

# IZVIJANJE OKVIRNIH NOSAČA U PLASTIČNOJ OBLASTI

Stanko Ćorić<sup>1</sup>

**Rezime** U ovom radu prikazana je analiza izvijanja okvirnih čeličnih nosača u plastičnoj oblasti. Analizirani su nosači sa pomerljivim i nepomerljivim čvorovima. Pokazano je kako se primenom matrične analize po teoriji drugog reda može odrediti kritično opterećenje okvirnih sistema, a zatim i dužine izvijanja pojedinih štapova. Numerička analiza je obavljena pomoću sopstvenog programa koji se bazira na tačnom rešenju, pa su interpolacione funkcije usvojene u transcendentnom obliku. Takođe, proračun je sproveden i prema aktuelnim domaćim i evropskim propisima. Na kraju je izvršeno upoređivanje rezultata koji su dobijeni ovim postupcima i zaključeno je kolike greške mogu da se naprave primenom aktuelnih propisa u delu koji se odnosi na proračune dužine izvijanja stubova okvirnih čeličnih nosača koji se izvijaju u plastičnoj oblasti.

**Ključne reči** dužina izvijanja, okvirni nosači, plastična oblast

## PLASTING BUCKLING OF FRAME SUPPORTS

**Summary** This paper presents plastic buckling analysis of steel frames. Sway and non-sway frames were considered. It was shown that by applying the matrix analysis according to second order theory, critical load of the whole system and the effective buckling length of each frame column can be found. Numerical analysis was performed using the self-developed computer program based on the exact solution and transcendental shape functions were applied. The calculation was also carried out according to actual domestic and European codes. Comparative numerical analysis presented herein shows what kind of error can be obtained using the actual codes in the part which is related to effective length calculation of steel frames that buckle in plastic domain.

**Key words** effective buckling length, frame structures, plastic domain

### 1. UVOD

Veliki je broj građevinskih objekata kod kojih su noseći konstruktivni elementi izloženi značajnim silama pritiska. Kao što je dobro poznato, pri proračunu pritisnutih elemenata konstrukcije mora se voditi računa i o fenomenu stabilnosti. Tako je ovom radu prikazana analiza stabilnosti čeličnih nosača, i to onih koji se izvijaju u plastičnoj oblasti.

Uobičajeni postupak za proračun centrično pritisnutih štapova proistekao je iz dobro poznatih "osnovnih Ojlerovih slučajeva stabilnosti", i on je i zastupljen i u aktuelnim domaćim i evropskim propisima za proračun stabilnosti pritisnutih štapova. Tako se, pri analizi stabilnosti stubova okvirnih nosača, svaki stub analizira pojedinačno i tretira se kao da je „izdvojen“ iz nosača, tj. elastično uklješten, odnosno oslonjen samo na stubove i grede koji se nalaze u njegovoj neposrednoj okolini. Pomoću ovako

pojednostavljenog proračuna stabilnosti stubova relativno lako se dolazi do rezultata, koji se zatim mogu prikazati u vidu odgovarajućih dijagrama i približnih formula. Međutim, razvojem kompjuterskih programa po teoriji drugog reda globalna analiza stabilnosti okvirnih nosača u celini postaje deo rutinskog proračuna, pa je pitanje kakva se greška čini korišćenjem približnih rešenja iz propisima, .

### 2. TEORIJSKA ANALIZA

U okviru ovog poglavlja prikazano je kako se primenom matrične analize po teoriji drugog reda može rešiti problem stabilnosti okvirnih nosača.

Kao što je poznato, pri izvijanju štapa dolazi do njegovog savijanja usled aksijalne sile. Diferencijalna jednačina kojom je, prema teoriji drugog reda, definisan problem izvijanja pravog štapa konstantnog poprečnog preseka, koji je pritisnut aksijalnim silama  $P$  na krajevima je:

<sup>1</sup> mr Stanko Ćorić, dipl.inž.građ, asistent, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

$$v^{iv} + k^2 v'' = 0 \quad (1)$$

gde je:

$$k = \sqrt{P / EI},$$

$P$  aksijalna sila,

$EI$  krutost štapa.

