina planiranih merenja transformiše se tako da se ostvari što bolja saglasnost pseudoinverzne matrice normalnih jednačina sa kriterijum matricom kofaktora, tj. da odstupanje pseudoinverzne matrice normalnih jednačina od kriterijum matrice kofaktora bude što manje:

$$\mathbf{d}^T \mathbf{d} = \min, \quad (23)$$

gde je:

$\mathbf{d}_{u \times 1}$  - vektor članova matrice  $\mathbf{D} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+ - \mathbf{Q}_x$ .

Transformacija vektora optimalnih težina je linearna:

$$\mathbf{p}_t = \lambda \cdot \mathbf{p}, \quad (24)$$

gde je:

$\lambda$  - koeficijent proporcionalnosti.

Upravo ova linearna transformacija je razlog zbog kojeg se opisani način određivanja optimalne dijagonalne matrice težina planiranih merenja naziva direkt-

$$f(\lambda) = \mathbf{d}^T \mathbf{d} = \mathbf{e}^T \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{\lambda} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+ - \mathbf{Q}_x \right] * \left[ \frac{1}{\lambda} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+ - \mathbf{Q}_x \right] \right\} \cdot \mathbf{e} = \min, \quad (26)$$

gde je:

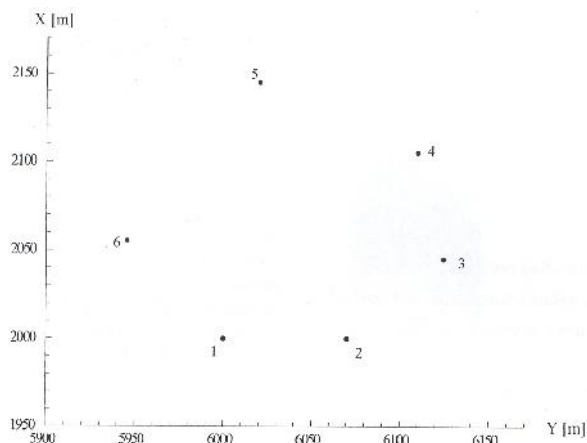
$\mathbf{e}_{u \times 1}$  - jedinični vektor,

diferenciranjem izraza (26) po nepoznatom parametru  $\lambda$  dobija se konačno:

$$\lambda = \frac{\text{tr}[(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+]}{\text{tr}[(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \cdot \mathbf{Q}_x]} \quad (27)$$

#### 4. REZULTATI

Predmet optimizacije drugog reda bila je slobodna geodetska mreža sačinjena od šest tačaka (sl. 1). Iako u ovom slučaju čisto teorijskog karaktera, razmatrana mreža se u sličnom obliku može pojaviti u praksi, npr. kao geodetska osnova sa koje je potrebno izvršiti obeležavanje karakterističnih tačaka nekog objekta u fazi izgradnje. Uspostavljanje kvalitetne geodetske osnove između ostalog podrazumeva i vršenje određenih merenja u mreži, a izbor optimalne metode merenja kao i instrumenata može se izvršiti na osnovu uspešno realizovane optimizacije drugog reda geodetske mreže kojom se dobijaju optimalne težine planiranih merenja.



Slika 1 - Geodetska mreža

nom aproksimacijom inverzne kriterijum matrice kofaktora modifikovanom metodom najmanjih kvadrata.

Koeficijent proporcionalnosti se određuje uz uslov (23), tj. važi:

$$f(\lambda) = \mathbf{d}^T \mathbf{d} = \min. \quad (25)$$

Kako se prethodni uslov može napisati u obliku Hadamardovog proizvoda:

Cilj rada je bio poređenje rezultata optimizacije drugog reda pomenute slobodne geodetske mreže dobijenih korišćenjem kriterijum matrica Tejlor-Karmanove strukture kreiranih na osnovu različitih korelacionih funkcija. U prvom slučaju kriterijum matrica kofaktora kreirana je na osnovu Gausove korelacione funkcije, dok je u drugom slučaju korišćena Bardina korelaciona funkcija.

