

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

EKONOMICKÁ FAKULTA

KATEDRA FINANCÍ

Ověření možností predikce finančních veličin pomocí finančních modelů  
Verification of Possibilities of Prediction Financial Values Using  
Financial Models

Student: Bc. René Cabuk

Vedoucí diplomové práce: prof. Dr. Ing. Zdeněk Zmeškal

Ostrava 2019

VŠB - Technická univerzita Ostrava  
Ekonomická fakulta  
Katedra financí

## Zadání diplomové práce

Student: **Bc. René Cabuk**

Studijní program: N6202 Hospodářská politika a správa

Studijní obor: 6202T010 Finance

Téma: **Ověření možností predikce finančních veličin pomocí finančních modelů**  
**Verification of Possibilities of Prediction Financial Values Using**  
**Financial Models**

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

1. Úvod
  2. Charakteristika časový řad finančních veličin
  3. Popis metod odhadů predikčních modelů
  4. Ověření a srovnání vybraných predikčních modelů
  5. Závěr
- Seznam použité literatury  
Seznam zkratk  
Prohlášení o využití výsledků diplomové práce  
Seznam příloh  
Přílohy

Seznam doporučené odborné literatury:


ARLT, Josef. *Finanční časové řady*. Praha: Grada, 2003. ISBN 80-247-0330-0.  
TSAY, Ruey S. *Analysis of financial time series*. 2nd ed. Hoboken: Wiley, c2005. ISBN 0-471-69074-0.  
ZMEŠKAL, Z., D. DLUHOŠOVÁ a T. TICHÝ. *Finanční modely: koncepty, metody, aplikace*. 3. přeprac. a rozšíř. vyd. Praha: Ekopress, 2013. ISBN 978-80-86929-91-0.


Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **prof. Dr. Ing. Zdeněk Zmeškal**

Datum zadání: 23.11.2018  
Datum odevzdání: 26.04.2019



  
Ing. Iveta Ratmanová, Ph.D.  
vedoucí katedry

  
prof. Dr. Ing. Zdeněk Zmeškal  
děkan fakulty

**Prohlášení**

„Prohlašuji, že jsem celou práci, včetně všech příloh, vypracoval samostatně“.

V Ostravě dne 26. 4. 2019



podpis studenta

## **Poděkování**

Děkuji vedoucímu mé diplomové práce, panu prof. Dr. Ing. Zdeňku Zmeškalovi., za cenné rady, čas a trpělivost, kterou mi věnoval při zpracování této diplomové práce.

## Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod .....</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Charakteristika časových řad finančních veličin.....</b>	<b>6</b>
2.1	Definícia a druhy časových řad.....	6
2.2	Vlastnosti časových řad.....	7
2.3	Klasická dekompozícia .....	10
2.3.1	Typy klasickej dekompozície .....	11
2.4	Boxova-Jenkinsova metodológia .....	12
2.4.1	Stochastický proces a stacionarita .....	13
2.4.2	Autokorelačná funkcia (ACF) a parciálna autokorelačná funkcia (PACF)....	14
2.5	Volatilita.....	15
2.6	Leptokurtické rozdelenie pravdepodobnosti výnosov.....	16
2.6.1	Kombinácia dvoch normálnych rozdelení .....	17
2.6.2	GED rozdelenie .....	18
2.6.3	Študentovo t rozdelenie .....	19
2.7	Charakteristika časových řad cien akciových indexov .....	21
2.7.1	Základné popisné štatistiky .....	21
2.7.2	Analýza odľahlých a extrémnych hodnôt.....	23
2.8	Charakteristika časových řad výnosov .....	24
2.8.1	Základné popisné štatistiky denných výnosov .....	25
2.8.2	Rozdelenie pravdepodobnosti výnosov .....	26
<b>3</b>	<b>Popis metod odhadů predikčních modelů.....</b>	<b>29</b>
3.1	Metódy odhadu parametrov .....	29
3.1.1	Odhad metódou najmenších štvorcov (MNČ).....	29
3.1.2	Metóda maximálne vierohodnostného odhadu (ML) .....	31
3.1.3	Metóda Momentového odhadu (MM) .....	32
3.2	Lineárne stochastické modely .....	32
3.2.1	Modely AR(p).....	32
3.2.2	Modely MA(q).....	34
3.2.3	Modely ARMA(p,q) a ARIMA(p,d,q) .....	35
3.2.4	Konštrukcia modelu.....	36
3.3	Modely Volatility .....	39

3.3.1	Modely ARCH.....	39
3.3.2	Model GARCH.....	41
3.3.3	Konštrukcia modelov.....	42
3.4	Geometrický Brownov pohyb (GBM) .....	44
3.4.1	Odhad parametrov .....	47
3.5	Simulácia Monte Carlo.....	47
3.5.1	Metóda priamej simulácie pomocou GMT.....	48
3.6	Informačné kritériá.....	49
3.6.1	Akaikeho informačné kritérium AIC.....	49
3.6.2	Bayesovo informačné kritérium BIC.....	50
3.6.3	Miera presnosti predikcie .....	50
<b>4</b>	<b>Ověření a srovnání vybraných predikčních modelů.....</b>	<b>52</b>
4.1	Model ARIMA-GARCH.....	52
4.1.1	Akciový index DAX 30.....	53
4.1.2	Akciový index Euro Stoxx 50 .....	59
4.1.3	Akciový index S&P 500.....	66
4.2	Model GBM .....	72
4.2.1	Akciový index DAX 30.....	73
4.2.2	Akciový index EuroStoxx 50 .....	76
4.2.3	Akciový index S&P 500.....	79
4.3	Porovnanie predikčných modelov.....	83
<b>5</b>	<b>Závěr .....</b>	<b>87</b>
	<b>Seznam použité literatury .....</b>	<b>90</b>
	<b>Seznam zkratk.....</b>	<b>93</b>
	<b>Prohlášení o využití výsledků diplomové práce</b>	
	<b>Seznam příloh</b>	
	<b>Přílohy</b>	

# 1 Úvod

Už od nepamäti bol odhad budúceho vývoja cien aktív stredobodom pozornosti finančných analytikov. Rozmáhajúce sa finančné trhy spolu s inováciami v oblasti informačných technológií poskytujú v súčasnosti možnosť podieľať sa ma tomto procese aj subjektom, pre ktoré by to bolo v minulosti nereálne. Pre vytváranie predikcií sa v odbornom svete využívajú sofistikované matematicko-štatistické aparáty. Uskutočniteľnosť predikcie uľahčuje fakt, že historický vývoj cien aktív často poukazoval na prítomnosť trendovej zložky, ktorá udáva smer a tiež oscilačnej zložky, ktorá interpretuje flaktuáciu ponuky a dopytu. Táto a tiež ďalšie skutočnosti podnietila analytikov k použitiu stochastického modelovania vo finančno-ekonomickom vednom odbore, vyformoval sa teda jedinečný vedný obor, z ktorého poznatkov budeme čerpať v našej práci.

Cieľom práce je vykonanie predikcie vývoja finančných veličín pomocou finančných modelov. Pre tento účel odhadneme z analyzovaných časových rád akciových indexov modely ARIMA-GARCH a GBM, získanými modelmi následne určíme intervalové predikcie očakávaného vývoja. Konkrétne v práci použijeme časové rady akciových indexov DAX 30, EuroStoxx 50 a S&P 500.

Úvodná kapitola je venovaná základnej charakteristike časových rád finančných veličín. Budú zhrnuté základné vlastnosti a charakteristiky, tiež sú popísané základné prístupy k dekompozícii časových rád. Vysvetlíme si pojmy ako : volatilita, hetereoskedasticita alebo normalita. V závere úvodnej kapitoly vykonáme analýzu časových rád jednotlivých akciových indexov, pričom výsledky využijeme v aplikačnej časti.

V nasledujúcej kapitole sa venujeme hlavne jednotlivým predikčným modelom. Na začiatku sú popísané používané metódy odhadov parametrov, ďalej jednotlivé modely ako celky a tiež ich postupná konštrukcia. Ďalej sa venujeme simulačnej metóde Monte Carlo a popisu informačných kritérií.

Záverečná kapitola je venovaná skonštruovaniu finančných modelov pre jednotlivé časové rady akciových indexov. Pre každú časovú radu odhadneme model ARIMA-GARCH a model GBM z ktorých vyberieme variantu s najlepšimi vlastnosťami. Predikčnú presnosť

vybraných modelov overíme na minulých hodnotách časových rád. Po overení skonštruujeme predikcie vývoja strednej hodnoty a pravdepodobnostných intervalov. Nakoniec modely porovnáme medzi sebou a v závere zhrnieme výsledky našej práce.

## **2 Charakteristika časových rád finančných veličín**

V akomkoľvek praktickom odbore, predovšetkým v ekonómii a financiách sa často stretávame s informáciami, ktoré sú zachytené v tvare časových rád. Pod pojmom časová rada si môžeme predstaviť akúkoľvek postupnosť, v ktorej sú dáta chronologicky usporiadané v čase. Sú to napr. údaje o cenách alebo výnosoch príslušných cenných papierov, hodnoty makroekonomických indikátorov, hodnoty dosiahnutých ziskov a tiež objemy produkcie jednotlivých podnikov, zmeny v zložení a počte obyvateľstva, vývoj najvyšších denných teplôt a pod. Z vyššie uvedeného popisu vyplýva, že s časovými radami sa stretávame naprieč rôznymi vedeckými oblasťami. Okrem už spomenutých vedných oblastí aj vo fyzike, chémii, biológii, technike, či iných spoločenských vedách.

Časové rady finančných veličín vznikajú vďaka existencii finančných trhov. Finančné trhy zabezpečujú na základe ponuky a dopytu pohyb peňazí a kapitálu v mnohých formách medzi rôznymi ekonomickými subjektmi. Zdrojom informácií na týchto trhoch sú ceny a ich časový vývoj. Tieto skutočnosti umožňujú vytváranie finančných časových rád (Arlt, Arltová, 2007; Cipra, 2013).

### **Definícia a druhy časových rád**

Pod pojmom časová rada sa myslí akákoľvek postupnosť dát usporiadaných chronologicky v čase od minulosti do prítomnosti. Pre potrebu ekonomických modelov sa zvyčajne vyžaduje, aby mali použité časové rady rovnakú frekvenciu pozorovaní. K označeniu sa často používa časový index  $t$  alebo argument. O časových radoch hovoríme tiež ako o hodnotách určitej veličiny alebo veličinách (v prípade viacrozmerných časových rád), pozorovaných v časovom intervale s pravidelnou frekvenciou záznamu (denne, mesačne, ročne atď.). Frekvenciou záznamu sa myslí veľkosť intervalu medzi jednotlivými pozorovaniami s akou sa záznam zhotovuje (Turčan a kol. 2002).



Finančné časové rady tvoria vysokofrekvenčné dáta, ktoré je možné nájsť na finančných trhoch. Môžeme ich deliť napríklad podľa toho aký inštrument vyjadrujú napr. na dlhopisové, akciové alebo devízové časové rady. Základné informácie získané z uvedených trhov sú dáta s rôznou frekvenciou, napríklad cena akcie, cena dlhopisu, cena meny.

Klasifikáciu časových rád môžeme uskutočniť na základe niekoľkých ukazovateľov, ktoré nám budú nápomocné pri ich ďalšom skúmaní.

Rozlišujeme dva základné typy:

- **deterministické**, ktoré neobsahujú žiadny prvok náhodnosti, vieme presne ako sú generované a je možné ich bezchybne predpovedať. Príkladom sú známe matematické funkcie sínus a kosínus,
- **stochastické**, kedy sa jedná o realizáciu náhodného procesu. Obsahujú prvok náhodnosti, avšak jednotlivým hodnotám môžeme priradiť konkrétne pravdepodobnosti. Jedná sa o väčšinu reálnych časových radov.

Ďalej môžeme časové rady deliť napríklad podľa dĺžky sledovaného intervalu na krátkodobé, dlhodobé alebo vysokofrekvenčné. Ekvidistantné časové rady majú rovnomernú dĺžku krokov a naopak neekvidistantné rozdielnu dĺžku krokov. V prípade ak sa ukáže, že sa jedná o poslednú menovanú časovú radu, je nutné vykonať patričné úpravy, aby boli výsledné časové rady rovnomerne rozdelené (Arlt., Arltová, 2003).

## Vlastnosti časových rád

Základné popisné štatistiky časovej rady vyjadrujú nasledujúce vzťahy:

Ceny jednotlivých finančných aktív  $P_t$  možno prepočítať na výnosy  $r_t$  nasledovne:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right), \quad (2.1)$$

Výberová stredná hodnota spojitých výnosov je vyjadrená vzťahom

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t, \quad (2.2)$$

kde,  $T$  je počet pozorovaní,  $t$  sú jednotlivé kroky,  $\bar{r}$  je stredná hodnota spojitých výnosov.

Ďalej uvedieme vzťah pre výberový bodový odhad rozptylu

$$s = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}, \quad (2.3)$$

Jedným z dôležitých predpokladov pri modelovaní finančných časových rád je predpoklad normality rozdelenia výnosov. Znamená to, že logaritmy výnosov  $r_t$  majú normálne rozdelenie s konštantnou strednou hodnotou  $\mu$ , a konštantným rozptylom, čiže  $r_t \sim N(0, \sigma)$ . Normálne rozdelenie je charakteristické tým, že je symetrické.

Šikmost' ( $SK$ ) vyjadruje vzťah

$$SK = E \left[ \frac{(r_t - u)}{\sigma^3} \right] = 0. \quad (2.4)$$

Špicatost' ( $K$ ) normálneho rozdelenia je definovaná nasledujúcim vzťahom

$$K = E \left[ \frac{(r_t - u)^4}{\sigma^4} \right] = 3. \quad (2.5)$$

Výberový bodový odhad šikmosti je definovaný vzťahom

$$SK = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{(r_t - \bar{r})}{s^3}, \quad (2.6)$$

kde  $\bar{r}$  je výberová stredná hodnota a  $s$  je výberový rozptyl. Ďalej uvedieme vzorec pre bodový odhad špicatosti

$$\hat{K} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{(r_t - \bar{r})^4}{s^4}. \quad (2.7)$$

Testovanie normality časových rád sa uskutočňuje napríklad pomocou Jarque-Berra testu (JB), ktorý je definovaný vzťahom

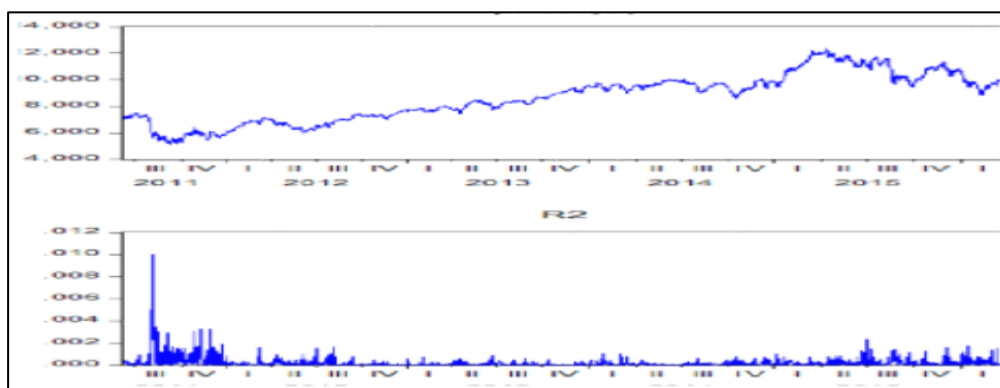
$$JB = \frac{T - k}{6} \cdot \left( \hat{S}^2 + \frac{(\hat{k} - 3)^3}{4} \right), \quad (2.8)$$

kde  $T$  je počet pozorovaní,  $k$  je počet odhadnutých parametrov. Štatistika JB má chi-kvadrát rozdelenie s dvoma stupňami voľnosti. V prípade nulovej hypotézy je konštatovaná normalita nesystematickej zložky. Naopak alternatívna hypotéza ukazuje na prítomnosť nenormality nesystematickej zložky. Štatistika Jarque-Bera má rozdelenie  $X^2$ . K zamietnutiu nulovej hypotézy dochádza často v situácií kedy sú nesystematické zložky heteroskedastické (Turčan a kol. 2002).

Vo finančnej praxi však často nastáva situácia, že skutočné rozdelenie spojitých výnosov je špicatejšie ako normálne rozdelenie. To znamená, že extrémne hodnoty spojitých výnosov sa objavujú častejšie, než je tomu u normálneho rozdelenia. Tento druh rozdelenia sa nazýva leptokurtické rozdelenie a vyznačuje sa "vyššou špicatosťou a ťažkými koncami". Tieto typy rozdelenia majú nulovú strednú hodnotu, jednotkový rozptyl a kladný koeficient špicatosti.

Ďalšia špecifická vlastnosť finančných časových rád je zhlukovanie volatility (volatility clustering). Jedná sa o striedanie období vysokej a nízkej miery volatility aktíva v určitých časových intervaloch, kedy sa po obdobiach „relatívneho pokoja“ objavujú silné cenové pohyby. Z vyššie uvedenej vlastnosti úzko súvisí pákový efekt (leverage effect). Tento efekt je daný averziou investorov k riziku. Prejavuje sa pri prudkých poklesoch ceny aktíva, kedy sa investori snažia vyhnúť strate tým, že sa v panike zbavujú držaných aktív (Arlt, 1999).

**Obr. 2.1** Vývoj ceny a volatility akciového indexu DAX 30



*Zdroj: vlastné spracovanie*

Obr. 2.1 znázorňujeme denný vývoj ceny a volatility akciového indexu DAX 30. Môžeme vypožorovať že na začiatku roku 2011 došlo k výraznému poklesu ceny indexu o približne 36 % z hodnoty 7800 EUR na 5000 EUR. Je evidentné ako sa v súvislosti s týmto prepadom skokovo zvýšila volatilita daného akciového indexu.

## Klasická dekompozícia

Poznatky z analýzy časových rád ukazujú, že niektoré z týchto rád môžu byť efektívne rozložené na niekoľko špecifických zložiek. Rozklad časových rád sa uskutočňuje preto, že sa predpokladá jednoduchšie rozpoznanie pravidelného správania sa v jednotlivých zložkách časovej rady ako v nerozloženej časovej rade.

Poznáme dva základné druhy dekompozície časových rád, a to Klasickú dekompozíciu a Box-Jenkinsovu metódu. Klasická metóda dekompozície považuje trendovú, sezónnu a cyklickú zložku za deterministické funkcie času a reziduálnu zložku za náhodnú funkciu času.

- **Trend** odráža dlhodobé zmeny v priemernej úrovni časovej rady, teda dlhodobú tendenciu rásť alebo klesať. Môžeme teda povedať že trendová zložka vzniká systematickým pôsobením síl jedným smerom.
- **Sezónna zložka** popisuje periodické zmeny ktoré sa odohrávajú pravidelne, počas jedného kalendárneho roku a každý rok sa opakujú. Sezónne zmeny spôsobuje napr. striedanie ročných období a s tým súvisiace zmeny v ekonomickej aktivite zúčastnených subjektov. Vyskytuje sa pri dlho dobejších časových radách.
- **Cyklická zložka** hovorí o pravidelných fluktuáciách časovej rady okolo jej trendu. Dĺžka a tiež intenzita jednotlivých cyklov má obvykle premenlivý charakter. V určitých prípadoch sa nemusí vôbec vyskytovať a ťažko sa určujú jej príčiny. Môžeme si ju ľahko zameniť zo sezónnou zložkou, niekedy sa preto spoločne označujú ako periodické zložky časovej rady.
- **Reziduálna zložka** je označovaná tiež ako náhodná. Ostane v časovej rade ako posledná po odstránení trendu a sezónnej, cyklickej zložky. Táto zložka je tvorená ná-

hodnými zmenami ktoré sa nedajú systematicky rozpoznať, zahŕňa tiež chyby v meraniach, ktorých sa dopúšťa analytik pri svojej analýze (Cipra, 2013).

### 2.1.1 Typy klasickej dekompozície

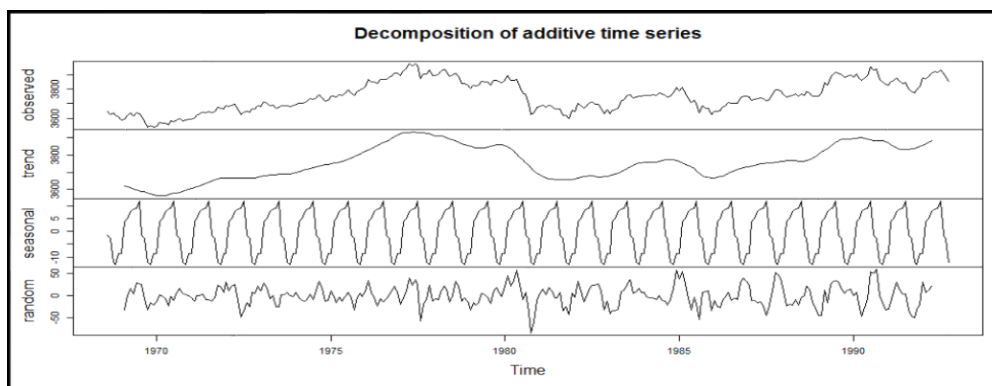
Dekompozícia časových rád môže byť uskutočnená tromi rôznymi spôsobmi, a to: aditívnym, multiplikatívnym, alebo zmiešaným spôsobom. Tieto prístupy špecifikujú akým spôsobom sú jednotlivé zložky časových rád "skĺbené" dohromady.

Použitím **aditívneho** modelu určíme hodnoty časovej rady ako súčet hodnôt jednotlivých zložiek, pričom všetky zložky časovej rady sú uvedené v absolútnej hodnote a v rovnakých jednotkách ako  $Y_t$ .

$$Y_t = T_t + C_t + S_t + E_t , \quad (2.9)$$

Ukážku aditívnej dekompozície časovej rady znázorňuje Obr. 2.2 kde pozorovaná časová rada (observed) je rozdelená na trendovú, sezónnu a náhodnú zložku.

*Obr. 2.2 Aditívna dekompozícia časovej rady*



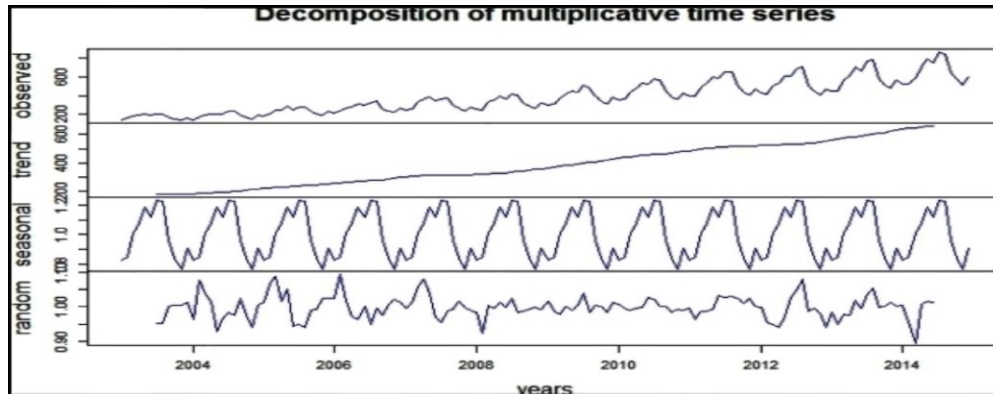
*Zdroj: <https://www.quantinsti.com/blog/starting-time-series>*

Použitím **multiplikatívneho** modelu určíme hodnoty časovej rady ako súčin hodnôt jednotlivých zložiek. Absolútnu hodnotu priradíme trendu, ostatné zložky sú vyjadrené v relatívnych hodnotách, nakoľko ich považujeme za bezrozmerné koeficienty (Cipra, 2013).

$$Y_t = T_t \cdot C_t \cdot S_t \cdot E_t , \quad (2.10)$$

Obr. 2.3 zobrazuje ukážku multiplikatívnej dekompozície časovej rady. Pozorovaná časová rada (observed) je rozdelená na trendovú, sezónnu a náhodnú zložku.

*Obr. 2.3 Multiplikatívna dekompozícia časovej rady*



*Zdroj: <http://ucanalytics.com>*

## **Boxova-Jenkinsova metodológia**

Názov tejto metodológie je odvodený od názvu autorov známej monografie Box a Jenkins (1970). Táto publikácia zhrnula vo svojej dobe všetky vtedajšie poznatky o problematike časových rád a dala im taktiež algoritmickú podobu. Boxova-Jenkinsova metodológia uskutočňuje analýzu časových rád prostredníctvom špeciálnych stochastických modelov (napr. AR, MA, ARMA, atď.). Prednosťou danej metódy je fakt, že je schopná uspokojivo modelovať aj veľmi všeobecné časové rady ktoré sú v rámci dekompozičného prístupu nezvládnuteľné. Zásluha Boxa-Jenkinsonova diela nespočíva priamo v nájdení nového princípu, ale vo vytvorení konkrétneho postupu, ako tieto princípy prakticky využívať.

Pri konštrukcii modelov Boxovo-Jenkinsonovou metodológiou postupujeme pomocou nasledujúcich krokov. Ako prvé identifikujeme model (napr. či ide o proces kľzavých priemerov MA, či autoregresný proces AR, alebo sa jedná o ich kombinácie a modifikácie). Identifikácia prebieha pomocou grafickej analýzy autokorelačného (ACF) a parciálneho autokorelačného (PACF) korelogramu. Nasleduje odhadnutie modelu pomocou príslušných rovníc, pre odhad sa používa špeciálny software. Nakoniec sa overí či je skonštruovaný model správny, či je kompatibilný s analyzovanými dátami a taktiež či spĺňa podmienky stacionarity a korelačnej štruktúry a ďalšie náležitosti (Box, Jenkins, 2016).

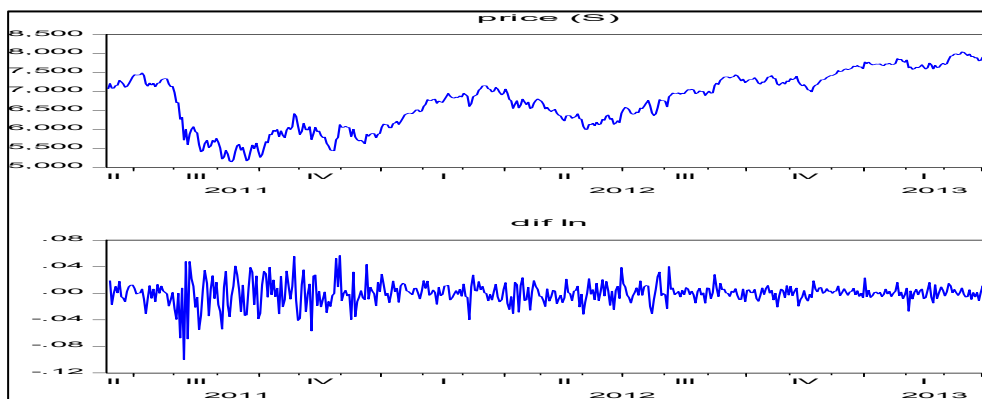
## 2.1.2 Stochastický proces a stacionarita

Podľa (Arlt a kol., 2007, str. 85) „Stochastický proces je v čase usporiadaný rad náhodných veličín  $\{y(s, t), s \in S, t \in T\}$ , kde  $S$  je výberový priestor a  $T$  je indexný rád. Pre každé  $t \in T$  je  $y(\cdot, T)$  náhodná veličina definovaná na výberovom priestore  $S$ . Pre každé  $s \in S$  je  $y(s, \cdot)$  realizácie stochastického procesu definovaná na indexnom rade  $T$ , tj. usporiadaný rad čísel, z ktorých každé zodpovedá jednej hodnote indexného rádu. Časový rad možno teda chápať ako realizáciu stochastického procesu.“

Stochastický proces sa považuje za striktné stacionárny, ak je spojené rozdelenie nemenné pri časovej zmene. Táto podmienka je veľmi náročná na splnenie, preto sa v praxi používa slabá verzia stacionarity. Časovú radu možno považovať za slabo stacionárnu, ak sú stredná hodnota a rozptyl procesu konštantné v čase  $E(r_t) = \mu$ ,  $\sigma_t^2 = \sigma^2$ , a autokovariačná funkcia je závislá len na časovom rozdiely  $t-t$ ,  $Cov(r_t, r_{t-l}) = \gamma$ ,

V nasledujúcej časti práce budeme pracovať so slabou formou stacionarity, keďže je ľahšie uchopiteľná. V odbornej literatúre sa pod pojmom stacionarita myslí všeobecne slabá stacionarita (Tsay, 2002).

Obr. 2.4 Nestacionárna a stacionárna časová rada indexu Euro Stoxx 50



Zdroj: vlastná tvorba

Obr. 2.4 znázorňuje najskôr nestacionárnu časovú radu cien akciového indexu EuroStoxx 50 (S), a stacionárnu časovú radu spojitéch výnosov (difln).

**KPSS test** slúži na overenie toho či je časová rada stacionárna. Tento test ako prvý odvodili Kwiatkowski, Phillips, Schmidt a Shin (1992). Nulová hypotéza testu predstavuje stacionárny proces, alternatívna hypotéza testu zase proces nestacionárny. Existujú dva prístupy ku konštrukcii testového kritéria. V prvej variante je testové kritérium založené na rezi-

duách regresného modelu. V tomto prípade tvorí vysvetľovanú premennú analyzovaná časová rada. Vysvetľujúcimi premennými sú v tomto prípade časová premenná a konštanta. Uvedený test vyjadríme vzťahom

$$Y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_{tt} \quad (2.11)$$

V druhom prípade obsahuje regresný model konštantu, vid'. (Arlt, Arltová, 2003).

### 2.1.3 Autokorelačná funkcia (ACF) a parciálna autokorelačná funkcia (PACF)

Časové rady v čase vykazujú často silnú koreláciu. Na popis uvedeného javu sa v praxi používa autokorelačná (ACF), a parciálna autokorelačná funkcia (PACF). ACF vzniká normovaním autokovariancie príslušnými rozptylmi a značí sa písmenom  $\rho$ . Tvar autokorelačnej funkcie je veľmi dôležitý, pretože identifikuje príslušný operátor MA. Pre stacionárne procesy je to funkcia nezávislá od času.

ACF je daná nasledovným vzťahom:

$$\rho_{(k)} = \frac{E[(y_t - \mu)(y_{t+k} - \mu)]}{E[(y_t - \mu)^2]} = \frac{\gamma(k)}{\gamma}, \quad (2.12)$$

kde  $\mu$  je stredná hodnota danej stacionárnej rady, a  $k$  značí oneskorenie. Autokorelačná funkcia je pre všetky  $k$  symetrická okolo 0. ACF nadobúda hodnoty od  $[-1;1]$ . Tieto hodnoty vyjadrujú príslušné autokorelačné koeficienty. V prípade že sa  $ACF = 0$ , sú náhodné veličiny nekorelované, hovoríme teda o bielom šume.

Parciálna autokorelačná funkcia PACF vyjadruje informáciu o korelácii veličín  $y_t$  a  $y_{t-k}$  pričom je očistená o vplyv veličín nachádzajúcich sa medzi nimi. Môžeme teda povedať že slúži k odstráneniu vplyvu vnútorných pozorovaní. Parciálna autokorelácia s oneskorením  $k$  vyjadruje parciálne regresný koeficient  $\phi$  v autoregresii  $k$ -teho rádu,  $e$  je náhodná zložka.