U metodi konačnih elemenata, koja se koristi u većini komercijalnih programa, uobičajeno je da se za rešenja ove diferencijalne jednačine koristi približno rešenje u obliku polinoma. Međutim, s obzirom da je cilj ovog rada da se dođe do tačnih rešenja problema stabilnosti okvirnih nosača, korišćeno je tačno rešenje diferencijalne jednačine (1) u trigonometrijskom obliku:

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 kx + \alpha_3 \sin(kx) + \alpha_4 \cos(kx) \quad (2)$$

Matrica krutosti  $K$  za jedan štap može da se dobije primenom direktnog postupka, uspostavljajući pri tome vezu između vektora generalisanih sila i vektora generalisanih pomeranja. Za slučaj pritisnutog obostrano uklještenog štapa (tipa "k") rešenje glasi:

$$K = \frac{EI}{l^3 \Delta} \begin{bmatrix} \omega^3 \sin \omega & \omega^2 l (1 - \cos \omega) & -\omega^3 \sin \omega & \omega^2 l (1 - \cos \omega) \\ a l^2 (\sin \omega - \omega \cos \omega) & -\omega^2 l (1 - \cos \omega) & a l^2 (\omega - \sin \omega) & \\ & \omega^3 \sin \omega & -\omega^2 l (1 - \cos \omega) & \\ \text{sim} & & & a l^2 (\sin \omega - \omega \cos \omega) \end{bmatrix} \quad (3)$$

gde je:

$$\Delta = 2 \cdot (1 - \cos \omega) - \omega \cdot \sin \omega,$$

$$\omega = k l.$$

Na isti nači je moguće izvesti matricu krutosti za štap tipa "g", kao i za zategnute štapove.

Kao što je poznato, problem stabilnost okvirnih nosača definisan je matricnom jednačinom

$$K q = 0 \quad (4)$$

Tako se koristeći poznat uslov iz teorije bifurkacione stabilnosti

$$\det \|K\| = 0 \quad (5)$$

dobija kritična sila za čitav okvir, a na osnovu nje se izračunava koeficijent dužine izvijanja za svaki stub posebno:

$$k = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot EI}{P_{cr} \cdot l^2}} \quad (6)$$

Na osnovu ovakvog teoretskog pristupa, numerička analiza je obavljena pomoću sopstvenog program, koji je napisan korišćenjem programskog paketa MATLAB.

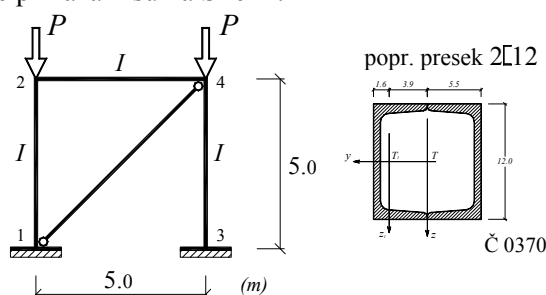
### 3. NUMERIČKA ANALIZA

U ovom radu su analizirani karakteristični primeri okvirnih nosača u ravni sa pomerljivim i nepomerljivim čvorovima. Tako će biti prikazani slučajevi jednospratnih i trospratnih okvira. Poprečni preseci su usvojeni tako da do izvijanja dolazi u plastičnoj oblasti.

#### 3.1. NOSAČI SA NEPOMERLJIVIM ČVOROVIMA

##### 3.1.1. Jednospratni okvir

Dimenzije jednospratnog okvira sa nepomerljivim čvorovima, kao i usvojeni poprečni presek oba stuba i rigle prikazani su na Slici 1.



