UDK: 551.482.215
Referat sa naučnog skupa

PROPAGACIJA NEODREĐENOSTI KOD LINIJSKIH MODELA OTVORENIH TOKOVA

Nemanja BRANISAVLJEVIĆ, Dušan PRODANOVIĆ, Miodrag JOVANOVIĆ
Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

REZIME

Tečenje u otvorenim tokovima se često modelira linijskim (1D) modelom. Takav pristup problematici podrazumeva da se složena strujna slika kod tečenja u otvorenim tokovima pojednostavljuje, a kalibracijom parametara modela se postiže da model verno simulira prirodni proces. I u fazi kalibracije, kao i kasnije u fazi korišćenja modela, moguće je da raspoloživi podaci o fenomenu u sebi nose određenu grešku. Da bi se proverio uticaj greške na rezultate proračuna, neophodno je sprovesti dodatne analize. U radu se prikazuje analiza neodređenosti rezultata usled neodređenih ulaznih vrednosti i parametara modela. U ovom radu se razmatraju zatvoreni numerički modeli (kojima se ne može menjati koncept ni programski kod) i na način kako se predstavljaju neodređene veličine (u obliku intervala, rasplinutog skupa i statističke raspodele).

Ključne reči: linijski modeli otvorenih tokova, propagacija neodređenosti

1. UVOD

Složena priroda turbulentnog tečenja u otvorenim tokovima zahteva primenu kompleksnih računskih postupaka u modeliranju ovih tokova. Tečenje u otvorenim tokovima se često modelira linijskim (1D) modelom [8]. Takav pristup problematici podrazumeva da se složena strujna slika kod tečenja u otvorenim tokovima pojednostavljuje, a kalibracijom parametara modela se postiže da model verno simulira prirodni proces. Ukoliko se tečenje modelira determinističkim matematičkim modelom, za odabrani skup ulaznih vrednosti i parametara modela dobija se egzaktna vrednost rezultat modela.

Neizvesnost (neodređenost) predstavlja stanje kada nije moguće dobiti egzaktnu vrednost, već je potrebno imati u vidu više vrednosti od kojih su ponekad neke više, a neke manje verovatne. Neodređenost se može sagledati iz dva ugla: 1) neodređenost u pogledu prirodne varijabilnosti (eng. aleatory uncertainty) i 2) neodređensot u pogledu nedostatka znanja iz proučavane oblasti (eng. epistemic uncertainty). Prvi oblik neodređenosti predstavlja neotklonjivu karakteristiku prirodnih pojava. Kod hidrodinamičkih fenomena, primer bi fenomen turbulencije. Neodređensot u pogledu nedostatka znanja se može umanjiti detaljnijim proučavanjem pojave od interesa, dodatnim merenjima, itd. pa se ovaj vid neodređenosti smatra, ako ne otklonjivim onda bar umanjivim.

U pogledu matematičkog modeliranja kada se posmatraju rezultati modela, moguće je razdvojiti neodređenosti na: 1) neodređenosti samog modela (usled konceptualizacije i pojednostavljenja modeliranog fenomena), 2) neodređensot usled neodređenosti parametara modela i 3) neodređenost usled neodređenosti ulaznih vrednosti. Ukoliko se pretpostavi da model i parametri nemaju nikakvu neodređenost, tj. da je model verna predstava opisivanog procesa, a parametri su optimalno određeni u procesu kalibracije, transformacija neodređenih ulaznih vrednosti u neodređene rezultate naziva se propagacija neodređenosti.

Tehnike propagacije neodređenosti su brojne i izbor adekvatne tehnike zavisi pre svega od informacija koje se mogu upotrebiti u proceni i prikazu neodređenosti ulaznih vrednosti. Postoje tri pristupa kako se mogu prikazati neodređene veličine i kako se njima može manipulisati: 1) probabilisitički pristup (funkcije raspodele verovatnoće), 2) pristup koji se odnosi na intervalsku matematiku i 3) posibilistički pristup (rasplinuti skupovi). Svaki od pomenutih pristupa zahteva poseban matematički aparat kojim bi se sproveo proračun propagacije neodređenosti.

