Matematički modeli loksodrome i njihova primena

MIRKO BORISOV, Vojnogeografski institut, Beograd
BRANKO BOŽIĆ, Građevinski fakultet, Beograd
DROBNJAK SINIŠA, Vojnogeografski institut, Beograd

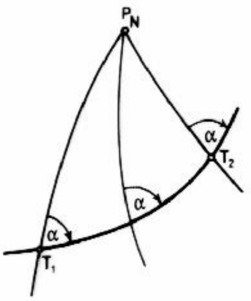
Pregledni rad
UDC: 624.04.001.573:514.83

U radu se razmatraju određeni modeli loksodrome na elipsoidu, lopti i projekcionoj ravni. Po definiciji u geodeziji i kartografiji, loksodroma predstavlja krivu liniju na Zemljinoj površi koja prolazi i seče svaki meridijan pod istim uglom. Takođe, ona ima i druge nazive u literaturi. U ovom radu su posebno opisani matematički modeli loksodrome na datim površima. Prikazane su formule za računanje dužina loksodrome na datim površima. U ravni Merkatorove projekcije loksodroma se prikazuje pravom linijom i u navigaciji ima dugu tradiciju i praktičnu primenu.

Ključne reči: *loksodroma, elipsoid, lopta, projekciona ravan, navigacija.*

1. LOKSODROMA I NJENA OSNOVNA SVOJSTVA

Loksodroma (*engl.: rhumb line, loxodromic curve, line of constant bearing; nem.: loxodrome; rus.: loksodromija*) je kriva linija koja na površi Zemljinog elipsoida ili lopti, sve meridijane seče pod istim uglom (azimutom). Ovo svojstvo loksodrome čini je podesnom za navigaciju, jer omogućava da se po njoj putuje (plovi ili leti) sa konstantnim kursom.



Slika 1 - Grafički prikaz loksodrome

Loksodroma za navigaciju je veoma značajna, jer omogućava da se pri kretanju koristi stalni kurs (pravac) plovidbe brodova i leta vazduhoplova. Ova prednost posebno je izražena na kartama urađenim u Merkatorovoj projekciji, gde je dovoljno pravom linijom spojiti krajnje tačke.

Međutim, negativna osobina loksodrome je što nije najkraće rastojanje između dve tačke na elipsoidu, što znači da putovanje po loksodromi traje duže i samim tim je skuplje. U nekim slučajevima, posebno za kartografske potrebe, umesto elipsoida može se uzeti površ Zemljine lopte, čiji je radijus izvesna funkcija parametara nekog elipsoida.

Adresa autora: Mirko Borisov, Vojnogeografski institut, Beograd, Mije Kovačevića 5

Rad primljen: 22.06.2011.

2. MATEMATIČKA INTERPRETACIJA LOKSODROME NA ODREĐENIM POVRŠIMA

Iz definicije loksodrome očigledno je da ona ne predstavlja najkraću vezu između dve tačke, što znači da je put po loksodromi duži, odnosno da je skuplji. Ipak, loksodroma je, zbog nepromenljivosti kursa, veoma pogodna za navigaciju. Sa druge strane, kod nekih kartografskih projekcija, loksodroma se prikazuje kao prava linija, što omogućava njeno kombinovano korišćenje sa ortodromom u navigacijske svrhe, uz prednosti koje pružaju ortodromski najkraći put i loksodromska stalnost kursa.

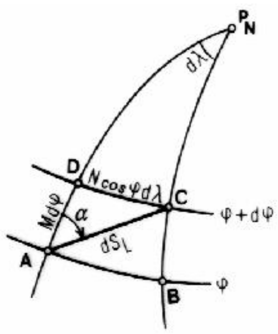
Iz tih razloga biće razmatrani matematički modeli, odnosno jednačine loksodrome na elipsoidu, lopti i projekcionoj ravni. Takođe, biće izvedeni i prikazani izrazi za računanje dužine loksodrome na pomenutim površima, kao i interpretirani odgovarajućim matematičkim i grafičkim modelima na njima.