Slika 1 – Jednospratni nepomerljivi okvir

Primenom matrice analize date u prethodnom poglavlju, izračunata je kritična sila nosača, a na osnovu nje je dobijen i koeficijent efektivne dužine izvijanja:

$$P_{cr} = 1276 \text{ kN} \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{P_{cr} \cdot l^2}} = 0.626$$

Jednostavnim računom može se dobiti napon u pritisnutim stubovima, kao i kritični napon izvijanja:

$$l_o = \beta \cdot l = 0.626 = 313 \text{ cm},$$

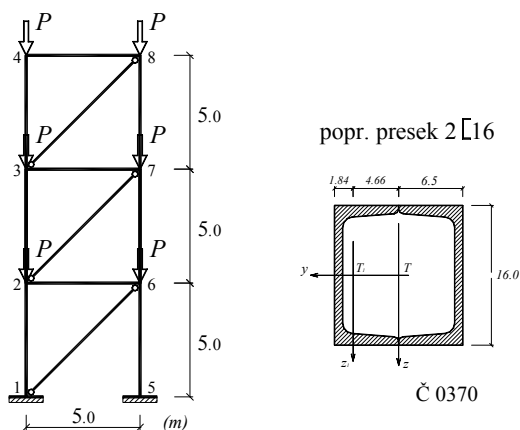
$$\lambda = \frac{l_o}{i_{\min}} = 74.3$$

$$\sigma = \frac{P}{F} = 37.53 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} > \sigma_K = 24.0 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{kr} = \sigma_0 - \sigma_1 \cdot \lambda = 28.9 - 0.082 \cdot 74.3 = 22.81 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

##### 3.1.2. Trospratni okvir

Usvojeni trospratni okvir prikazan je na Slici 2.



Slika 2 – Trospратni nepomerljivi okvir

Primenom prikazane matrične analize dobijena je kritična sila, a na osnovu nje su izračunati koeficijenti efektivne dužine izvijanja za svaki red stubova:

$$P_{cr} = 1276 \text{ kN} \Rightarrow$$

$$\text{za stubove 1-2 i 5-6: } \beta_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{3 \cdot P_{cr} \cdot l^2}} = 0.643$$

$$\text{za stubove 2-3 i 6-7: } \beta_2 = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{2 \cdot P_{cr} \cdot l^2}} = 0.788$$

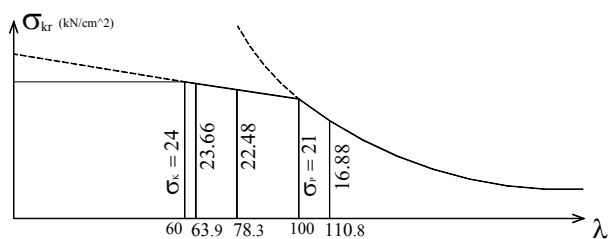
$$\text{za stubove 3-4 i 7-8: } \beta_3 = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{P_{cr} \cdot l^2}} = 1.115$$

Identičnim postupkom kao i u slučaju jednospratnog rama dobijaju se vrednosti napona u pritisnutim stubovima, kao i kritični naponi izvijanja, na osnovu kojih se vidi i da je u ovom slučaju reč o izvijanju štapova u plastičnoj oblasti:

$$\sigma_1 = 50.58 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \sigma_{kr,1} = 23.66 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_2 = 33.72 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \sigma_{kr,2} = 22.48 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_3 = 18.86 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \sigma_{kr,3} = 16.88 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$



Slika 3 –  $\sigma_{kr} - \lambda$  dijagram

### 3.2. NOSAČI SA POMERLJIVIM ČVOROVIMA

#### 3.2.1. Jednospratni okvir

U ovom slučaju su usvojene iste spoljašnje dimenzije rama, kao i kod primera sa nepomerljivim čvorovima. Da bi do izvijanja došlo u plastičnoj oblasti za poprečni presek svih rigla i stubova je uzeto 2 [ 28. U nastavku je prikazan samo konačni rezultat sprovedene matrične analize, tj.