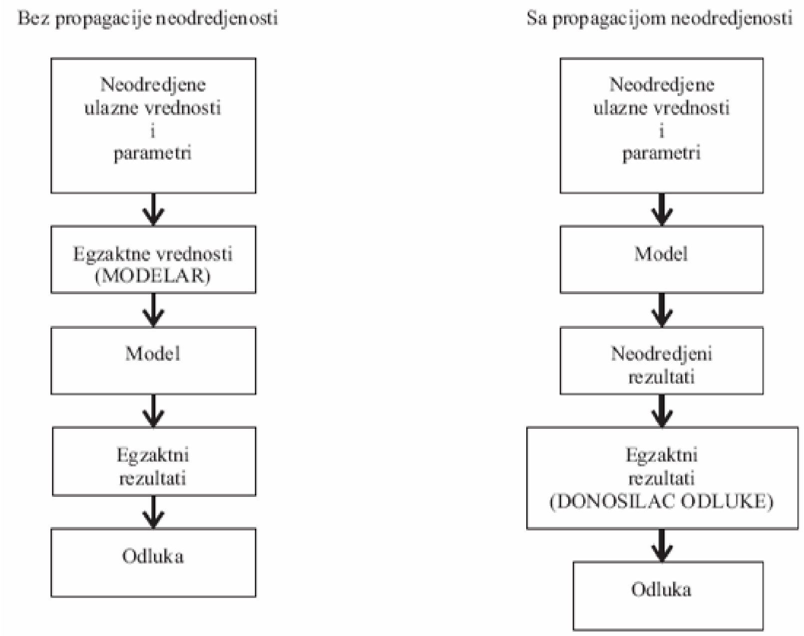
Posebnu klasu problema kod propagacije neodređenosti predstavljaju procedure i metodologije u kojima se koriste tzv. zatvoreni modeli. Zatvoreni modeli predstavljaju klasu modela kod kojih je programski kôd iskompajliran i kod kojih je moguće pristupiti samo ulaznim vrednostima i parametrima modela. Način izračunavanja se ne može menjati i ukoliko se radi o determinističkim modelima, rezultat je jedinstvena, egzaktna vrednost. Zbog toga su metode propagacije neodređenosti posebne matematičke procedure, dok se model koristi samo kao eksterni "engine".

U ovom radu su opisana tri postupka koja se baziraju na tri različite predstave neodređene veličine: 1) Monte Karlo metoda, 2) intervalska matematika i 3) α presek metoda rasplinutim skupovima. Monte Karlo metoda predstavlja baznu metodu za propagaciju neodređenosti baziranu na probabilističkoj teoriji. Međutim, najveći problem predstavlja veliki broj informacija koje se moraju imati da bi se ispravno formirala ulazna vrednost u obliku statističke raspodele. Intervalska matematika nudi elegantno rešenje za monotone modele, dok se kod modela koji imaju multimodalna rešenja (veći broj minimuma i maksimuma na intervalu rešenja) mora upotrebiti neka metoda za traženje ekstremnih vrednosti (optimizaciona metoda). Predstava neodređenih veličina u obliku rasplinutih skupova ima tu prednost što se prioritetna rešenja (namerno se pravi razlika u odnosu na rešenja sa većom verovatnoćom) mogu predstaviti u skupu svih mogućih rešenja jedinstvenom funkcijom pripadnosti (eng. membership function).

Čitava metodologija je prikazana praktičnim primerom na modelu reke Jadar koja protiče zapadnom Srbijom. 1D model je formiran uz pomoć HEC-2 softverskog paketa koji za unetu geometriju i početne uslove računa nivoe u računskim presecima. Kao neodređeni parametar modela korišćen je Maningov koeficijent otpora, čija je veličina neodređenosti procenjena preko uputstava iz literature.

