

Reconstruction de la pression à partir de mesures PIV par une méthode de Poisson discrète

Marco Carini, Nathaniel Baker, Benjamin Leclaire, Franco Auteri

► **To cite this version:**

Marco Carini, Nathaniel Baker, Benjamin Leclaire, Franco Auteri. Reconstruction de la pression à partir de mesures PIV par une méthode de Poisson discrète. 16ème Congrès Francophone de Techniques Laser pour la mécanique des fluides, CNRS, CentraleSupélec, Université Paris Saclay, IRSN, Sep 2018, Dourdan, France. hal-02097681

HAL Id: hal-02097681

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02097681>

Submitted on 12 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Reconstruction de la pression à partir de mesures PIV par une méthode de Poisson discrète

M. Carini¹, N. T. Baker¹, B. Leclaire¹, F. Auteri²

¹ ONERA - The French Aerospace Lab, F-92190, Meudon

² Dipartimento di Scienze e Tecnologia Aerospaziali, Politecnico di Milano, 34 20156 Milano

Email auteur correspondant : marco.carini@onera.fr

Ce papier présente une méthode de reconstruction de la pression pour les écoulements incompressibles qui se propose d'améliorer l'approche commune aux techniques fondées sur l'équation de Poisson. Cette méthode s'affranchit du choix, souvent heuristique et délicat, des conditions aux limites pour la pression, tout en gardant les propriétés avantageuses de filtrage spatial des erreurs de mesure par des opérateurs elliptiques. Le principe de cette méthode repose sur la ré-écriture des équations de Navier–Stokes sous la forme d'un problème de Stokes forcé, dont le terme de forçage est alimenté par les données PIV, et pour lequel les conditions aux limites sont posées naturellement sur le champ de vitesse, connu par défaut dans tout le volume de mesure. Suite à une discrétisation aux éléments finis, la pression est calculée par la résolution du complément du Schur associé. Après avoir donné les détails mathématiques et numériques de la méthode, ainsi que sa validation, nous présentons les résultats obtenus par application à des données PIV synthétiques issue de simulations numériques 3D IDDES (Improved Delayed Detached Eddy Simulation) autour d'une profile NACA0015 à forte incidence.

1 Introduction

Depuis l'avènement de la PIV Tomographique [1], il est devenu envisageable de déterminer expérimentalement et sans ambiguïtés le champ de pression régnant dans tout un volume de mesure, à partir de la mesure non-intrusive de son champ de vitesse. Cette technique expérimentale offre des perspectives extraordinaires, allant de l'étude fondamentale de la dynamique de la turbulence et du rôle des corrélations pression-vitesse, à la reconstruction de sources de bruit aéro-acoustique, en passant par des applications plus concrètes comme le calcul d'efforts s'appliquant sur une structure immergée dans un écoulement.

Le principe de base pour calculer un champ de pression à partir de données Tomo-PIV consiste à intégrer le bilan de quantité de mouvement pour le fluide, dans lequel les termes inertiels et visqueux agissent comme un terme de forçage calculé à partir des données expérimentales. Deux approches sont généralement rencontrées pour résoudre ce problème [2], [3]. La première consiste à intégrer directement le gradient de pression, tandis que la seconde consiste à dériver une équation de Poisson en invoquant le caractère incompressible de l'écoulement. Quelque-soit l'option choisie, il reste nécessaire d'imposer des conditions aux limites sur la pression afin que le problème soit correctement posé. Si l'intégration spatiale du gradient de pression peut théoriquement se faire à partir d'un unique point où la pression est imposée (par exemple à partir d'une mesure locale, ou de l'équation de Bernoulli dans une zone potentielle de l'écoulement [4]), cette approche propage rapidement les erreurs à chaque incrément spatial, et nécessite un algorithme omnidirectionnel pour obtenir une solution fiable [5]. A l'inverse, l'approche se basant sur l'équation de Poisson requiert d'imposer les conditions aux limites sur tout le contour du domaine, ce qui est délicat à obtenir expérimentalement parlant. En effet, les sondes de Pitot ne donnent que des mesures locales, intrusives et non résolues en temps, tandis que les volumes de mesures de Tomo-PIV sont généralement trop petits pour pouvoir supposer que leur contour intersecte partout une zone où l'écoulement est potentiel. Par ailleurs, imposer des conditions aux limites de Neumann déduites du bilan de quantité de mouvement évalué à la frontière n'est pas une option, car conduit en fait à un problème mal posé [6]. Dans ce contexte, Pan *et al.* [7] ont montré en particulier que la précision finale d'un champ de pression reconstruit dépendait de manière intrinsèque du type de condition aux limite utilisée (i.e. Dirichlet vs. Neumann).