Osim kriterijum matrica kofaktora formirana je i matrica dizajna sa pretpostavkom da će u mreži biti merene samo dužine između tačaka i to sve moguće dužine (ukupno 15). Rezultati optimizacije (težine planiranih merenja, kao i njihova predviđena tačnost) dati su u tabeli 1.

Težine prikazane u tabeli dobijene su linearnom transformacijom vektora optimalnih težina dobijenog na osnovu (21). U oba slučaja optimizacije (i prilikom korišćenja Gausove, i prilikom korišćenja Bardine korelacione funkcije), u prvobitnom vektoru optimalnih težina nisu se pojavile negativne vrednosti, kao ni vrednosti bliske nuli, tako da nije vršeno „izbacivanje“ pojedinih dužina iz plana opažanja, a samim tim ni iz matrice dizajna, tj. nije vršena ponovna optimizacija.

U tabeli 2 date su sopstvene vrednosti i dužine poluosa apsolutnih elipsi grešaka sračunate iz kriterijum matrice kofaktora kreirane na osnovu Gausove korelacione funkcije (postulirane vrednosti), kao i iz odgovarajuće pseudoinverzne matrice normalnih jednačina (realizovane vrednosti).

Na osnovu postuliranih i realizovanih vrednosti datih u prethodnoj tabeli može se zaključiti da mreža ispunjava uslove lokalne izotropije (elipse bliske krugovima, tj. međusobno bliske dužine velike i male poluose svake pojedinačne elipse) i lokalne homogenosti (međusobno bliske dužine velikih i malih poluosa svih elipsi), što se može videti i na slici 2

U tabeli 3 date su sopstvene vrednosti i dužine poluosa apsolutnih elipsi grešaka sračunate iz kriterijum matrice kofaktora kreirane na osnovu Bardine korelacione funkcije (postulirane vrednosti), kao i iz

odgovarajuće pseudoinverzne matrice normalnih jednačina (realizovane vrednosti).

Na slici 4 dat je uporedni prikaz postuliranih apsolutnih elipsi grešaka kreiranih na osnovu Gausove, odnosno Bardine korelacione funkcije, dok je na slici 5 dat uporedni prikaz realizovanih apsolutnih elipsi grešaka kreiranih na osnovu istih korelacionih funkcija. Uočljiva je veća međusobna saglasnost postuliranih apsolutnih elipsi grešaka kreiranih na osnovu

različitih korelacionih funkcija nego što je to slučaj kod realizovanih elipsi. Primetno je i da su u oba slučaja (i kod postuliranih, i kod realizovanih elipsi) apsolutne elipse grešaka kreirane na osnovu Bardine korelacione funkcije manje od odgovarajućih elipsi kreiranih na osnovu Gausove korelacione funkcije, što se (kao i u slučaju samih težina planiranih merenja) može objasniti „krutošću“ Bardine korelacione funkcije

Tabela 1. Težine i predviđena tačnost planiranih merenja

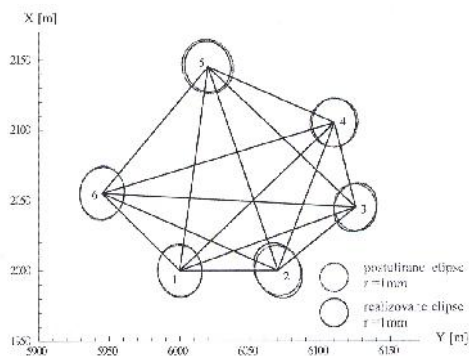
Dužina		Gaus		Barda	
Od	Do	$p$ [1/mm <sup>2</sup> ]	$\sigma$ [mm]	$p$ [1/mm <sup>2</sup> ]	$\sigma$ [mm]
1	2	0.3493	3.4	0.9069	2.1
1	3	0.3069	3.6	0.4503	3.0
1	4	0.6157	2.5	0.6196	2.5
1	5	0.4294	3.1	0.4350	3.0
1	6	0.4002	3.2	0.9314	2.1
2	3	0.5559	2.7	1.0832	1.9
2	4	0.2379	4.1	0.4361	3.0
2	5	0.6116	2.6	0.5600	2.7
2	6	0.2539	4.0	0.2667	3.9
3	4	0.6375	2.5	1.2162	1.8
3	5	0.3302	3.5	0.2794	3.8
3	6	0.4218	3.1	0.2799	3.8
4	5	0.3067	3.6	0.8223	2.2
4	6	0.4859	2.9	0.3906	3.2
5	6	0.3604	3.3	0.7788	2.3