2.1 Jednačina loksodrome na elipsoidu

Razmotrimo prvo jednačinu loksodrome na elipsoidnoj površi, kao i formule za računanje dužine loksodrome na datoj površi. Na slici 2. dati su elementi loksodrome na elipsoidu.

Ako je α ugao koji loksodroma zaklapa sa meridijanima, onda će iz beskonačno malog pravouglog trougla ADC, koji možemo uslovno smatrati ravnim, biti:

$$tg\alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{N\cos\varphi\, d\lambda}{M\, d\varphi}\ . \qquad (1)$$



Slika 2 - Elementi loksodrome na elipsoidu

Veličina M predstavlja poluprečnik krivine po meridijanu, a N poluprečnik krivine po prvom vertikalu. Takođe, veličina φ se odnosi na geografsku širinu, a veličina λ na geografsku dužinu. Iz izraza (1) dobija se sledeća diferencijalna jednačina:

$$d\lambda = tg\alpha\ \frac{Md\varphi}{N\cos\varphi}\ , \qquad (2)$$

pri čemu je $tg\alpha=const.$, a rešenje podintegralne funkcije glasi (Jovanović, 1983):

$$\int \frac{Md\varphi}{N\cos\varphi} = ln U\ ,$$

gde je:

$$U = \frac{tg(45^0 + \frac{\varphi}{2})}{tg^e(45^0 + \frac{\psi}{2})}$$

Značenja pojedinih elemenata funkcije U su: φ - geografska širina, ψ - geocentrična širina, $\boldsymbol{e}$ – prvi brojni ekscentricitet, a veza između $\boldsymbol{\varphi}$ i $\boldsymbol{\psi}$ data je sledećom jednačinom:

$$\sin\psi = e\sin\varphi \qquad (3)$$

Imajući u vidu diferencijalnu jednačinu (2) kao i prethodno izvedene izraze, na kraju se dobija konačno rešenje:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda = tg\alpha \int_1^2 \frac{Md\varphi}{N\cos\varphi}\ , \qquad (4)$$

odnosno:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = tg\ \alpha(ln\, U_2 - ln\, U_1)\ . \qquad (5)$$

Pod pretpostavkom da je A početna tačka loksodrome, tj. $\varphi_A=\varphi_1=0$ i $\lambda_A=\lambda_1=0$, a koordinate naredne tačke C mogu se obeležiti sa $\varphi_C=\varphi_2=\varphi$ $\lambda_C=\lambda_2=\lambda$, pa se u tom slučaju može napisati:

$$\lambda = tg\alpha\ ln\, U = tg\alpha\ ln\, \frac{tg(45^0 + \frac{\varphi}{2})}{tg^e(45^0 + \frac{\psi}{2})} \qquad (6)$$

Izraz (6) predstavlja zapravo jednačinu loksodrome na površi elipsoida. Ovu jednačinu možemo, polazeći od značenja logaritma, pisati i na drugi način:

$$\frac{\lambda}{tg\ \alpha} = \lambda\ ctg\alpha = ln\, \frac{tg(45^0 + \frac{\varphi}{2})}{tg^e(45^0 + \frac{\psi}{2})}\ , \qquad (7)$$

odnosno, jednačina loksodrome na elipsoidu će poprimiti sledeći matematički oblik:

$$e^{\lambda ctg\alpha} = \frac{tg(45^0 + \frac{\varphi}{2})}{tg^e(45^0 + \frac{\psi}{2})}\ . \qquad (8)$$

Na osnovu jednačine (8) nije teško utvrditi da je loksodroma na elipsoidu spiralna kriva linija sa karakteristikama o kojima je već bilo reči na početku rada. Međutim, kada je u pitanju dužina loksodrome na elipsoidu i njena praktična primena, ona se može dobiti na osnovu sledećih razmatranja.