$$P_{cr} = 3705 \text{ kN} \Rightarrow \beta = 1.156$$

#### 3.2.2. Trospратni okvir

Za trospратni ram istih dimenzija kao i u prethodnom primeru, kome se takođe sile u stubovima skokovito menjaju po visini nosača, usvojeni su različiti poprečni preseki stubova. Tako su stubovi na prvom spratu (1-2 i 5-6) dimenzija 2 [ 30, na drugom spratu (2-3 i 6-7) su 2 [ 28, a na trećem (3-4 i 7-8) 2 [ 26. Dobijena kritična sila i koeficijenti efektivne dužine izvijanja u ovom slučaju su:

$$P_{cr} = 1223.2 \text{ kN} \Rightarrow$$

$$\text{za stubove 1-2 i 5-6: } \beta_1 = 1.280$$

$$\text{za stubove 2-3 i 6-7: } \beta_2 = 1.432$$

$$\text{za stubove 3-4 i 7-8: } \beta_3 = 1.821$$

### 4. PROPISI

Rezultati sprovedene numeričke analize upoređeni su sa rezultatima koji se dobijaju primenom aktuelnih domaćih i evropskih propisa za čelične konstrukcije.

#### 4.1. DOMAĆI PROPISI

Proračun stabilnosti okvirnih nosača predmet je standarda *JUS U.E.7.111/1986 – 5.8.6. STABILNOST OKVIRNIH NOSAČA*. Efektivna dužina izvijanja stubova, odnosno pritisnutih elemenata okvirnih sistema, određuje se iz jednačine:

$$l_{s,i} = \beta \cdot h_s \tag{7}$$

gde je:

$l_{s,i}$  efektivna dužina izvijanja pritisnutog elemen.

$h_s$  sistemska dužina pritisnutog elementa

$\beta$  koeficijent efektivne dužine izvijanja

Koeficijent efektivne dužine izvijanja štapa okvirnog sistema sa nepomerljivim čvorovima određuje se iz izraza (8), dok se kod sistema sa pomerljivim čvorovima određuje iz izraza (9):

$$\beta = \frac{1.6 + 1.9 \cdot (\eta_A + \eta_B) + 2.1 \cdot \eta_A \cdot \eta_B}{3.2 + 1.8 \cdot (\eta_A + \eta_B) + 0.7 \cdot \eta_A \cdot \eta_B} \quad (8)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1.5 - 0.70(\eta_A + \eta_B) + 0.22\eta_A \cdot \eta_B}{1.5 - 1.30(\eta_A + \eta_B) + 1.10\eta_A \cdot \eta_B}} \quad (9)$$

gde vrednosti  $\eta_A$  i  $\eta_B$  zavise od krutosti posmatranog stuba, kao i krutosti greda i stubova koji su sa njim spojeni.

#### 4.2. EVROPSKI PROPISI

Evropske norme EVROKOD 3 (EC3) u poglavlju 5.2 standarda EN 1993.1.1:2005., daju odgovarajuća rešenja za analizu stabilnosti okvirnih nosača. Treba napomenuti da se u njima spominje mogućnost analize konstrukcije u celini, ali se ne daje način i postupak kako taj proračun treba da se obavi. Zato se postupak određivanja dužina izvijanja u ovom slučaju preuzima iz Aneksa E prethodne verzije EC3 (ENV 1993-1-1:1992). Tako se koriste empirijski izrazi za bočno nepomerljive (10) i pomerljive (11) sisteme:

$$l/L = \left[ \frac{1 + 0.145 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0.265 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}{2 - 0.364 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0.247 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} \right] \quad (10)$$

$$l/L = \left[ \frac{1 - 0.2 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0.12 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}{1 - 0.8 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0.6 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} \right]^{0.5} \quad (11)$$

I u ovom slučaju koeficijenti raspodele  $\eta_1$  i  $\eta_2$  su u funkciji krutosti susednih polja posmatranog stuba.