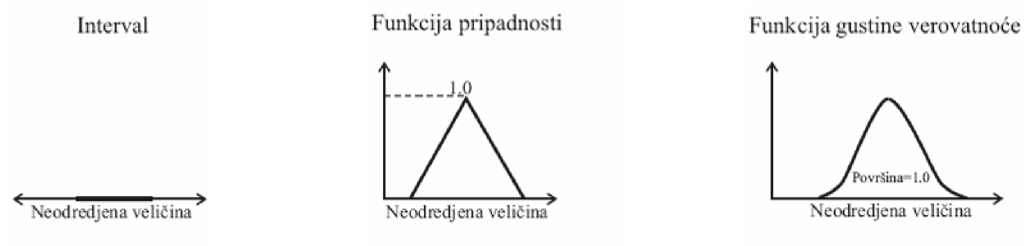
2. NEODREĐENOSTI KOD MODELIRANJA HIDROTEHNIČKIH PROCESA

Matematičko modeliranje hidrotehničkih procesa predstavlja proces opisivanja fenomena tečenja sa slobodnom površinom matematičkim relacijama. U procesu modeliranja se unosi određena doza aproksimacije u skladu sa dva osnovna kriterijuma: 1) potrebama (rezultatima koji se očekuju od modela) i 2) raspoloživim informacijama o modeliranom fenomenu. Ova dva kriterijuma čine glavna ograničenja koja ne dozvoljavaju da model bude kompleksniji od onog za koji postoje raspoloživi podaci, ali da ne sme biti ni manje kompleksan od modela koji bi odgovorio potrebama. Dodatne informacije mogu se, stoga, tražiti jedino u dodatnim analizama rezultata modela. Jedna od kompleksnih i još uvek u stručnoj praksi nestandardnih analiza modela je propagacija neodređenosti. Ovaj tip analize uvodi novi korak u procesu odlučivanja u kome se umesto jednog egzaktnog rešenja dobija niz mogućih rešenja modela tako da se donosilac odluke može osloniti na neke dodatne informacije, slika 1.



Slika 1: Proces odlučivanja na osnovu rezultata modela bez i sa propagacijom neodređenosti

Da bi se sprovela propagacija neodređenosti potrebno je, na početku, doneti odluku o obliku u kom će neodređene veličine biti prikazane. Postoje tri matematička oblika koja i na prvi pogled daju utisak o neodređenosti (slika 2) [4]: 1) interval (najprostiji način prikazivanja neodređenosti), 2) rasplinuti skup i 3) raspodela verovatnoće (najsloženiji način).



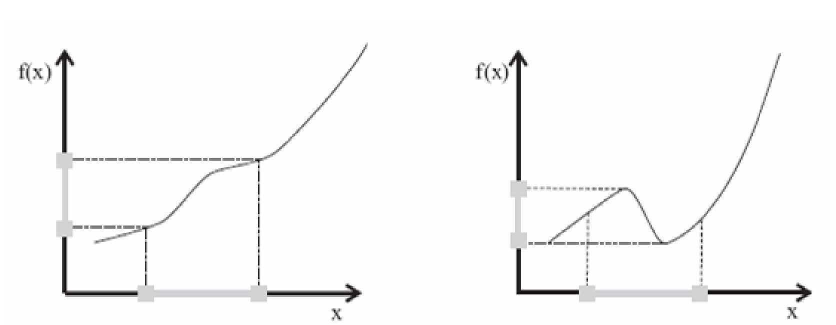
Slika 2: Primeri neodređenih veličina prikazanih u obliku intervala, raspodele verovatnoće i rasplinutog skupa

Interval predstavlja otvoreni ili zatvoreni skup vrednosti bez ikakvih dodatnih informacija koje bi vodile ka više ili manje verovatnim vrednostima u okviru intervala. Drugi po redu oblik kojim se mogu predstavljati neodređene veličine predstavlja rasplinuti skup [1, 2, 3, 4, 12, 13]. Iako se u procesu propagacije neodređenosti ne koriste pravila manipulacije rasplinutim skupovima (specifična za tzv. logiku rasplinutih skupova [4]), funkcija pripadnosti (eng. membership function) nesumljivo daje utisak neodređenosti neke veličine sa dodatnim informacijama koje veličine su više verovatne. Funkcija raspodele verovatnoće (gustine verovatnoće) [1, 4, 6, 7, 9, 10] pruža nedvosmisleno najviše informacija o neodređenoj veličini, a samim tim i zahteva najviše informacija da bi se formirala kao ulazna veličina.

Izbor oblika kojim će biti prikazana neodređena veličina pre svega zavisi od količine informacija kojima raspolažemo o ulaznoj vrednosti modela. Međutim, ne sme se izostaviti ni kriterijum koji se odnosi na brzinu izračunavanja modela. To znači da se analiza neodređenosti mora sprovesti u okvirima koji su ograničeni informacijama kojima se raspolaže i mogućnostima računara da analizu sprovedu na efikasan i brz način.

3. METODE PRORAČUNA PROPAGACIJE NEODREĐENOSTI KOD ZATVORENIH HIDROTEHNIČKIH MODELA

Metode propagacije neodređenosti su matematičke procedure kojima se preslikavaju neodređene ulazne vrednosti u neodređene rezultate modela [10, 12]. Za svaki tip neodređene veličine postoji specifična procedura kojom se na više ili manje efikasan način može dobiti rezultat u istoj formi kao što je ulazna veličina. Takođe, svaka metoda ima i niz varijacija koje su prilagođene specifičnim karakteristikama ulaznih veličina i modela. Metode koje odgovaraju oblicima prikazivanja neodređenih veličina sa slike 2 se mogu podeliti na sledeće kategorije: 1) Metode bazirane na intervalskoj matematici, 2) α presek metode, 3) Monte Karlo metode [4, 9, 10, 12].