Tabela 2. Sopstvene vrednosti i poluose elipsi grešaka - Gausova korelaciona funkcija

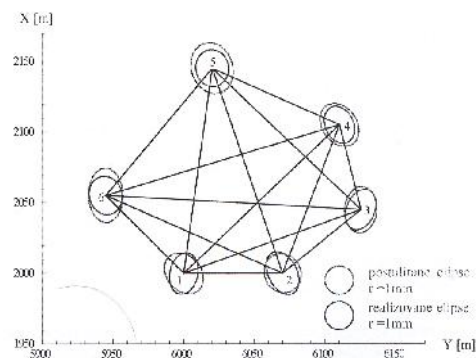
Broj tačke	Postulirane vrednosti				Realizovane vrednosti			
	$\lambda_1$ [mm <sup>2</sup> ]	$\lambda_2$ [mm <sup>2</sup> ]	$A$ [mm]	$B$ [mm]	$\lambda_1$ [mm <sup>2</sup> ]	$\lambda_2$ [mm <sup>2</sup> ]	$A$ [mm]	$B$ [mm]
1	0.8391	0.6242	1.8	1.6	0.9014	0.6190	1.9	1.6
2	0.8136	0.6333	1.8	1.6	1.0454	0.6450	2.0	1.6
3	0.7168	0.5581	1.7	1.5	0.7805	0.5432	1.8	1.5
4	0.7626	0.7012	1.7	1.7	0.7669	0.6003	1.8	1.5
5	0.9624	0.8041	2.0	1.8	0.8356	0.6569	1.8	1.6
6	0.9156	0.6041	1.9	1.6	0.8584	0.6220	1.9	1.6

Tabela 3. Sopstvene vrednosti i poluose elipsi grešaka - Bardina korelaciona funkcija

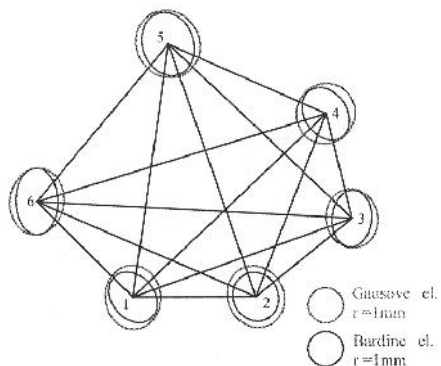
Broj tačke	Postulirane vrednosti				Realizovane vrednosti			
	$\lambda_1$ [mm <sup>2</sup> ]	$\lambda_2$ [mm <sup>2</sup> ]	$A$ [mm]	$B$ [mm]	$\lambda_1$ [mm <sup>2</sup> ]	$\lambda_2$ [mm <sup>2</sup> ]	$A$ [mm]	$B$ [mm]
1	0.6297	0.3675	1.6	1.2	0.5509	0.2454	1.5	1.0
2	0.5018	0.4118	1.4	1.3	0.6512	0.2588	1.6	1.0
3	0.6624	0.3191	1.6	1.1	0.5520	0.2429	1.5	1.0
4	0.6676	0.3676	1.6	1.2	0.4658	0.2460	1.4	1.0
5	0.8473	0.5315	1.8	1.5	0.4259	0.3349	1.3	1.2
6	0.9172	0.3636	1.9	1.2	0.4662	0.3279	1.4	1.1