PACF je daná nasledovným vzťahom

$$Y_t = \phi_{k_1} Y_{t-1} + \phi_{k_2} Y_{t-2} + \dots + \phi_{k_k} Y_{t-k} + e_t, \quad (2.13)$$

PACF nadobúda hodnoty od  $[-1;1]$ . Tieto hodnoty vyjadrujú príslušné autokorelačné koeficienty. V prípade že sa  $PACF = 0$ , sú náhodné veličiny nekorelované, jedná sa teda o biely šum (Tsay, 2002).



Na Obr. 2.5 sú znázornené priebehy funkcie autokorelácie ACF a parciálnej autokorelácie PACF. Hodnoty ACF sú významné po 3 omeškanie, pri PACF sú významné hodnoty 6 a 11 omeškania. Hodnota v prvom omeškaní je daná tvarom danej funkcie, a neberie sa do úvahy.

*Obr. 2.5 Autokorelačná a parciálna autokorelačná funkcia*

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.835	0.835	43.260	0.000
		2	0.618	-0.269	67.205	0.000
		3	0.398	-0.114	77.280	0.000
		4	0.149	-0.261	78.726	0.000
		5	-0.084	-0.140	79.201	0.000
		6	-0.140	0.422	80.526	0.000
		7	-0.165	-0.185	82.413	0.000
		8	-0.194	-0.142	85.074	0.000
		9	-0.186	-0.077	87.569	0.000
		10	-0.157	-0.048	89.390	0.000
		11	-0.119	0.369	90.458	0.000
		12	-0.071	-0.119	90.846	0.000
		13	0.002	-0.021	90.847	0.000
		14	0.053	-0.126	91.070	0.000
		15	0.102	0.068	91.928	0.000
		16	0.072	-0.090	92.365	0.000
		17	0.033	0.030	92.456	0.000
		18	-0.015	0.001	92.476	0.000
		19	-0.032	0.094	92.567	0.000
		20	-0.055	0.007	92.846	0.000
		21	-0.015	-0.005	92.867	0.000
		22	0.007	-0.147	92.871	0.000
		23	0.022	0.090	92.917	0.000
		24	0.000	-0.090	92.917	0.000

*Zdroj: vlastná tvorba*

V podkapitole 2.4 sme zhrnuli základné poznatky a princípy Box-Jenkinsovej metodológie. Na uvedené poznatky nadviažeme v nasledujúcej časti práce, kde sa budeme venovať podrobne popisom jednotlivých modelov.

## Volatilita

Volatilita býva vyjadrená rozptylom  $\sigma^2$  alebo smerodajnou odchylkou  $\sigma$ , a znamená mieru kolísania hodnoty podkladového aktíva, poprípade mieru kolísania výnosov počas daného časového obdobia. Inak povedané, volatilita vyjadruje mieru variability časovej rady. Často sa využíva na stanovenie miery rizikovosti investície. Vtedy platí nasledovný vzťah: čím je očakávaná volatilita vyššia, tým je väčšia neistota ohľadom budúceho vývoja ceny aktíva, s ktorou je spojená aj vyššia pravdepodobnosť dosiahnutia straty. Uvedená zákonitosť platí aj obrátene, teda pri nízkej volatilita máme väčšiu istotu ohľadom budúceho vývoja ceny podkladového aktíva. Finančná teória rozlišuje dva základné druhy volatILITY:

- **historickú**, ktorú je možné získať z historických dát (ex-post volatilita), dá sa efektívne využiť za predpokladu homoskedasticity,

- **implikovanú** ktorá vyjadruje budúcu mieru kolísavosti aktíva ktorá je očakávaná trhom. Najviac sa využíva pri oceňovaní opcií.

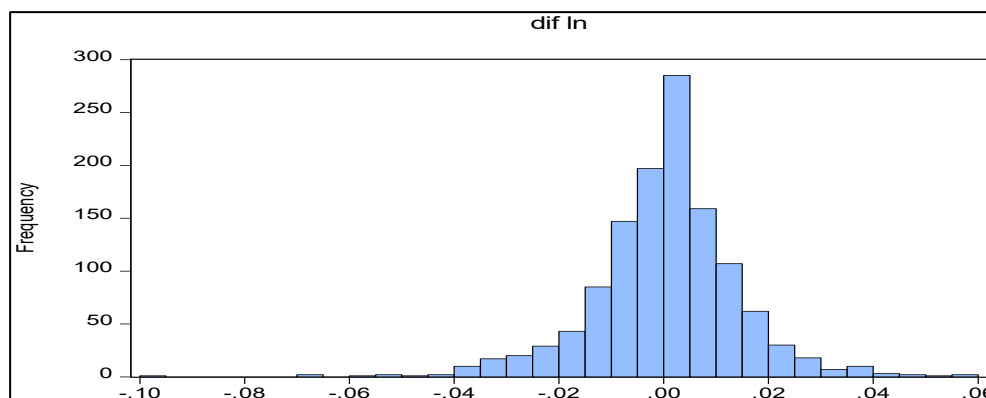
Matematicky možno volatilitu vyjadriť ako  $\Delta r^2$ , kde je  $r$  výnos aktíva v čase  $t$ , čo zaručuje že vysoké kladné alebo záporné výnosy sú vyjadrené vždy kladnou hodnotou. Pre predikciu volatility boli vytvorené viaceré modely ako napríklad EWMA, ARCH a ich modifikácie. Hlavným zmyslom predikcie volatility je jej využitie v ďalších finančných oboroch ako sú :

- **risk management** - metódy Value at Risk alebo Expected Shortfall, tieto modely slúžia na určenie nožnej budúcej straty z portfólia,
- **oceňovanie opcií** - volatilita ovplyvňuje opčnú prémie a tým aj cenu opcie,
- **diverzifikácia portfólia aktív** - zložením portfólia s rôzne volatílnymi aktívami po zohľadnení vzájomnej kovariancie a korelácie je portfólio možné diverzifikovať a znížiť celkové podstupované riziko (Zmeškal, 2013; Babula, 2010).

## Leptokurtické rozdelenie pravdepodobnosti výnosov

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej definujeme pomocou vhodnej charakteristickej alebo distribučnej funkcie. Za základné spojité rozdelenie náhodnej premennej je považované normálne alebo inak povedané Gaussovo rozdelenie pravdepodobnosti, ktoré je symetrické a jeho dodatočná šikmost' je nulová. Pri analýze finančných časových rád sa stretávame poväčšine zo situáciou, kedy rozdelenie pravdepodobnosti nie je normálne, ale má tzv. ťažké konce a vyššiu mieru špicatosti. Je to prípad leptokurtického rozdelenia popísaného v kapitole (2.2) (Tichý, 2010).

**Obr. 2.6 Leptokurtické rozdelenie pravdepodobnosti výnosov**



*Zdroj: Vlastná tvorba*

Obr. 2.6 znázorňuje typické leptokurtické rozdelenie výnosov, ktoré je charakteristické vysokou mierou špicatosti, a relatívne častým výskytom extrémnych hodnôt. Existuje niekoľko metód ako túto charakteristickú črtu zohľadniť, napríklad môžeme použiť kombinácie dvoch normálnych rozdelení, Generalized Error Distribution (GED), Studentova t rozdelenia, prípadne iných.

### 2.1.4 Kombinácia dvoch normálnych rozdelení

Metóda kombinácie dvoch normálnych rozdelení pravdepodobnosti, bola vyvinutá ako efektívnejší prostriedok zachytenia leptokurtického rozdelenia pravdepodobnosti výnosov. Prostredníctvom tejto metódy sú výnosy generované zo zmesi dvoch odlišných normálnych rozdelení, pričom sa predpokladá, že každý denný výnos pochádza z jedného z týchto normálnych rozdelení. Výnosy môžeme vyjadriť vzťahom

$$r_t = \sigma_{1,t} \cdot \varepsilon_{1,t} + \sigma_{1,t} \cdot \delta_t \cdot \varepsilon_{2,t}, \quad (2.14)$$

kde  $r_t$  je logaritmický výnos,

$\varepsilon_{1,t}$  je náhodná veličina z normálneho rozdelenia  $N(0,1)$ ,

$\varepsilon_{2,t}$  je náhodná veličina z normálneho rozdelenia  $N(\mu_{2,t}, \sigma_{2,t}^2)$ ,

$\delta_t$  je binárna premená ktorá s pravdepodobnosťou  $p$  nadobúda hodnotu 1, a s pravdepodobnosťou  $1-p$  nadobúda hodnotu 0,

$\sigma_{1,t}$  je smerodajná odchylka.

Kombinácia normálnych rozdelení predpokladá, že výnosy  $\tilde{r}_t$  normované odhadom volatility sú generované vzťahom

$$\tilde{r}_t = \varepsilon_{1,t} + \delta_t \cdot \varepsilon_{2,t}, \quad (2.15)$$

z uvedeného vzťahu vyplýva, že každý normovaný výnos je generovaný z jedného rozdelenia pravdepodobnosti.

- Ak  $\delta_t = 0$ , tak je výnos generovaný z normovaného normálneho rozdelenia  $N(0,1)$ .
- Ak  $\delta_t = 1$ , tak je výnos generovaný z normálneho rozdelenia so strednou hodnotou  $\mu_t$ , a rozptylom  $1+\sigma^2$ .

Premenná  $\delta$  teda určuje ktorá konkrétna situácia nastane, či bude výnos z normálneho rozdelenia alebo nie. Parameter  $p$  vyjadruje pravdepodobnosť, že takýto výnos nastane. Je dôležité si uvedomiť, že hoci je tento model zložený z dvoch normálnych rozdelení, samotné zmiešané rozdelenie už normálne nie je (Risk Metrics, 1996).

### 2.1.5 GED rozdelenie

Ďalšou možnosťou ako zachytiť leptokurtické rozdelenie pravdepodobnosti je tzv. GED (generalized error distribution). Toto rozdelenie je veľmi flexibilné. Môže nadobúdať rôzne tvary vrátane normálneho rozdelenia. Podľa GED rozdelenia sú výnosy generované vzťahom

$$r_t = \sigma_t \xi_t, \quad (2.16)$$

kde  $r_t$  predstavuje logaritmickej výnos, a  $\xi_t$  je nahodná premenná pochádzajúca z GED rozdelenia s parametrom  $\nu$ . Týmto parametrom ovplyvňujeme a kontrolujeme tvar daného rozdelenia. Rozptyl výnosov podľa GED vyjadríme vzťahom

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2, \quad (2.17)$$

funkcia hustoty GED rozdelenia je vyjadrená vzťahom

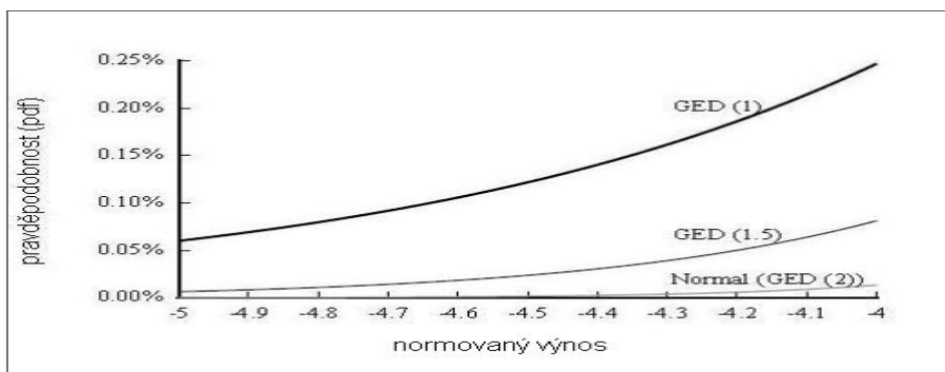
$$f(\xi_t) = \frac{\nu \exp\left(-\frac{1}{2} \left|\frac{\xi_t}{\lambda}\right|^\nu\right)}{\lambda 2^{\frac{\nu+1}{\nu}} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}, \quad (2.18)$$

kde  $\Gamma$  je gama funkcia

$$\lambda = \sqrt{\frac{2^{-\frac{2}{\nu}} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)}}, \quad (2.19)$$

v prípade ak je  $\nu = 2$ , potom sa jedná o normálne rozdelenie. Ak je hodnota  $\nu > 2$ , sú konce tenšie ako u normálneho rozdelenia, ak je naopak  $\nu < 2$ , sú konce hrubšie. Obr. 2.7 zachytáva ľavý koniec rozdelenia pre rôzne  $\nu$  (Risk Metrics, 1996).

Obr. 2.7 Pravý koniec GED rozdelenia.



Zdroj: RiskMetric – Technical Document (1996)

### 2.1.6 Študentovo t rozdelenie

Študentovo rozdelenie má v matematickej štatistike veľmi významné postavenie a využitie. Najčastejšie sa používa pri určovaní intervalových odhadov a pri testovaní štatistických hypotéz. Pri tomto testovaní sa využívajú kritické hodnoty t-rozdelenia, na základe ktorých vieme testovanú štatistickú hypotézu prijať alebo zamietnuť.

Náhodná premenná vykazuje znaky Študentova  $t$  rozdelenia s  $\nu$  stupňom voľnosti, ak  $Y$  a  $Z$  sú nezávislé premenné, že  $Y \sim N[0,1]$  a  $Z \sim \chi^2[n]$ . Teda z normálneho Gaussovho rozdelenia pomocou nezávislých veličín  $Y, Y_1, \dots, Y_n$  a daného stupňa voľnosti  $\nu$  vyjadríme Študentovo rozdelenie vzťahom

$$X = \frac{Y}{\sqrt{\frac{Z}{\nu}}} = \frac{\sqrt{\nu}Y}{\sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_\nu^2}}. \quad (2.20)$$

funkciu hustoty rozdelenia potom vyjadríme vzt'ahom

$$f_t(x; \nu) = \frac{\Gamma\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{\nu}{2}\right]\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}. \quad (2.21)$$

danú funkciu hustoty môžeme zjednodušiť pre konkrétny stupeň voľnosti  $\nu$ . Ak je  $\nu = 1$  získame tzv. Cauchyho rozdelenie hustoty vyjadrené vzt'ahom

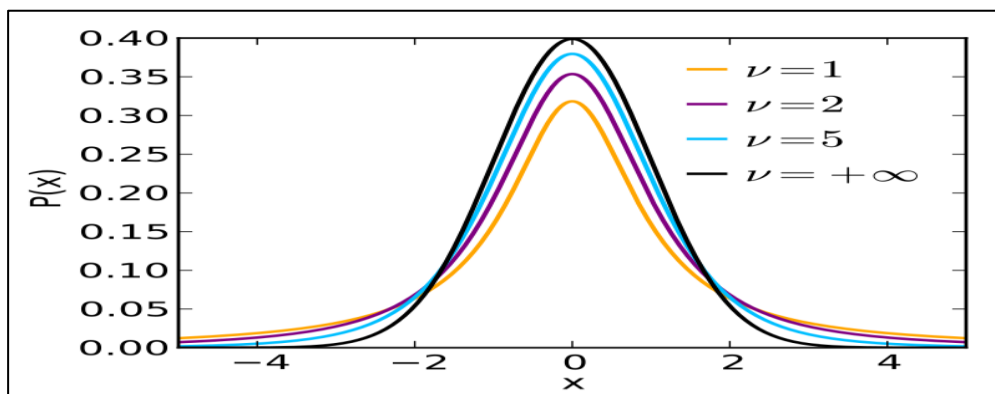
$$f_t(x; \nu = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(x). \quad (2.22)$$

Všeobecnejším prípadom je nasledujúca funkcia hustoty vyjadrená vzt'ahom

$$f_t(x; \nu, \varepsilon, \mu) = \frac{\Gamma\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}{\varepsilon\Gamma\left[\frac{\nu}{2}\right]\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{(x-\mu)^2}{\varepsilon^2\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad (2.23)$$

ktorá je považovaná za špeciálny prípad všeobecného symetrického hyperbolického rozdelenia (Tichý, 2010).

**Obr. 2.8** Studentovo rozdelenie pravdepodobnosti pre rôzne stupne voľnosti  $\nu$



Zdroj: [https://en.wikipedia.org/wiki/Student%27s\\_t-distribution#/media/File:Student\\_t\\_pdf.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Student%27s_t-distribution#/media/File:Student_t_pdf.svg)

Obr. 2.8 znázorňuje viacero variant Studentova t rozdelenia podľa rôznych stupňov voľnosti.

## Charakteristika časových rád cien akciových indexov

Pre potreby našej práce boli vybraté časové rady cien akciových indexov. Jedná sa o najvýznamnejší americký akciový index S&P 500, ktorý sa skladá z päťsto najväčších spoločností obchodujúcich sa na americkom trhu. Druhou analyzovanou časovou radou je akciový index DAX 30, ktorý v sebe zahŕňa tridsať najväčších spoločností obchodujúcich na nemeckom trhu. Treťou analyzovanou časovou radou je akciový index Euro Stoxx 50, ktorý v zahŕňa 50 najväčších európskych spoločností. Vývoj uvedených akciových indexov je dôležitým indikátorom stavu príslušných ekonomík, ktoré sledujú finanční analytici po celom svete.

Časové rady cien jednotlivých indexov zachytávajú obdobie od 15. júna 2011 do 28. novembra 2018. Z hľadiska periodicity sa jedná o časové rady s denným intervalom pozorovania. Časové rady akciových indexov DAX 30 a EUROSTOCK 50 sú uvedené v eurách (EUR). Časová rada amerického akciového indexu S&P 500 je uvedená v dolároch (USD).

### 2.1.7 Základné popisné štatistiky

V nasledujúcej časti sú pre jednotlivé časové rady cien akciových indexov vypočítané a interpretované základné popisné štatistiky, ktoré boli popísané v kapitole 2.2.

Obr. 2.9 Základné popisné štatistiky denných cien akciových indexov

Sample: 6/15/2011 11/28/2018			
	DAX	EURSTOXX	S_P
Mean	9776.572	3041.981	1982.546
Median	9851.350	3089.285	2014.160
Maximum	13559.60	3828.780	2930.750
Minimum	5072.330	1995.010	1099.230
Std. Dev.	2175.159	426.8527	469.6035
Skewness	-0.234597	-0.465113	0.096226
Kurtosis	1.984936	2.251102	2.122270
Jarque-Bera Probability	98.58085	112.4295	63.65386
	0.000000	0.000000	0.000000
Sum	18497274	5755428.	3750978.
Sum Sq. Dev.	8.95E+09	3.45E+08	4.17E+08
Observations	1892	1892	1892

Zdroj : vlastné spracovanie

Obr. 2.9 je zhrnutím základných údajov o jednotlivých časových radách. Obsahuje údaje o počte pozorovaní, maximálnych a minimálnych hodnotách, strednej hodnote, smerodatnej odchýlke, šikmosti, špicatosti a JB štatistike.

Každá časová rada sa skladá z 1892 pozorovaní, s frekvenciou jeden deň. Grafické zobrazenie jednotlivých časových radov akciových indexov znázorňujú Obr. 2.10 – 2.13.

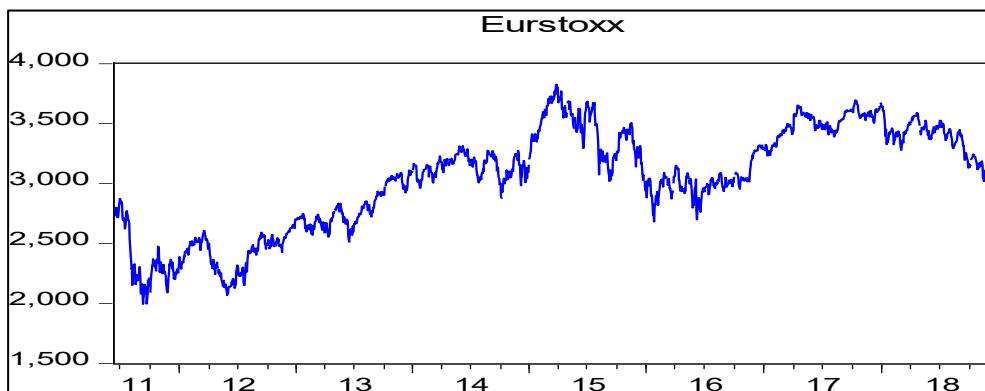
**Obr. 2.10** Denný vývoj ceny nemeckého akciového indexu DAX 30



*Zdroj : vlastné spracovanie*

Obr. 2.10 znázorňuje vývoj nemeckého akciového indexu DAX 30 od 15. júna 2011 do 28. novembra 2018. Počas celého sledovaného obdobia je prítomný rastový trend. Na začiatku sledovaného obdobia mal akciový index hodnotu okolo 7 115 EUR, táto hodnota sa postupom času zvyšovala pričom vrchol 13 559 EUR za jednotku dosiahol v januári roku 2018. Odvtedy je prítomný mierne klesajúci trend. Na konci sledovaného obdobia sa nemecký akciový index DAX 30 obchodoval za 11 300 EUR za jednotku.

**Obr. 2.11** Denný vývoj ceny európskeho akciového indexu Euro Stoxx 50



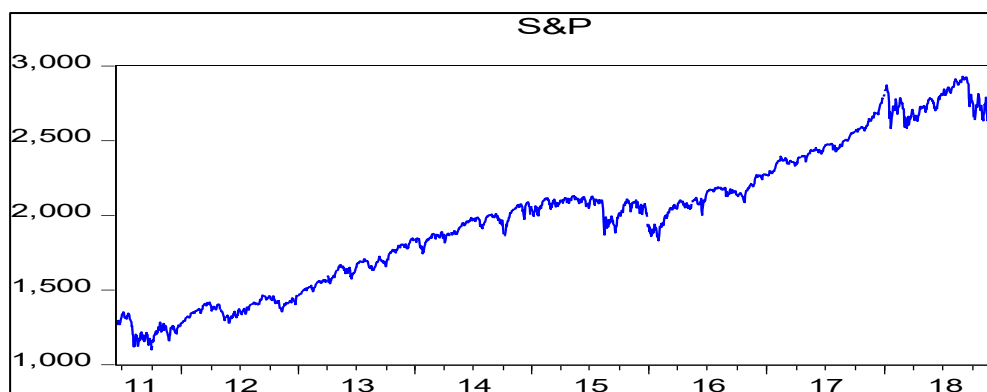
*Zdroj : vlastné spracovanie*

Obr. 2.11 znázorňuje vývoj európskeho akciového indexu Euro Stoxx 50, za sledované obdobie od 15. júna 2011 do 28. novembra 2018. Počas celého sledovaného obdobia je prítomný mierne rastúci trend. Na začiatku sledovaného obdobia mal akciový index hodnotu okolo 2 731 EUR za jednotku. Vrchol 3 828 eur za jednotku dosiahol akciový index Euro



Stoxx 50 na konci mája roku 2015, odvtedy je prítomný postranný pohyb. Celkovo má hodnota akciového indexu tendenciu oscilovať okolo priemeru 3 041 EUR. Na konci sledovaného obdobia sa európsky akciový index Euro Stoxx 50 obchodoval za 2 940 EUR za jednotku.

*Obr. 2.12 Denný vývoj amerického akciového indexu S&P 500*



*Zdroj : vlastné spracovanie*

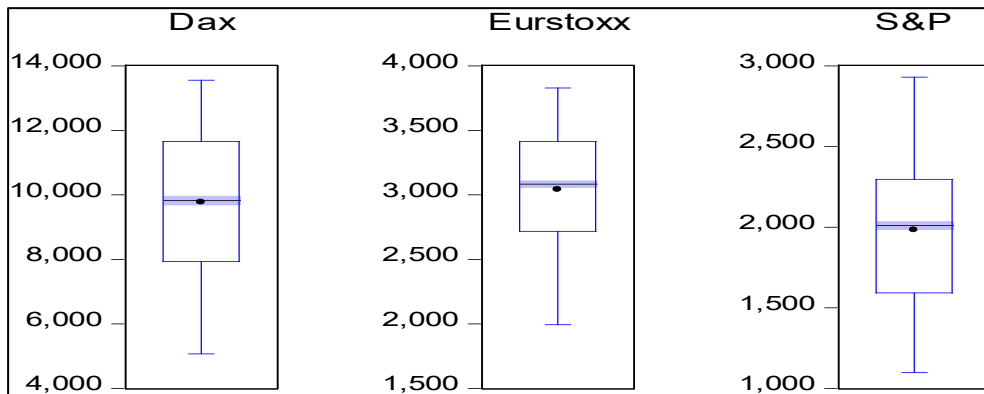
Obr. 2.12 je grafickým znázornením vývoja hlavného amerického akciového indexu S&P 500 za sledované obdobie od 15. júna 2011 do 28. novembra 2018. Počas celého sledovaného obdobia je prítomný rastúci trend. Na začiatku sledovaného obdobia mal americký akciový index S&P 500 hodnotu okolo 1 265 USD za jednotku, pričom táto hodnota postupom času narastala. Vrchol 2930 USD za jednotku dosiahol daný index na konci augusta roku 2018. Odvtedy je na trhu prítomná korekcia. Na konci sledovaného obdobia sa americký akciový index S&P 500 obchodoval za 2 416 USD za jednotku.

### **2.1.8 Analýza odľahlých a extrémnych hodnôt**

Pri jednotlivých časových radách cien je uskutočnená analýza odľahlých a extrémnych hodnôt. Zatiaľ čo odľahlé hodnoty nepredstavujú zásadný problém, iné je to pri extrémnych hodnotách. Za extrémne hodnoty sa považujú hodnoty presahujúce 1,5 násobok medzi kvartilového rozpätia od dolného a horného kvartilu. Túto analýzu je dôležité uskutočniť, pretože tieto veličiny môžu skresľovať odhadnuté koeficienty a štatistické testy.

Výsledky analýzy odľahlých a extrémnych hodnôt sú zhrnuté v Obr. 2.13., z ktorého je zrejmé, že v jednotlivých časových radách nie sú zaznamenané odľahlé ani extrémne hodnoty.

**Obr. 2.13** Box plot cien akciových indexov



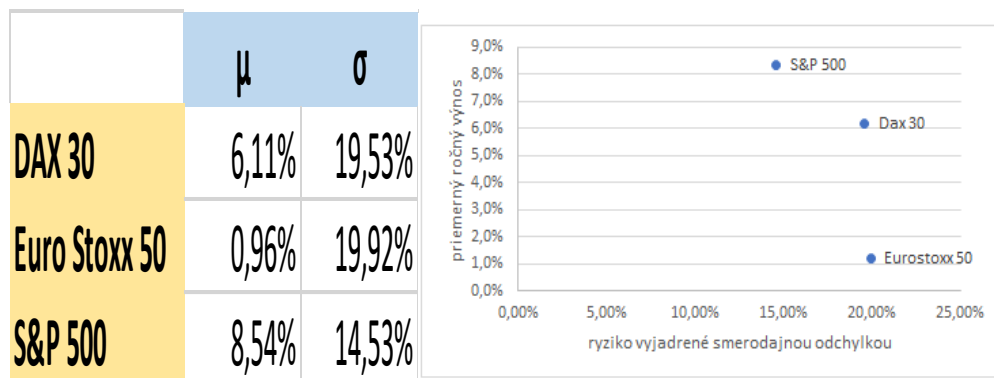
*Zdroj : vlastné spracovanie*

## Charakteristika časových rád výnosov

Transformácia časových rád cien na výnosy je vo finančnom modelovaní veľmi dôležitá. Výnosy vypočítame z historických cien podkladového aktíva, v našom prípade z historických cien konkrétnych akciových indexov. V ekonomickej teórii pracujeme s dvoma druhmi výnosov – diskretným a spojitým. Diskretný výnos vyjadruje percentuálnu zmenu ceny podkladového aktíva za určitý časový okamih. Oproti tomu spojitý výnos je vyjadrený logaritmom podielu cien (podľa vzťahu 2.1). Pre účely práce použijeme spojité výnosy (Kresta, 2016).

Využitie vypočítaných výnosov pomerených k príslušnému riziku slúži na zhodnotenie potencionalnej investície do príslušného aktíva. Podľa výnosnosti sa investície do vybraných akciových indexov javia ako vôbec najvýhodnejšie. Pri takomto druhu uvažovania sa upriamuje pozornosť hlavne na volatilitu a strednú hodnotu výnosov.

Obr. 2.14 Stredné hodnoty výnosov a riziká vyjadrené smerodajnou odchýlkou



Zdroj: vlastné spracovanie

Obr. 2.14 znázorňuje vzťah medzi spojitým výnosom a rizikom analyzovaných akciových indexov. Najvyšší priemerný výnos za sledované obdobie 8,54 % p.a., dosahuje americký akciový index S&P 500. Druhým v poradí je nemecký akciový index DAX 30 s priemernou výnosnosťou 6,11 % p.a. Akciový index EuroStoxx 50 dosahuje priemerný výnos 0,96 % p.a., čo je veľmi slabý výsledok, ktorý by investorovi nepokryl ani mieru inflácie. Paradoxná situácia nastáva keď zoberieme k uvedeným výnosom do úvahy riziko, ktoré je vyjadrené smerodatnou odchýlkou. Podľa ekonomických teórií by mal platiť priamo úmerný vzťah medzi obdržaným výnosom a podstupovaným rizikom. Pri pohľade na vzniknutú situáciu je však realita úplne opačná, teda aktívum s najvyšším priemerným výnosom dosahuje najnižšiu mieru variability. U európskych aktív je variabilita takmer totožná, čo sa však nedá povedať o príslušných výnosoch. Z uvedených zistení vyplýva, že investíciám do akciového indexu Euro Stoxx 50 by sa mal potencionálny investor radšej vyhnúť.

### 2.1.9 Základné popisné štatistiky denných výnosov

Následne interpretujeme základné popisné štatistiky získaných výnosov jednotlivých akciových indexov. Výsledné štatistiky zobrazuje nasledovný obrázok ktorý je zhrnutím základných údajov o jednotlivých časových radách. Obsahuje údaje o počte pozorovaní, maximálnych a minimálnych hodnotách, strednej hodnote, smerodajnej odchýlke a ďalších.

Obr. 2.15 Základné popisné štatistiky denných výnosov akciových indexov

	LOGDIFFDAX	LOGDIFFE...	LOGDIFFS_P
Mean	0.000248	4.87E-05	0.000334
Median	0.000734	0.000314	0.000448
Maximum	0.052104	0.058978	0.046317
Minimum	-0.070673	-0.090110	-0.068958
Std. Dev.	0.012362	0.012610	0.009198
Skewness	-0.335496	-0.342874	-0.606744
Kurtosis	5.829301	6.647044	8.105224
Jarque-Bera Probability	665.4927 0.000000	1083.907 0.000000	2167.302 0.000000
Sum	0.468922	0.092035	0.631807
Sum Sq. Dev.	0.288506	0.300202	0.159724
Observations	1889	1889	1889

Zdroj : vlastné spracovanie

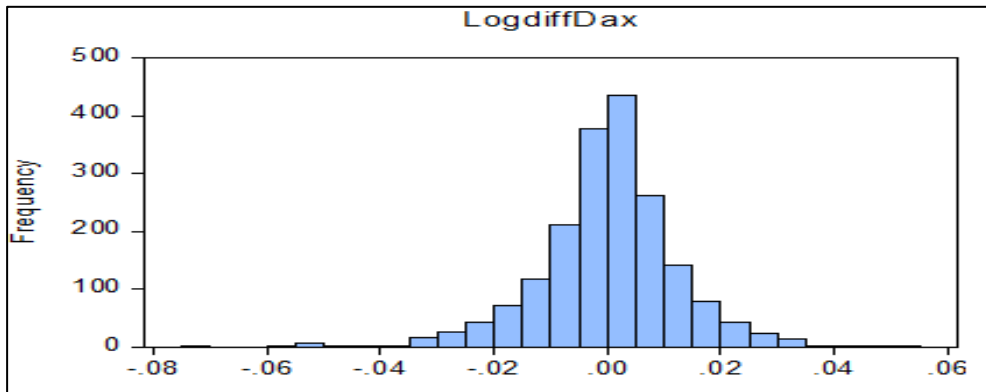
Z Obr. 2.15 vyplýva, že maximálne hodnoty spojitých denných poklesov vybraných akciových indexov sa pohybujú v intervale od 6,9 % do 9 %. Pričom najvyšší denný pokles 9 % za sledované obdobie bol zaznamenaný na inštrumente EuroStoxx 50. Najvyšší denný prírastok 5,9 % sme opäť namerali na akciovom indexe Euro Stoxx 50. Najnižšiu priemernú hodnotu denných výnosov vykazuje opäť časová rada indexu Euro Stoxx 50. Najvyšší priemerný denný výnos sme namerali u časovej rady indexu S&P 500. Všetky priemerné hodnoty výnosov z jednotlivých časových rád vyšli v kladných hodnotách. Priemerná denná odchýlka od strednej hodnoty sa pohybuje pri jednotlivých časových radoch spojitých výnosov od 0,9 % po 1,2 %. Hodnoty šikmosti vyšli u všetkých analyzovaných indexov záporné, čo vyjadruje zošikmenie smerom na pravú stranu. Je to logické, pretože ceny akciových indexov majú všeobecne v čase tendenciu rásť. Hodnoty špicatosti od 5,8 do 8,1 vyjadrujú tzv. vysokú špicatku, teda vysokú koncentráciu hodnôt okolo nuly. Pre porovnanie hodnota špicatosti u normálneho rozdelenia je 3.