Naime, iz elementarnog trougla na elipsoidu (slika 2) može se napisati diferencijalna jednačina:

$$ds = M\ d\varphi\ \frac{1}{\cos\ \alpha} = M\ d\varphi\ \sec\ \alpha\ . \qquad (9)$$

Nakon integrisanja diferencijalne jednačine (9), dobija se konačna jednačina:

$$s = S_{\varphi_1}^{\varphi_2}\ \sec\alpha\ , \qquad (10)$$

koja služi za računanje dužine loksodrome na elipsoidu. Simbolom $S_{\varphi 1}^{\varphi 2}$ označena je dužina luka između paralela sa širinama φ_1 i φ_2, na kojima se nalaze krajnje tačke loksodrome.

2.2 Jednačina loksodrome na lopti

Polazeći od slike 2, gde je zapravo prikazana elementarna figura *ABCD* na elipsoidu koja nastaje presekom para beskonačno bliskih paralela i meridijana, uočavamo elemenat loksodrome ds_L koji predstavlja diferencijalni pomak između tačaka A i C. Naime, jednačinu loksodromske krive na lopti možemo dobiti opet na osnovu diferencijalne jednačine:

$$d\lambda = tg\alpha \, \frac{Md\varphi}{N\cos\varphi}. \qquad (11)$$

Međutim, radi jednostavnijeg izvođenja, jednačinu (11) ćemo pisati kao da se odnosi na površ lopte. U tom slučaju je: $M=N=R$, odnosno R predstavlja odgovarajući radijus Zemljine lopte. Imajući ovo u vidu, diferencijalna jednačina glasi:

$$d\lambda = tg\alpha \frac{1}{\cos\varphi} d\varphi. \qquad (12)$$

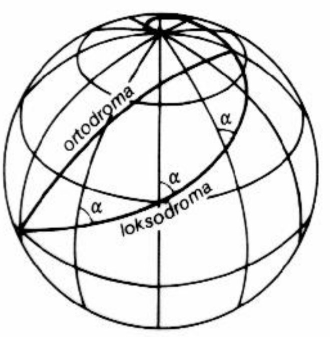
Određenim sređivanjem i integrisanjem, dobija se konačni matematički izraz:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = tg\alpha \left[ln\ tg(45^0 + \frac{\varphi_2}{2}) - ln\ tg(45^0 + \frac{\varphi_1}{2}) \right] \qquad (13)$$

koji predstavlja jednačinu loksodrome na Zemljinoj lopti. Uzme li se tačka A za početnu tačku loksodrome, tj.: $\lambda_1=0$ i $\varphi_1=0$, a koordinate tačke C obeležimo respektivno sa $\lambda_1= \lambda$ i $\varphi_1= \varphi$, dobija se jednostavniji oblik iste jednačine:

$$\lambda = tg\alpha\ ln\ tg\,(45^0 + \frac{\varphi}{2}). \qquad (14)$$

Ova jednačina predstavlja matematički model loksodrome na Zemljinoj lopti. Analizom jednačine (13) i (14), mogu se izvesti određeni zaključci. Prvo, za $\varphi_1= \varphi_2$, biće: $tg\alpha = \infty$ ili $\alpha = 90°$, što odgovara krugu paralele. Drugo, za $\lambda_1= \lambda_2$, biće: $tg\alpha = 0$, ili $\alpha = 0°$, odnosno dobija se meridijanska linija. I treće, za $\varphi = 90°$, veličina $\lambda_2 - \lambda_1$, postaje beskonačna, što znači da je loksodroma spiralna kriva koja beskonačno mnogo puta obilazi oko Zemlje presecajući meridijane pod istim uglom, odnosno približava se polu kao asimptotskoj tački (slika 3).