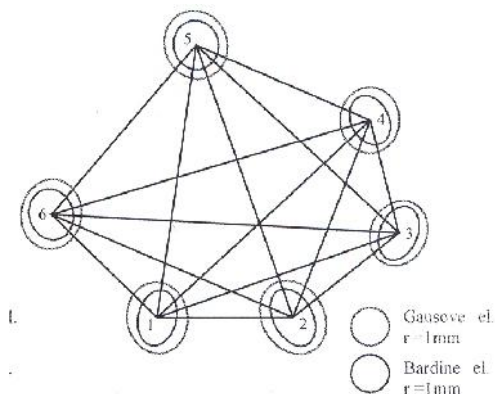
Slika 2 - Postulirane i realizovane apsolutne elipse grešaka - Gausova korelaciona funkcija



Slika 3 - Postulirane i realizovane apsolutne elipse grešaka - Bardina korelaciona funkcija

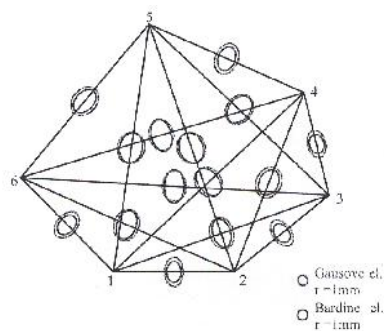


Slika 4 - Postulirane apsolutne elipse grešaka

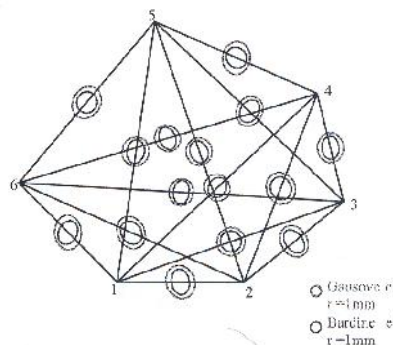


Slika 5 - Realizovane apsolutne elipse grešaka

Na slici 6 dat je uporedni prikaz postuliranih relativnih elipsi grešaka kreiranih na osnovu Gausove, odnosno Bardine korelacione funkcije, dok je na slici 7 dat uporedni prikaz realizovanih relativnih elipsi grešaka kreiranih na osnovu istih korelacionih funkcija. Kao i u slučaju apsolutnih elipsi grešaka, uočljiva je veća međusobna saglasnost postuliranih relativnih elipsi grešaka kreiranih na osnovu različitih korelacionih funkcija nego što je to slučaj kod realizovanih elipsi. Primetno je i da su u oba slučaja (i kod postuliranih, i kod realizovanih elipsi) relativne elipse grešaka kreirane na osnovu Bardine korelacione funkcije manje od odgovarajućih elipsi kreiranih na osnovu Gausove korelacione funkcije, što se opet može pripisati „krutosti“ Bardine korelacione funkcije



Slika 6 - Postulirane relativne elipse grešaka



Slika 7 - Realizovane relativne elipse grešaka

### 5. ZAKLJUČAK

Optimizacija drugog reda geodetske mreže podrazumeva određivanje optimalnih težina planiranih merenja, tj. optimalne tačnosti planiranih merenja ukoliko je poznata matrica dizajna i kreirana kriterijum matrica kofaktora. Kriterijum matrica kofaktora može biti Tejlor-Karmanove ili kompletno izotropne strukture, a kreira se na osnovu neke korelacione funkcije.

U okviru rada je izvršeno poređenje rezultata optimizacije drugog reda slobodne geodetske mreže dobijenih korišćenjem kriterijum matrice TK strukture kreirane na osnovu Gausove u prvom, odnosno Bardine korelacione funkcije u drugom slučaju. Optimizacija je sprovedena primenom modifikovanog me-

toda najmanjih kvadrata koji podrazumeva direktnu aproksimaciju inverzne kriterijum matrice kofaktora.