### 2.1.10 Rozdelenie pravdepodobnosti výnosov

Testovanie rozdelenia pravdepodobnosti je možné uskutočniť viacerými spôsobmi. Pre účely tejto práce použijeme Jarque-Berov štatistický test, ktorý je bližšie špecifikovaný v podkapitole 2.2. Všetky vybrané časové rady spojitých výnosov sme podrobili testom so stanovenou hladinou významnosti 5 %. Prehľad výsledkov testov normality pre spojité výnosy znázorňuje Obr. 2.15 Hodnoty J-B testovacej štatistiky sú postupne 665, pre denné výnosy indexu DAX 30, 1083 pre denné výnosy indexu Euro Stoxx 50, a 2167 pre denné výnosy indexu S&P. Z výsledkov testov je zrejmé, že predpoklady normálneho rozdelenia sú jednoznačne zamietnuté u všetkých testovaných výnosov. Taktiež p-hodnota je pri všetkých spome-

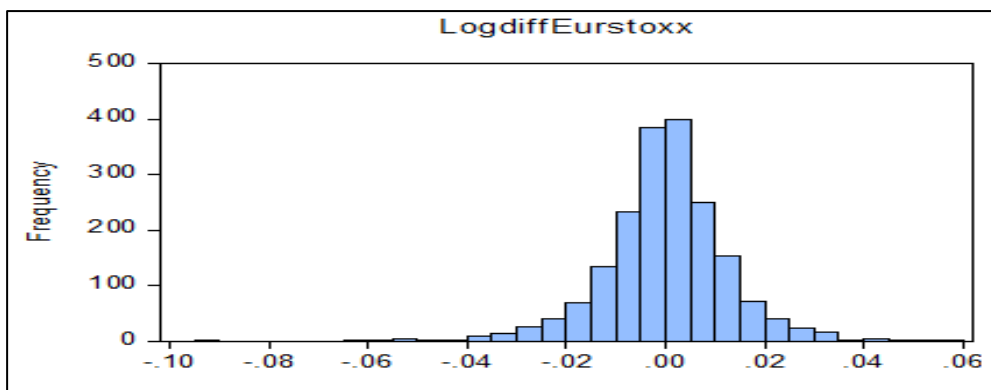
nutých výnosoch 0,000000 čo indikuje nenormálne rozdelenie aj na prísnejšej hladine významnosti.

**Obr. 2.16** Histogram denných výnosov akciového indexu DAX 30



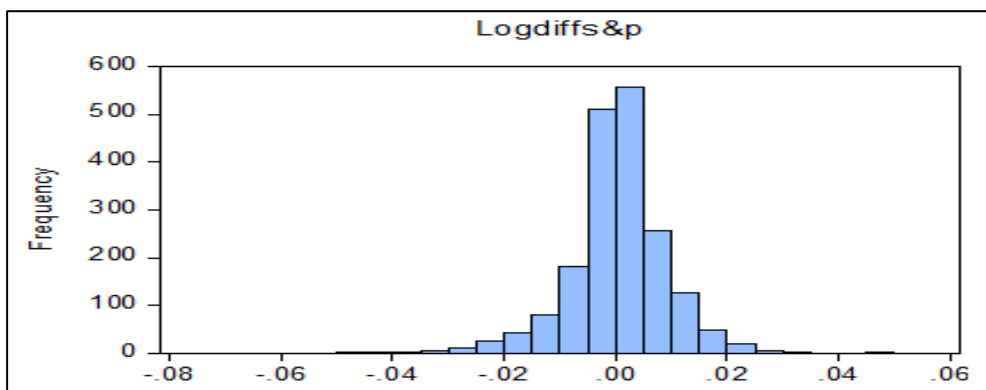
*Zdroj : vlastné spracovanie*

**Obr. 2.17** Histogram denných výnosov akciového indexu Euro Stoxx 50



*Zdroj : vlastné spracovanie*

**Obr. 2.18** Histogram denných výnosov akciového indexu S&P 500



*Zdroj : vlastné spracovanie*

Obr. 2.16 – 2.18 znázorňujú histogramy denných spojitých výnosov analyzovaných akciových indexov. Grafická analýza nadväzuje na popisné štatistiky popísané na začiatku kapitoly. Pri bližšom pohľade je zrejmé, že všetky analyzované časové rady denných výnosov vykazujú znaky tzv. leptokurtického rozdelenia pravdepodobnosti, teda vysokú šikmosť a prítomnosť extrémnych hodnôt.

### 3 Popis metod odhadů predikčních modelů

Před začatím samotného procesu modelování časových řád je důležité rozpoznat proces, který časová řada sleduje. V následující kapitole se budeme venovat popisu predikčních modelů, které použijeme dále v praktické části. Následně se zaměříme na nejčastěji používané metody pro odhad parametrů a také spomenieme vybrané statistické testy. Na závěr uvedieme spôsob simulácie pomocou Monte Carlo metódy.

#### Metódy odhadu parametrov

Okrem klasicky používanej metódy najmenších štvorcov sa na odhad parametrov využívajú ďalšie odhadové postupy, ako sú napríklad metóda momenta alebo metóda maximálnej vierohodnosti. Pre doplnenie uvedieme, že sa bude jednať o parametrické metódy odhadov.

##### 3.1.1 Odhad metódou najmenších štvorcov (MNČ)

Patrí medzi najčastejšie používané metódy odhadu jednotlivých parametrov finančných modelov. MNČ zaviedol nemecký matematik Carl Friedrich Gauss. Princíp MNČ je založený na minimalizácii súčtov štvorcov odchýlok vzhľadom na použitý parameter  $\beta$ . Nech máme klasický lineárny stochastický regresný model vyjadrený vzťahom

$$Y_t = \beta_0 + \hat{\beta}_1 X_{1+t} + \varepsilon_t = \hat{Y}_t + \varepsilon_t, \quad (3.1)$$

kde  $Y_t$  je vysvetľovaná premenná,  $\beta_0, \beta_1$  vyjadrujú jednotlivé regresné parametre odhadnuté MNČ.  $\hat{Y}_t$  vyjadruje závislosť vysvetľovanú modelom, kde  $X$  je vysvetľujúca premenná, a  $\varepsilon_t$  je reziduálna zložka, ktorá pre odhadnuté parametre  $\beta$  minimalizuje súčet štvorcov. Ďalej vyjadríme reziduálnu zložku ako odchýlku hodnoty  $\hat{Y}_t$  od pozorovanej hodnoty  $Y_t$  vzťahom

$$\varepsilon_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_t = f(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2), \quad (3.2)$$

každá reziduálna odchýlka je funkciou dvoch regresných parametrov, úrovňovej konštanty a sklonu regresnej priamky. Reziduálne odchýlky  $\varepsilon_t$  môžu nadobúdať kladné aj záporné hodnoty, preto ich nie je vhodné sčítať. Z uvedeného dôvodu uskutočníme súčet štvorcov rezidu-

álnych zložiek, pričom chceme dosiahnuť, aby bol tento súčet čo najmenší. Uvedené kritériu vyjadríme vzťahom

$$\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2 = f(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \rightarrow \min. \quad (3.3)$$

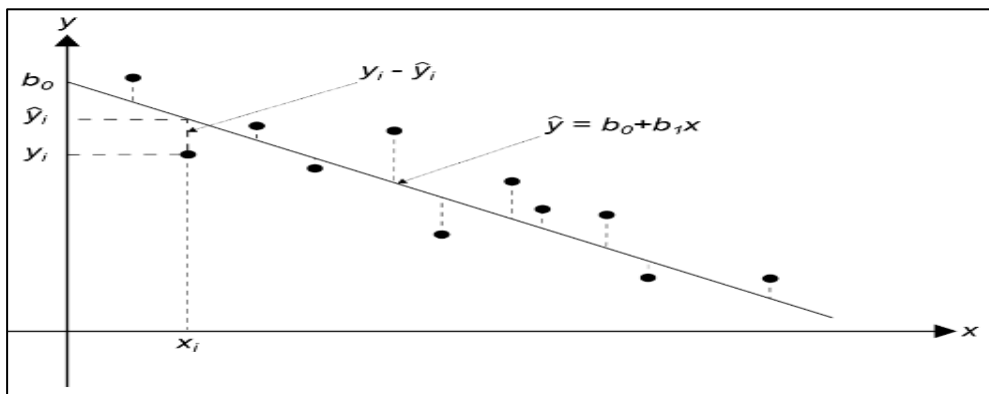
Ide teda o hľadanie extrému funkcie dvoch neznámych  $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ . Jednou z podmienok nájdenia minima funkcie  $f$  je, že obe parciálne derivácie podľa regresných parametrov položíme rovno nule. Vyriešením rovníc získame sústavu normálnych rovníc

$$\sum Y_t = T\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum X_t, \quad (3.4)$$

$$\sum Y_t X_t = \hat{\beta}_1 \sum X_t + \hat{\beta}_2 \sum X_t^2, \quad (3.5)$$

ktorých vyriešením dostaneme odhady oboch regresných parametrov (Hančlová, 2012).

**Obr. 3.1 Metóda najmenších štvorcov MNČ**



Zdroj: [www.rmanual.fri.uniza.sk](http://www.rmanual.fri.uniza.sk)

Aby bolo možné použiť MNČ, musí model spĺňať určité predpoklady

- $E(\varepsilon_t) = 0$ , tj. stredná hodnota reziduálnej zložky je nulová pre všetky  $t$
- $\text{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 < \infty$ , tj. rozptyl reziduálnej zložky je konštantný a konečný pre všetky  $t$ ;
- $\text{cov}(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = 0$  pre  $s \neq t$  tj. reziduálne zložky nie sú navzájom korelované pre všetky  $s \neq t$ ;
- $\text{cov}(x_{ti}, \varepsilon_t) = 0$ , t.j. regresory sú v rovnakom čase alebo pre rovnakú prierezovú jednotku nekorelované s reziduálnou zložkou pre všetky  $i$  a  $t$ ;



- $h(\mathbf{X}) = k$ , tj. nenáhodná matica  $\mathbf{X}$  má lineárne nezávislé stĺpce.

V prípade že nie sú tieto predpoklady splnené, vyžaduje sa použitie inej metódy odhadu (Cipra, 2013).

### 3.1.2 Metóda maximálne vierohodnostného odhadu (ML)

Metóda maximálne vierohodnostného odhadu (ML) vychádza zo známeho rozdelenia jednotlivých pokusov  $f(\vec{\theta}; y_t, x_t)$ , kde  $\vec{\theta}$  predstavuje hľadané parametre regresnej funkcie a  $y_t, x_t$  sú pozorovania závislej a nezávislej premennej. Vhodnú regresnú funkciu hľadáme maximalizovaním hodnoty funkcie združeného rozdelenia pravdepodobnosti jednotlivých pokusov. Vyjadríme vzťahom

$$L(\vec{\theta}) = \prod_t f(\vec{\theta}; y_t, x_t) \rightarrow \max. \quad (3.6)$$

z numerických dôvodov sa maximálna hodnota hľadá z pravidla po logaritmickej transformácii.

$$\ln L(\vec{\theta}) = \sum_t \ln f(\vec{\theta}; y_t, x_t) \rightarrow \max. \quad (3.7)$$

K výsledku sa môžeme dopočítať buď analyticky, alebo prostredníctvom úlohy matematického programovania. Ďalej predpokladajme, že hľadáme parametre lineárnej regresnej funkcie  $y_t = \alpha + b \cdot x_t$ , teda  $\vec{\theta} = [\alpha; b]$  a že pokusy majú normálne rozdelenie, potom

$$L(a; b) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot (y_t - \alpha - b \cdot x_t)^2 \right], \quad (3.8)$$

$$\ln L(a; b) = \sum_t \ln \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot \left( -\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \right) \cdot \sum_t (y_t - \alpha - b \cdot x_t)^2. \quad (3.9)$$

Aby bola hodnota  $\ln L(a; b)$  maximalizovaná, tak výraz  $\sum_t (y_t - \alpha - b \cdot x_t)^2$  musí byť minimalizovaný. V tomto konkrétnom prípade odpovedá metóda maximálnej vierohodnosti metóde najmenších štvorcov (Zmeškal a kol, 2013).

### 3.1.3 Metóda Momentového odhadu (MM)

Metóda momentového odhadu zahrňuje predošle uvedené metódy odhadu, ktoré je možné považovať za špeciálne prípady momentových odhadov. Na rozdiel od nich MM nevyžadujú platnosť silných predpokladov. MM je založená na teoretickom vyjadrení momentov určitých veličín, ktoré vyplývajú z odhadovaného modelu, a z jeho závislých parametrov. Toto teoretické vyjadrenie má poväčšine  $t$  tvar sústavy  $m$  rovníc, s obecným vyjadrením

$$E(m_t(\theta)) = 0, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (3.10)$$

pre odhadovaný  $p$ -rozmerný parameter  $\theta$ ,  $m_i: R^p \rightarrow R^m (m \geq p)$ . Zjednodušene povedané MM, spočíva v tom, že sa porovnáva  $k$  všeobecných momentov s hodnotami ich výberových náprotivkov. Tým získame  $k$  rovníc premenných, ktorých riešenie možno považovať za bodové odhady parametrov (Cipra, 2013).

## Lineárne stochastické modely

V nasledujúcej podkapitole nadviažeme na kapitolu (2.4) kde bola opísaná základná metodika Box-Jenkinsovej analýzy časových rád. Zameriame sa na vysvetlenie stochastickej koncepcie tvorby lineárnych modelov, pričom budeme vychádzať z vyššie uvedenej metodológie. Uvedené postupy je možné využiť aj pre modelovanie nestacionárnych, alebo sezónnych časových rád.

### 3.1.4 Modely AR(p)

Autoregresný proces AR( $p$ ) radu  $p$  označuje taký proces, kedy je hodnota časovej rady v čase  $t$  tvorená lineárnou kombináciou minulých hodnôt tejto rady.

$$y_k = \phi_1 y_{k-1} + \phi_2 y_{k-2} + \dots + \phi_p y_{k-p} + a_t, \quad (3.11)$$

Začneme vyjadrením autoregresného procesu radu jedna AR (1), ktorý môžeme zapísať podľa vzťahu

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + a_t, \quad (3.12)$$

kde  $a_t$  je proces biele šumu. Ďalej zavedieme operátor posunutia  $B$ . Tento operátor predstavuje oneskorenie o jedno obdobie ( $BY_t=Y_{t-1}$ ). S pomocou operátora vyjadríme model (AR1) nasledovne:

$$(1 - \phi B)x_t = a_t, \quad (3.13)$$

Pre autokorelačnú funkciu platí vzťah

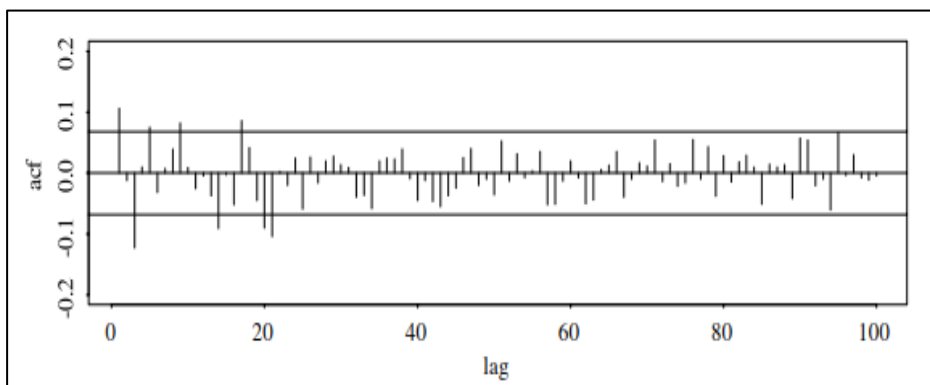
$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} = \phi_1^2 \rho_{k-2} = \dots = \phi_1^k, \quad k > 1 \quad (3.14)$$

Parciálnu autokoreláciu vyjadríme vzťahom

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho_1 = \phi, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases} \quad (3.15)$$

parameter  $\phi$  je indikátor pameti procesu. Môže nadobúdať hodnoty od  $[0, 1]$ , pričom čím je táto hodnota bližšia k 1, tým dlhšia je pamäť procesu a naopak, čím je jeho hodnota bližšia k 0, tým je pamäť procesu kratšia. V prípade že parameter nadobudne hodnotu 0, jedná sa o proces bieleho šumu. Uvedený proces môžeme ďalej rozširovať pridaním ďalších indikátorov pamäti  $\phi_{1,2,3\dots}$  oneskorením o  $k$  období (Tsay, 2002).

**Obr. 3.2 Tvar ACF pre Biely šum**



**Zdroj:** Tsay (2002 str. 27)

Obr. 3.2 znázorňuje tvar autokorelačnej funkcie ACF kedy sú všetky parametre procesu AR rovné nule. V takomto prípade sa jedná o tzv. Biely šum.

### 3.1.5 Modely MA(q)

Proces kĺzavých priemerov radu  $q$  nesie označenie MA( $q$ ) a je vyjadrený vzťahom

$$y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \dots - \theta_q a_{t-q}, \quad (3.16)$$

Proces kĺzavých priemerov rádu jedna MA(1) je daný vzťahom

$$y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad (3.17)$$

kde  $a_t$  je proces biele šumu. Opäť zavedieme operátor posunutia  $B$ . Tento operátor predstavuje oneskorenie o jedno obdobie. S pomocou operátora vyjadríme model MA(1) vzťahom

$$y_t = (1 - \theta_1 B) a_t, \quad (3.18)$$

Všetky procesy MA sú stacionárne, za podmienky  $|\theta_1| < 1$  ich môžeme pretransformovať na lineárny proces AR ( $\infty$ ). Splnením danej podmienky považujeme daný proces za invertibilný.

Autokorelačnú funkciu vyjadríme vzťahom

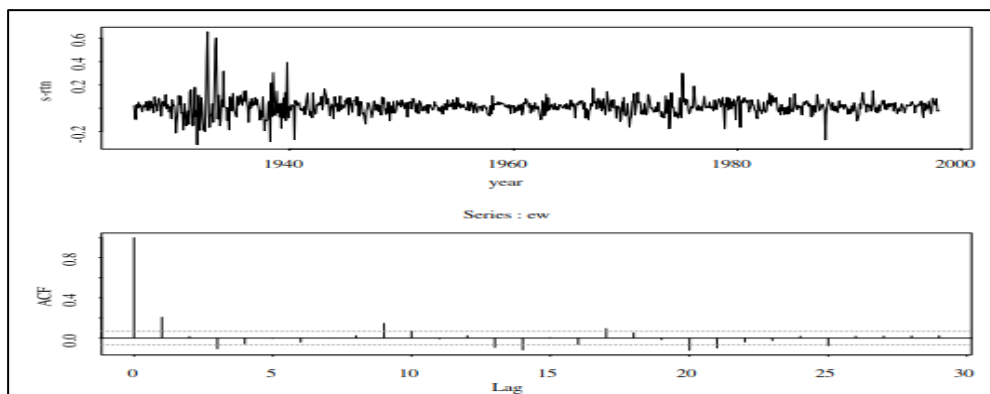
$$\rho_1 = \frac{-\theta}{1 + \theta^2}, \quad \rho_k = 0, \quad k > 1 \quad (3.19)$$

Parciálnu autokoreláciu vyjadríme vzťahom

$$\phi_{kk} = \frac{-\theta_1^k (1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2(k+1)}}, \quad (3.20)$$

Pre ilustráciu Obr. 3.3 ukazuje časovú radu mesačných výnosov spoločnosti CRSP. Pri bližšom pohľade je zrejmé, že séria má významné hodnoty ACF v 1, 3 a 9 oneskorení. Na základe odhadu založenom na ACF by sme pre danú časovú radu použili proces MA(9) (Tsay, 2002).

Obr. 3.3 Časová rada výnosov a ich autokorelačná funkcia



Zdroj: Tsay (2002 str. 45)

### 3.1.6 Modely ARMA(p,q) a ARIMA(p,d,q)

Spojením autoregresného procesu AR a procesu kľzavých priemerov MA dostaneme autoregresný proces kľzavých priemerov ARMA. Ktorý vyjadruje nasledujúci všeobecný vzťah

$$y_k = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \dots - \theta_q a_{t-q}, \quad (3.21)$$

Zjednodušíme pridaním operátora  $B$  dostaneme

$$\phi_p(B)y_t = \theta_q(B)a_t, \quad (3.22)$$

Proces ARMA ( $p,q$ ) považujeme za stacionárny, ak sa jeho korene rovnice  $\phi_p(B) = 0$  nachádzajú vo vnútri jednotkového kruhu. Za invertibilný sa považuje vtedy, ak sa korene jeho rovnice  $\theta_q(B) = 0$  tiež nachádzajú vo vnútri jednotkového kruhu. Tvar ACF procesu ARMA ( $p,q$ ) bude rovnaký ako v prípade procesu AR( $p$ ).

Doteraz sme uvažovali len o stacionárnych časových radách, na ktoré je možné použiť uvedené autoregresné modely, v praxi je však táto podmienka málokedy splnená. Táto skutočnosť nás núti použiť iné stochastické metódy, ktoré si poradia s premenlivým rozptylom v čase. Za týmto účelom vznikol okrem iných model ARIMA. Ako už z názvu vyplýva, model ARIMA je modifikáciou modelu ARMA. Uvažujme o nestacionárnom procese, ktorý vyjadruje vzťah

$$y_t = \alpha + y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3.23)$$

kde  $\varepsilon_t$  predstavuje biely šum s rozptylom  $\sigma^2$ . Uvedený model je takzvaná náhodná prechádzka s driftom. Uvedenú časovú radu môžeme stacionarizovať použitím prvých diferencií  $\Delta y_t$ . Pre takto stacionarizované časové rady môžeme použiť procesy typu ARIMA  $(p, d, q)$

$$\varphi(B)w_t = \alpha + \theta(B)\varepsilon_t, \quad (3.24)$$

kde  $w_t = \Delta^d y_t$  je  $d$ -tá diferencia časovej rady  $y_t$ . Zvyšok je stacionárny invertibilný model ARMA. Môžeme povedať, že model ARIMA vzniká stacionarizáciou časovej rady pomocou diferencie. Takto upravená časová rada sa potom modeluje pomocou modelu ARMA. Driftový parameter  $\alpha$  slúži na modelovanie deterministického trendu označeného ako  $w_t$  polynómu  $d$ -teho radu. Operátor  $\varphi(B)\Delta^d$  sa nazýva aj zobecnený autoregresný operátor, pre ktorý je charakteristické, že polynóm  $\varphi(z)\Delta^d$  ma  $p$  koreňov ležiacich vo vnútri jednotkového kruhu a  $d$  násobný jednotkový koreň (Arlt, Arltová, 2003).

### 3.1.7 Konštrukcia modelu

Konštrukcia triedy modelov ARIMA pomocou Box-Jenkinsovej metodológie sa odporúča vykonávať v troch krokoch:

- Ako prvé identifikujeme model
- Ako druhé vykonáme diagnostickú kontrolu modelu
- A ako tretie uskutočníme predikciu

Ak pri diagnostike modelu dosiahneme neuspokojivé výsledky, je potrebné všetky tri kroky zopakovať pre ďalší model alebo vykonať korekcie pôvodného modelu.

**Identifikácia modelu** prebieha určením tvaru autokorelačnej a parciálnej autokorelačnej funkcie, ktoré sme popísali v podkapitole 2.4.2. Graficky analyzujeme záznam odhadnutého korelogramu (ACF) a parciálneho korelogramu (PACF) časovej rady a snažíme sa o priradenie najvhodnejšej varianty modelu. Často je možné na prvý pohľad rozpoznať napríklad prítomnosť trendu, nestacionarity alebo sezónnosti a pod. Jedná sa teda o subjektívne posúdenie situácie, na základe ktorého sa rozhodujeme, či danú časovú radu transformovať, stacionarizovať, alebo vykonať iné úpravy. Časovú radu je vhodné transformovať, ak sa hodnoty výberovej ACF a PACF v prvom oneskorení blížia jednej a následné hodnoty výberovej ACF pomaly klesajú. Po uskutočnení transformácie časovej rady sa použijú výberová ACF a

PACF pre identifikáciu rádu modelov AR(p) a MA(q). Identifikácia je založená na princípe podobnosti výberových ACF a PACF s teoretickými ACF a PACF (Cipra, 2013).

V tabuľke 3.1 sú uvedené popisy tvarov ACF a PACF pre modely AR, MA, ARMA

Tab 3.1 Tvary ACF a PACF pre modely AR, MA, ARMA.

	AR(p)	MA(q)	ARMA (p,q)
ACF	Neexistuje $k_0$ ; ACF v tvare krivky $U$	$k_0 = q$	Neexistuje $k_0$ ; ACF v tvare krivky $U$ po prvých $q$ - $p$ hodnotách
PACF	$k_0 = p$	Neexistuje $k_0$ ; PACF obmedzená krivkou $U$	Neexistuje $k_0$ ; PACF obmedzená krivkou $U$ po prvých $p$ - $q$ hodnotách

Zdroj: Cipra (2013, str. 339)

**Diagnostika modelu** po odhade modelu nasleduje proces overovania, ktorý spočíva v overení adekvátnosti vytvoreného modelu pomocou rôznych diagnostických testov. Tieto testy overujú správanie sa náhodnej zložky, pričom existuje mnoho nástrojov, pomocou ktorých sa náhodná zložka model overuje.

**Rozptyl náhodnej zložky** kontrolujeme pomocou grafu rezíduí, pričom pozorujeme, či je rozptyl náhodnej zložky v čase konštantný. Ďalšou používanou metódou v praxi je ARCH(1) test, ktorý slúži na posúdenie, či náhodná zložka vykazuje tzv. ARCH efekt. Ten spočíva vo vytvorení umelej regresie, kde vysvetľovanou premenou je štvorec rezíduí  $\alpha^2$  a vysvetľujúcou premennou je štvorec rezíduí posunutý o jedno obdobie dozadu  $\alpha_{t-1}^2$ . Po pridaní konštanty vyjadríme model vzťahom

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t, \quad (3.25)$$

pre odhad parametrov je použitá MNČ. Náhodná zložka je homoskedastická, ak má štatistika  $TR^2$  rozdelenie  $X^2$ . V opačnom prípade je náhodná zložka podmieneno heteroskedastická.

**Autokoreláciu náhodnej zložky** modelu identifikujeme napríklad podľa autokorelačnej funkcie, ktorú vyjadríme vzťahom

$$ACF_k = \frac{\sum \hat{\alpha}_t \alpha_{t-k}}{\sum \hat{\alpha}_t^2}, \quad (3.26)$$

aby náhodná zložka nebola autokorelovaná. musia hodnoty funkcie ležať vo vnútri intervalu  $\pm 2\sqrt{T}$  (95% intervalu spoľahlivosti). Ďalšou možnosťou na diagnostiku autokorelácie náhodnej zložky je napríklad použitie Portmanteau test.

**Normalita náhodnej zložky** je dôležitým predpokladom pre testovanie jednotlivých parametrov modelu, testovanie autokorelácie, a tiež pre vytvorenie intervalových predikcií. Posúdiť, či je náhodná zložka normálne rozdelená, môžeme pomocou testu  $X^2$  dobrej zhody alebo Jarque-Bera (JB) testu. JB test je zameraný na súčasné testovanie šikmosti a špičatosti, a vychádza zo skutočnosti, že šikmosť normálneho rozdelenia (SK) = 0, a špičatosť normálneho rozdelenia (KU) = 3. Testové kritériu JB vyjadríme vzťahom (Arlt, 1999).

$$JB = SK^2 + KU^2, \quad (3.27)$$

pričom testové kritériu pre šikmosť vyjadruje vzťah

$$SK = \left(\frac{T}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\widehat{m}_3}{\widehat{m}_2^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.28)$$

a testové kritériu pre špičatosť vyjadruje vzťah

$$KU = \left(\frac{T}{24}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\widehat{m}_4}{\widehat{m}_2^2} - 3, \quad (3.29)$$

platnosť nulovej hypotézy ukazuje na normalitu nesystematické zložky. Test je citlivý na nesplnenie podmienky homoskedasticity, ak nie je splnená, dochádza často k zamietnutiu nulovej hypotézy.

**Predikcia modelom** po diagnostike a overení odhadnutých parametrov a modelu ako celku pristúpime k samotnej predikcii. V našom prípade pre model ARIMA dosadíme namiesto známych hodnôt parametrov ich odhady. Pri samotnom výpočte predikcie budeme vychádzať zo skutočnosti, že predpoveď  $y_t(h)$  je daná podmienenou strednou hodnotou  $E(y_{t+h}|y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots)$ . Ďalej predpokladajme model ARMA ( $p, q$ ) vo forme (3.21), vyjadrený vzťahom (Arlt, Arltová, 2007).

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} \dots + \phi_p y_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}, \quad (3.30)$$

pre  $t = T + h$



$$y_{T+h} = \phi_1 y_{T+h-1} \dots + \phi_p y_{T+h-p} + a_{T+h} - \theta_1 a_{T+h-1} - \dots - \theta_q a_{T+h-q}, \quad (3.31)$$

d'alej budeme uvažovať podmienené stredné hodnoty v čase  $T$  vyjadrené vzťahom

$$y_T(h) = \phi_1 y_T(h-1) \dots + \phi_p y_T(h-p) + a_T(h) - \theta_1 a_T(h-1) - \dots - \theta_q a_T(h-q), \quad (3.32)$$

kde

$$y_T(j) = E(y_{T+j} | y_T, y_{T-1}, \dots), \quad j \geq 1, \quad (3.33)$$

$$y_T(j) = y_{T+j}, \quad j \leq 0, \quad (3.34)$$

$$\alpha_T(j) = 0, \quad j \geq 1, \quad (3.35)$$

$$\alpha_T(j) = y_{T+j} - y_{T+j-1}(1) = \alpha_{T+j}, j \leq 0, \quad (3.36)$$

## Modely Volatility

V nasledujúcej podkapitole nadviažeme na poznatky z podkapitoly (2.2) v ktorej sme sa venovali základným charakteristikám finančných časových rad. Ako už bolo v našej práci uvedené, medzi charakteristické črty finančných časových rad patrí zhlukovanie volatility, ktoré sa prejavuje premenlivým rozptylom. Tento jav označujeme ako heteroskedasticitu a je dôvodom, prečo nie je vždy vhodné aplikovať lineárne stacionárne modely.