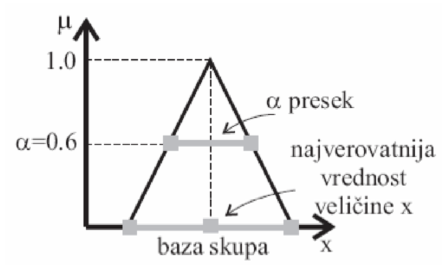


Slika 3: Grafička interpretacija propagacije neodređenosti pomoću intervalske matematike

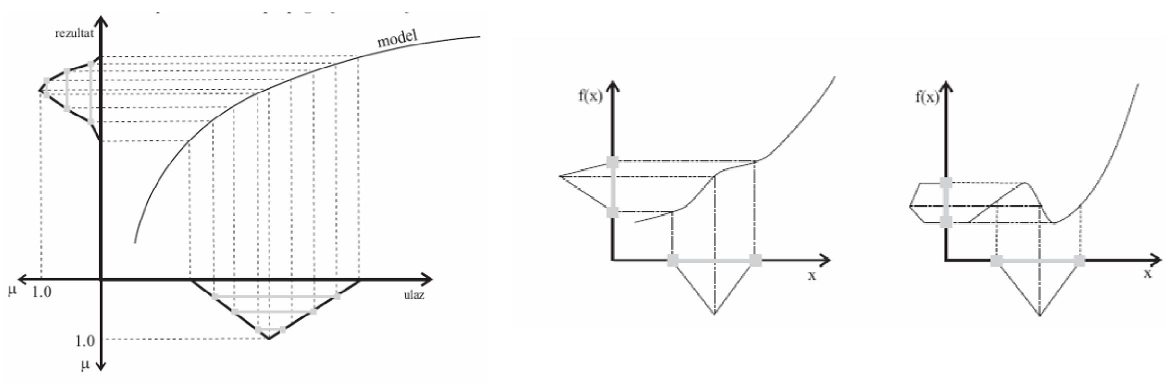
Intervalska matematika (intervalska algebra) predstavlja skup matematičkih operacija koje se sprovode nad intervalima. Primena zatvorenih modela kada se koriste neodređene ulazne veličine u obliku intervala razlikuje se kada je model monoton (slika 3a) pa je dovoljno preslikati samo granice intervala i kada model to nije (slika 3b) pa se moraju primeniti optimizacione metode da bi se odredili lokalni ekstremumi.

α presek metoda se bazira na proširenoj metodi intervalske matematike, pri čemu se ulazni rasplinuti skup deli na niz tzv. α preseka, koji predstavljaju intervale za pojedine nivoe pripadnosti funkcije rasplinutog skupa, slika 4.

Propagacija neodređenosti je na jednodimenzionalnom monotonom modelu prikazana na slici 5a, gde se vidi kako je dovoljno preslikati samo granice α preseka, dok je na slici 5b prikazana razlika preslikavanja kod monotonog i nemonotonog modela gde je potrebno upotrebiti neku optimizacionu metodu [1, 4].

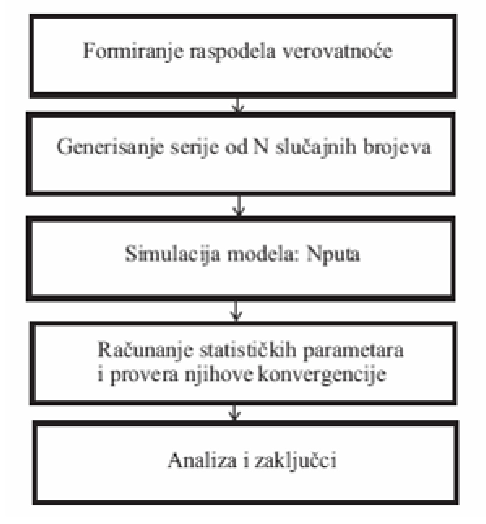


Slika 4: α presek rasplinutog skupa



(A) (B)

Slika 5: a presek metoda kod propagacije neodređenosti veličine u obliku rasplinutog skupa