Slika 3 - Grafički prikaz loksodrome i ortodrome na lopti

Jednačinu (14) možemo preurediti i prikazati na sledeći način:

$$\frac{\lambda}{tg\,\alpha} = \lambda\ ctg\alpha = ln\ tg\,(45^0 + \frac{\varphi}{2}), \qquad (15)$$

odnosno, možemo transformisati dati izraz i dobiti matematički model jednačine loksodrome na lopti u drugom obliku:

$$e^{\lambda ctg\alpha} = tg(45^0 + \frac{\varphi}{2}). \qquad (16)$$

Na osnovu jednačine (16) nije teško utvrditi da je loksodroma na lopti, takođe spiralna kriva linija sa karakteristikama o kojima je već bilo govora kod elipsoida. Takođe, kada je u pitanju dužina loksodrome na lopti i ona se dobija na sličan način kao na elipsoidu. Naime, iz elementarnog trougla na slici 2, sledi:

$$ds = M\ d\varphi \frac{1}{\cos\,\alpha} = M\ d\varphi\ \sec\,\alpha, \qquad (17)$$

odnosno, nakon integrisanja diferencijalne jednačine dobija se:

$$s = S_{\varphi_1}^{\varphi_2}\ \sec\alpha, \qquad (18)$$

što predstavlja konačnu jednačinu za računanje dužine loksodrome na elipsoidu. Simbolom $S_{\varphi 1}^{\varphi 2}$ označava se dužina meridijanskog luka između paralela sa širinama φ_1 i φ_2, na kojima se nalaze krajnje tačke loksodrome. Međutim, za računanje dužine loksodrome S_L na Zemljinoj lopti, uzima se radijus vrednosti R i sračunava po jednačini:

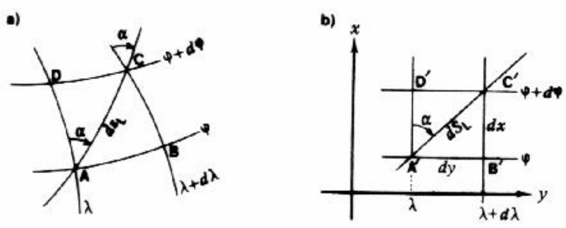
$$s_L = R(\varphi_2 - \varphi_1)\ \sec\alpha. \qquad (19)$$

Na osnovu datog izraza lako se dolazi i do jednačine za računanje dužine loksodrome na lopti od ekvatora ($\varphi_1 = 0$) do pola $\left(\varphi_2 = \frac{\pi}{2}\right)$, odnosno:

$$s_L = R\frac{\pi}{2}\sec\alpha\cdot \qquad (20)$$

2.3 Jednačina loksodrome na projekcionoj ravni

U prethodnom delu izvedena je i prikazana jednačina loksodrome za elipsoidnu površ i površ lopte. Sada treba razmotriti jednačinu loksodrome na projekcionu ravan, kao i formule za dužinu loksodrome. Na slici 4., dati su elementi loksodrome na elipsoidu i na projekcionoj ravni. U ovom slučaju se razmatra ravan u Merkatorovoj projekciji.



Slika 4 - Elementi loksodrome na: a) krivoj površi i b) projekcionoj ravni (Merkatorova projekcija)

Jednačina loksodrome u ravni projekcije može dobiti razmatranjem loksodrome u Merkatorovoj projekciji, prikazanoj na slici 4, odnosno pod b):

$$tg\alpha = \frac{dy}{dx}, \tag{21}$$

ili:

$$dy = tg\alpha \; dx . \tag{22}$$

Ako se koordinate tačaka A' i C' obeleže sa: A' (x,y) i C' $(x_1=x+dx,\ y_1=y+dy)$, onda se nakon integrisanja diferencijalne jednačine dobija konačna jednačina:

$$y - y_1 = (x - x_1)tg\alpha \;, \tag{23}$$

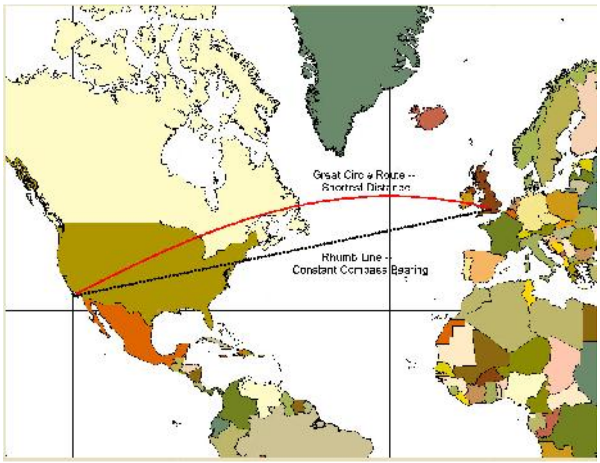
koja predstavlja matematički model linije pravca koji prolazi kroz tačke A' i C', a sa osom $0X$ zaklapa ugao α. Time se dokazuje svojstvo loksodrome u Merkatorovoj projekciji, odnosno da je ona prava linija između dveju bilo kojih destinacija.

3. PRAKTIČNA PRIMENA LOKSODROME I ZAKLJUČAK

Ne treba posebno naglašavati šta je za sigurnost kretanja značilo korišćenje loksodrome u nedalekoj prošlosti, kada su mogućnosti navigacije u poređenju sa savremenim tehnologijama (satelitska navigacija i dr.) bile neuporedivo skromnije. Međutim, negativna osobina loksodrome je što nije najkraće rastojanje između dve tačke. Najkraće rastojanje je deo velikog kruga, tzv. ortodroma, koja se u projekciji najčešće prikazuje kao kriva linija višeg reda, pa je nepodesna za navigacijske ciljeve.

Za navigaciju, uzimajući u celini (na vodi i u vazduhu) veoma je važno kako se u praksi, odnosno na karti preslikavaju loksodroma i ortodroma. U Merkatorovoj projekciji ortodroma je kriva linija (duža od loksodrome), sa konveksnom stranom okrenutom prema bližem polu (slika 5). Međutim, kada se krajnje tačke ortodrome nalaze sa jedne i druge strane ekvatora, ortodroma je kriva linija u obliku slova S, sa tačkom fleksije na preseku sa ekvatorom. Dakle, negativna osobina loksodrome je što nije najkraće rastojanje između dve tačke na lopti ili elipsoidu, što znači da putovanje po loksodromi traje duže i samim tim je skuplje.

Razlika dužina između loksodrome i ortodrome, na velikim rastojanjima i velikim geografskim širinama, dostiže znatne iznose. Tako, na primer, od Rta dobre nade (Cabo d'bona Esperance) na jugu Afrike do Melburna u Australiji put po loksodromi iznosi 6 020 morskih milja, a po ortodromi 5450 milja. Razlika od 570 milja, odnosno 1050 km, ni u kom slučaju nije za zanemarivanje (Jovanović, 1983).