V týchto prípadoch je vhodné použiť takzvané modely podmienenej heteroskedasticity. Tieto modely sú založené na vyjadrení vývoja podmieneného rozptylu náhodnej zložky  $u_t$  alebo reziduí výnosov  $e_t$ . Môžeme povedať, že modely volatility popisujú závislosť šokov v rade finančných výnosov na kvadratickej funkcii ich oneskorených hodnôt. Modely volatility je tiež možné použiť pre modelovanie rozptylu, alebo ako doplnok iných modelov (Hušek, 2009).

### 3.1.8 Modely ARCH

Model ARCH je autoregresný model s podmienenou heteroskedasticitou. Prvýkrát bol tento model použitý Englem (1982) na modelovanie miery inflácie vo Veľkej Británii. Model ARCH vyjadríme vzťahom

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2, \quad (3.37)$$

pričom ak má byť podmienený rozptyl kladné číslo, musí platiť podmienka,  $\omega > 0$  a  $\alpha_1 > 0$ . V prípade že platí  $\alpha = 0$ , podmienený rozptyl je v čase konštantný, a proces  $\{\varepsilon_t\}$  sa označuje ako podmienene homoskedastický. Autoregresný tvar modelu vyjadríme vzťahom

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + v_t, \quad (3.38)$$

kde  $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ . Proces  $\{v_t\}$  je neautokorelovaný, pretože jeho podmienená a nepodmienená stredná hodnota procesu je rovná nule. Ak platia podmienky  $\alpha_1 < 1$ , a nepodmienený rozptyl alebo nepodmienená stredná hodnota procesu má tvar  $D(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1-\alpha_1}$ , je model ARCH stacionárny v kovarianciách. Najväčšia výhoda modelu ARCH je skutočnosť, že dokáže zachytiť zhlukovanie volatility v čase.

Podmienený rozptyl modelu ARCH( $q$ ) vyjadríme vzťahom

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2, \quad (3.39)$$

pričom podmienka zaručujúca kladný rozptyl je,  $\omega > 0$  a  $\alpha_i > 0$  pre  $i=1,2,\dots,q$ .

Autoregresný tvar ARCH( $q$ ) vyjadríme vzťahom

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + v_t, \quad (3.40)$$

Konkrétny model môžeme tiež vyjadriť pomocou operátora spätného posunutia nasledujúcim vzťahom

$$(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_q B^q) \varepsilon_t^2 = \omega + v_t, \quad (3.41)$$

pričom proces ARCH( $q$ ) je stacionárny v kovarianciách vtedy, keď sú korene jeho polynomickej rovnice rovné nule ( $(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_q B^q) = 0$ ), a ležia vo vnútri jednotkového kruhu. Nepodmienený rozptyl má tvar

$$D(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q}, \quad (3.42)$$

čo znamená, že je v čase konštantný a nepodmiene homokedastický.

Model ARCH predpokladá zhodný pozitívnych a negatívnych vplyv šokov na volatilitu, pretože tie sa vzťahujú na predchádzajúce štvorce šokov. Tento predpoklad však v reálnych podmienkach často nebýva splnený, pretože negatívne šoky bývajú obvykle silnejšie ako tie pozitívne. Ďalšou nevýhodou modelu ARCH je limitovaná schopnosť zachytiť leptokurtické rozdelenie, ktoré má väčšiu špicatosť ako normálne rozdelenie a takzvané ťažké konce. Túto nevýhodu môžeme odstrániť použitím iného typu rozdelenia, ako napríklad Studentova  $t$ , zovšeobecneného exponenciálneho rozdelenia, GED rozdelenia a ďalších. Nedostatkom modelu ARCH je tiež skutočnosť, že opisuje správanie sa podmieneného rozptylu mechanicky, tak ako predošlé modely, a teda v podstate neprináša nič nové. Kvôli uvedeným skutočnostiam vznikli mnohé modifikácie pôvodného modelu, ktoré sa snažia odstrániť uvedené nedostatky (Tsay, 2002; Cipra, 2013).

### 3.1.9 Model GARCH

Model GARCH označovaný tiež ako (Generalized ARCH) odstraňuje niektoré nedostatky predchádzajúcej kategórie modelov. Niekedy sa vyskytne situácia, v ktorej je potrebné použiť model ARCH( $q$ ), pričom je vyžadovaný vysoký stupeň  $q$ , aby bolo možné popísať vývoj volatility daného časového radu adekvátnym spôsobom. S tým však súvisí nutnosť odhadnutia veľké množstvo parametrov, pri ktorých býva často porušená podmienka nezápornosti. Ako reakciu na uvedené nedostatky vytvoril Bollerslev (1986) model GARCH, ktorého hlavným rysom je zavedenie oneskoreného podmieneného rozptylu (Arlt, Arltová, 2003).

Najjednoduchším a najpoužívanejším zovšeobecnením modelu ARCH je model GARCH(1,1), ktorý vznikne rozšírením modelu ARCH o oneskorenú hodnotu podmieneného rozptylu  $\sigma_{t-1}^2$ . Model GARCH vyjadríme vzťahom

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (3.43)$$

kladný rozptyl je daný platnosťou podmienok  $\omega > 0$ ,  $\alpha_1 > 0$ , a  $\beta \geq 0$ . Model GARCH vyjadríme použitím spätného operátora vzťahom

$$(1 - \beta_1 B) \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2, \quad (3.44)$$

potom

$$\sigma_t^2 = (1 - \beta_1 B)^{-1}(\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2) = (1 + \beta_1 B + \beta_1^2 B^2 + \dots)(\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2), \quad (3.45)$$

vyjadruje model ARCH ( $\infty$ ). Z uvedeného popisu vyplýva, že modelom GARCH(1,1) je možné nahraďiť model ARCH s viacerými oneskorenými parametrami. Upravením uvedenej rovnice pripočítaním  $\varepsilon_t^2$  a odpočítaním  $\sigma_t^2$  prepíšeme vzťah (3.43) do modelu ARMA(1,1), ktorý je vyjadrený vzťahom

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1}, \quad (3.46)$$

kde  $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ . Model GARCH(1,1) je stacionárny v kovarianciách, ak platí podmienka  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ . Nepodmienečný rozptyl je vyjadrený vzťahom

$$D(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \beta_1}, \quad (3.47)$$

čo vyjadruje, že je v čase konštantný a proces  $(\varepsilon_t)$  je nepodmienečne homoskedastický. Podmienečný rozptyl všeobecného modelu GARCH ( $p, q$ ) vyjadríme vzťahom

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2, \quad (3.48)$$

alebo tiež použitím operátora spätného posunutia vzťahom

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(B)\varepsilon_t^2 + \beta(B)\sigma_t^2, \quad (3.49)$$

kde  $\alpha(B) = \alpha_1 B + \dots + \alpha_q B^q$  a  $\beta(B) = \beta_1 B + \dots + \beta_p B^p$ , kladný podmienečný rozptyl je zaručený podmienkou  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i > 0$ , pre  $i = 1, 2, \dots, q$  a  $\beta_i \geq 0$  pre  $i = 1, 2, \dots, p$ . Uvedený vzťah je vyjadruje model GARCH ( $p, q$ ) (Francq, Zakoian, 2010).

Pre uvedený model GARCH bolo v priebehu času vytvorených množstvo modifikácií. Jednou z najstarších modifikácií je EGARCH (exponenciálny GARCH), s ktorým je možné vyjadriť asymetrický efekt pôsobenia pozitívnych a negatívnych šokov. Ďalšou modifikáciou pôvodného modelu je model GJR-GARCH, ktorý je taktiež schopný vyjadriť asymetrickú volatilitu. Ďalej existujú ďalšie modely, ako napr. TGARCH, IGARCH GARCH-M, atď.

### 3.1.10 Konštrukcia modelov

Proces konštrukcie modelov volatility je podobný ako proces konštrukcie nelineárnych modelov popísaný v podkapitole (3.24). Začneme určením odpovedajúceho lineárneho alebo

nelineárneho modelu pre danú časovú radu. Ďalej na zvolenú časovú radu aplikujeme testy heteroskedasticity a normality. Následne odhadneme jednotlivé parametre zvoleného lineárneho alebo nelineárneho modelu podmienenej heteroskedasticity. Výsledný model podrobíme diagnostickým testom, a ak je treba, modifikujeme. Vhodný model použijeme pre popisné a predikčné účely (Arlt, Arltová, 2007).

**Test podmienenej heteroskedasticity** lineárneho typu je založený na princípe Lagrangeových multiplikátorov (LM) a označuje sa ako ARCH test. Jeho podstata vychádza z formulácie modelu ARCH, v ktorom je podmienený rozptyl konštantný, ak sa príslušné parametre rovnajú nule. V prípade že je aspoň jeden z parametrov rôznych od nuly, hovoríme o heteroskedasticite. ARCH test môžeme tiež interpretovať ako test autokorelácie štvorcov reziduií (vid. ARIMA konštrukcia).

**Odhad parametrov** Klasický model výnosov finančných časových radov je zložený z dvoch častí. Prvá časť je lineárny alebo nelineárny model úrovne časovej rady a druhá je lineárny alebo nelineárny model volatility. Tento zložený model vyjadríme vzťahom

$$Y_t = G(\mathbf{Y}_t, \mathbf{n}) + \varepsilon_t, \quad (3.50)$$

kde  $Y_t = (1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})$ ,  $G(\mathbf{Y}_t, \mathbf{n})$  je kostra autoregresného modelu s parametrami  $(\mathbf{n})$ , ktorý je minimálne dvakrát spojitou derivovanou funkciou vzhľadom ku  $k$  parametrom. Proces  $\{\varepsilon_t\}$  je proces s nulovou podmienenou strednou hodnotou a podmieneným rozptylom  $h_t$ , ktorý má podobu lineárneho alebo nelineárneho modelu GARCH s parametrami  $\varphi$ . Vektor premenných modelu má tvar  $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varphi})'$ . Uvedené parametre odhadneme metódou maximálnej vierohodnosti (Bollerslev, 1986).

**Diagnostika modelu**, vhodnosť odhadnutého modelu overíme testovaním náhodnej zložky, ktorá by mala byť stacionárna, homoskedastická, neautokorelovaná a normálne rozdelená, vtedy sa odhadnutý model považujeme za správny.

**Predikcia modelom**, pretože v skutočnosti nie sú parametre modelov známe, sú bodové odhady a ich stredné štvorcové chyby modifikované. Keď sú k dispozícii odhady parametrov modelu volatility, potom v prípade modelu GARCH  $(p, q)$  je bodová predpoveď s horizontom  $h$  konštruovaná v čase  $T$  vyjadrená vzťahom

$$\hat{h}_T(h) = \hat{\omega} + \hat{\alpha}_1 \hat{\varepsilon}_T^2(h-1) + \dots + \hat{\alpha}_q \hat{\varepsilon}_T^2(h-q) + \hat{\beta}_1 \hat{h}_T^2(h-1) + \dots + \hat{\beta}_1 \hat{h}_T^2(h-p), \quad (3.51)$$

Predpovedanú chybu predpovedi vyjadríme vzťahom

$$\hat{l}_T(h) = h_{T+h} - \hat{h}_T(h) = l_T(h) + h_T(h) - \hat{h}_t(h), \quad (3.52)$$

Prítomnosť ARCH efektu má vplyv aj pri stanovení intervalovej predikcie rozptylu  $\pm 2\sigma^2$ . Podľa analýzy (Baillie a Bollerslev (1992)) vyplýva, že optimálna predpoveď je založená na priemernej volatilitate a na korekčnom výraze, ktorý predstavuje klesajúci geometricky rozdiel posledného pozorovania podmieneného rozptylu od priemernej hodnoty  $\sigma^2$ . Problémom však je nenormálne rozdelenie chýb prognózy, čo sťažuje určenie konfidenčných intervalov (Hušek, 2009).

## Geometrický Brownov pohyb (GBM)

Pre modelový opis javov náhodne sa meniacich v čase sa väčšinou používajú náhodné (stochastické) procesy. Náhodným procesom sa myslí ľubovoľná veličina, ktorá sa mení náhodným spôsobom v čase. Napriek tomu, že sú údaje vo financiách zaznamenávané v čase diskretným spôsobom, (napríklad v jednotlivých obchodných dňoch) a v diskretných jednotkách, (napríklad cena akcie vyjadrená v určitej mene), sú pre ich modelové opisy najčastejšie zvolené spojité náhodné procesy (s hodnotami zo spojitého intervalu) v spojitom čase.

Ako prvé definujeme špecifický Wienerov proces. Tento proces je základným stavebným prvkom ostatných spojitých procesov, pričom vychádza z dvoch predpokladov

- Predikované ceny sú ovplyvnené iba aktuálnou cenou, a nie historickými cenami. Jedná sa o takzvaný Markov proces,
- Zmeny cien sú nezávislé v čase

Wienerov proces vyjadríme vzťahom

$$\tilde{z}_{0+dt} - z_0 = dz = \tilde{\varepsilon} \cdot \sqrt{dt}, \quad (3.53)$$

Pričom  $dt$  je nekonečne malá zmena času,  $\tilde{\varepsilon}$  je náhodná premená z normovaného normálneho rozdelenia  $N(0,1)$ . Z uvedeného vyplýva, že stredná hodnota je nulová,  $E(dz)=0$ , a rozptyl odpovedá zmene času,  $\text{var}(dz)=dt$ . Ďalej budeme uvažovať o cenovom vývoji v čase za  $k$  rovnakých intervalov  $dt$ , potom

$$\tilde{z}_T - z_0 = \sum_{i=1}^k \tilde{\varepsilon} \cdot \sqrt{dt}. \quad (3.54)$$

z čoho môžeme odvodiť vyššie uvedené charakteristiky procesu

$$E(\tilde{z}_T) = 0, \quad \text{var}(\tilde{z}_T) = k \cdot dt = T \quad \text{a} \quad \sigma(\tilde{z}_T) = \sqrt{T}. \quad (3.55)$$

Jedným zo všeobecných typov stochastického procesu je Itov proces, ktorý je definovaný pre premennú  $x$  nasledovným vzťahom

$$dx = \alpha(x; t) \cdot dt + b(x; t) \cdot dz, \quad (3.56)$$

kde  $\alpha$  je prírastok, a  $b$  smerodatná odchýlka zmeny premennej.

Pokračujeme definovaním funkcie Itôv lemma pre funkcie, ktorých premennými sú stochastické procesy, a čas je vyjadrený vzťahom  $G = f(x, t)$ .

$$dG = \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial x} \cdot a(\cdot) \right) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \cdot b^2(\cdot) \right] \cdot dt + \frac{\partial G}{\partial x} \cdot b(\cdot) \cdot dz. \quad (3.57)$$

uvedená funkcia je znova Itôv proces, pričom prírastok je vyjadrený vzťahom

$$\frac{\partial G}{\partial x} \cdot a(\cdot) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \cdot b^2(\cdot) + \frac{\partial G}{\partial t}, \quad (3.58)$$

potom rozptyl vyjadruje vzťah

$$\left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 \cdot b(\cdot), \quad (3.59)$$

Ďalej vyjadríme zvláštny prípad uvedeného procesu, ktorý sa nazýva Aritmetický Brownov pohyb alebo tiež zovšeobecnených Wienerov proces

$$dx = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz, \quad (3.60)$$

jedná sa pritom o Itôv proces, ktorého parametre sú konštantné a nezávislé na ostatných koeficientoch. Z uvedeného vzťahu vyplýva, že sa cena vyvíja lineárnym trendom

$$E(dx) = \mu \cdot dt, \quad E(x_T) = x_0 + \mu \cdot T, \quad \text{var}(dx) = \sigma^2 \cdot dt, \quad \text{var}(x_T) = \sigma^2 \cdot T.$$

Vo finančnom modelovaní je často používaný Geometrický Brownov pohyb, pri ktorom sa cena vyvíja exponenciálnym trendom.

$$dx = \mu \cdot x \cdot dt + \sigma \cdot x \cdot dz. \quad (3.61)$$

pre lepšiu interpretáciu parametrov a celého procesu vyjadríme vzťahom

$$\frac{dx}{x} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz, \quad (3.62)$$

Je zrejmé, že uvedený proces je vhodný pre vyjadrenie výnosu ceny aktíva  $x$ .  $\mu$  je priemerný výnos, poväčšine za obdobie jedného roku a  $\sigma$  vyjadruje smerodatnú odchýlku výnosu, opäť za rok. Následne môžeme stanoviť strednú hodnotu a rozptyl podľa vzťahu

$$E(dx) = \mu \cdot dt, \quad var(dx) = \sigma^2 \cdot dt, \quad (3.63)$$

Predpokladajme ďalej, že premenná výnos finančného aktíva sa vyvíja podľa vzťahu (3.61). S využitím Itôvi lemy pre funkciu  $G = \ln x$  ukážeme, že

$$dG = d \ln S = \alpha \cdot dt + \sigma \cdot dz. \quad (3.64)$$

Jedná sa teda o vyjadrenie spojitého výnosu, kde  $\alpha = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$  a  $\mu = \ln \frac{S_T}{S}$ . Následne môžeme pre aktívum  $S$  postupne získať budúcu cenu vzťahom

$$S_T = S_0 \cdot \exp(\alpha \cdot T + \sigma \cdot z), \quad (3.65)$$

Budúca očakávaná cena

$$E(S_T) = S_0 \cdot \exp(\mu \cdot T), \quad (3.66)$$

rozptyl:

$$var(S_T) = S_0^2 \cdot \exp(2 \cdot \alpha \cdot T) \cdot [\exp(\sigma^2 \cdot T) - 1], \quad (3.67)$$

Na záver vyjadríme vzťah pre výpočet hodnoty kvantilu logaritmickeo-normálneho rozdelenia na hladine pravdepodobnosti  $\gamma$ , ktorý bude určovať budúcu cenu. Využijeme pritom inverznú funkciu k distribučnej funkcii normovaného normálneho rozdelenia  $\phi$ , (Zmeškal a kol. 2013).

$$S_T^\gamma = S_0 \cdot \exp(\alpha \cdot T + \phi^{-1}(\gamma) \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}), \quad (3.68)$$



### 3.1.11 Odhad parametrov

Množstvo publikácií sa venuje numerickému odhadu trendového parametru  $\mu$  a parametru volatility  $\sigma$  ceny akcie. Uvedené parametre odhadneme klasickým spôsobom prostredníctvom popisnej štatistiky. Budeme vychádzať z tržných cien aktíva  $P_t$  rozdelených do rovnakých časových úsekov  $\Delta t$ . V našom prípade budeme pracovať s cenami na konci jednotlivých obchodných dní. Logaritmickej výnos je vyjadrený vzťahom (Cipra, 2013).

$$u_\tau = \ln\left(\frac{P_\tau}{P_{\tau-1}}\right) = \ln P_\tau - \ln P_{\tau-1} = \ln(1 + r_\tau) \quad \tau = 1, \dots, N, \quad (3.69)$$

potom klasický odhad smerodajnej odchýlky hodnôt  $u_\tau$  je vyjadrený vzťahom

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{\tau=1}^N (u_\tau - \bar{u})^2}, \quad (3.70)$$

kde

$$\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N u_\tau, \quad (3.71)$$

Odhad volatility vyjadríme vzťahom

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}}. \quad (3.72)$$

Trendový koeficient  $\mu$  odhadneme podľa vzťahu

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{u} + \frac{s^2}{2}}{\Delta t}. \quad (3.73)$$

## Simulácia Monte Carlo

Simuláciu Monte Carlo je možné využiť v širokej oblasti vedných oborov pre modelovanie náhodného vývoja, využíva sa najmä vtedy, keď povaha problému nedovoľuje získať analytické riešenie. Je efektívnym numerickým postupom, ktorým je možné predikovať hodnotu finančného aktíva. Metóda bola navrhnutá ako vhodný spôsob pre odhad ceny opcie Boly (1977). Princíp simulácie Monte Carlo vychádza zo zákona veľkých čísel. To znamená, že

s rastúcim počtom realizovaných pokusov náhodnej veličiny sa budú pozorované charakteristiky (stredná hodnota, rozptyl) blížiť k teoretickému predpokladu. Realizáciu náhodnej veličiny získame buď skutočným pozorovaním, alebo umelým generovaním. Skutočné pozorovanie je však do veľkej miery nákladné a časovo náročné. Oproti tomu je umelé generovanie oveľa praktickejšie, pretože nám umožňuje získať tisíce náhodných realizácií v priebehu pár sekúnd.

Ako prvý krok metódy vygenerujeme vektor náhodných prvkov  $\varepsilon$  požadovanej dimenzie. Nasleduje výpočet funkcie  $f(\varepsilon)$  a nakoniec vyhodnotenie. Pod týmto pojmom si môžeme predstaviť napríklad zistenie požadovaných momentov pravdepodobnostného rozdelenia výsledkov, odhad pravdepodobnosti výskytu určitého javu a ďalšie. Použitím metódy Monte Carlo získame nielen predstavu o budúcej cene, ale aj o jej pravdepodobnostnom rozdelení (Tichý, 2010).

### 3.1.12 Metóda priamej simulácie pomocou GMT

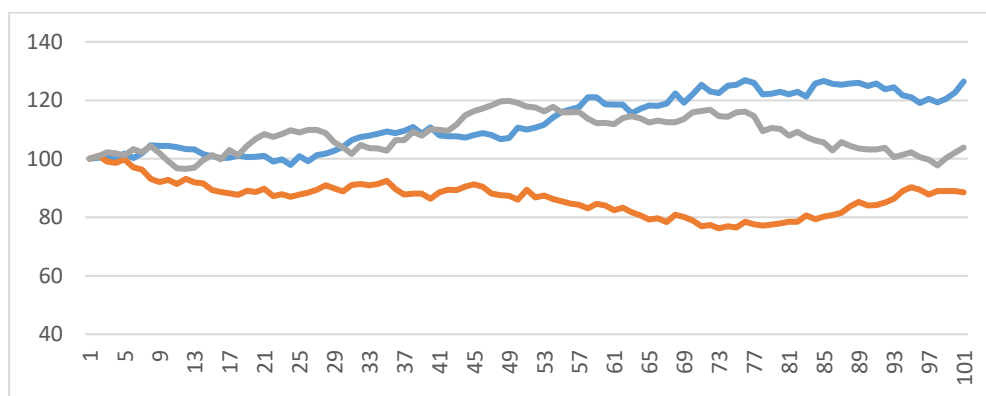
V našom prípade použijeme metódu Monte Carlo pre modelovanie vývoja a predikcie cien finančných aktív. Uvažujme o prípade, kedy  $\omega$  je funkciou nahodného prvku  $\varepsilon$ , pričom výskyt daného náhodného prvku môžeme charakterizovať pomocou vhodného rozdelenia pravdepodobnosti.

Princípom metódy je vo vyjadrení stavu  $\omega$ , ktorý je daný kombináciou nahodných prvkov. V našom prípade  $\omega$  nahradíme cenou podkladového aktíva  $S$  v čase  $t$ , ( $\omega = S_T$ ) alebo vektorom cien, ktorý zachytáva vývoj ceny aktíva diskretnou postupnosťou ( $\omega = S_t, S_{t+1}, S_{t+2}, \dots, S_T$ ). Vývoj ceny aktíva vyjadríme Geometrickým Brownovým pohybom popísaným v podkapitole 3.4. Vzťah pre odhad ceny aktíva vyjadríme vzťahom

$$S_T^{(i)} = S_0 \cdot \exp[\Delta S_\tau] = S_0 \cdot \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot \tau + \sigma \cdot \sqrt{\tau} \cdot \varepsilon^i \right]. \quad (3.74)$$

kde  $\varepsilon^i$  je pseudo nahodný prvok z určitého rozdelenia pravdepodobnosti, ide zväčša o normálne rozdelenie pravdepodobnosti  $N(0,1)$ . Toto rozdelenie však väčšinou neodpovedá skutočnosti, preto je vhodnejšie použiť niektoré z rozdelení pravdepodobnosti popísaných v podkapitole 2.6. Parametre  $\mu$  a  $\sigma$  vyjadrujú strednú hodnotu prírastku a volatilitu (smerodajnú odchýlku) výnosov modelovaného aktíva  $S$  vyjadrenú per annum.  $\tau = T - t$  označuje dobu do zrelosti (Tichý, 2010).

**Obr. 3.4** Tri scenáre náhodného vývoja ceny aktíva



*Zdroj: vlastné spracovanie*

Na Obr. 3.4 sú znázornené tri rôzne scenáre vývoja ceny aktíva  $S$  s intervalom  $\Delta t = 0,004$  (jeden obchodný deň). Začiatočná hodnota aktíva  $S_0 = 100$ , výnos  $\mu = 10\%$  a volatilita  $\sigma = 25\%$ . Pseudonáhodné prvky pochádzajú z normovaného normálneho rozdelenia  $\varepsilon \in N(0,1)$ .

## Informačné kritériá

Často nastane situácia, že len podľa získaných dát, alebo podľa ich grafického zobrazenia nie sme schopní spoľahlivo určiť najvhodnejšiu variantu modelu. Na identifikáciu vhodného rádu modelu sa preto často využívajú informačné kritériá. Sú založené na hľadaní kompromisu medzi príliš vysokým rádom modelu, ktorý znižuje rozptyl reziduálnej zložky a nízkym rádom modelu, ktorého dôsledkom je vysoká hodnota rozptylu reziduálnej zložky. Najlepší model je ten, ktorý dosahuje najnižšie hodnoty informačného kritéria. Existuje viacero druhov informačných kritérií, v našej práci použijeme kritéria AIC, a BIC (Fabozzi, kol. 2014).

### 3.1.13 Akaikeho informačné kritérium AIC

Jedno z najpoužívanejších kritérií pre výber najvhodnejšej varianty modelu je Akaikeho informačné kritérium (AIC). Toto kritérium navrhol japonský štatistik Hirotugu Akaike v roku 1973. Hlavnou myšlienkou AIC je výber parametrov modelu tak, aby bola minimalizovaná záporná hodnota logaritmickej funkcie maximálnej vierohodnosti. Táto hodnota je však

penalizovaná rastúcim počtom parametrov v modeli. Snahou je teda nájsť kompromis v počte parametrov, aby bolo AIC čo najmenšie. AIC vyjadruje vzťah

$$\text{AIC} = -2\log L(\hat{\theta}) + 2k, \quad (3.75)$$

Kde  $\theta$  je množina (vektor) parametrov modelu,  $\log L$  je hodnota logaritmu funkcie maximálnej virohodnosti a  $k$  je odhadovaný počet parametrov (Fabozzi, kol. 2014).

### 3.1.14 Bayesovo informačné kritérium BIC

Ďalším rozšíreným kritériom pre výber najvhodnejšej varianty modelu je Bayesovo informačné kritérium (BIC). Rozdiel medzi AIC a BIC je v tom, že BIC používa na penalizáciu okrem údaju o počte parametrov aj logaritmus dĺžky časového radu. Najlepší model je ten, ktorý má opäť najmenšiu hodnotu BIC. Rozhodovacie kritériu BIC vyjadríme vzťahom

$$\text{BIC} = -2\log L(\hat{\theta}) + k \log n, \quad (3.76)$$

pričom význam jednotlivých parametrov je rovnaký ako v AIC,  $n$  označuje dĺžku časovej rady (Fabozzi, kol. 2014).

### 3.1.15 Miera presnosti predikcie

Jedným zo základných dôvodov konštrukcií finančných modelov je tvorba predikcií. Presnosť a kvalitu predikcie meriame pomocou predikčných chýb, ktorú vyjadruje nasledujúci základný vzťah

$$e_t = y_t - \hat{y}_t, \quad (3.77)$$

kde chybu predikcie  $e_t$  tvorí rozdiel medzi skutočnou hodnotou  $y_t$  a očakávanou hodnotou  $\hat{y}_t$ . Aby sme mohli stanoviť predikčnú chybu, musíme poznať minulé hodnoty časovej rady, ktoré porovnáme s hodnotami odhadnutými modelom. Tento proces sa odporúča vykonávať nasledujúcim spôsobom, ako prvé uskutočníme odhad modelu na vzorke 80 % celkových dát, ďalej uskutočníme predikciu zvyšných 20 % dát. Týmto získame skutočné a modelové dáta, ktoré následne porovnáme a vypočítame príslušné predikčné chyby (Cipra, 2013).

- **Mean Square Error (MSE)** - priemer štvorcov chýb, vyjadruje vzťah

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2, \quad (3.78)$$

MSE je klasickým štatistickým nástrojom pre porovnávanie predikcií. Nedostatkom MSE je symetrická podoba stratovej funkcie, ktorá nedostatočne penalizuje záporný rozptyl.

- **Root Mean Square Error (RMSE)** - odmocnina štvorca chýb, vyjadruje vzťah

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2}, \quad (3.79)$$

Vznikla ako modifikácia MSE, aby bola meraná v rovnakých jednotkách ako analyzovaná časová rada

- **Variance mean Square Error ( $\sigma^2 MSE$ )** - priemer štvorcov chýb pre rozptyl, vyjadríme vzťahom

$$\sigma^2 MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\sigma_t - \hat{\sigma}_t)^2,$$

## 4 Ověření a srovnání vybraných predikčních modelů

Následující kapitola je venovaná výstavbě a následnej aplikácií predikčních modelov opísaných v kapitole 3. Uvedené modely postupne aplikujeme na denné časové rady akciových indexov DAX 30, Euro Stoxx 50 a S&P 500. Dĺžka pozorovania je 1893 dní a je pre všetky časové rady zhodná. Ako prvý zostrojíme model ARIMA, ktorý doplníme o model GARCH, ten použijeme na modelovanie reziduálnej zložky. V rámci samotnej konštrukcie porovnáme viacero variant jednotlivých modelov, z ktorých podľa informačného kritéria BIC vyberieme ten najvhodnejší. Pre každú časovú radu vytvoríme vhodný model, ktorý následne použijeme na simuláciu jednotlivých scenárov očakávaného cenového vývoja, z ktorých potom určíme pravdepodobnostné intervaly. Nakoniec pomocou histogramu znázorníme rozdelenia výskytu cien na konci obdobia. Ako druhý model zvolíme GBM, pri ktorom najskôr odhadneme jednotlivé parametre. Následne vhodnosť modelu overíme simuláciou minulých dát. Potom zopakujeme simuláciu do budúcnosti a určíme príslušné pravdepodobnostné intervaly, ktoré ďalej znázorníme pomocou histogramu. Na záver zhrnieme dosiahnuté výsledky a porovnáme jednotlivé modely.