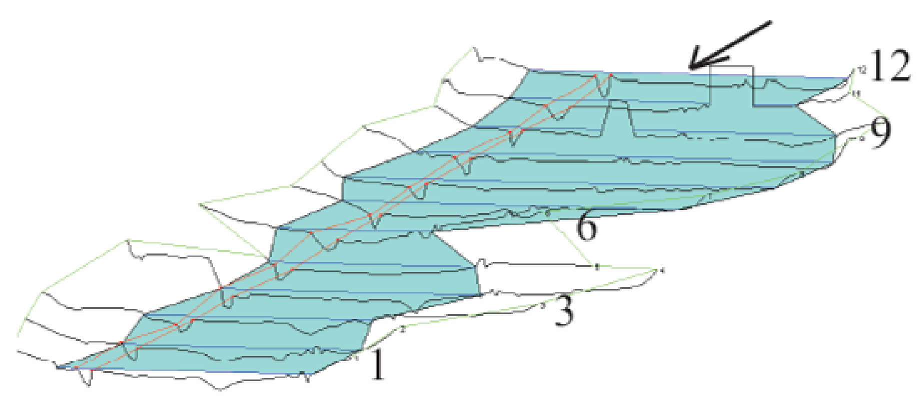


Slika 7: Procedura Monte Karlo metode

Propagaciju neodređenosti kada se ulazna veličina predstavi preko raspodele verovatnoće je moguće izvesti analitički ukoliko je poznat analitički izraz za model i ukoliko je on diferencijabilan i neprekidan. Kod zatvorenih modela to obično nije slučaj pa se propagacija neodređenosti najčešće računa koristeći Monte Karlo metodu: generiše se veliki broj slučajnih ulaznih veličina prema datoj raspodeli verovatnoće i za svaku veličinu se uradi simulacija (slika 7). Od dobijenog niza rezultata modela može se rekonstruisati raspodela verovatnoće rezultata. Analiza rezultata se dalje sprovodi računanjem statističkih parametara raspodele verovatnoće rezultata i to: srednje vrednosti, standardne devijacije, koeficijenta asimetrije ili sproštenosti.

4. PRIMER – 1D MODEL TEČENJA REKE JADAR

Propagacija neodredjenosti je prikazana na primeru modela ustaljenog tečenja u otvorenim prirodnim tokovima. Poznato je da neodređenost *Maningovog* koeficijenta trenja, pored geometrije i ostalih parametara, znatno utiče na izračunatu dubinu/kotu vode u toku. Za potrebe ovog primera korišćen je model reke Jadar, slika 8, modeliran u programskom paketu HEC-2.



Slika 8: Grafički prikaz modelirane deonice reke Jadar

Rezultat modela su dubine u unapred definisanim poprečnim profilima korita, u kojima je definisana geometrija toka. Definisani su ulazni podaci o geometriji kanala, graničnom uslovu (nizvodna dubina vode, pošto se radi o mirnom režimu tečenja) i protoku, dok su pretpostavljene različite raspodele Maningovog koeficijenta trenja, *n*, za glavno korito i inundacije. Rečna deonica je modelirana u dužini od 1650 metara sa 12 poprečnih profila, dok je nizvodni granični uslov na mostu kod Osečine u vidu kritične dubine. Srednja vrednost protoka je odredjena hidrološkom analizom i ona iznosi Q=147 m^3/s. Rezultat hidrauličkog modela je kota nivoa usvakom od poprečnh preseka.

Analiza propagacije neodređenosti je sprovedena α presek metodom, gde je neodređeni Maningov koeficijent otpora predstavljen rasplinutim skupom. Ova metoda u sebi uključuje i intervalsku metodu. Parametri trougaonog rasplinutog skupa prikazani su u tabeli 1, dok je njihov grafički prikaz i način određivanja α preseka prikazan na slici 9. Vrednosti parametara su odabrani tako da srednja vrednost raspodele verovatnoće i vrednost za m = 1 rasplinutog skupa, za glavno korito odgovara Maningovom koeficijentu za šljunak, dok za levu i desnu inundaciju odgovara Maningovom koeficijentu za nisko rastinje i žbunje. Veličina neodređenosti je procenjena na osnovu fotografija modelirane deonice.

Takođe, propagacija neodređenosti je sprovedena i Monte Karlo metodom, gde je Maningov koeficijent otpora predstavljen uniformnom raspodelom sa parametrima prikazanim u tabeli 2.