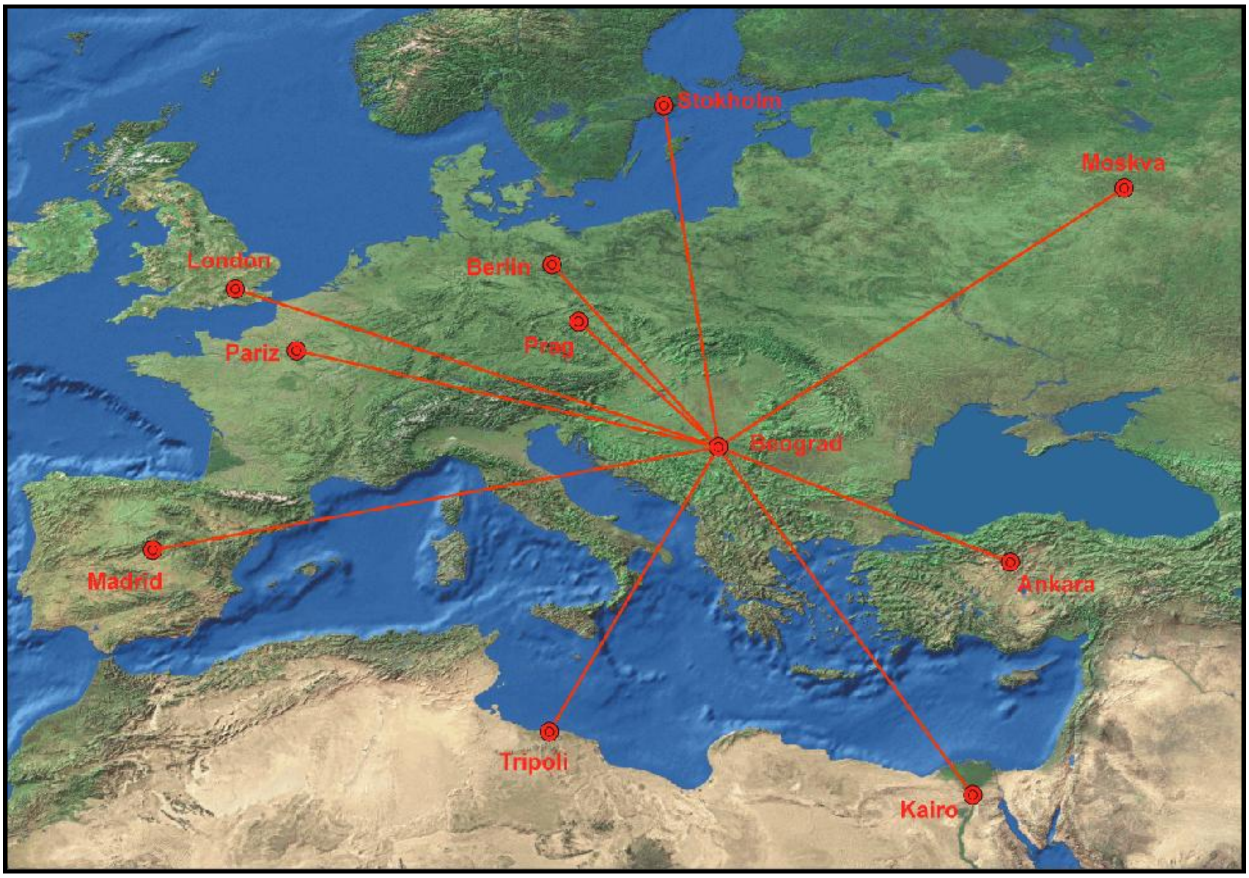


Slika 5 - Grafički prikaz loksodrome i ortodrome u Merkatorovoj projekciji

Takođe, treba imati u vidu da nema kartografske projekcije u kojoj bi se loksodroma i ortodroma istovremeno prikazale kao prava linija. Međutim, da bi se iskoristio ortodromski najkraći put i loksodromska stalnost kursa, odnosno kretati se loksodromski po ortodromi, potrebno je na karti u Merkatorovoj projekciji iscrtati odgovarajuću ortodromu. Ovo se postiže pomoću karte urađene u centralnoj perspektivnoj projekciji, na kojoj se željena ortodroma deli na potreban broj odsečaka i za njihove krajnje tačke očitaju geografske koordinate, pomoću kojih se iste tačke prenose na kartu u Merkatorovoj projekciji. Spajanjem tačaka dobija se kriva ortodrome koja se zatim deli na odgovarajući broj izlomljenih pravih linija-parcijalnih loksodroma. Sasvim je razumljivo da je za ovu svrhu potrebno na kartama jedne i druge projekcije naneti nešto gušću mrežu meridijana i paralela. To je posebno značajno u primeni na velikim rastojanjima.