### Model ARIMA-GARCH

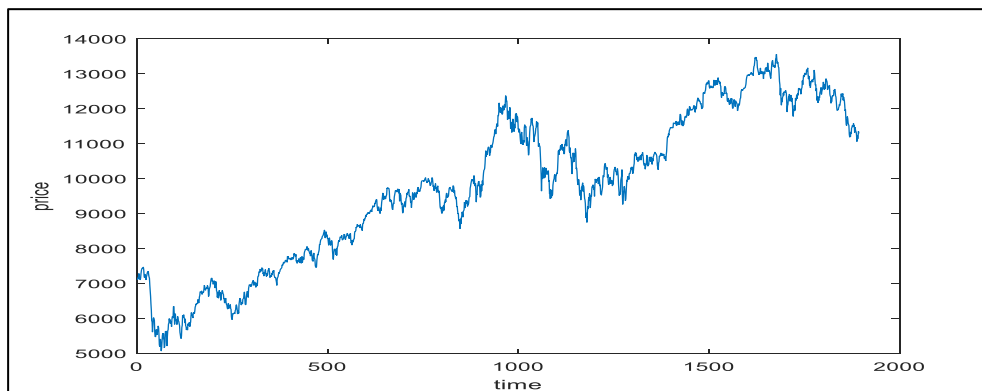
Ako prvý vyberieme model ARIMA-GARCH, ktorý postupne aplikujeme na časové rady akciových indexov DAX 30, Euro Stoxx 50 a S&P 500. Postup je nasledovný: ako prvé overíme, či je daná časová rada stacionárna. To uskutočníme pomocou prostého pohľadu na graf danej časovej rady a tiež pomocou KPSS testu. V prípade, že sa ukáže, že časová rada je nestacionárna, stacionarizujeme ju transformáciou na spojité výnosy. Časovú radu spojitých výnosov otestujeme ARCH-LM testom, aby sme zistili, či má zmysel použiť model GARCH na modelovanie volatility. Následne uskutočníme pomocou grafickej analýzy tvarov ACF a PACF korelogramu odhad vhodnej varianty modelu. Výsledné varianty modelu spolu s informačnými kritériami BIC zhrnieme v tabuľke a vyberieme jeden, ktorý bude mať najnižšiu hodnotu informačného kritéria BIC. Najlepšiu variantu modelu ARIMA doplníme o model GARCH(1,1), a odhadneme pomocou metódy maximálnej vierohodnosti. Pre výsledný model overíme, či sú jeho parametre štatisticky významné. V prípade, že niektoré parametre nebudú štatisticky významné na hladine spoľahlivosti 5 %, odstránime ich z modelu. Pomo-

cou modelu GARCH(1,1) odhadneme podmienený rozptyl a porovnáme ho z minulými hodnotami, taktiež uskutočníme jeho odhad do budúcnosti. Presnosť predikcie modelu ARIMA-GARCH overíme porovnaním odhadnutých a skutočných hodnôt, z ktorých následne vypočítame kritéria MSE, RMSE a  $\sigma^2 MSE$ . Nakoniec určíme pravdepodobnostné intervaly predikovaného cenového rozpätia, ktoré zhrnieme v príslušných tabuľkách a tiež ich zachytíme pomocou histogramu rozdelenia cien.

#### 4.1.1 Akciový index DAX 30

Ako prvé aplikujeme model ARIMA-GARCH na časovú radu cien indexu DAX 30 . Pribeh časovej rady za obdobie od 15. júna 2011 do 28. novembra 2018 je znázornený na Obr. 4.1 časová rada sa skladá z 1893 dní.

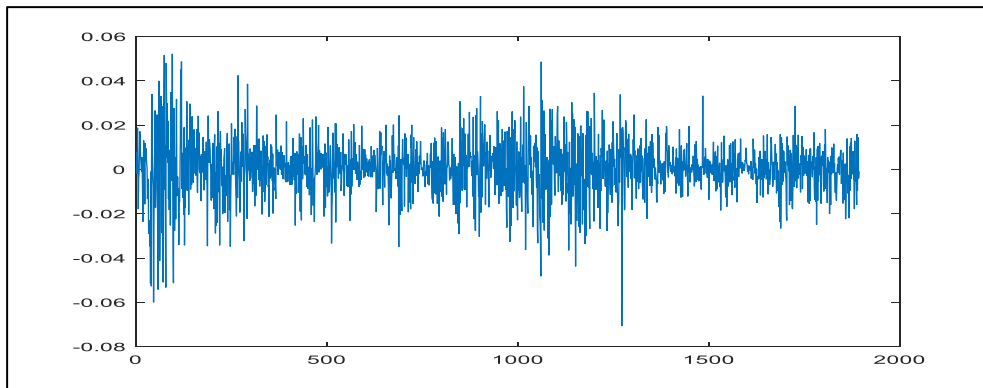
*Obr. 4.1 Denný vývoj ceny akciového indexu DAX 30*



*Zdroj: vlastné spracovanie*

Z uvedeného grafu je zrejmé, že časová rada nie je stacionárna, uskutočníme teda transformáciu danej časovej rady tým, že ju zlogaritmujeme a následne zdiferencujeme, čím dostaneme časovú radu spojitých výnosov. Transformovanú časovú radu spojitých výnosov zobrazuje Obr. 4.2.

*Obr. 4.2 Denný vývoj spojitých výnosov akciového indexu DAX 30*

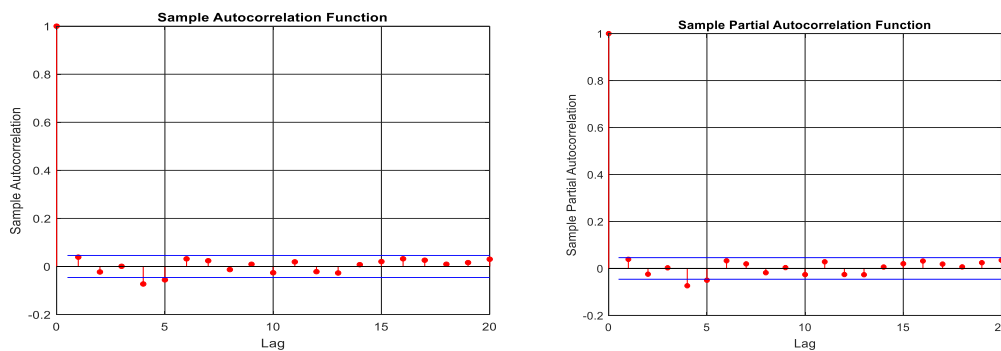


*Zdroj: vlastné spracovanie*

To či je získaná časová rada skutočne stacionárna, overíme pomocou KPSS testu, kde nulová hypotéza vyjadruje stacionaritu a alternatívna hypotéza nestacionaritu. Výsledok KPSS testu je, že nezamietame nulovú hypotézu ( $t \text{ vyp. } 0,0476 < t \text{ krit. } 0,146$ ) a teda že transformovaná časová rada je stacionárna. Či je časová rada spojitých výnosov homoskedastická alebo heteroskedastická, overíme pomocou ARCH-LM testu pre tri omeškania. Nulová hypotéza testu predstavuje homoskedasticitu, alternatívna hypotéza heteroskedasticitu. Výsledkom testu je zamietnutie nulovej hypotézy na 5 % hladine významnosti, a teda prítomnosť ARCH efektu ( $t \text{ vyp. } 124 > t \text{ krit. } 7,815$ ). Na modelovanie volatility teda použijeme model GARCH(1,1).

Pre transformovanú časovú radu spojitých výnosov aplikujeme AFC a PACF, ktoré zobrazuje Obr. 4.3.

**Obr. 4.3 ACF a PACF korelogram**



*Zdroj: vlastné spracovanie*

Pri pohľade na tvar korelogramov ACF a PACF nie je vidieť žiadna významná hodnota ktorá by jednoznačne určovala proces AR alebo MA. Oneskorenia sa poväčšine pohybujú vo významnom intervale čo naznačuje, že časová rada môže predstavovať aj biely šum. Vhodný



tvár operátorov AR a MA sa nedá jednoznačne určiť, preto budeme uvažovať viacero variant z ktorých vyberieme tú s najnižšou hodnotou BIC.

Tab. 4.1 Informačné kritéria BIC

	MA(1)	MA(2)	MA(3)	MA(4)	MA(5)
AR (1)	-11 256	-11 251	-11 249	-11 243	-11 253
AR (2)	-11 250	-11 249	-11 246	-11 245	-11 251
AR (3)	-11 247	-11 246	-11 247	-11 250	-11 246
AR (4)	-11 248	-11 254	-11 250	-11 246	-11 242
AR (5)	-11 252	-11 250	-11 246	-11 242	-11 243

Tab. 4.1 zobrazuje výsledky jednotlivých variant odhadovaného modelu. Najvhodnejší model vyberieme podľa minimálnej hodnoty BIC. V náväznosti na predošlé zistenie že časová rada môže predstavovať biely šum, zvážime aj model ARIMA(0,1,0), s hodnotou informačného kritéria BIC -11 256. Modely náhodnej prechádzky a model ARIMA(1,1,1) dosiahli zhodnú hodnotu informačného kritéria BIC – 11 256. Potom ako sme oba modely doplnili o model GARCH a nanovo odhadli, vyšiel nám ako vhodnejší model náhodnej prechádzky ARIMA(0,1,0)-GARCH(1,1).

Obr. 4.4 Odhad modelu ARIMA-GARCH

ARIMA(0,1,0) Model (Gaussian Distribution) <small>dax</small>					ARIMA(1,1,1) Model (Gaussian Distribution)				
Effective Sample Size: 1894					Effective Sample Size: 1894				
Number of Estimated Parameters: 4					Number of Estimated Parameters: 6				
LogLikelihood: 5862.68					LogLikelihood: 5862.93				
AIC: -11717.4					AIC: -11713.9				
BIC: -11695.2					BIC: -11680.6				
Value	StandardError	TStatistic	PValue		Value	StandardError	TStatistic	PValue	
-----					-----				
Constant	0.00059157	0.00021504	2.751	0.0059409	Constant	0.0010894	0.00046622	2.3366	0.019461
					AR{1}	-0.9014	0.43409	-2.0765	0.037845
					MA{1}	0.90326	0.43098	2.0958	0.036097
GARCH(1,1) Conditional Variance Model (Gaussian Distribution)					GARCH(1,1) Conditional Variance Model (Gaussian Distribution)				
Value	StandardError	TStatistic	PValue		Value	StandardError	TStatistic	PValue	
-----					-----				
Constant	2.0941e-06	8.6859e-07	2.4109	0.015911	Constant	2.084e-06	8.6232e-07	2.4168	0.015658
GARCH{1}	0.90386	0.011468	78.819	0	GARCH{1}	0.90833	0.010928	83.116	0
ARCH{1}	0.083847	0.0092022	9.1116	8.118e-20	ARCH{1}	0.077931	0.0084363	9.2375	2.5228e-20

Zdroj: vlastné spracovanie

Na Obr. 4.4 sú zobrazené štatistiky oboch odhadnutých modelov. Bohužiaľ ako vhodnejší vyšiel model náhodnej prechádzky s konštantou. Čo sa týka modelu GARCH jeho parametre sú štatisticky významné na štandardnej hladine spoľahlivosti a ich súčet sa blíži k jednej.

Výsledný odhadnutý model ARIMA(0,1,0)-GARCH(1,1) vyjadruje nasledujúci vzťah

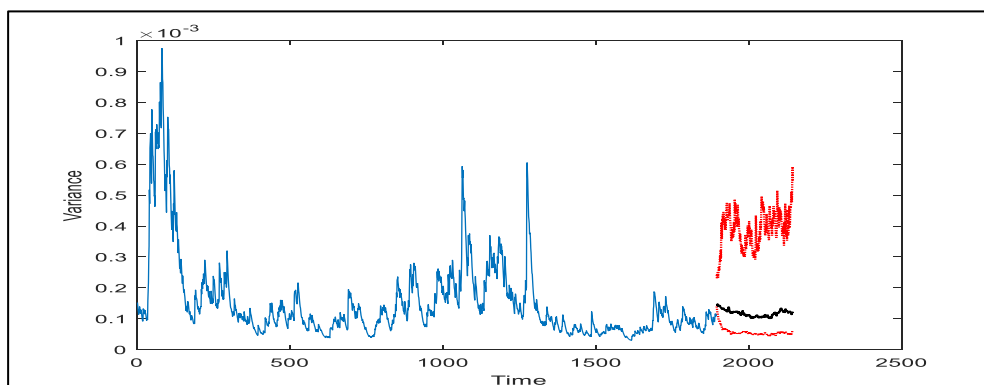
$$\hat{y}_t = 0,0059157 + y_{t-1} + \varepsilon_{t-1}$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,000002094 + 0,08385\varepsilon_{t-1}^2 + 0,90387\sigma_{t-1}^2$$

Ešte pred tým, ako pristúpime k samotnej predikcii cien, znázorníme pre ilustráciu priebeh volatility, ktorá je vyjadrená pomocou podmieneného rozptylu a odhadnutá modelom GARCH(1,1).

**Obr. 4.5** Vývoj podmieneného rozptylu

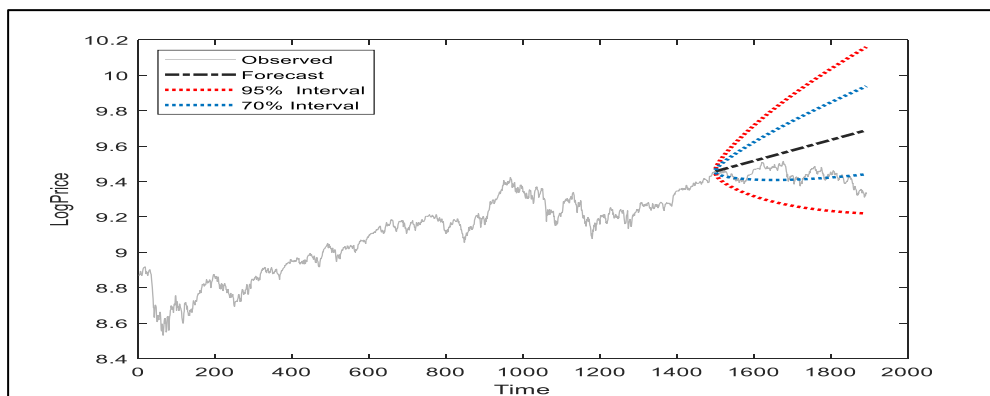


**Zdroj:** vlastné spracovanie

Obr. 4.5 znázorňuje priebeh dennej volatility akciového indexu DAX 30 odhadnutú modelom GARCH(1,1). Modrou farbou je znázornený historický podmienený rozptyl, červenou farbou 95 % pravdepodobnostný interval očakávaného rozsahu vývoja podmieneného rozptylu. Pre nás najdôležitejšia je čierna línia, ktorá znázorňuje vývoj strednej hodnoty očakávaného podmieneného rozptylu.

Ďalej overíme predikčnú schopnosť získaného modelu ARIMA(0,1,0)-GARCH(1,1) tým, že porovnáme skutočné a modelom odhadnuté hodnoty. Úspešnosť predikcie následne posúdime pomocou pravdepodobnostných intervalov a predikčných chýb MSE, RMSE a  $\sigma^2 MSE$ . Potrebné je ešte dodať, že dĺžka predikcie je 393 dní a ceny sú kvôli lepšej výpočtovej schopnosti uvedené v logaritmoch.

**Obr. 4.6** Historická predikcia vývoja logaritmu ceny akciového indexu DAX 30



*Zdroj: vlastné spracovanie*

Obr. 4.6 znázorňuje historickú predikciu logaritmov cien indexu DAX 30 konštruovanú modelom ARIMA(0,1,0)-GARCH(1,1). Odhadnutým modelom sú nasimulované pravdepodobnostné intervaly a stredná hodnota očakávaného cenového pohybu. Červenou farbou je znázornený 95 % pravdepodobnostný interval a modrou farbou 70 % pravdepodobnostný interval cenového pohybu. Predikovaná stredná hodnota je zobrazená čiernou farbou. Podľa uvedeného modelu by mala cena rásť vo vyznačených intervaloch, v skutočnosti však bol prítomný mierny pokles ceny indexu. Čo sa týka samotnej presnosti predikcie, tá sa výrazne líšila od skutočnosti a vyšla len v rámci najvoľnejšieho 95 % pravdepodobnostného intervalu.

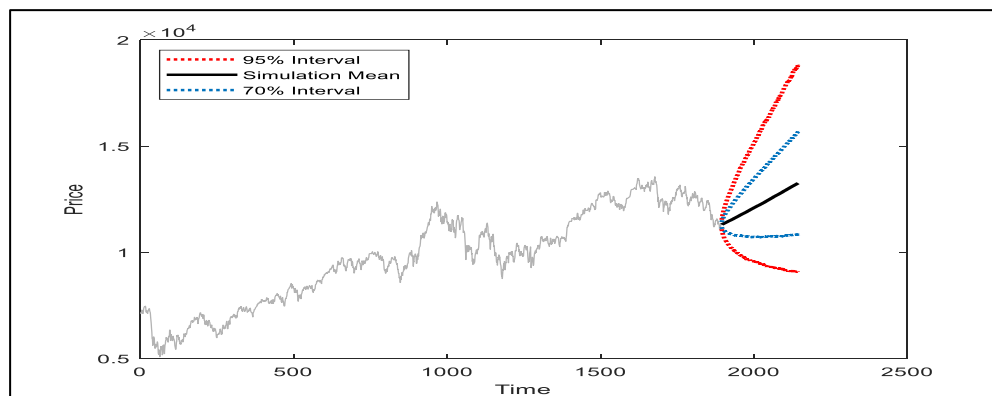
**Tab. 4.2** Chyby predikcie

MSE	0,0284
RMSE	0,1684
$\sigma^2 MSE$	1,7588e-08

Tab. 4.2. znázorňuje údaje o chybách predikcie modelu ARIMA(0,1,0) – GARCH(1,1). Chybou predikcie máme na mysli rozdiel medzi skutočnou a odhadnutou strednou hodnotou modelu. Priemerná štvorcová chyba (MSE) vyšla 0,0284 a odmocnina z priemernej štvorcovej chyby (RMSE) vyšla 0,1684. Priemerná štvorcová chyba predikcie podmieneného rozptylu ( $\sigma^2 MSE$ ) vyšla 1,7588e-08. Uvedené hodnoty využijeme na medzi modelové porovnanie.

Výsledný model ARIMA(0,1,0)-GARCH(1,1) s normálnym rozdelením použijeme na predikciu očakávaného cenového vývoja akciového indexu DAX 30.

**Obr. 4.7** Predikcia vývoja ceny akciového indexu DAX 30



Zdroj: vlastné spracovanie

Na Obr. 4.7 je pomocou príslušných intervalov znázornený výsledok simulácie 10 000 scenárov možného vývoja ceny indexu. Časová dĺžka predikcie je 250 dní, čo odpovedá dĺžke jedného obchodného roku a ceny v grafe sú uvedené krát  $10^4$ . Keďže vykreslenie všetkých jednotlivých scenárov by bolo značne neprehľadné, sú použité pravdepodobnostné intervaly. Čiernou farbou je zakreslený očakávaný vývoj strednej hodnoty, podľa ktorej môžeme počas predikovaného obdobia očakávať rast ceny indexu. Červenou farbou je znázornený vonkajší pravdepodobnostný interval, ktorý určuje 95 % pravdepodobnostné pásmo očakávaného cenového pohybu. Inak povedané pásmo, v ktorom očakávame, že sa bude cena pohybovať z 95 % pravdepodobnosťou. Modrá farba znázorňuje vnútorné 70 % pravdepodobnostné pásmo, teda pásmo, v ktorom očakávame cenový pohyb zo 70 % pravdepodobnosťou. Konkrétne očakávané hodnoty uvádza nasledujúca tabuľka:

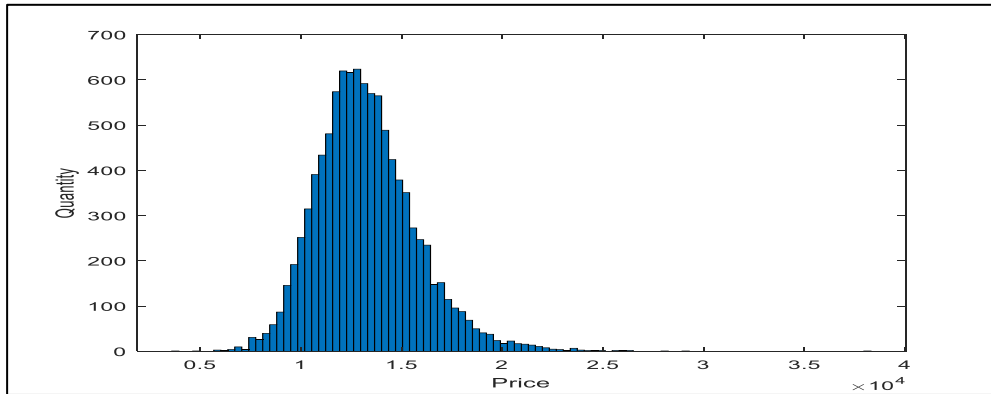
**Tab. 4.3** Predikčné intervaly v EUR

	70 %	95 %
Horná hranica	15 664	18 797
Stredná hodnota	13 256	13 256
Dolná hranica	10 846	9 065

V Tab. 4.3 sú zobrazené očakávané hodnoty indexu DAX 30 na konci predikčného obdobia pre jednotlivé pravdepodobnostné pásma. Z uvedenej tabuľky vyplýva, že cena indexu DAX 30 by v nasledujúcom roku z 95 % pravdepodobnosťou nemala prekročiť hodnotu 18 797 EUR za jednotku a taktiež by nemala poklesnúť pod hodnotu 9 065 EUR za jednotku. Ďalej konštatujeme, že zo 70 % pravdepodobnosťou by cena nemala prekročiť hodnotu 15 664 EUR za jednotku a tiež poklesnúť pod hodnotu 10 846 EUR za jednotku. Strednú hodnotu ceny sme na konci predikovaného obdobia odhadli na 13 256 EUR za jednotku.

Nakoniec znázorníme histogram pravdepodobnostného rozdelenia cien na konci predikovaného obdobia.

**Obr. 4.8** Histogram rozdelenia cien na konci obdobia



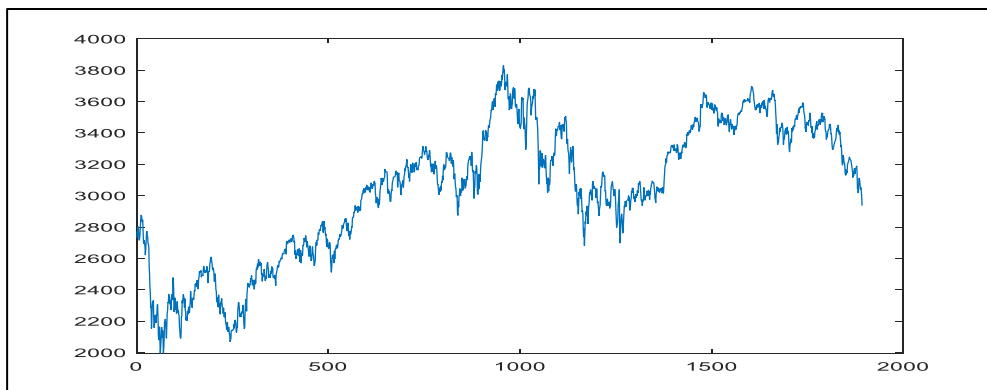
*Zdroj: vlastné spracovanie*

Obr. 4.8 zobrazuje rozdelenia cien indexu DAX 30 na konci predikovaného obdobia. Keďže náhodné čísla pochádzajú z normálneho rozdelenia, toto rozdelenie je prítomné aj vo výslednom rozdelení cien. Histogram rozdelenia cien vykazuje znaky mierne pravostranného zošikmenia, ktoré je to dané tým, že cena indexu má počas sledovaného obdobia tendenciu viac rásť ako klesať. Uvedený histogram tiež potvrdzuje záver, že ako najpravdepodobnejšia sa javí hodnota okolo 13 000 EUR za jednotku.

#### 4.1.2 Akciový index Euro Stoxx 50

Priebeh časovej rady akciového indexu Euro Stoxx 50 za obdobie od 15. júna 2011 do 28. novembra 2018 je znázornený na Obr. 4.9 časová rada sa skladá z 1893 dní.

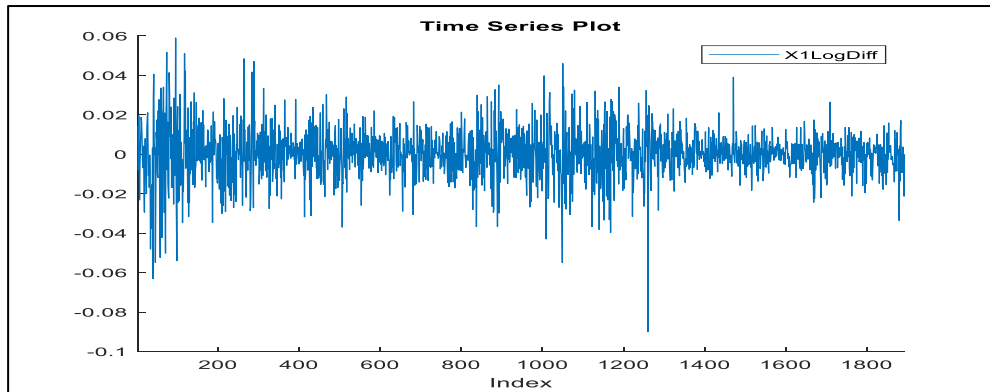
**Obr. 4.9** Denný vývoj ceny akciového indexu Euro Stoxx 50



*Zdroj: vlastné spracovanie*

Opäť je evidentné, že daná časová rada je nestacionárna, preto ako prvé uskutočníme transformáciu na spojité výnosy. Najskôr časovú radu zlogaritmujeme a následne zdiferencujeme.

**Obr. 4.10** Denný vývoj výnosov akciového indexu Euro Stoxx 50

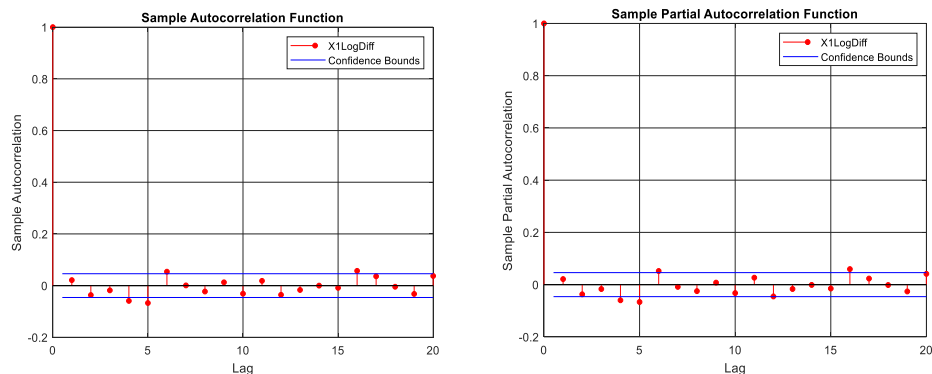


*Zdroj: vlastné spracovanie*

Obr. 4.10 znázorňuje časovú radu spojitých výnosov indexu Euro Stoxx 50. Pri pohľade na transformovanú časovú radu sa zdá, že už je stacionárna. Náš záver overíme pomocou KPSS testu na 5 % hladine významnosti, kde nulová hypotéza vyjadruje stacionaritu, alternatívna hypotéza nestacionaritu. Výsledok KPSS testu je, že nezamietame nulovú hypotézu ( $t \text{ vyp. } 0,0512 < t \text{ krit. } 0,146$ ) teda že transformovaná časová rada spojitých výnosov je stacionárna. Či je časová rada spojitých výnosov homoskedastická alebo heteroskedastická overíme pomocou ARCH-LM testu pre tri omeškania. Nulová hypotéza testu predstavuje homoskedasticitu, alternatívne hypotéza heteroskedasticitu. Výsledkom testu je zamietnutie nulovej hypotézy na 5 % hladine významnosti a teda prítomnosť ARCH efektu ( $t \text{ vyp. } 124 > t \text{ krit. } 7,815$ ). Volatilitu teda môžeme modelovať pomocou modelu GARCH (1,1)

Pre transformovanú časovú radu spojitých výnosov znázorníme AFC a PACF, ktoré sú zobrazené na Obr. 4.11.

**Obr. 4.11 ACF a PACF korelogramy**



**Zdroj:** vlastné spracovanie

Pri pohľade na tvar korelogramov ACF a PACF nie je vidieť žiadna významná hodnota, ktorá by jednoznačne určovala proces AR alebo MA. Oneskorenia sa poväčšine pohybujú vo vyznačenom intervale, čo naznačuje, že časová rada môže predstavovať aj biely šum. Vhodný tvar operátorov AR a MA sa nedá jednoznačne určiť, preto budeme uvažovať viacero variant modelu, z ktorých vyberieme najlepší podľa informačného kritéria BIC.

**Tab. 4.4 Informačné kritéria BIC**

	MA(1)	MA(2)	MA(3)	MA(4)	MA(5)
AR (1)	-11 164	-11 168	-11 163	-11 159	-11 167
AR (2)	-11 169	-11 172	-11 160	-11 154	-11 167
AR (3)	-11 158	-11 160	-11 156	-11 150	-11 164
AR (4)	-11 163	-11 168	-11 163	-11 145	-11 158
AR (5)	-11 167	-11 165	-11 163	-11 160	-11 164

Tab. 4.4 zobrazuje výsledky jednotlivých variant autoregresných modelov. Najvhodnejší model vyberieme podľa minimálnej hodnoty BIC. Voči uvedeným variantom musíme ešte zohľadniť možnosť ARIMA(0,1,0) z hodnotou informačného kritéria BIC -11 164. Z uvedených variant sa ako najlepší javí model ARIMA(2,1,2) z hodnotou informačného kritéria BIC -11 172.

**Obr. 4.12 Odhad modelu ARIMA-GARCH**

ARIMA(2,1,2) Model (Gaussian Distribution)					ARIMA(2,1,2) Model (Gaussian Distribution)				
Effective Sample Size: 1893					Effective Sample Size: 1893				
Number of Estimated Parameters: 5					Number of Estimated Parameters: 7				
LogLikelihood: 5816.23					LogLikelihood: 5816.43				
AIC: -11622.5					AIC: -11618.9				
BIC: -11594.7					BIC: -11580				
Value	StandardError	TStatistic	PValue		Value	StandardError	TStatistic	PValue	
<hr/>					<hr/>				
Constant	0	0	NaN	NaN	Constant	0	0	NaN	NaN
AR{2}	-0.61656	0.17912	-3.4422	0.00057702	AR{1}	-0.033411	0.23792	-0.14043	0.88832
MA{2}	0.65676	0.17167	3.8257	0.00013038	AR{2}	0.72115	0.14887	4.8443	1.2708e-06
GARCH(1,1) Conditional Variance Model (Gaussian Distribution)					MA{1}				
<hr/>					0.004982				
Constant	1.6934e-06	6.8895e-07	2.4579	0.013974	0.23558				
GARCH{1}	0.92012	0.0082458	111.59	0	0.019094				
ARCH{1}	0.070031	0.006668	10.503	8.4013e-26	3.3632e-07				
GARCH(1,1) Conditional Variance Model (Gaussian Distribution)					MA{2}				
<hr/>					-0.72694				
<hr/>					0.14248				
GARCH(1,1) Conditional Variance Model (Gaussian Distribution)					Constant				
<hr/>					1.7401e-06				
Constant	1.6934e-06	6.8895e-07	2.4579	0.013974	6.9217e-07				
GARCH{1}	0.92012	0.0082458	111.59	0	2.514				
ARCH{1}	0.070031	0.006668	10.503	8.4013e-26	0.011936				
GARCH(1,1) Conditional Variance Model (Gaussian Distribution)					GARCH{1}				
<hr/>					0.92007				
<hr/>					0.0085576				
GARCH(1,1) Conditional Variance Model (Gaussian Distribution)					ARCH{1}				
<hr/>					0.069702				
<hr/>					0.0070908				
GARCH(1,1) Conditional Variance Model (Gaussian Distribution)					Constant				
<hr/>					1.7401e-06				
<hr/>					6.9217e-07				
GARCH(1,1) Conditional Variance Model (Gaussian Distribution)					2.514				
<hr/>					0.011936				
<hr/>					0				
GARCH(1,1) Conditional Variance Model (Gaussian Distribution)					9.8298				
<hr/>					8.3787e-23				
<hr/>									

*Zdroj: vlastné spracovanie*

Na Obr. 4.12 sú zobrazené štatistiky odhadnutého modelu ARIMA(2,1,2)-GARCH(1,1) z normálnym rozdelením odhadnuté metódou maximálnej vierohodnosti. Parametre uvedeného modelu konštanta, AR(1) a MA(1) sú štatistiky nevýznamné, preto ich z modelu odstránime. Súhrnné štatistiky nanovo odhadnutého modelu sú zobrazené na uvedenom obrázku naľavo. Všetky parametre modelu ARIMA-GARCH sú už štatisticky významné, hodnota BIC poklesla na -11 595, čo vyjadruje zlepšenie kvality modelu. Súčet parametrov modelu GARCH sa blíži jednej.