Tabela 1: Ulazne vrednosti Maningovog koeficijenta u obliku trougaonog rasplinutog skupa

	n leve inundacije [m$^{-1/3}$s]	*n* desne inundacije [m$^{-1/3}$s]	*n* glavnog korita [m$^{-1/3}$s]
a	0.1	0.1	0.04
c_1	0.6	0.6	0.8
c_2	1.4	1.4	1.2

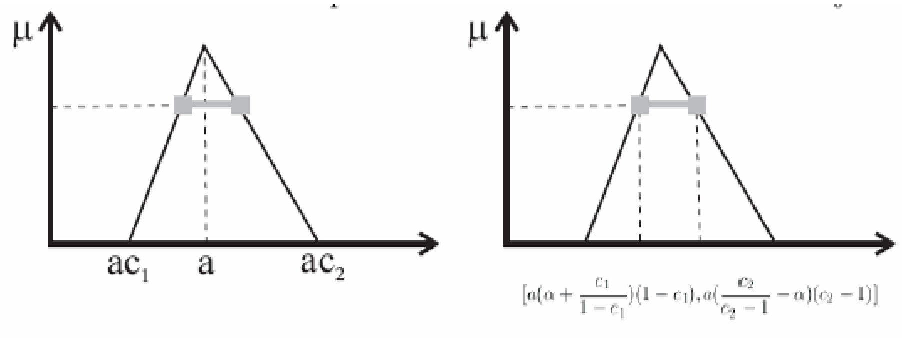
Tabela 2: Parametri uniformnih raspodela Maningovih koeficijenata otpora

	n leve inundacije [m$^{-1/3}$s]	*n* desne inundacije [m$^{-1/3}$s]	*n* glavnog korita [m$^{-1/3}$s]
μ	0.1	0.1	0.04
σ	0.01	0.01	0.002

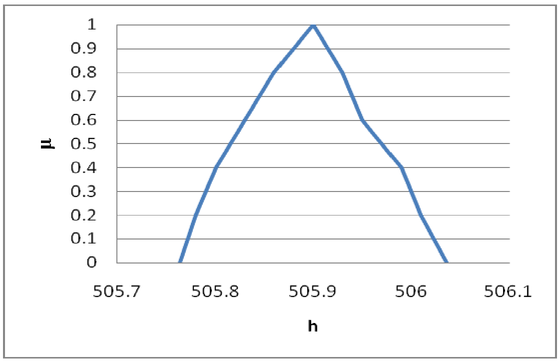
4.1 α presek metoda

Za prikazane ulazne vrednosti Maningovog koeficijenta sprovedena je propagacija neodređenosti. Obzirom da je model monoton za Maningov koeficijent kao ulazni parametar, analizu je moguće sprovesti samo izračunavanjem rezultata modela za granice izabranih α preseka. Time se znatno smanjuje korišćenje računarskih resursa, jer za izabranih N α preseka, simulacija mora obaviti samo $2N - 1$ puta (za trougaoni rasplinuti skup α presek koji odgovara pripadnosti $\mu = 1$ predstavlja samo jednu tačku).

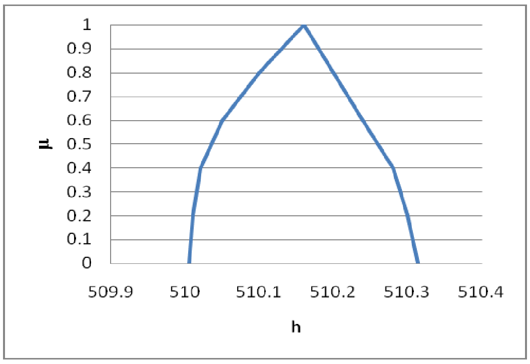
Dobijeni rezultati su prikazani na slici 10. Odabrano je 4 preseka u kojima su računate dubine i to za preseke μ= [0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1].



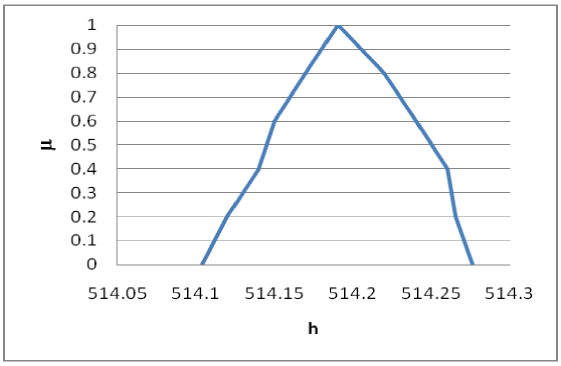
Slika 9: Parametri i α presek trougaonog rasplinutog skupa