Matricom dizajna predviđeno je merenje svih dužina u mreži (ukupno 15). Uvidom u rezultate optimizacije dobijene korišćenjem obe kriterijum matrice može se zaključiti da je zahtevana tačnost merenja dužina u mreži u današnjim uslovima lako ostvariva. Međutim, Gausova korelaciona funkcija se ipak pokazala kao bolji izbor prilikom kreiranja kriterijum matrice kofaktora jer zbog njene bolje prilagodljivosti uslovima koje geodetska mreža treba da ispuni (u odnosu na Bardinu korelacionu funkciju), dobijeni odgovarajući rezultati optimizacije dopuštaju merenje dužina sa manjom tačnošću. Takođe, kriterijum matrica kreirana na osnovu Gausove korelacione funkcije bolje očuvava lokalnu izotropiju i lokalnu homogenost u geodetskoj mreži nego što je to slučaj sa kriterijum matricom kreiranom na osnovu Bardine korelacione funkcije.

#### LITERATURA

- [1] Mihailović, K., Aleksić, I., Koncepti mreža u geodetskom premeru, Geokarta d.o.o., Beograd, 2008
- [2] Yalçinkaya, M., Teke, K., Optimization of GPS Networks with Respect to Accuracy and Reliability Criteria, In: Proceedings of the XXIII FIG Congress, International Federation of Surveyors

(FIG), PS 5.1 – RTK/CORS, Munich, Germany, 2006

- [3] Grafarend, E., Optimization of Geodetic Networks, Boll. Geod. Sci. Affini, 33(4), p. 351-406, 1974
- [4] Aleksić, I., Optimizacija merenja u geodetskim mrežama, Magistarski rad, Građevinski fakultet, Beograd, 1988
- [5] Ninkov, T., Optimizacija projektovanja geodetskih mreža, Građevinski fakultet i Naučna knjiga, Beograd, 1989
- [6] Schmitt, G., Second Order Design of Free Distance Network, Considering Different Types of Criterion Matrices, Bull. Géod., 54(4), p. 531-543, 1980
- [7] Teke, K., Yalçinkaya, M. and Konak, H., Optimization of GPS Networks for Landslide Areas, Fres. Env. Bull., 17(6), p. 264-276, 2008
- [8] Ašanin, S., Božić, B., Primena geodetskih metoda u ostvarivanju kvalitetne geometrije građevinskih objekata. Građevinski kalendar, (41), 106-127, 2009.
- [9] Božić B, Ašanin S, Gospavić Z, Milovanović B. Glavni projekat geodetskog osmatranja horizontalnog pomeranja priobalja reke 'Nova Kolubara'. Tehnika - Naše građevinarstvo, 64(4):11-17, 2010.

#### SUMMARY

##### SECOND ORDER DESIGN OF GEODETIC NETWORK USING DIFFERENT TK-STRUCTURED CRITERION MATRICES

*Geodetic network design for numerous practical applications (surveying, staking out of characteristic points of an object in construction, control of geometry of a built-up object, monitoring, etc) represents a problem which requires implementation of well-known optimization methods. Optimization aim is establishing as much accurate and reliable geodetic network as possible with as less costs as possible. Geodetic network optimization is classified into different orders but in this paper only the second order design which deals with the determination of the weights of network measurements is presented. Within the second order design it is necessary to form a criterion matrix which substitutes real covariance matrix and to define observation scheme in network. The criterion matrix is formed by using one of the correlation functions whose arguments are distances between geodetic network points. This paper presents comparative analysis of the results of the second order design of trilateration geodetic network. These results were obtained by using TK-structured criterion matrices formed by using Gaussian and Baarda's correlation functions of point coordinates. As it was expected, Gaussian correlation function is the one that proved as a better choice because it generally adapts better to the geodetic network requirements than Baarda's correlation function: the results obtained by using Gaussian correlation function tolerate less accurate distance measurements.*

**Key words:** *geodetic network, second order design, criterion matrix*

#### ACKNOWLEDGEMENT

*This paper was realized as a part of the project "Using GNSS and LIDAR technologies in infrastructure and terrain movement monitoring" (36009) financed by the Ministry of Education and Science of the Republic of Serbia within the framework of technology development research for the period 2011-2014.*