Výsledný model ARIMA(2,1,2)-GARCH(1,1) vyjadruje nasledujúci vzťah

$$\hat{y}_t = 0,79482y_{t-2} - 0,81629\varepsilon_{t-2}$$

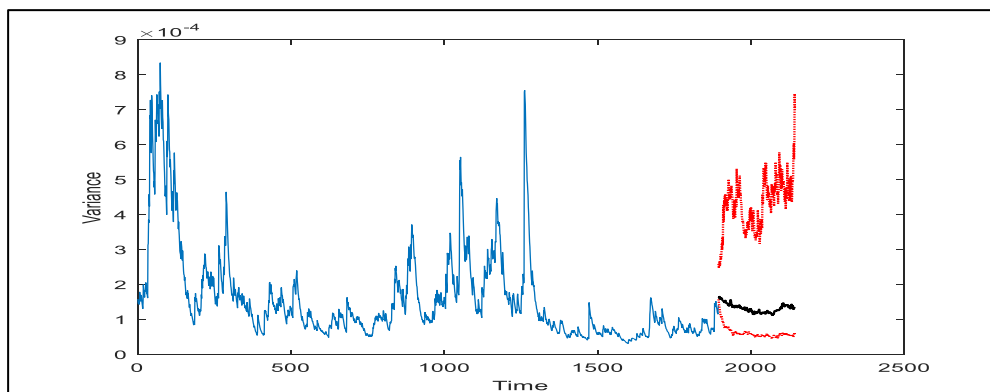
$$\varepsilon_t = \varepsilon_t\sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,000001718 + 0,068802\varepsilon_{t-i}^2 + 0,92106\sigma_{t-1}^2$$

Ešte predtým, ako pristúpime k samotnej predikcii cien, znázorníme priebeh volatility, ktorá je vyjadrená pomocou podmieneného rozptylu a odhadnutá modelom GARCH(1,1).



**Obr. 4.13** Vývoj podmieneného rozptylu

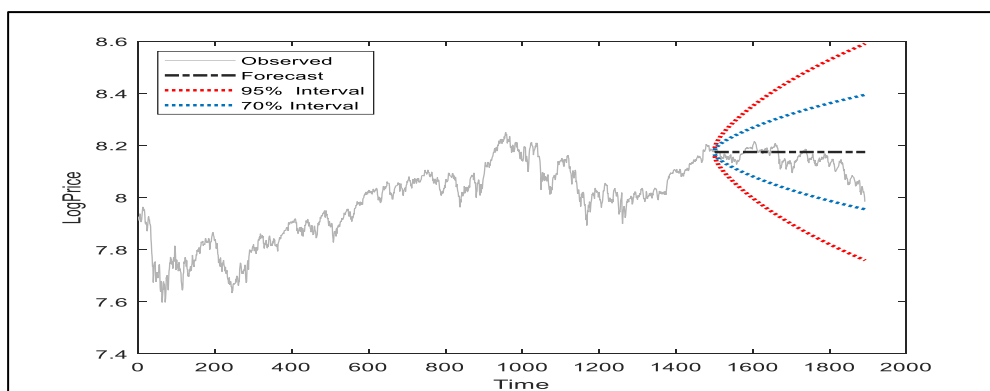


*Zdroj: vlastné spracovanie*

Obr. 4.13 znázorňuje priebeh dennej volatility akciového indexu Euro Stoxx 50 odhadnutý modelom GARCH(1,1). Modrou farbou je znázornený priebeh podmieneného rozptylu, ktorý je odhadnutý z historických hodnôt. Červenou farbou je zobrazený 95 % pravdepodobnostný interval očakávaného priebehu podmieneného rozptylu odhadnutého daným modelom. Pre nás najdôležitejšia je čierna línia, ktorá znázorňuje vývoj strednej hodnoty podmieneného rozptylu počas predikovaného obdobia.

Ďalej overíme predikčnú schopnosť modelu ARIMA(2,1,2)-GARCH(1,1) tým, že porovnáme skutočné a modelom odhadnuté hodnoty. Úspešnosť predikcie následne posúdime pomocou pravdepodobnostných intervalov a predikčných chýb MSE, RMSE a  $\sigma^2 MSE$ . Dĺžka predikcie je 393 krokov a ceny sú kvôli lepšej výpovednej schopnosti uvedené v logaritmoch.

**Obr. 4.14** Historická predikcia vývoja logaritmu ceny akciového indexu Euro Stoxx 50



*Zdroj: vlastné spracovanie*

Obr. 4.14 znázorňuje historickú predikciu logaritmov cien indexu Euro Stoxx 50 skonštruovanú pomocou modelu ARIMA(2,1,2)-GARCH(1,1). Odhadnutým modelom sú nasimu-

lované pravdepodobnostné intervaly a stredná hodnota očakávaného cenového pohybu. Červenou farbou je znázornený 95 % pravdepodobnostný interval a modrou farbou 70 % pravdepodobnostný interval očakávaného cenového pohybu. Predikovaná stredná hodnota je zobrazená čiernou farbou. Podľa nášho modelu by sa mala cena pohybovať do strany vo vyznačených pravdepodobnostných intervaloch. Nakoľko sa cena skutočne pohybovala do strany a po väčšinu sledovaného obdobia kopírovala vývoj strednej hodnoty odhadnutej modelom, môžeme danú predikciu považovať za úspešnú.

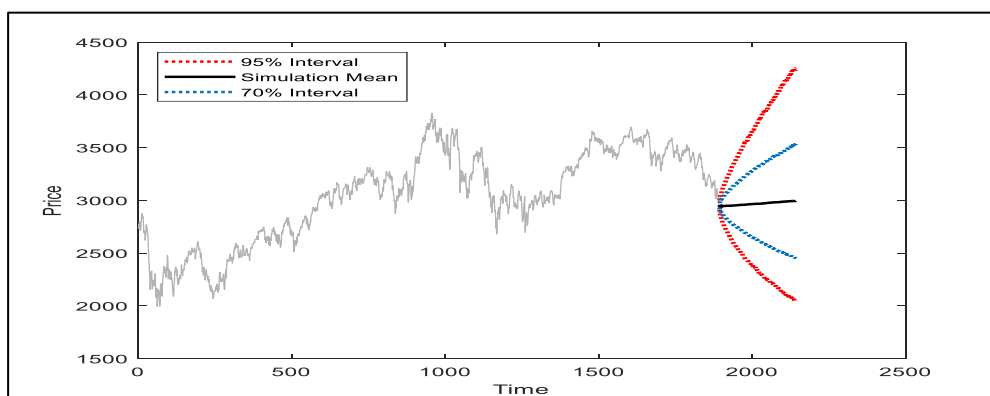
**Tab. 4.5 Predikčné chyby**

MSE	0,0029
RMSE	0,0536
$\sigma^2MSE$	1,831e-08

Tab. 4.5 znázorňuje údaje o chybách predikcie modelu ARIMA(2,1,2) – GARCH(1,1). Chybou predikcie máme na mysli rozdiel medzi skutočnou a odhadnutou strednou hodnotou indexu Euro Stoxx 50. Priemerná štvorcová chyba (MSE) vyšla 0,0029 a odmocnina z priemernej štvorcovej chyby (RMSE) vyšla 0,0536. Priemerná štvorcová chyba predikcie podmieneného rozptylu ( $\sigma^2MSE$ ) vyšla 1,831e-08. Uvedené hodnoty využijeme na medzi modelové porovnanie.

Model ARIMA(2,1,2)-GARCH(1,1) s normálnym rozdelením použijeme na predikciu cenového vývoja akciového indexu Euro Stoxx 50.

**Obr. 4.15 Predikcia vývoja ceny akciového indexu Euro Stoxx 50**



**Zdroj: vlastné spracovanie**

Na Obr. 4.15 je pomocou príslušných intervalov znázornený výsledok simulácie 10 000 scenárov možného vývoja ceny indexu. Časová dĺžka predikcie je 250 dní. Čiernou

farbou je zakreslený očakávaný vývoj strednej hodnoty. Červenou farbou je znázornený vonkajší 95 % pravdepodobnostné pásmo, modrou farbou zase vnútorný 70 % pravdepodobnostné pásmo očakávaného cenového pohybu. Konkrétne očakávané hodnoty sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

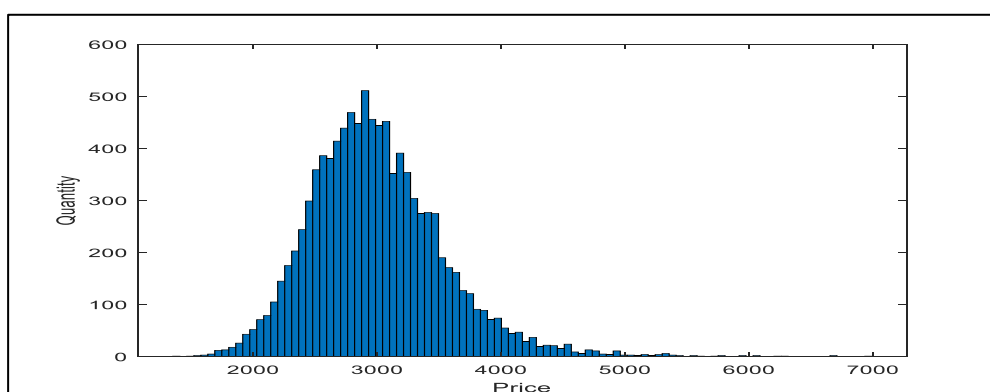
**Tab. 4.6 Predikčné intervaly v EUR**

	70 %	95 %
Horná hranica	3 537	4 254
Stredná hodnota	2 996	2 996
Dolná hranica	2 452	2 049

V Tab. 4.6 sú zobrazené očakávané ceny indexu Euro Stoxx 50 pre jednotlivé pravdepodobnostné pásma na konci predikovaného obdobia. Z uvedenej tabuľky vyplýva, že cena indexu by v nasledujúcom roku z 95 % pravdepodobnosťou nemala prekročiť hodnotu 4 254 EUR za jednotku a tiež by nemala poklesnúť pod hodnotu 2 049 EUR za jednotku. Ďalej môžeme konštatovať, že zo 70 % pravdepodobnosťou by cena indexu nemala prekročiť hodnotu 3 537 EUR za jednotku a tiež by nemala poklesnúť pod hodnotu 2 452 EUR za jednotku. Strednú hodnotu ceny sme na konci predikovaného obdobia odhadli na 2 996 EUR za jednotku.

Nakoniec znázorníme histogram pravdepodobnostného rozdelenia cien na konci predikovaného obdobia

**Obr. 4.15 Histogram rozdelenia cien na konci obdobia**



**Zdroj: vlastné spracovanie**

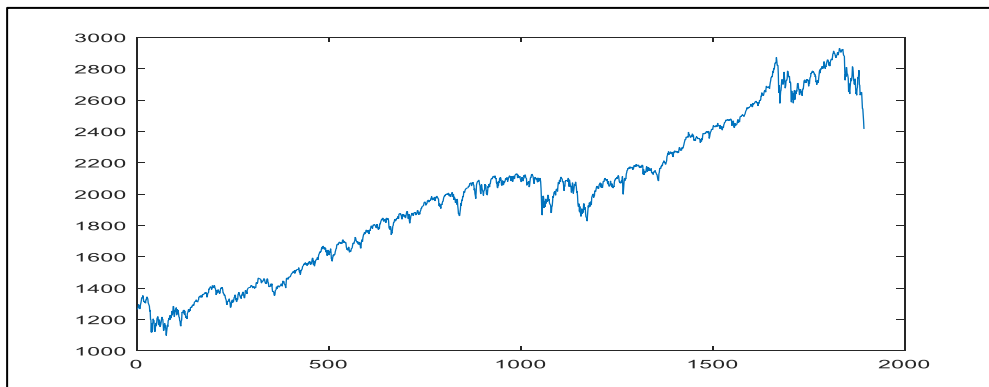
Na Obr. 4.15 je zobrazené rozdelenie odhadnutých cien akciového indexu Euro Stoxx 50 na konci predikovaného obdobia. Môžeme si všimnúť, že rozdelenie cien je rovnomerne rozdelené okolo strednej hodnoty, je to dôsledok toho, že očakávame vývoj okolo súčasných

hodnôt. Uvedený histogram tiež potvrdzuje záver , že ako najpravdepodobnejšia sa javí cena okolo 3 000 EUR za jednotku.

### 4.1.3 Akciový index S&P 500

Do tretice aplikujeme model ARIMA-GARCH na časovú radu akciového indexu S&P 500. Postup bude obdobný ako v dvoch predchádzajúcich prípadoch. Priebeh vývoja daného indexu zobrazuje Obr. 4.16.

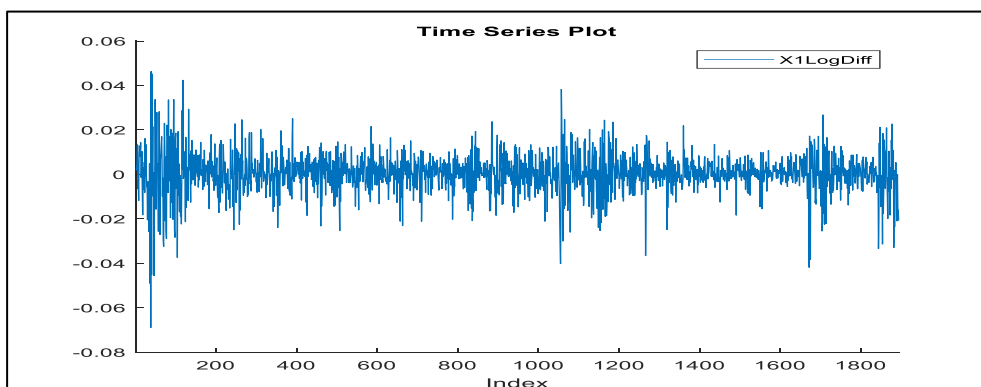
*Obr. 4.16 Denný vývoj ceny akciového indexu S&P 500*



*Zdroj: vlastné spracovanie*

Z uvedeného grafu je zrejmé, že časová rada je nestacionárna, preto ako prvé uskutočníme transformáciu na spojité výnosy. Najskôr časovú radu zlogaritmujeme a následne zdiferencujeme.

*Obr. 4.17 Vývoj denný výnosov akciového indexu S&P 500*

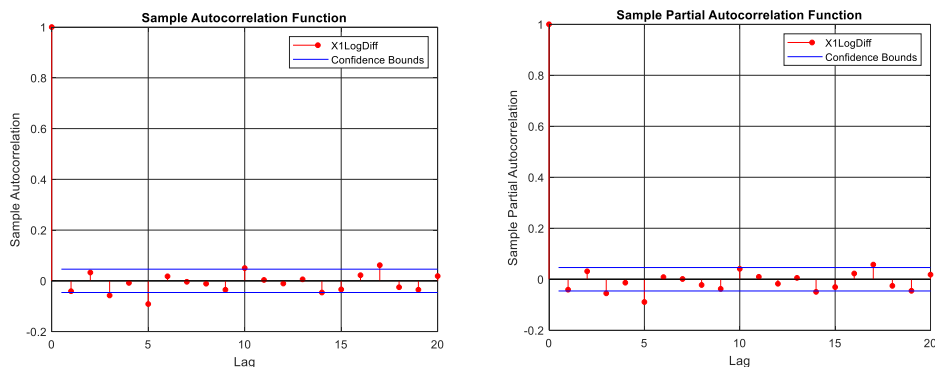


*Zdroj: vlastné spracovanie*

Obr. 4.17 znázorňuje časovú radu spojitéch výnosov indexu S&P 500. Pri pohľade na transformovanú časovú radu sa zdá, že už je stacionárna. Náš záver overíme pomocou KPSS testu na 5 % hladine významnosti, kde nulová hypotéza vyjadruje stacionaritu, alternatívna hypotéza nestacionaritu. Výsledok KPSS testu je, že nezamietame nulovú hypotézu ( $t \text{ vyp. } 0,0357 < t \text{ kryt. } 0,146$ ), teda že transformovaná časová rada spojitéch výnosov je stacionárna. Či je časová rada spojitéch výnosov homoskedastická alebo heteroskedastická, overíme pomocou ARCH-LM testu pre tri omeškania. Nulová hypotéza testu predstavuje homoskedasticitu, alternatívne hypotéza testu heteroskedasticitu. Výsledkom testu je zamietnutie nulovej hypotézy na 5 % hladine významnosti a teda prítomnosť ARCH efektu ( $t \text{ vyp. } 157 > t \text{ kryt. } 7,815$ ). Volatilitu teda môžeme modelovať pomocou modelu GARCH (1,1)

Pre transformovanú časovú radu spojitéch výnosov znázorníme AFC a PACF, ktoré sú zobrazené na Obr. 4.18.

**Obr. 4.18 ACF a PACF korelogram**



**Zdroj: vlastné spracovanie**

Pri pohľade na tvar korelogramov ACF a PACF opäť nie je vidieť žiadna významná hodnota, ktorá by jednoznačne určovala proces AR alebo MA. Časová rada môže predstavovať aj biely šum. Vhodný tvar operátorov AR a MA sa nedá jednoznačne určiť, preto budeme uvažovať viacero variant modelu, z ktorých vyberieme najlepší podľa informačného kritéria BIC.

**Tab. 4.7 Informačné kritéria BIC**

	<b>MA(1)</b>	<b>MA(2)</b>	<b>MA(3)</b>	<b>MA(4)</b>	<b>MA(5)</b>
<b>AR (1)</b>	-12 382	-12 370	-12 371	-12 366	-12 378
<b>AR (2)</b>	-12 368	-12 365	-12 366	-12 362	-12 373
<b>AR (3)</b>	-12 378	-12 361	-12 361	-12 357	-12 391
<b>AR (4)</b>	-12 359	-12 356	-12 357	-12 353	-12 393
<b>AR (5)</b>	-12 378	-12 374	-12 394	<b>-12 394</b>	-12 359

Tab. 4.7 zobrazuje výsledky jednotlivých variant autoregresného modelu. Najvhodnejšiu variantu vyberieme podľa minimálnej hodnoty BIC. Voči uvedeným variantám zohľadníme aj možnosť ARIMA(0,1,0) z hodnotou informačného kritéria BIC -12 377. Z uvedených variant sa ako najlepšie javí model ARIMA(5,1,4) z hodnotou informačného kritéria BIC -12 394, uvedený model ešte doplníme o model GARCH(1,1) a znova odhadneme.

**Obr. 4.19 Odhad modelu ARIMA-GARCH**

ARIMA(4,1,4) Model (Gaussian Distribution)					ARIMA(5,1,4) Model (Gaussian Distribution)				
Effective Sample Size: 1894 Number of Estimated Parameters: 8 LogLikelihood: 6515.83 AIC: -13015.7 BIC: -12971.3					Effective Sample Size: 1894 Number of Estimated Parameters: 13 LogLikelihood: 6521.08 AIC: -13016.2 BIC: -12944.1				
Value	StandardError	TStatistic	PValue		Value	StandardError	TStatistic	PValue	
Constant	0.00090459	0.00027922	3.2397	0.0011965	Constant	0.00085742	0.0014695	0.58346	0.55959
AR{3}	-0.57937	0.15628	-3.7073	0.00020949	AR{1}	0.52424	2.4254	0.21614	0.82888
AR{4}	0.37242	0.14424	2.582	0.0098235	AR{2}	-0.12833	1.9461	-0.065944	0.94742
MA{3}	0.55171	0.15384	3.5862	0.00033551	AR{3}	-0.016167	1.0883	-0.014856	0.98815
MA{4}	-0.41092	0.1445	-2.8437	0.0044591	AR{4}	-0.50473	1.6108	-0.31333	0.75403
GARCH(1,1) Conditional Variance Model (Gaussian Distribution)					GARCH(1,1) Conditional Variance Model (Gaussian Distribution)				
Value	StandardError	TStatistic	PValue		Value	StandardError	TStatistic	PValue	
Constant	3.9481e-06	7.0399e-07	5.6082	2.0444e-08	MA{1}	-0.57854	2.4264	-0.23844	0.81154
GARCH{1}	0.77109	0.018632	41.385	0	MA{2}	0.16122	2.064	0.078111	0.93774
ARCH{1}	0.18545	0.015939	11.635	2.7214e-31	MA{3}	-0.0098574	1.1047	-0.0089232	0.99288
					GARCH(1,1) Conditional Variance Model (Gaussian Distribution)				
					Value	StandardError	TStatistic	PValue	
					Constant	3.8558e-06	7.1718e-07	5.3763	7.6027e-08
					GARCH{1}	0.77196	0.019173	40.263	0
					ARCH{1}	0.18567	0.016138	11.506	1.2356e-30

*Zdroj: vlastné spracovanie*

Na Obr. 4.19 sú zobrazené štatistiky odhadnutého modelu ARIMA(5,1,4)-GARCH(1,1) s normálnym rozdelením odhadnutého metódou maximálnej vierohodnosti. Uvedený model je absolútne nevhodný, nakoľko nedisponuje ani jedným významným parametrom. Po viacerých odhadoch a úpravách vyšiel ako najvhodnejší model ARIMA(4,1,4)-GARCH(1,1) zložený z operátorov AR(3,4) a MA(3,4). Súhrnné štatistiky uvedeného modelu sú zobrazené na obrázku vľavo. Všetky parametre výsledného modelu ARIMA-GARCH sú už štatisticky významné, hodnota BIC poklesla na -12 971, čo vyjadruje zlepšenie kvality modelu. Súčet parametrov modelu GARCH sa blíži jednej.

Výsledný model ARIMA(4,1,4) - GARCH(1,1) vyjadruje nasledujúci vzťah

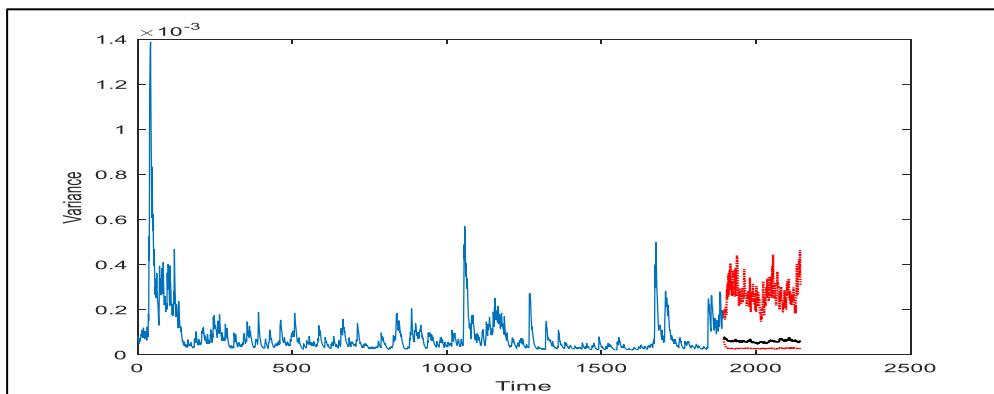
$$\hat{y}_t = 0,0009046 - 0,5794y_{t-3} + 0,37242y_{t-4} + 0,55171\varepsilon_{t-3} - 0,41092\varepsilon_{t-4}$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,0000039481 + 0,18545^2_{t-i} + 0,77109\sigma_{t-1}^2$$

Predtým ako pristúpime k samotnej predikcii cien, znázorníme priebeh volatility, ktorá je vyjadrená pomocou podmieneného rozptylu a odhadnutá modelom GARCH(1,1).

**Obr. 4.20** Vývoj podmieneného rozptylu

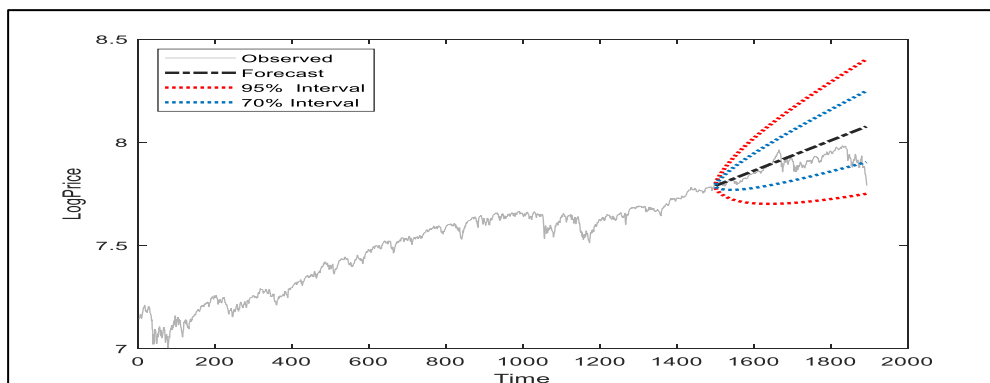


**Zdroj:** vlastné spracovanie

Na Obr. 4.20 je pomocou podmieneného rozptylu znázornený priebeh dennej volatility akciového indexu S&P 500. Modrou farbou je znázornený priebeh podmieneného rozptylu odhadnutého na historických hodnotách, červenou farbou zase 95 % pravdepodobnostný interval očakávaného priebehu podmieneného rozptylu odhadnutého týmto modelom. Pre nás najdôležitejšia je čierna línia, ktorá znázorňuje vývoj strednej hodnoty podmieneného rozptylu počas predikovaného obdobia.

Predikčnú schopnosť modelu ARIMA(4,1,4)-GARCH(1,1) overíme tým, že porovnáme skutočné a modelom odhadnuté hodnoty. Úspešnosť predikcie následne posúdime pomocou pravdepodobnostných intervalov a predikčných chýb MSE, RMSE a  $\sigma^2 MSE$ . Dĺžka predikcie je 393 krokov a ceny sú kvôli lepšej výpovednej schopnosti uvedené v logaritmoch.

**Obr. 4.21** Historická predikcia vývoja logaritmu ceny akciového indexu S&P 500



**Zdroj:** vlastné spracovanie

Obr. 4.21 znázorňuje historickú predikciu logaritmov cien indexu S&P 500 skonštruovanú pomocou modelu ARIMA(4,1,4) – GARCH(1,1). Odhadnutým modelom sú nasimulované pravdepodobnostné intervaly a stredná hodnota očakávaného cenového pohybu. Červenou farbou je znázornený 95 % pravdepodobnostný interval a modrou farbou 70 % pravdepodobnostný interval cenového pohybu. Predikovaná stredná hodnota je zobrazená čiernou farbou. Podľa uvedeného modelu by mala cena počas sledovaného obdobia rásť vo vyznačených pravdepodobnostných intervaloch. Väčšinu sledovaného obdobia cenový vývoj skutočne korešpondoval s predikovanou strednou hodnotou, ku koncu obdobia však došlo k prepadu, ktorý skončil tesne nad 95 % pravdepodobnostným intervalom.

**Tab. 4.8** Chyby predikcie

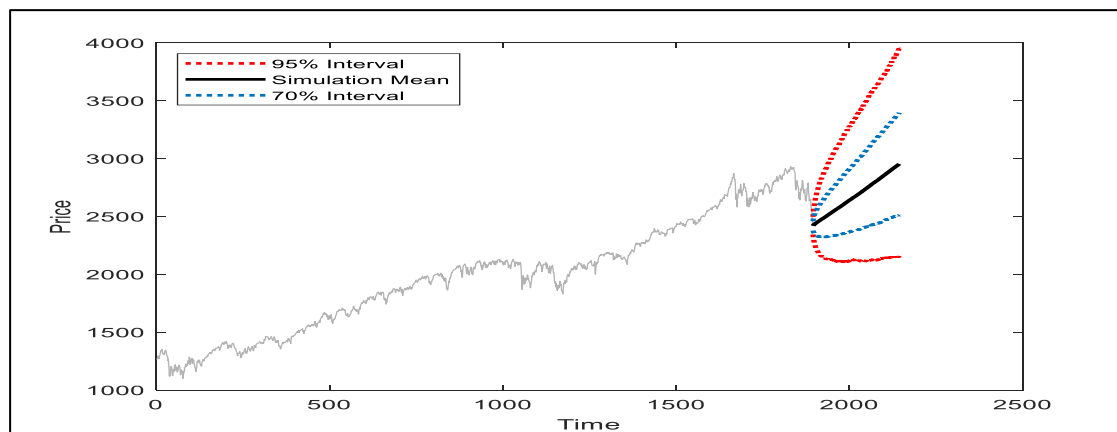
MSE	0,0058
RMSE	0,0763
$\sigma^2 MSE$	3,1232e-08

Tab. 4.8 znázorňuje údaje o chybách predikcie modelu ARIMA(4,1,4) – GARCH(1,1). Priemerná štvorcová chyba (MSE) vyšla 0,0058, odmocnina z priemernej štvorcovej chyby (RMSE) vyšla 0,0763. Priemerná štvorcová chyba predikcie podmieneného rozptylu ( $\sigma^2 MSE$ ) vyšla 3,1232e-08. Uvedené hodnoty využijeme na medzi modelové porovnanie.

Model ARIMA(4,1,4) - GARCH(1,1) s normálnym rozdelením použijeme na predikciu budúcich cien akciového indexu S&P 500.



**Obr. 4.21** Predikcia vývoja ceny akciového indexu S&P 500



*Zdroj: vlastné spracovanie*

Na Obr. 4.21 je pomocou príslušných intervalov a strednej hodnoty znázornený výsledok simulácie 10 000 scenárov možného vývoja ceny indexu. Časová dĺžka predikcie je 250 dní. Čiernou farbou je zakreslený očakávaný vývoj strednej hodnoty. Červenou farbou je znázornený vonkajšie 95 % pravdepodobnostné pásmo, modrou farbou zase vnútorné 70 % pravdepodobnostné pásmo očakávaného cenového pohybu. Konkrétne predikované hodnoty sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

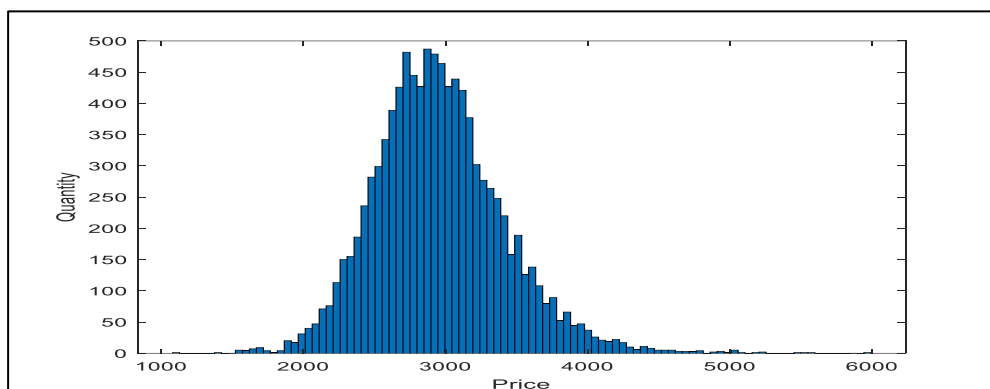
**Tab. 4.9** Predikčné intervaly v USD

	70 %	95 %
Horná hranica	3 397	3 950
Stredná hodnota	2 954	2 954
Dolná hranica	2 511	2 148

Tab. 4.9 sú zobrazené očakávané hodnoty indexu S&P 500 pre jednotlivé pravdepodobnostné pásma na konci obdobia. Z uvedenej tabuľky vyplýva, že cena indexu by v nasledujúcom roku z 95 % pravdepodobnosťou nemala prekročiť hodnotu 3 950 USD za jednotku a tiež by nemala poklesnúť pod hodnotu 2 148 USD za jednotku. Ďalej môžeme konštatovať, že zo 70 % pravdepodobnosťou by cena indexu nemala prekročiť hodnotu 3 397 USD za jednotku a tiež by nemala poklesnúť pod hodnotu 2 511 USD za jednotku. Strednú hodnotu ceny sme na konci predikovaného obdobia odhadli na 2 954 USD za jednotku.