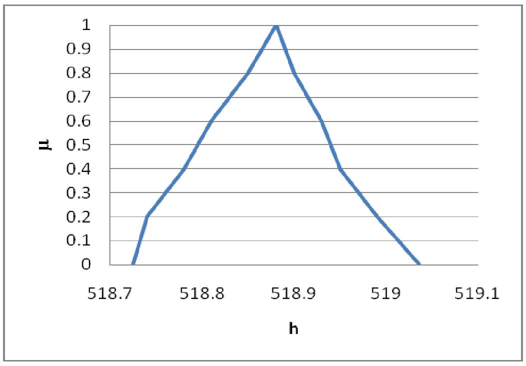
Presek 3



Presek 6



Presek 9



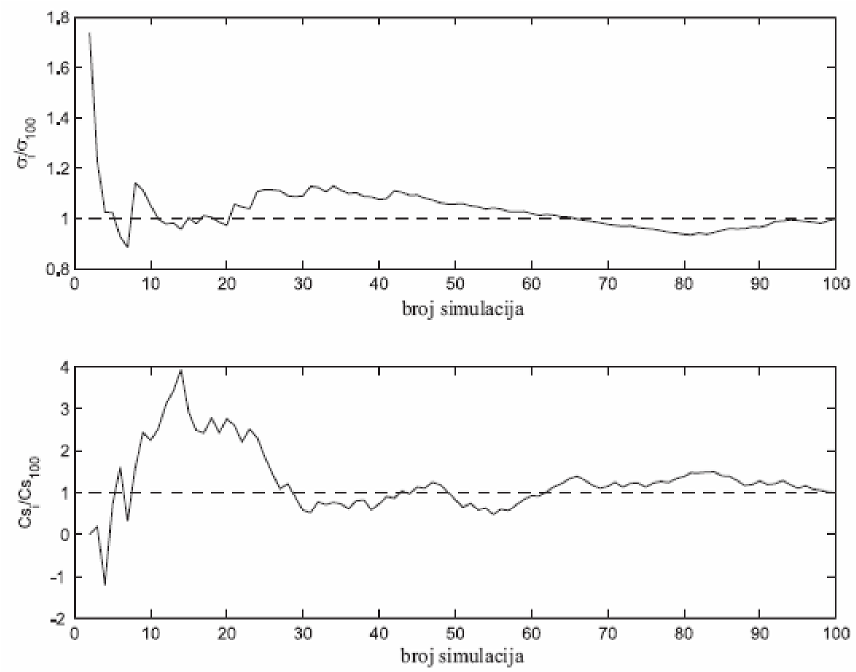
Presek 12

Slika 10: Izabrani preseci sa rezultujućim dubinama

4.2 Monte Karlo simulacija

Monte Karlo simulacija je sprovedena sa ukupno 100 simulacija modela pri čemu su Maningovi koeficijenti otpora generisani iz uniformne raspodele uz pretpostavku da su nezavisni. Uniformna raspodela je odabrana jer ne postoje mereni podaci koji bi poslužili proceni po kojoj raspodeli se javljaju ulazne vrednosti Maningovog koeficijenta. Konvergencija statističkih parametara rezultata modela [4] je utvrđena vizuelnom proverom bezdimenzionalnih vrednosti standardne devijacije i koeficijenta asimetrije, prikazanih na dijagramu 11. σ_{100} i Cs_{100} su vrednosti standardne devijacija i koeficijenta asimetrije prikupljenog skupa rezultata, nakon 100 simulacija modela. Kriterijum konvergencije predstavlja veličina odstupanja standardne devijacije od standardne devijacije nakon velikog broja simlacija. Na dijagramu 11 se može videti da se značajno smanjenje odstupanja registruje i nakon 50 simulacija, pa se može zaključiti i da je 50 simulacija dovoljno za konvergenciju.

Rezultati Monte Karlo simulacije su prikazani u tabeli 3. Pored srednje vrednosti nivoa u odabranim presecima, prikazana je i standardna greška srednje vrednosti koja označava grešku koja se pravi kada se za računanje srednje vrednosti uzme samo uzorak populacije.



Slika 11: Konvergencija standardne devijacije i koeficijenta asimetrije

Tabela 3: Rezultati Monte Karlo simulacije

	presek 3	presek 6	presek 9	presek 12
μ [m]	505.9	510.16	514.19	518.88
σ [m]	0.0302	0.0343	0.0191	0.0346
$S_{\bar{x}}$ [m]	0.003	0.0034	0.0191	0.0035

4.3 Komentar dobijenih rezultata

Iz priloženih rezultata se može zaključiti da se neodređenost nivoa u izabranim poprečnim profilima modelirane rečne deonce uspešno može obaviti i α presek i Monte Karlo metodom. Osnovna prednost α presek metode je manji broj izračunavanja modela: u slučaju α presek metode N = 6, pa je broj proračuna modela je 11, dok je u slučaju Monte Karlo metode urađeno 100 simulacija. Takođe, ne sme se zanemariti ni manja količina informacija koja je potrebna za formiranje ulaznog rasplinutog skupa za α presek metodu. Monte Karlo metoda, iako metoda najveće tačnosti, pored velikog broja simulacija modela potrebnog za konvergenciju, zahteva i neodređene ulazne veličine u obliku raspodela verovatnoće za čije je određivanje potreban veliki broj mernih podataka.