#### 4.3. PRORAČUN PREMA PROPISIMA

Vrednosti koeficijenta efektivne dužine izvijanja za prethodne primere date su u tabelama 1-4. Upoređeni su dobijeni rezultati i prikazane su greške koje se dobijaju primenom propisa.

**Tabela 1-Jednospratni nepomerljivi okviri**

stubovi	tač. rešenje	JUS	EC 3
1-2, 3-4	0.626	0.587	0.618
max. greška (%)		6.6	1.3

**Tabela 2-Trospratni nepomerljivi okviri**

stubovi	tač. rešenje	JUS	EC 3
1-2, 5-6	0.643	0.622	0.647
2-3, 6-7	0.788	0.778	0.865
3-4, 7-8	1.115	0.733	0.824
max. greška (%)		52.1	35.3

**Tabela 3-Jednospratni pomerljivi okviri**

stubovi	tač. rešenje	JUS	EC 3
1-2, 3-4	1.156	1.225	1.163

max. greška (%)	6.0	0.6
-----------------	-----	-----

**Tabela 4-Trospratni pomerljivi okviri**

stubovi	tač. rešenje	JUS	EC 3
1-2, 5-6	1.280	1.342	1.260
2-3, 6-7	1.432	1.785	1.568
3-4, 7-8	1.821	1.625	1.450
max. greška (%)		24.6	25.6

## 5. ZAKLJUČAK

Na osnovu numeričke analize koja je sprovedena u okviru ovog rada, a koja se odnosi na analizu stabilnosti okvira koji se izvijaju u plastičnoj oblasti, mogu se izvesti sledeći zaključci:

- Kod jednospratnih okvira, postoji dobro slaganje između tačnih rešenja i približnih rešenja koje daju propisi za određivanje dužina izvijanja stubova.

- Međutim, kod složenijih okvira, navedene greške se značajno uvećavaju. To se posebno odnosi na određivanje dužina izvijanja (odnosno vitkosti) stubova na višim etažama. Na primeru trospratnog okvira sa nepomerljivim čvorovima, pokazano je da je maksimalna greška na nivou drugog sprata 9,8% (EC3), a na nivou trećeg sprata čak 52,1% (JUS). Kod sistema sa pomerljivim čvorovima maksimalna greška na nivou drugog i trećeg sprata je oko 25%.

Kao konačan zaključak može se konstatovati da primena približnih rešenja koja su data u našim (JUS) i evropskim (EC3) propisima, a odnosi se na određivanje dužina izvijanja stubova okvirnih sistema, dovodi do značajnih grešaka kada su u pitanju složeniji, na primer trospratni okviri.

Zato je pri proračunu ovakvih tipova konstrukcija potrebno biti jako pažljiv u primeni aktuelnih propisa. Takođe, predlaže se i njihova inovaciju u smislu napuštanja približnih rešenja i, umesto toga, primene teorije drugog reda koja daje tačna rešenja.

## LITERATURA

- [1] *Prilog određivanju dužina izvijanja stubova okvirnih nosača*, S.Čorić, magistarska teza, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2006
- [2] *Čelične konstrukcije u građevinarstvu*, B.Zarić, D.Buđevac, B.Stipanić, Građevinska knjiga, Beograd, 2000.
- [3] *Evrokod 3 - Proračun čeličnih konstrukcija - ENV 1993-1-1: 2005*, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2006.
- [5] *Nelinearna analiza stabilnosti okvirnih nosača*, S.Čorić, Nauka + Praksa, 2009, vol. 12, br. 2, str. 1-3.
- [6] *Analiza stabilnosti i dužina izvijanja okvirnih nosača sa ocenom tačnosti postojećih propisa*, S.Čorić, III skup GNP, 2010, Žabljak, Crna Gora, knjiga 1, str 15-20.