Nakoniec znázorníme histogram pravdepodobnostného rozdelenia cien na konci predikovaného obdobia

**Obr. 4.22** Histogram rozdelenia cien na konci obdobia



*Zdroj: vlastné spracovanie*

Na Obr. 4.22 je zobrazené rozdelenie odhadnutých cien akciového indexu S&P 500 na konci predikovaného obdobia. Histogram rozdelenia cien vykazuje znaky normálneho rozdelenia, ktoré je mierne pravostranne zošikmené. Je to dané tým, že akciový index S&P 500 mal počas predikovaného obdobia tendenciu viac rásť ako klesať. Podľa uvedeného histogramu môžeme potvrdiť predchádzajúci záver, že ako najpravdepodobnejšia sa javí cena okolo 3 000 USD za jednotku.

## Model GBM

Simulácia a následná predikcia ceny akciových indexov bude prebiehať pomocou metódy priamej simulácie Monte Carlo, kde náhodné prvky pochádzajú z normálneho rozdelenia pravdepodobnosti. Ako prvé odhadneme pomocou deskriptívnej štatistiky parametre modelu GBM. Následne nato odhadnutý model overíme simuláciou minulých hodnôt o dĺžke 1 893 krokov. Simuláciu zopakujeme na vzorke 393 posledných pozorovaní a následne overíme presnosť predikcie porovnaním odhadnutých a skutočných hodnôt, z ktorých vypočítame kritéria MSE a RMSE. Nakoniec určíme pravdepodobnostné intervaly predikovaného cenového rozpätia, ktoré zhrnieme v príslušných tabuľkách a tiež ich zachytíme pomocou histogramu rozdelenia cien. Model GBM vyjadríme vzťahom (3.74).

#### 4.1.4 Akciový index DAX 30

Ako prvý zakonštruujeme model GBM pre časovú radu indexu DAX 30. Aby sme mohli skonštruovať GBM, musíme najskôr vypočítať požadované parametre.

Tab. 4.10 Parametre modelu GBM

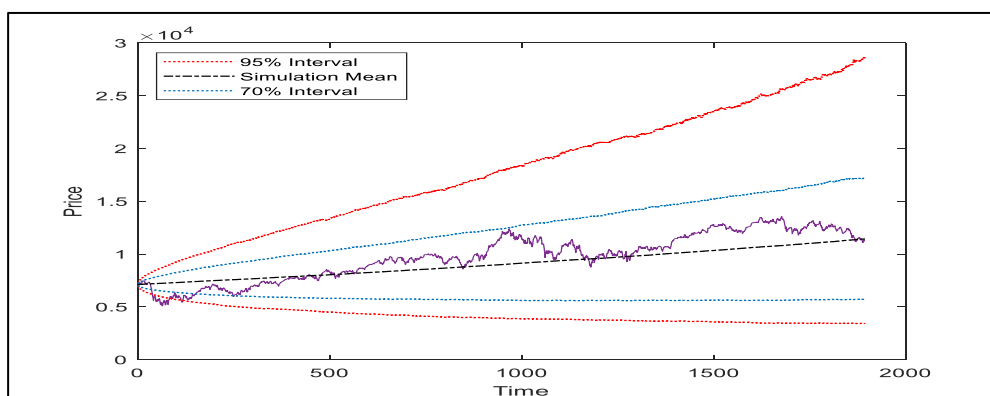
Stredná hodnota	$\mu$	6,11 %
Smer. Odchylka	$\sigma$	19,55 %
Interval	$\Delta t$	0,004
Začiatková cena	$S_0$	7 115 EUR
Konečná cena	$S_x$	11 299 EUR
Počet Krokov	$k$	250 dní

Tab. 4.10 znázorňuje odhadnuté parametre GBM pre časovú radu spojitých výnosov indexu DAX 30. Stredná hodnota výnosu vyšla 6,11 % p.a., smerodajná odchýlka 19,55 % p.a. Začiatková cena indexu 15. júna 2011 bola 7 115 EUR za jednotku, konečná cena 28. novembra 2018 je 11 299 EUR za jednotku. Časový interval je zvolený na jeden obchodný deň. Získané parametre dosadíme do vzťahu (3.74), čím získame cenu v čase jedna.

$$S_1 = 7\,115 \cdot \exp \left[ \left( 0,0611 - \frac{0,1995^2}{2} \right) \cdot 0,004 + 0,1995 \cdot \sqrt{0,004} \cdot \varepsilon^i \right].$$

To, či je získaný model správny, overíme na minulých hodnotách, pričom sa opäť zameriame na simuláciu strednej hodnoty a príslušných pravdepodobnostných intervalov.

Obr. 4.23 GBM pre ceny akciového indexu DAX 30

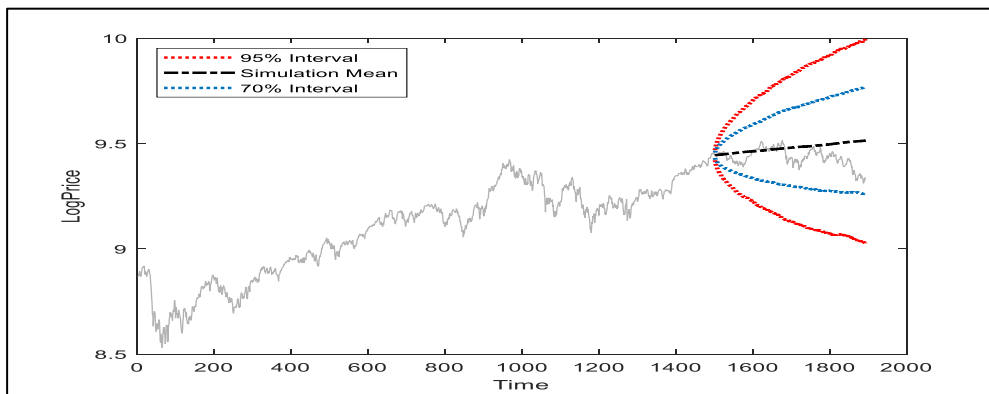


Zdroj: vlastné spracovanie

Obr. 4.23 znázorňuje simuláciu vývoja strednej hodnoty a príslušných pravdepodobnostných intervalov akciového indexu DAX 30. Zameriame sa hlavne na priebeh strednej hodnoty. Cenový pohyb po celé obdobie kopíruje strednú hodnotu, pričom na konci sú obe hodnoty (cena aj stredná hodnota) totožné, čo potvrdzuje správnosť odhadnutého modelu. Ďalej je zaujímavé, že na vykreslenie cenového pohybu, až na krátky okamih na začiatku obdobia postačoval 70 % pravdepodobnostný interval.

Predikciu zopakujeme na 393 posledných hodnotách časovej rady. Úspešnosť predikcie vyhodnotíme pomocou pravdepodobnostných intervalov a predikčných chýb MSE, RMSE. Kvôli medzi modelovému porovnaniu budeme pracovať s logaritmi cien.

**Obr. 4.24** *Predikcia minulých logaritmických cien uskutočnená modelom GBM*

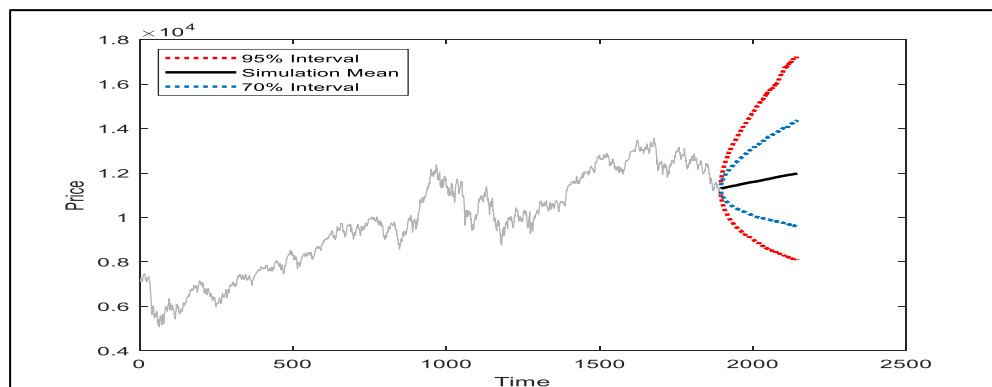


**Zdroj:** *vlastné spracovanie*

Obr. 4.24 znázorňuje historickú predikciu logaritmov cien indexu DAX 30 skonštruovanú modelom GBM. Vývoj odhadovanej strednej hodnoty korešponduje so skutočným pohybom ceny, preto môžeme túto predikciu hodnotiť pozitívne. Pre presnú kvantifikáciu presnosti predikcie použijeme priemernú štvorcovú chybu (MSE) ktorá vyšla 0,0049 a odmocnina z priemernej štvorcovej chyby (RMSE) ktorá vyšla 0,0702.

Potom ako sme overili získaný model na minulých dátach, pristúpime k samotnej predikcii budúcich cien indexu DAX 30.

**Obr. 4.25** Predikcia ceny akciového indexu DAX 30 uskutočnená modelom GBM



**Zdroj:** vlastné spracovanie

Na Obr. 4.25 sú znázornené predikčné intervaly a stredná hodnota očakávaného cenového pohybu akciového indexu DAX 30. Pripomenieme, že časová dĺžka predikčného intervalu je 250 dní a ceny v grafe sú uvedené krát  $10^4$ . Čiernou farbou je vykreslená predikovaná stredná hodnota, podľa ktorej môžeme očakávať počas predikovaného obdobia mierny rásť. Modrá farba vyznačuje 70 % pravdepodobnostný interval, červenou farbou je vyznačený 95 % pravdepodobnostný interval očakávaného cenového pohybu. Konkrétne predikované hodnoty uvádza nasledujúca tabuľka

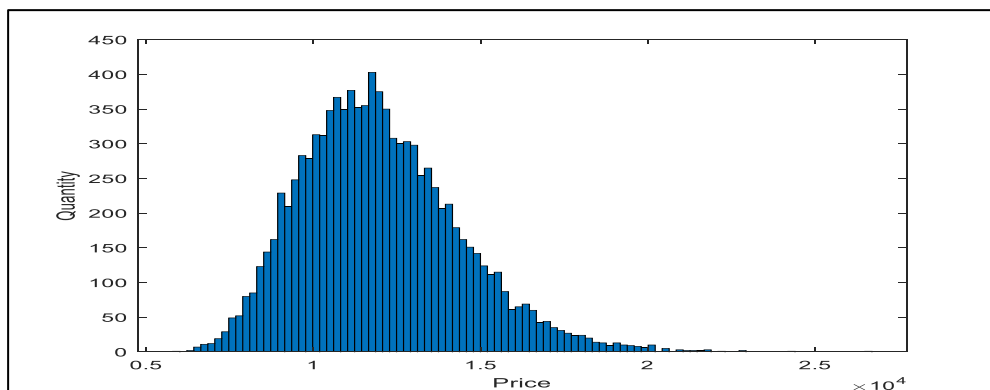
**Tab. 4.11** predikčné intervaly v EUR

	70 %	95 %
Horná hranica	14 459	17 279
Stredná hodnota	12 051	12 051
Dolná hranica	9 687	8 043

Tab. 4.11 zobrazuje očakávané hodnoty indexu DAX 30 na konci predikovaného obdobia. Z uvedenej tabuľky vyplýva, že cena indexu DAX 30 by v nasledujúcom roku z 95 % pravdepodobnosťou nemala prekročiť hodnotu 17 279 EUR za jednotku a taktiež by nemala poklesnúť pod hodnotu 8 043 EUR za jednotku. Ďalej konštatujeme, že zo 70 % pravdepodobnosťou by cena indexu nemala prekročiť hodnotu 14 459 EUR za jednotku a tiež by nemala poklesnúť pod hodnotu 9 687 EUR za jednotku. Strednú hodnotu ceny sme na konci predikovaného odhadli na 12 051 EUR za jednotku. Z ohľadom na predošlé výsledky predikcií môžeme očakávať cenový vývoj v rámci 70 % pravdepodobnostného pásma.

Pre úplnosť znázorníme histogram pravdepodobnostného rozdelenia cien na konci predikovaného obdobia.

**Obr. 4.26** Histogram rozdelenia cien na konci obdobia



*Zdroj: vlastné spracovanie*

Obr. 4.26 zobrazuje rozdelenie cien indexu DAX 30 na konci predikovaného obdobia. Konečné ceny vykazujú znaky normálneho rozdelenia, ktoré je pravostranne zošikmené. Je to dané tým, že akciové indexy majú historicky viac tendenciu rásť ako klesať. Uvedený histogram tiež potvrdzuje predošlý záver, že ako najpravdepodobnejšia sa javí hodnota okolo 12 000 EUR za jednotku.

#### 4.1.5 Akciový index EuroStoxx 50

Po druhé skonštruujeme model GBM pre časovú radu indexu Euro Stoxx 50.

**Tab. 4.13** parametre modelu GBM

Stredná hodnota	$\mu$	0,96 % p. a.
Smer. Odchýlka	$\sigma$	19,92 % p. a.
Interval	$\Delta t$	0,004
Začiatková cena	$S_0$	2 731 EUR
Konečná cena	$S_T$	2 937 EUR

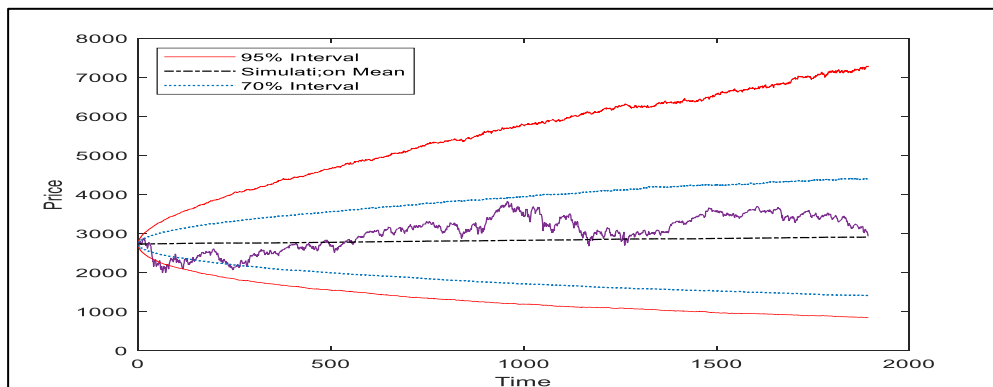
Tab. 4.13 znázorňuje odhadnuté parametre modelu GBM pre časovú radu spojitých výnosov indexu Euro Stoxx 50. Stredná hodnota výnosu je 0,96 % p. a., smerodajná odchýlka 19,92 % p. a. Úvodná cena indexu bola 15. júna 2011 2 731 EUR za jednotku, konečná cena je 28. novembra 2018 je 2 937 EUR za jednotku.

Získané parametre dosadíme do vzťahu, čím dostaneme cenu v čase jedna

$$S_1 = 2\,731 \cdot \exp \left[ \left( 0,00096 - \frac{0,1992^2}{2} \right) \cdot 0,004 + 0,1992 \cdot \sqrt{0,004} \cdot \varepsilon^i \right].$$

Správnosť modelu overíme na minulých hodnotách, pričom sa zameriame na simuláciu strednej hodnoty a príslušných pravdepodobnostných intervalov.

**Obr. 4.28** GBM pre ceny akciového indexu Euro Stoxx 50

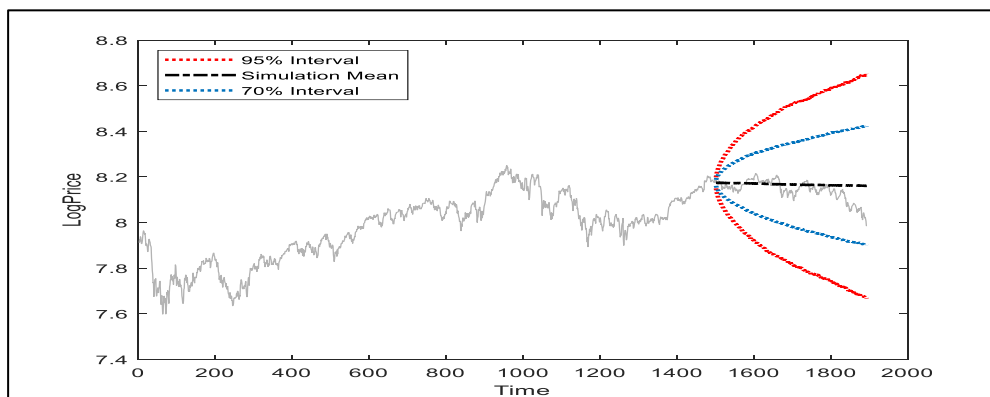


*Zdroj: vlastné spracovanie*

Obr. 4.28 znázorňuje simuláciu strednej hodnoty a príslušných pravdepodobnostných intervalov akciového indexu Euro Stoxx 50. Zameriame sa hlavne na priebeh strednej hodnoty. Je evidentné, že cenový pohyb po celé obdobie osciluje okolo strednej hodnoty, pričom nakonci sú obe hodnoty (cena a stredná hodnota) totožné, čo potvrdzuje správnosť modelu. Ako pri predošlom indexe DAX 30, aj tu platí, že na zachytenie cenového pohybu postačuje 70 % pravdepodobnostný interval. Výnimku tvorí len krátky časový okamih na začiatku sledovaného obdobia, kedy cena uvedený interval prerazila.

Predikciu zopakujeme na 393 posledných hodnotách časovej rady. Úspešnosť predikcie vyhodnotíme pomocou pravdepodobnostných intervalov a predikčných chýb MSE, RMSE. Kvôli medzi modelovému porovnaniu budeme pracovať s logaritmi cen.

**Obr. 4.29** Predikcia minulých logaritmických cien uskutočnená modelom GBM

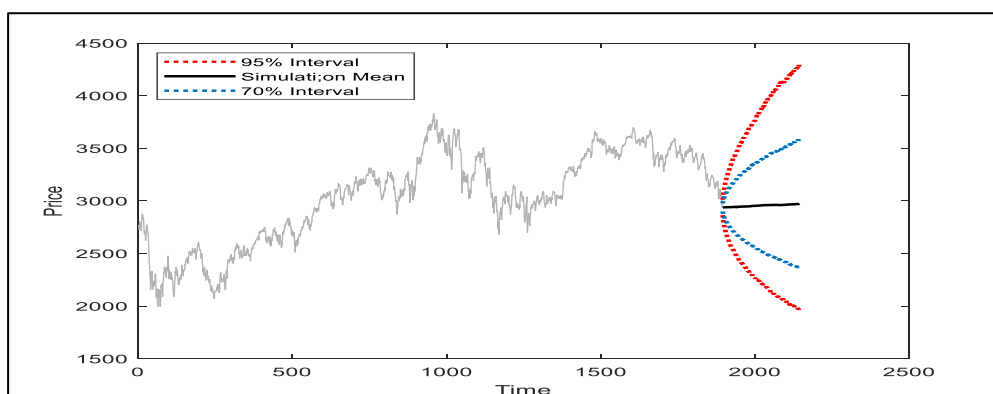


*Zdroj: vlastné spracovanie*

Obr. 4.29 znázorňuje historickú predikciu logaritmov cien indexu Euro Stoxx 50 skonštruovanú modelom GBM. Vývoj odhadovanej strednej hodnoty kopíroval skutočným pohyb ceny, preto môžeme túto predikciu hodnotiť pozitívne. Pre presnú kvantifikáciu presnosti predikcie použijeme priemernú štvorcovú chybu (MSE) ktorá vyšla 0,0023 a odmocninu z priemernej štvorcovej chyby (RMSE) ktorá vyšla 0,048.

Potom, ako sme na minulých dátach overili odhadnutý model, pristúpime k samotnej predikcii budúcich cien indexu EuroStoxx 50.

**Obr. 4.30 Predikcia ceny akciového indexu Euro Stoxx 50 modelom GBM**



**Zdroj: vlastné spracovanie**

Na Obr. 4.30 sú znázornené predikčné intervaly a stredná hodnota predikovaného cenového pohybu akciového indexu Euro Stoxx 50. Pripomenieme, že časová dĺžka predikčného intervalu je 250 dní. Čiernou farbou je vykreslená predikovaná stredná hodnota, ktorá sa pohybuje horizontálne, na konci predikčného obdobia teda môžeme očakávať rovnakú cenu aká je v súčasnosti. Modrá farba vyznačuje 70 % pravdepodobnostný interval, červenou farbou je vyznačený 95 % pravdepodobnostný interval očakávaného cenového pohybu. Konkrétne očakávané hodnoty sú uvedené v nasledujúcej tabuľke

**Tab. 4.14 predikčné intervaly v EUR**

	70 %	95 %
Horná hranica	3 560	4 328
Stredná hodnota	2 964	2 964
Dolná hranica	2 362	1 963

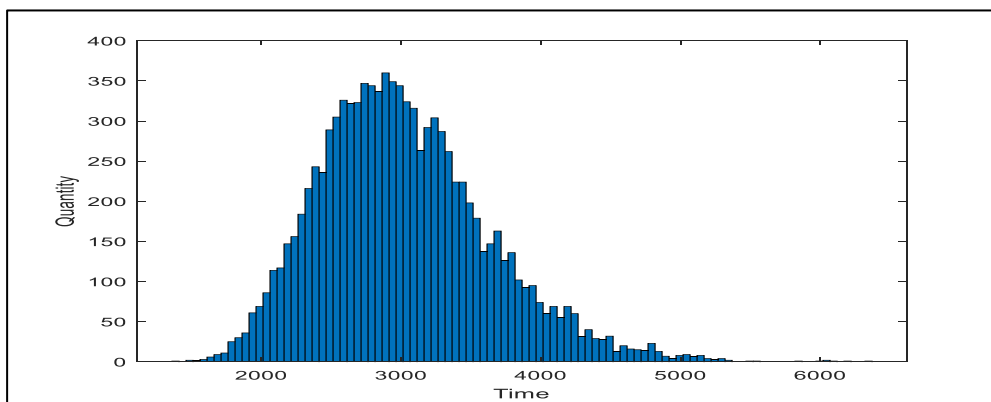
Tab. 4.14 zobrazuje očakávané hodnoty indexu EuroStoxx 50 na konci predikovaného obdobia. Z uvedenej tabuľky vyplýva, že cena indexu DAX 30 by v nasledujúcom roku s 95



% pravdepodobnosťou nemala prekročiť hodnotu 4 328 EUR za jednotku a taktiež by nemala poklesnúť pod hodnotu 1 963 EUR za jednotku. Ďalej konštatujeme, že s 70 % pravdepodobnosťou by cena indexu nemala prekročiť hodnotu 3 560 EUR za jednotku a tiež by nemala poklesnúť pod hodnotu 2 362 EUR za jednotku. Strednú hodnotu ceny sme na konci predikovaného odhadli na 2964 EUR za jednotku. Po zohľadnení predošlých analýz môžeme očakávať cenový vývoj v rámci 70 % pravdepodobnostného pásma.

Pre úplnosť znázorníme histogram pravdepodobnostného rozdelenia cien na konci predikovaného obdobia.

**Obr. 4.31** Histogram rozdelenia cien na konci obdobia



*Zdroj: vlastné spracovanie*

Obr. 4.31 zobrazuje rozdelenie cien indexu Euro Stoxx 50 na konci predikovaného obdobia. Môžeme si všimnúť, že rozdelenie cien je rovnomerne rozdelené okolo strednej hodnoty, je to dôsledok toho, že sa očakáva vývoj okolo súčasných hodnôt. Ďalej je možné vyvodit' záver, že ako najpravdepodobnejšia sa na konci predikovaného obdobia javí cena okolo 2 900 EUR za jednotku.

#### 4.1.6 Akciový index S&P 500

Naposledy aplikujeme model GBM na časovú radu akciového indexu S&P 500. Postup bude totožný ako pri predošlých dvoch indexoch. Ako prvé odhadneme parametre GBM

**Tab. 4.16 Parametre modelu GBM**

Stredná hodnota	$\mu$	8,54 % p. a.
Smer. Odchýlka	$\sigma$	14,53 % p. a.
Interval	$\Delta t$	0,004
Začiatková cena	$S_0$	1 265 USD
Konečná cena	$S_T$	2 416 USD

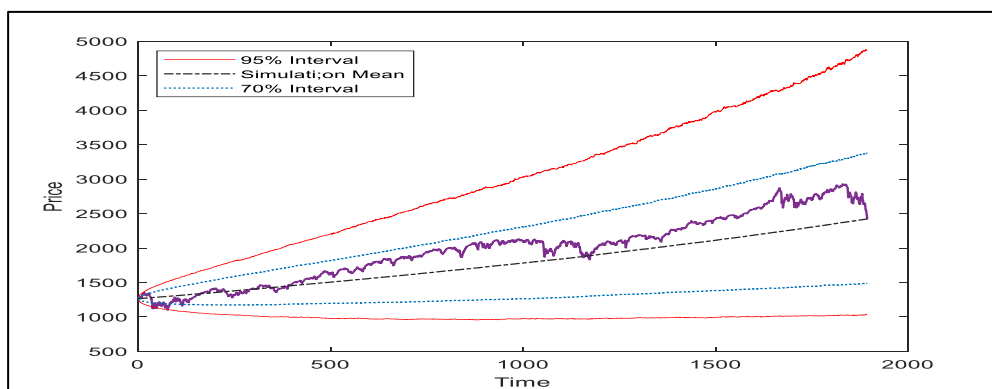
Tab. 4.16 znázorňuje odhadnuté parametre GBM pre časovú radu spojitých výnosov indexu S&P 500. Stredná hodnota výnosu je 8,54 % p.a., smerodajná odchýlka 14,53 % p.a. Začiatková cena indexu 15. júna 2011 bola 1 265 USD za jednotku a konečná cena je 28. novembra 2018 je 2 416 USD za jednotku. Časový interval je zvolený na jeden obchodný deň.

Získané parametre dosadíme do vzťahu, čím dostaneme cenu v čase jedna.

$$S_t = 1\,265 \cdot \exp \left[ \left( 0,00854 - \frac{0,1453^2}{2} \right) \cdot 0,004 + 0,1453 \cdot \sqrt{0,004} \cdot \varepsilon^i \right]$$

Správnosť modelu overíme na minulých hodnotách. Opäť sa zameriame na simuláciu strednej hodnoty a príslušných pravdepodobnostných intervalov.

**Obr. 4.33 GBM pre ceny akciového indexu S&P 500**

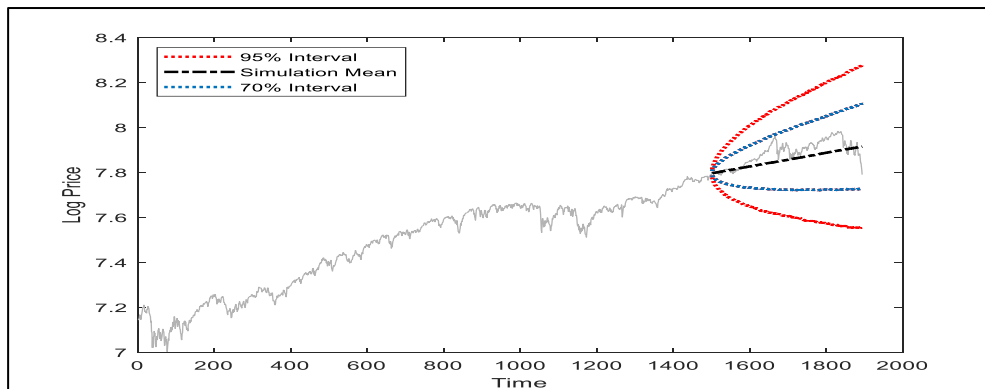


**Zdroj: vlastné spracovanie**

Obr. 4.33 znázorňuje simuláciu strednej hodnoty a príslušných pravdepodobnostných intervalov akciového indexu S&P 500. Zameriame sa hlavne na priebeh strednej hodnoty. Je zrejmé, že cenový pohyb po celé obdobie kopíruje strednú hodnotu. Na konci obdobia sú obe hodnoty (cena a stredná hodnota) totožné, čo potvrdzuje správnosť modelu. Znova platí, že na zachytenie cenového pohybu postačuje 70 % pravdepodobnostný interval.

Predikciu zopakujeme na 393 posledných hodnotách časovej rady. Úspešnosť predikcie vyhodnotíme pomocou pravdepodobnostných intervalov a predikčných chýb MSE, RMSE. Kvôli medzi modelovému porovnaniu budeme pracovať s logaritmi cen.

**Obr. 4.34** *Predikcia minulých logaritmických cien uskutočnená modelom GBM*

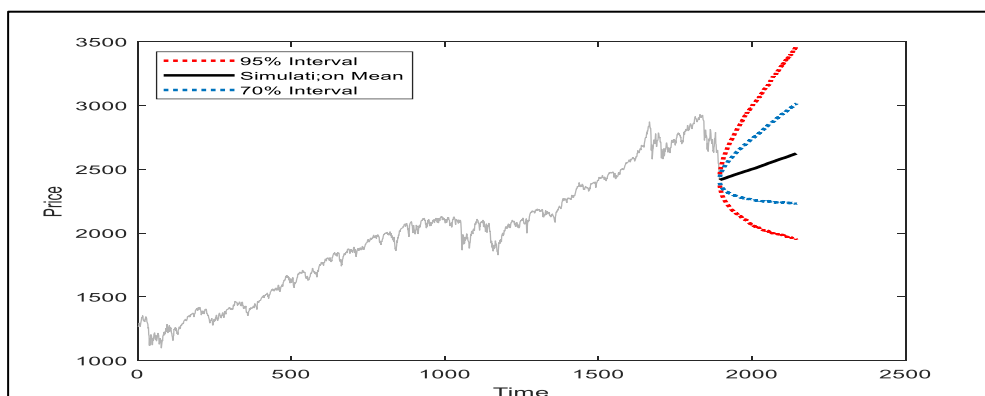


*Zdroj: vlastné spracovanie*

Obr. 4.24 znázorňuje historickú predikciu logaritmov cien indexu S&P 500 skonštruovanú modelom GBM. Vývoj odhadovanej strednej hodnoty korešponduje so skutočným pohybom ceny, preto môžeme túto predikciu hodnotiť pozitívne. Pre presnú kvantifikáciu presnosti predikcie použijeme priemernú štvorcovú chybu (MSE) ktorá vyšla 0,0022 a odmocnina z priemernej štvorcovej chyby (RMSE) ktorá vyšla 0,0465.

Potom, ako sme na minulých dátach overili odhadnutý model, pristúpime k samotnej intervalovej predikcii budúcich cien indexu S&P 500.