5. ZAKLJUČAK

U radu je prikazana nestandardna analiza 1D modela koja ukazuje na veličinu neodređenosti rezultata modela za zadatu neodređenost ulaznih vrednosti Maningovog koeficijenata otpora za glavno korito i inundacije. Teoretski su obrađeni pristupi koji se odnose na upotrebu tzv. zatvorenih modela kod kojih se može pristupiti samo ulaznim vrednostima, parametrima i rezultatima modela. Iz rezultata analize neodređenosti se može videti da se metoda u kojoj se neodređene veličine predstavljaju rasplinutim skupovima verno predstavlja veličina neodređenosti sa znatno manje simulacija modela. Iako se Monte Karlo metoda smatra referentnom, kod monotonih modela kao što su linijski modeli otvorenih tokova, podjednako zadovoljavajuće rešenje se može dobiti i jednom jednostavnijom metodom kao što je α presek metoda.

LITERATURA

[1] Abebe A., Guinot V., Solomatine D. (2000), *Fuzzy alpha-cut vs. Monte Carlo techniques in assessing uncertainty in model parameters*, Proc. 4th International Conference on Hydroinformatics, Iowa City, USA, July 2000

[2] Branisavljević N., Ivetić M. (2006), *Fuzzy approach in the uncertainty analysis of the water distribution network of Bečej*, Civil engineering and environmental systems, Volume 23, Issue 3 September 2006 , pages 221 - 236

[3] Branisavljević N., Ivetić M., Prodanović D. (2006), *Analysis of the Water Distribution Network with Uncertain Nodal Demand using Fuzzy Sets*, HYDROINFORMATICS 2006 - Inovate and Share, Nice-France

[4] Branisavljević N. (2008), *Propagacija neodredjenosti kod zatvorenih hidrotehničkih model*a, Magistarska teza, Građevinski fakultet u Beogradu

[5] Jovanović M. (2008): *Regulacija reka, rečna hidraulika i morfologija*, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2. izdanje, 2008, ISBN 978-86-7518-084-5

[6] Jovanović, M., *Ocena rizika od erozije rečnog korita oko mostovskih stubova*, Vodoprivreda, 38(2006)

[7] Jovanović, M., Rosić, N., *Stohastički pristup u određivanju šteta od poplava*, Vodoprivreda, 2009

[8] Prodanović D. (2007), *Mehanika fluida za studente gradjevinskog fakulteta*, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2007

[9] Kottegoda N., Rosso R. (1998), *Statistics, Probability and Reliability for Civil and Environmental Engineers*, McGraw-Hill, International Editions, 1998

[10] Lindley D. V. (2006), *Understanding Uncertainty*, A John Wiley & Sons, Inc. Publication, 2006

[11] Revelli R., Ridolfi L. (2002), *Fuzzy Approach for Analysis of Pipe Networks, Journal Of Hydraulic Engineering*, January 2002, pp. 93-101

[12] Walters R. W., Huyse L. (2002), *Uncertainty Analysis for Fluid Mechanics with Applications*, NASA/CR-2002-211449 ICASE Report No. 2002-1, February 2002

[13] Zadeh L. (1965), *Fuzzy sets*, Information and Control, 8(3), 338-353

COMPILED FREE SURFACE MATHEMATICAL MODELS UNCERTAINTY PROPAGATION

by

Nemanja BRANISAVLJEVIĆ, Dušan PRODANOVIĆ, Miodrag JOVANOVIĆ
Faculty of Civil Engineering, Belgrade

Summary

Free surface flow is usually simulated by 1D numerical models. This approach assumes flow simplification and requires model calibration in order to reproduce flow characteristics in a realistic way. The calibration and input data are to some extent inherently erroneous. To check the influence of data errors on the model results, it is necessary to perform some additional analysis. This paper deals with the impact of input data uncertainty on model results, considering only compiled models (those that cannot be conceptually changed, or modified on the source code level). Three forms of data uncertainty representation are presented: intervals, fuzzy sets and statistical distribution.

Key words: 1D free surface flow models, uncertainty propagation

Redigovano 17.11.2009.