Primeni Merkatorove projekcije za pomorske karte doprinele su njene osobine koje je čine podesnom za upotrebu, posebno u navigacijske svrhe. Ova projekcija, pored jednostavnog oblika i konstrukcije kartografske mreže i konformnosti, ima i jednu, za navigaciju veoma značajnu osobinu: jedino u njoj se loksodrome preslikavaju kao prave linije. Podsetimo na to da je loksodroma spiralna kriva linija na površi elipsoida ili lopte, koja sve meridijane seče pod istim uglom (azimutom), što za navigaciju može biti veoma značajno, jer omogućava da se pri plovidbi koristi stalni kurs (pravac) plovidbe. Ova prednost osobito je izražena na kartama urađenim u Merkatorovoj projekciji, jer je dovoljno pravom linijom spojiti krajnje tačke plovidbe i ugao preseka ove linije (loksodrome) sa meridijanima (uvek isti) koristiti za održavanje pravca pod kojim brod ili avion treba da plovi.

Dužina i azimut loksodrome na sferi, elipsoidu i projekcionoj ravni računati su na test primeru JAT-ovih relacija ka nekim od većih gradova Evrope i Afrike. Analizirane relacije date su na slici 6.



Slika 6 - Grafički prikaz test primera JAT-ovih relacija

Za računanje dužine i azimuta loksodrome na sferi, Beselovom elipsoidu i u ravni Merkatorove projekcije korišćen je skript napisan u Matlab-u čija je osnovna sintaksa:

[lattrkrh,lontrkrh] = track2('rh',lat1,lon1,lat2,lon2);

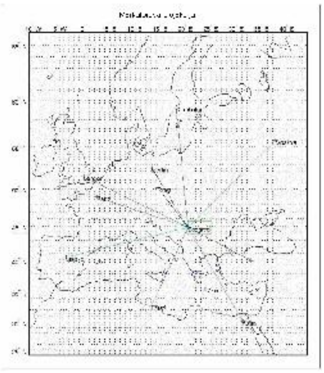
[dist,az] = distance (*track2*,...)

U tabeli 1. mogu se videti rezultati računanja dužine i azimuta loksodrome na sferi, Beselovom elipsoidu i u ravni Merkatorove projekcije.

Vizelni prikaz računanja dužine i azimuta u Merkatorovoj projekciji pomoću skripta napisanog u Matlab-u može se videti na slici 7.

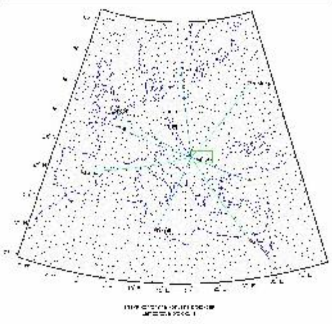
Tabela 1: Računanje dužine i azimuta loksodrome na sferi, Beselovom elipsoidu i u ravni Merkatorove projekcij

Računanje dužine i azimuta loksodrome						
Relacije	na Sferi		na Elipsoidu		u Projekciji	
	Dužina [km]	Azimut [°]	Dužina [km]	Azimut [°]	Dužina [km]	Azimut [°]
Beograd - Madrid	2256.832	256.1885	2262.091	256.2366	2262.362	256.2368
Beograd - Stokholm	1794.583	354.4001	1795.574	354.3861	1795.780	354.3861
Beograd - Moskva	1917.576	45.0844	1920.649	45.1623	1920.876	45.1626
Beograd - London	1886.327	296.0014	1890.629	295.9342	1890.856	295.9340
Beograd - Pariz	1601.189	288.3713	1605.147	288.3176	1605.340	288.3174
Beograd - Berlin	1115.049	328.8328	1115.876	328.7588	1116.005	328.7585
Beograd - Kairo	2105.202	149.8418	2103.281	149.7374	2103.512	149.7371
Beograd -Tripoli	1642.189	204.8899	1640.493	204.9786	1640.674	204.9789
Beograd - Prag	823.278	322.8374	823.994	322.7529	824.089	322.7526
Beograd - Ankara	1285.411	117.9375	1287.620	117.8509	1287.772	117.8506



Slika 7 - Grafički prikaz loksodroma u Merkatorovoj projekciji

Međutim, najnovija istraživanja pokazala su da je za izradu navigacijskih karata podesnija Lambertova konformna konusna projekcija. Ovo se posebno odnosi na vazduhoplovne karte i primenu tzv. Elektronske navigacije pri kojoj se pozicije vazduhoplova određuju presekom radiofarova, često na velikim rastojanjima.