**Obr. 4.35** *Predikcia ceny akciového indexu S&P 500 uskutočnená modelom GBM*



*Zdroj: vlastné spracovanie*

Na Obr. 4.35 sú znázornené predikčné intervaly a stredná hodnota očakávaného cenového pohybu akciového indexu S&P 500. Časová dĺžka predikčného intervalu je 250 dní. Čiernou farbou je vykreslená predikovaná stredná hodnota, podľa ktorej môžeme očakávať počas predikovaného obdobia rastový vývoj ceny indexu. Modrá farba vyznačuje 70 % pravdepodobnostný interval, červenou farbou je vyznačený 95 % pravdepodobnostný interval očakávaného cenového pohybu. Konkrétne očakávané hodnoty uvádza nasledujúca tabuľka

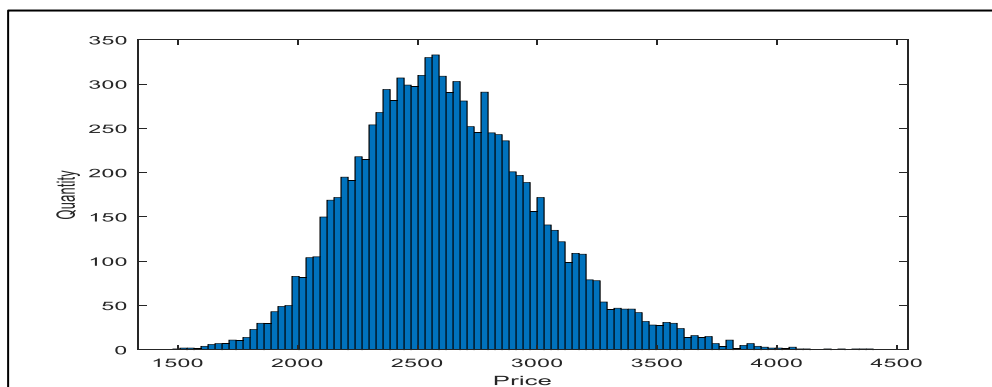
**Tab. 4.17 Predikčné intervaly v USD**

	70 %	95 %
Horná hranica	3 024	3 462
Stredná hodnota	2 626	2 626
Dolná hranica	2 235	1 942

Tab. 4.17 zobrazuje očakávané hodnoty indexu S&P 500 na konci predikovaného obdobia. Z uvedenej tabuľky vyplýva, že cena indexu S&P 500 by v nasledujúcom roku z 95 % pravdepodobnosťou nemala prekročiť hodnotu 3 462 USD za jednotku a taktiež by nemala poklesnúť pod hodnotu 1 942 USD za jednotku. Ďalej odhadujeme, že zo 70 % pravdepodobnosťou by cena indexu nemala prekročiť hodnotu 3 024 USD za jednotku a tiež by nemala poklesnúť pod hodnotu 2 235 USD za jednotku. Strednú hodnotu ceny sme na konci predikovaného odhadli na 2 626 USD za jednotku. Z ohľadom na predošlé analýzy môžeme cenový vývoj očakávať v rámci 70 % pravdepodobnostného pásma.

Pre úplnosť znázorníme histogram pravdepodobnostného rozdelenia cien na konci predikovaného obdobia.

**Obr. 4.36 Histogram rozdelenia cien na konci obdobia**



**Zdroj: vlastné spracovanie**

Obr. 4.26 zobrazuje rozdelenie cien indexu S&P 500 na konci predikovaného obdobia. Konečné ceny vykazujú znaky normálneho rozdelenia, ktoré je rovnomerne rozdelené. Uvedený histogram tiež potvrdzuje predošlý záver, že ako najpravdepodobnejšia sa javí hodnota okolo 2 600 USD za jednotku.

## Porovnanie predikčných modelov

Posledná podkapitola bude venovaná zhrnutiu dosiahnutých výsledkov v praktickej časti. Pre účely predikcie sme zvolili tri časové rady akciových indexov. Dĺžka skúmaných časových rád bola zhodne 1893 pozorovaní s dennou frekvenciou. Pre obdobie historickej predikcie sme zvolili interval o dĺžke 393 posledných pozorovaní, na ktorom boli otestované odhadnuté predikčné modely. Súhrnné výsledky predikcie zobrazuje nasledujúca tabuľka.

Tab. 4.18 Porovnanie presnosti predikčných modelov

Časová rada	Model	MSE	RMSE	$\sigma^2 MSE$
<b>DAX 30</b>	ARIMA(0,1,0) GARCH(1,1)	0,0284	0,1684	1,758e-08
	GBM DAX	0,0049	0,0702	-
<b>Euro Stoxx 50</b>	ARIMA(2,1,2) GARCH(1,1)	0,0029	0,0536	1,831e-08
	GBM EuroStoxx	0,0023	0,0481	-
<b>S&amp;P 500</b>	ARIMA(4,1,4) GARCH(1,1)	0,0058	0,0763	3,123e-08
	GBM S&P	0,0022	0,0465	-

Tab. 4.18 zobrazuje výsledné porovnanie použitých predikčných modelov. Hlavnými kritériami hodnotenia uvedených modelov je priemerná štvorcová chyba (MSE) a odmocnina z priemernej štvorcovej chyby (RMSE). Za najlepší sa považuje model s najnižšími hodnotami uvedených kritérií. Ako najlepší z uvedených modelov vyšiel predikčný model GBM pre časovú radu indexu S&P 500, s takmer rovnakou presnosťou dokázal model GBM predikovať aj vývoj akciového indexu Euro Stoxx 50. Naopak najhoršie výsledky dosiahol predikčný model ARIMA-GARCH pre časovú radu indexu DAX 30. Z výsledkov uvedených v tabuľke vyplýva, že modely GBM dosahujú lepšie výsledky ako modely ARIMA-GARCH. Čo sa týka predikcie podmieneného rozptylu pomocou modelu GARCH, ten vyšiel s najmenšou chybou pri časovej rade indexu DAX 30. Celkovo môžeme konštatovať relatívne vysokú predikčnú presnosť použitých modelov.

Potom, ako sme porovnali predikčnú presnosť jednotlivých modelov, pristúpime k porovnaniu odhadnutých predikčných intervalov budúceho cenového vývoja analyzovaných akciových indexov. Odhad očakávaného cenového pohybu sme v predchádzajúcej časti znázornili pomocou strednej hodnoty a tiež pomocou jednotlivých pravdepodobnostných intervalov.

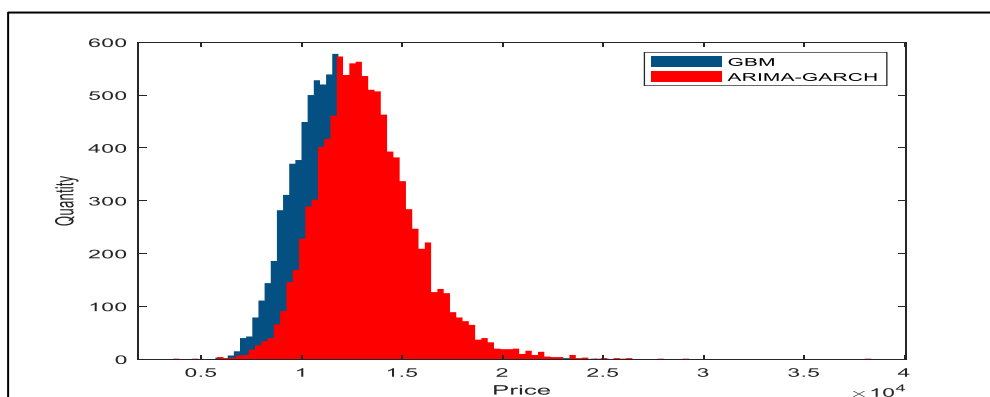
Ďalej budeme porovnávať odhadnuté predikčné intervaly pre jednotlivé akciové indexy.

**Tab. 4.19 Porovnanie predikčných intervalov pre časovú radu indexu DAX 30**

	Dolná hranica 95%	Dolná Hranica 70%	Stredná hodnota	Horná Hranica 70%	Horná Hranica 95%
<b>ARIMAGARCH</b>	9 065	10 846	<b>13 256</b>	15 664	18 797
<b>GBM DAX</b>	8 043	9 687	<b>12 051</b>	14 459	17 279

V tab 4.19 sú zobrazené jednotlivé predikčné intervaly a tiež predikovaná stredná hodnota na konci obdobia. Očakávaná stredná hodnota modelu ARIMA-GARCH vyšla na konci predikovaného obdobia o 1 205 EUR vyššia ako pri predikcii modelom GBM. Podľa modelu ARIMA-GARCH teda môžeme očakávať priemerne vyššiu mieru rastu ako podľa modelu GBM. Predchádzajúca analýza predikčných chýb však ukázala, že model GBM dosahuje presnejšie výsledky ako model ARIMA-GARCH, preto by sme mali predikčným intervalom modelu GBM prikladať vyššiu váhu.

**Obr. 4.37 Porovnanie rozdelení cien na konci predikčného obdobia**



*Zdroj: vlastné spracovanie*

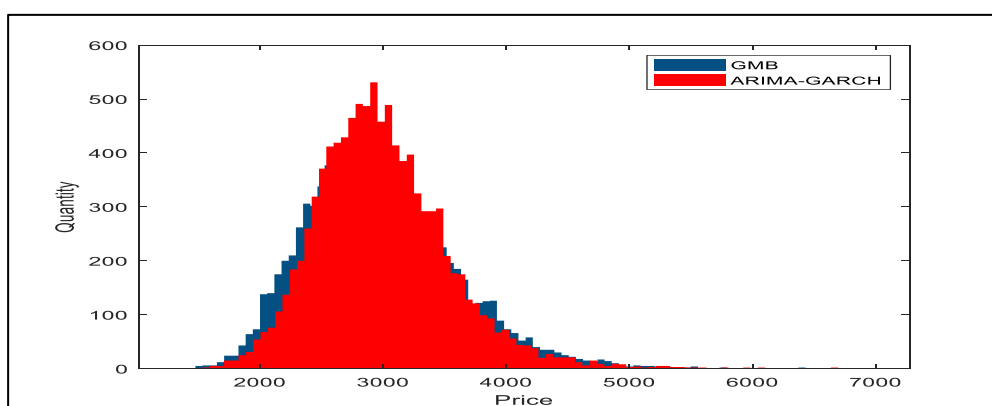
Obr. 4.37 zobrazuje porovnanie rozdelení cien podľa oboch modelov na konci predikčného obdobia. Môžeme pozorovať, že tvar oboch rozdelení je takmer identický. Pretože sú odhadované hodnoty modelu GBM priemerne nižšie ako odhadované hodnoty modelu ARIMA-GARCH, je rozdelenie cien GBM prítomné naľavo od rozdelenia cien ARIMA-GARCH.

Tab. 4.20 Porovnanie predikčných intervalov pre časovú radu indexu Euro Stoxx 50

	Dolná hranica 95%	Dolná Hranica 70%	Stredná hodnota	Horná Hranica 70%	Horná Hranica 95%
<b>ARIMAGARCH</b>	2 087	2 487	<b>2 995</b>	3 497	4 218
<b>GBM DAX</b>	1 963	2 362	<b>2 964</b>	3 560	4 328

V tab 4.20 sú zobrazené predikčné intervaly a predikovaná stredná hodnota indexu Euro Stoxx 50 na konci predikčného obdobia. Predikovaná stredná hodnota je u oboch modelov takmer totožná. Je to spôsobené tým, že index Euro Stoxx 50 sa počas sledovaného obdobia pohyboval do strany a rovnaký vývoj je podľa oboch modelov možné očakávať aj do budúcnosti. Predchádzajúca analýza predikčných chýb ukázala, že oba modely dosiahnu podobnú presnosť predpovede, pričom o niečo lepšie výsledky dosahuje model GBM. Čo sa týka samotných predikčných intervalov, model ARIMA-GARCH odhaduje užšie pásmo očakávaného pohybu ceny ako model GBM.

Obr. 4.38 Porovnanie rozdelení cien na konci predikčného obdobia



Zdroj: vlastné spracovanie

Obr. 4.38 zobrazuje porovnanie rozdelení cien podľa oboch modelov na konci predikčného obdobia. Uvedený histogram potvrdzuje predchádzajúci záver, že predikčné pásma

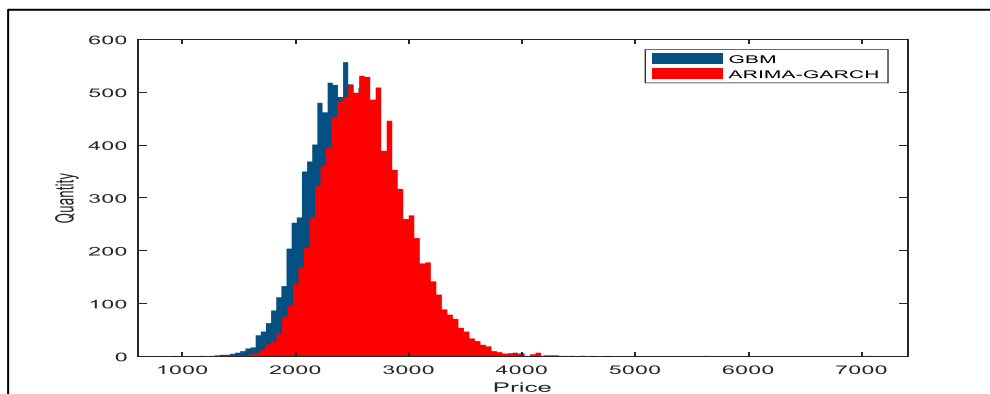
cien sú podľa oboch modelov takmer identické. Model GBM však očakáva o niečo širšie cenové rozpätie ako model ARIMA-GARCH.

**Tab. 4.21 Porovnanie predikčných intervalov pre časovú radu indexu S&P 500**

	Dolná hranica 95%	Dolná Hranica 70%	Stredná hodnota	Horná Hranica 70%	Horná Hranica 95%
<b>ARIMAGARCH</b>	2 148	2 511	<b>2 954</b>	3 397	3 950
<b>GBM DAX</b>	1 942	2 235	<b>2 626</b>	3 024	3 462

V Tab. 4.21 sú zobrazené predikčné intervaly a predikovaná stredná hodnota na konci obdobia odhadnuté príslušnými modelmi. Očakávaná stredná hodnota modelu ARIMA-GARCH vyšla na konci predikovaného obdobia o 328 USD viac ako pri predikcii modelom GBM. Predchádzajúca analýza predikčných chýb ukázala, že oba modely dosahujú priaznivé výsledky, pričom model GBM vyšiel opäť o niečo lepšie ako model ARIMA-GARCH, preto by sme mali predikčným intervalom tohto modelu prikladať väčšiu váhu.

**Obr. 4.39 Porovnanie rozdelení cien na konci predikčného obdobia**



**Zdroj: vlastné spracovanie**

Obr. 4.39 zobrazuje porovnanie rozdelení cien podľa oboch modelov na konci predikčného obdobia. Tvar oboch rozdelení predikovaných cien je takmer identický, pričom odhadované hodnoty modelu GBM sú situované naľavo a odhadované hodnoty modelu ARIMA-GARCH zase napravo.

Celkovo môžeme konštatovať že použité modely dosahovali v rámci overenia na minulých hodnotách až na jeden prípad kvalitné výsledky. Potvrdili sme predpoklad, že použité modely sú vhodné na odhad budúceho cenového vývoja.



## 5 Závěr

Hlavným cieľom práce bolo overenie možnosti predikcie finančných veličín pomocou predikčných modelov. Ako predmet predikcie sme zvolili časové rady troch akciových indexov (DAX 30, Euro Stoxx 50, S&P 500) s dennou frekvenciou. Dĺžka intervalu časových rád bola stanovená na 1893 dní, konkrétne od 15. júna 2011 do 28. novembra 2018. Za účelom predikcie sme pre každú časovú radu odhadli individuálny model ARIMA-GARCH a model GBM. Predikčnú schopnosť odhadnutých modelov sme overili na minulých hodnotách pomocou ukazovateľov MSE a RMSE, pričom bol potvrdený ich predikčný potenciál. Následne sme uskutočnili odhady očakávaného cenového vývoja a jeho pravdepodobnostných intervalov. Dosiahnuté výsledky jednotlivých modelov sme zhrnuli a porovnali.

V prvej časti práce sme sa venovali charakteristike časových rád finančných veličín. Najskôr boli opísané základné charakteristiky finančných časových rád. Následne sme upriamili pozornosť na typy dekompozície, ktoré sa pri analýze časových rád častokrát používajú. Zvýšená pozornosť bola venovaná Box-Jenkinsovej metodológii. V prvej časti práce sme tiež venovali pozornosť leptokurtickému rozdeleniu pravdepodobnosti výnosov, ktoré je pre finančné časové rady charakteristické. Na záver prvej kapitole boli použitím deskriptívne štatistiky zanalyzované časové rady akciových indexov DAX 30, Euro Stoxx 50, S&P 500.

Druhá časť práce bola zameraná na popis metód odhadov predikčných modelov. Na začiatku kapitoly sme uviedli tri základné metódy používané pre odhad parametrov. Pre účely našej práce sme zvolili metódu maximálne vierohodnostného odhadu (ML). Následne bola naša pozornosť venovaná charakteristike lineárnych stochastických modelov, hlavne modelom triedy ARIMA a modelom triedy GARCH. U týchto modelov sme popísali ako aj spôsob ich konštrukcie, tak aj metódy diagnostiky a predikcie. Ako ďalší v poradí bol zvolený model GBM, kde sme sa okrem jeho popisu a odhadu zamerali na metódu simulácie Monte Carlo, ktorá s týmto modelom úzko súvisí. Koniec kapitoly bol venovaný informačným kritériám využívaným k výberu najvhodnejšej varianty modelu, a tiež vyhodnocovaniu presnosti predikcie pomocou predikčných chýb.

V rámci tretej časti sme na časové rady akciových indexov aplikovali poznatky získané v predošlých častiach práce. Najskôr sme pre každú časovú radu odhadli model ARIMA-GARCH, pričom sme kládli dôraz nato, aby sme vybrali jeho najvhodnejšiu variantu. Ďalej sme dbali o štatistickú významnosť jednotlivých parametrov a modelu ako celku. Pomocou

modelu GARCH bola pre časové rady vykonaná analýza a následná predikcia volatility. Predikcia volatility sa skladala z dvoch častí, v prvej časti sme modelom odhadnutý podmienený rozptyl porovnali so skutočnými hodnotami podmieneného rozptylu, aby sme následne odhadli jeho vývoj pre predikované obdobie. Podobný spôsob bol použitý aj pri spojitom modeli ARIMA-GARCH, kedy sme po odhade parametrov overili jeho predikčnú presnosť na minulých hodnotách. Následne nato boli odhadnuté pravdepodobnostné intervaly očakávaného cenového pohybu pre každú časovú radu. Dosiahnuté výsledky jednotlivých predikcií boli zhrnuté v príslušných tabuľkách a taktiež znázornené pomocou histogramov. Ako druhý bol zvolený model GBM, u ktorého sme pomocou popisných štatistík odhadli príslušné parametre. Vhodnosť Odhadnutého modelu bola taktiež overená predikciou minulých hodnôt, kedy sme tak ako v prípade modelu ARIMA-GARCH porovnávali skutočné a odhadnuté hodnoty a určili chyby predikcie. Overený model GBM sme použili na vytvorenie predikčných intervalov. V záverečnej časti tejto kapitoly boli zhrnuté dosiahnuté výsledky.

Čo sa týka predikovaných vývojev cien akciových indexov môžeme ich podľa použitých modelov zhrnúť nasledovne. Model ARIMA(0,1,0)-GARCH(1,1) sa pri minulej predikcii akciového indexu DAX 30 ukázal ako nevhodný, preto jeho výsledky neberieme v úvahu. Model GBM dosahoval nízku hodnotu priemernej predikčnej chyby MSE. Podľa uvedeného modelu môžeme očakávať v nasledujúcom roku cenový vývoj indexu DAX 30 v rozmedzí od 9 684 do 14 459 EUR za jednotku, zo strednou hodnotou 12 051 EUR. Pri minulej predikcii indexu Euro Stoxx 50 dosahovali oba použité modely nízke hodnoty MSE, o niečo presnejší bol ale model GBM. Podľa modelu GBM môžeme v nasledujúcom roku očakávať cenový vývoj indexu Euro Stoxx 50 v rozmedzí od 2 362 do 3 560 EUR za jednotku zo strednou hodnotou 2 964 EUR. Celkovo najlepšie v rámci predikcie minulých hodnôt vyšiel podľa MSE model GBM pre časovú radu indexu S&P 500. Podľa uvedeného modelu môžeme očakávať v nasledujúcom roku cenový vývoj indexu S&P 500 v rozmedzí od 2 235 USD do 3 024 USD za jednotku, zo strednou hodnotou 2 624 USD.

Celkovo môžeme konštatovať, že sa nám podaril naplniť cieľ práce, ktorý spočíval v overení možností predikcie finančných veličín pomocou predikčných modelov. Odhadnuté modely dosahovali v rámci overenia na minulých hodnotách až na jeden prípad kvalitné výsledky. Analýzou predikčných chýb bolo zistené, že model GBM dosahoval vyššiu mieru presnosti predikcie ako model ARIMA-GARCH. Z ohľadom na dosiahnuté výsledky môžeme konštatovať, že pomocou použitých modelov je možné predikovať budúci cenový pohyb z určitou pravdepodobnosťou.

Našu prácu by bolo možné rozšíriť o ďalšie modely, ako napríklad (MSW, SETAR, NIG, VG, Neurónové siete a ďalšie.). Ďalej by sme pre získanie väčšej istoty ohľadom presnosti predikcie mohli uskutočniť viacero fáz testovania na minulých hodnotách, čím by sme získali viacero cenných informácií, ktoré by sme mohli ďalej analyzovať. Uvedené postrehy môžu slúžiť ako námet pre ďalšie práce.

## Seznam použité literatury

### Odborné publikácie

ARLT, Josef. *Moderní metody modelování ekonomických časových řad*. Praha: Grada Publishing, 1999. ISBN 80-7169-539-4.

ARLT, Josef a Markéta ARLTOVÁ. *Finanční časové řady*. Praha: Grada Publishing, 2003. ISBN 80-247-0330-0.

ARLT, Josef a Markéta ARLTOVÁ. *Ekonomické časové řady*. 1. vyd. Praha: Grada Publishing, 2007. 290 s. ISBN 978-80-86946-85-6.

BLATNÁ, Dagmar. *Metody statistické analýzy*. Vyd. 4. Praha: Bankovní institut vysoká škola, 2009. ISBN 978-80-7265-143-6.

BOLLERSLEV, T. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. *Journal of Econometrics* 31, 1986, s. 307-327.

BOX, George E. P., Gwilym M. JENKINS, Gregory C. REINSEL a Greta M. LJUNG. *Time series analysis: forecasting and control*. Fifth edition. Hoboken, New Jersey, 2016. ISBN 978-1-118-67502-1

CIPRA, Tomáš. *Finanční ekonometrie*. 2. upr. vyd. Praha: Ekopress, 2013. ISBN 978-80-86929-93-4.

FABOZZI, Frank J., Franco MODIGLIANI a Frank Joseph JONES. *Foundations of financial markets and institutions*. 4th ed., Pearson new international ed. Harlow: Pearson, c2014. Pearson custom library. ISBN 978-1-292-02177-5.

FRANCQ, Christian a Jean-Michel ZAKOIAN. *GARCH models: structure, statistical inference and financial applications*. Chichester: Wiley, 2010. ISBN 978-0-470-68391-0.

HANČLOVÁ, Jana. *Ekonometrické modelování: klasické přístupy s aplikacemi*. Praha: Professional Publishing, 2012. ISBN 978-80-7431-088-1.

HUŠEK, Roman. *Aplikovaná ekonometrie: teorie a praxe*. Praha: Oeconomica, 2009. Vysoškolská učebnice (Vysoká škola ekonomická v Praze). ISBN 978-80-245-1623-3.

KRESTA, Aleš. *Kvantitativní metody investování s aplikacemi v prostředí matlab*. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2016. Series on Advanced Economic Issues, Faculty of Economics, VŠB-TU Ostrava, vol. 43. ISBN 978-80-248-3898-4.

TICHÝ, Tomáš. *Simulace Monte Carlo ve financích: aplikace při ocenění jednoduchých opcí*. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2010. Series on advanced economic issues. ISBN 978-80-248-2352-2.

TSAY, Ruey S. *Analysis of financial time series*. 2nd ed. Hoboken: Wiley, c2005. ISBN 0 471-69074-0.

TURČAN, Matěj. *Statistika*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2002. ISBN 80-248-0131-0. Skripta. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava

ZMEŠKAL, Zdeněk, Dana DLUHOŠOVÁ a Tomáš TICHÝ. *Finanční modely: koncepty, metody, aplikace*. 3., přeprac. a rozš. vyd. Praha: Ekopress, 2013. ISBN 978-80-86929-91-0.

### **Elektronické zdroje**

Create GARCH time series model - MATLAB. *MathWorks - Makers of MATLAB and Simulink - MATLAB & Simulink*[online]. Copyright © 1994 [cit. 24.04.2019]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/econ/garch.html>

Create ARIMA or ARIMAX time series model - MATLAB. *MathWorks - Makers of MATLAB and Simulink - MATLAB & Simulink*[online]. Copyright © 1994 [cit. 24.04.2019]. Dostupné z: [https://www.mathworks.com/help/econ/arima-class.html?s\\_tid=srchtitle](https://www.mathworks.com/help/econ/arima-class.html?s_tid=srchtitle)

DAX PERFORMANCE-INDEX (^GDAXI) Stock Price, Quote, History & News. *Yahoo Finance* [online]. Copyright © 2019 Verizon Media. All rights reserved. [cit. 24.04.2019]. Dostupné z: <https://finance.yahoo.com/quote/%5EGDAXI?p=%5EGDAXI>

DESCRIPTIVE\_STATISTICS\_\_TESTS - EViews Help. [online]. 2019 [cit. 24.04.2019]. Dostupné z: [http://www.eviews.com/help/helpintro.html#page/content/series-Descriptive\\_Statistics\\_\\_Tests.html](http://www.eviews.com/help/helpintro.html#page/content/series-Descriptive_Statistics__Tests.html)

ESTX 50 PR.EUR (^STOXX50E) Stock Historical Prices & Data. Yahoo Finance - [online]. 2019 [cit. 24.04.2019]. Dostupné z: <https://finance.yahoo.com/quote/%5ESTOXX50E/history?p=%5ESTOXX50E>

Geometric Brownian motion model - MATLAB. *MathWorks - Makers of MATLAB and Simulink - MATLAB & Simulink* [online]. Copyright © 1994 [cit. 24.04.2019]. Dostupné z: [https://www.mathworks.com/help/finance/gbm.html?s\\_tid=srchtitle](https://www.mathworks.com/help/finance/gbm.html?s_tid=srchtitle)

Lineárna regresia R-manual. R-CRAN open source software R-CRAN [online]. Copyright © 2019 [cit. 24.04.2019]. Dostupné z: [https://rmanual.fri.uniza.sk/?page\\_id=124](https://rmanual.fri.uniza.sk/?page_id=124)

Monte Carlo Simulation - MATLAB & Simulink. *MathWorks - Makers of MATLAB and Simulink - MATLAB & Simulink* [online]. Copyright © 1994 [cit. 24.04.2019]. Dostupné z: [https://www.mathworks.com/discovery/monte-carlo-simulation.html?s\\_tid=srchtitle](https://www.mathworks.com/discovery/monte-carlo-simulation.html?s_tid=srchtitle)

*RiskMetrics™—Technical Document - MSCI* [online]. Copyright © [cit. 25.04.2019]. Dostupné z: <https://www.msci.com/documents/10199/5915b101-4206-4ba0-ae2-3449d5c7e95a>

Student's t-distribution - Wikipedia. [online]. 2019 [cit. 24.04.2019]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Student%27s\\_t-distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Student%27s_t-distribution)

S&P 500 (^GSPC) Stock Price, Quote, History & News. *Yahoo Finance* [online]. Copyright © 2019 Verizon Media. All rights reserved. [cit. 24.04.2019]. Dostupné z: <https://finance.yahoo.com/quote/%5EGSPC?p=^GSPC>

## Seznam zkratek

AIC - Akaikeho information criteria

ACF – Autokorelacion funkcion

AR – Auto Regressive

ARCH - autoregressive conditional heteroscedasticity

ARMA - Autoregressive moving average

ARIMA - Autoregressive integrated moving average

BIC – Bayes information criteria

DAX 30 - Deutscher Aktienindex

EUR – Euro

Euro Stoxx 50 - European stocks

GARCH - Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity

GBM – Geometrick Brown Motion

GED - Generalized Error Distribution

JB - Jarque-Berra testu

KPSS - Kwiatkowski, Phillips, Schmidt a Shin test

LM test - Lagrange multiplier

MA – Moving Average

MSE - Mean Square Error

MM – Méthoda momenta

ML – Maximum Likelihood

MNČ – Metodá najmenších štvorcov

$N(0,1)$  – Normálne rozdelenie

PACF – Parcial autokorelacion funkcion

S&P 500 - Standard & Poor's 500

SK - šířkost

K - špičatost

USD – americký Dolar

RMSE - Root Mean Square Error

$\sigma^2$ MSE – Variance Mean Square Error



## Prohlášení o využití výsledků diplomové práce

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo;
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně, ke své vnitřní potřebě, diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3);
- souhlasím s tím, že diplomová práce bude v elektronické podobě archivována v Ústřední knihovně VŠB-TUO. Souhlasím s tím, že bibliografické údaje o diplomové práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO;
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- bylo sjednáno, že užít své dílo, diplomovou práci, nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).

V Ostravě dne 26. 4. 2019

  
Bc. René Cabuk

## **Seznam příloh**

Příloha č. 1: Hodnoty časový rád akciových indexov

## Přílohy

### Příloha č. 1: Hodnoty časový rád akciových indexov

Date	Dax	Eurstoxx	S&P	LogdiffDax	LogdiffEurstoxx	Logdiffs&p
Jun 15, 2011	7115,08	2731,5	1265,42			
Jun 16, 2011	7110,2	2730,62	1267,64	-0,00069	-0,00032	0,001753
Jun 17, 2011	7164,05	2770,12	1271,5	0,007545	0,014362	0,00304
Jun 20, 2011	7150,21	2748,01	1278,36	-0,00193	-0,00801	0,005381
Jun 21, 2011	7285,51	2801,99	1295,52	0,018746	0,019453	0,013334
Jun 22, 2011	7278,19	2795,07	1287,14	-0,00101	-0,00247	-0,00649
Jun 23, 2011	7149,44	2730,86	1283,5	-0,01785	-0,02324	-0,00283
Jun 24, 2011	7121,38	2715,88	1268,45	-0,00393	-0,0055	-0,0118
Jun 27, 2011	7107,9	2723,93	1280,1	-0,00189	0,00296	0,009143
Jun 28, 2011	7170,43	2750,49	1296,67	0,008759	0,009703	0,012861
Jun 29, 2011	7294,14	2802,55	1307,41	0,017106	0,018751	0,008249
Jun 30, 2011	7376,24	2848,53	1320,64	0,011193	0,016273	0,010068
Jul 01, 2011	7419,44	2875,67	1339,67	0,00584	0,009483	0,014307
Jul 04, 2011	7442,96	2870,19	1337,88	0,003165	-0,00191	-0,00134
Jul 05, 2011	7439,44	2850,51	1339,22	-0,00047	-0,00688	0,001001
Jul 06, 2011	7431,19	2832,63	1353,22	-0,00111	-0,00629	0,0104
Jul 07, 2011	7471,44	2844,51	1343,8	0,005402	0,004185	-0,00699