Slika 8 - Grafički prikaz loksodroma u Lambertovoj projekciji

U ovoj projekciji ortodroma je približno prava linija, što znači da je praktično, svaka prava linija ucrtana na karti u ovoj projekciji bliska ortodromi, a na dužini od nekoliko stotina kilometara može se smatrati ortodromom. Slično je i sa loksodromom, iako se ona, kao i ortodroma, teorijski uzimajući preslikava kao kriva, koja od odgovarajuće prave linije najviše odstupa kada su njene krajnje tačke na pravcu istok-zapad. Kada je u pitanju merenje udaljenosti i određivanje pravaca, odnosno nanošenje (ucrtavanje) radio-smerova ka nekoj tački ili od nje, karte urađene u Lambertovoj konformnoj konusnoj projekciji podesnije su od karata u Merkatorovoj projekciji, što je i razlog da se u novije vreme ogotovo po pravilu koriste za vazduhoplovne karte. Danas se čak smatra da je Lambertova projekcija bolja i za pomorske karte. No, treba imati u vidu činjenicu da je Merkatorova projekcija u upotrebi nekoliko stotina godina i da je na njoj bazirana sva postojeća literatura i priručnici za potrebe pomorske navigacije, pa bi prelazak na novi, i ne u svemu savršeniji sistem plovidbe, bio veoma komplikovan i nesvrsishodan.

LITERATURA

[1] Borisov, M., (2002): Utvrđivanje i otklanjanje deformacija sadržaja geografskih karata, Stručni članak, Vojnotehnički glasnik br.1, Beograd, str. 73-81.

[2] Božić, B, Gučević, J.: Vasović, O.: Popović, J. (2005): Tehnologija globalnog sistema za pozicioniranje u funkciji geodetskog premera, Pregledni rad, Tehnika – građevinarstvo, бр. 3, YU ISSN 0350-2619, COBISS.SR-ID 1047044, стр.11-16.

[3] Bugayevskiy, L., Snyder, J., (1998): Map Projections, A Reference Manual, UK.

[4] ESRI (1994): Map Projections, A Reference Manual, USA.

[5] Illert, A., Wilski, I., (1995): Integration and harmonization of contributions to a European dataset, 17th International Cartographic Conference 10th General Assembly of ICA Proccedings 1, Barselona, Espania, pp. 805-813.

[6] Jovanović, V. (1983): Matematička kartografija, Univerzitetska knjiga, Beograd.

[7] Kennedy, M. , Kopp, S. (2000):Understanding Map Projections, A Reference Manual, ESRI, USA.

[8] Robinson, A., and other., (1995): Elements of Cartography, Sixth Edition, USA.

[9] STANAG 2011, (2000): Geodetic Datums, Projections, Grids and Grid References North Atlantic Treaty Organization, Military Agency for Standardization, Edition 6.

[10]Živković, A. (1972): Viša geodezija, Univerzitetska knjiga, Beograd.

SUMMARY

MATEMATICAL MODELS OF RHUMB LINE AND THEIR APPLICATION

The paper analyses some models of rhumb line on the ellipsoid, sphere and map projection. In geodesy and cartography, rhumb line is a complex curve on the earth's surface that crosses every meridian at the same oblique angle. Also, it is called a loxodrome. Specially, this article described some mathematical models of rhumb line on the different surfaces. So, there are some equations and examples how to calculate distance along rhumb line. In the Mercator projection, rhumb line is displayed as line and it is used in navigation traditionally.

Keywords*: rhumb line, ellipsoid, sphere, projection, navigation.*