En fait, la formulation mathématique rigoureuse des conditions aux limites pour l'équation de Poisson de la pression conduit à une formulation de type intégrale [8], dont l'implémentation numérique est délicate. Une approche équivalente, qui utilise la méthode de découplage pression-vitesse de Glowinski & Pironneau [9] a été récemment proposée par Auteri *et al.* [10] pour reconstruire le champ de pression d'écoulements 2D. La méthode présentée ici s'inscrit dans la continuité du travail de Auteri *et al.*, et peut s'interpréter comme une version algébrique ou "discrète" de cette dernière approche, avec les avantages d'une formulation mathématique plus simple, ainsi que de meilleures performances de calcul attendues pour les cas 3D. Nous commencerons par présenter les détails mathématiques et numériques de la méthode dans la Section 2 ainsi que un cas de validation analytique, puis nous analyserons ses performances sur des données PIV synthétiques issue de simulations numériques 3D IDDES (Improved Delayed Detached Eddy Simulation) autour d'un profil NACA0015 à forte incidence dans la Section 3. Les conclusions et perspectives seront données en Section 4.

2 Méthode

2.1 Formulation mathématique

L'idée à la base de la méthode proposée, consiste à ré-écrire les équations de Navier-Stokes incompressibles sous la forme d'un problème de Stokes forcé par la combinaison des termes de dérivé matérielle et de divergence du tenseur de Reynolds, suivant le type de données PIV (instantanées, moyennées en temps ou en phase) et le régime de l'écoulement considéré (laminaire ou turbulent):

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \mathbf{v} + \nabla \tilde{p} &= \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} &= \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (1)$$

où Ω dénote le volume de mesure PIV dans lequel on souhaite reconstruire le champ de pression. La variable \tilde{p} correspond au champ de pression divisé par la viscosité cinématique ν , et \mathbf{v} représente le champ de vitesse, traité formellement comme une inconnue dans le membre de gauche. Une notation différente \mathbf{u} , est introduite pour indiquer le champ de vitesse provenant des mesures PIV, supposé connu dans tout Ω . Le terme \mathbf{g} du membre de droite correspond au champ de forçage volumique issu de la dérivée temporelle, du terme convectif et du tenseur de Reynolds (dans le cas turbulent). De manière assez générale, par rapport aux différents types des données PIV et aux différents régimes de l'écoulement, on définit \mathbf{g} comme:

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{\nu} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle \right], \quad (2)$$

où $\langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle$ représente le tenseur de Reynolds défini en accord avec l'opérateur de moyenne utilisé dans le cas turbulent. Les conditions aux limites pour le problème de Stokes (1) sont simplement données par des conditions de Dirichlet pour \mathbf{v} , grâce à la connaissance de \mathbf{u} dans tout Ω , et notamment sur son bord $\partial\Omega$. Aucune condition aux limites n'est requise pour le champ de pression \tilde{p} (déterminé à une constante près), ce qui représente l'un des avantages de cette méthode. En introduisant une discrétisation par éléments finis du champs de vitesse \mathbf{v} et de pression \tilde{p} , le problème (1) se traduit dans un système linéaire de la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} L_u & \tilde{G} \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Les termes \mathbf{v} , \mathbf{p} et \mathbf{g} correspondent aux tableaux des degrés de liberté de champs \mathbf{v} , \mathbf{p} et \mathbf{g} discrétisés, et les matrices L_u , \tilde{G} et G^T à la discrétisation des opérateurs Laplacien, gradient et divergence en forme faible et suite à l'imposition des conditions aux limites pour la vitesse, ce qui fait que $\tilde{G}^T \neq G^T$ (en raison de la modification des lignes de L_u et \tilde{G} associées aux degrés de liberté de vitesse sur $\partial\Omega$). À partir du système (3) on peut dériver un problème réduit aux seuls degrés de liberté de la pression \mathbf{p} ,

$$\left(G^T L_u^{-1} \tilde{G} \right) \mathbf{p} = G^T L_u^{-1} \mathbf{g}, \quad (4)$$

ce qui permet d'obtenir, après résolution numérique, la reconstruction de la pression dans tout le domaine Ω , conformément à la représentation aux éléments finis utilisée.

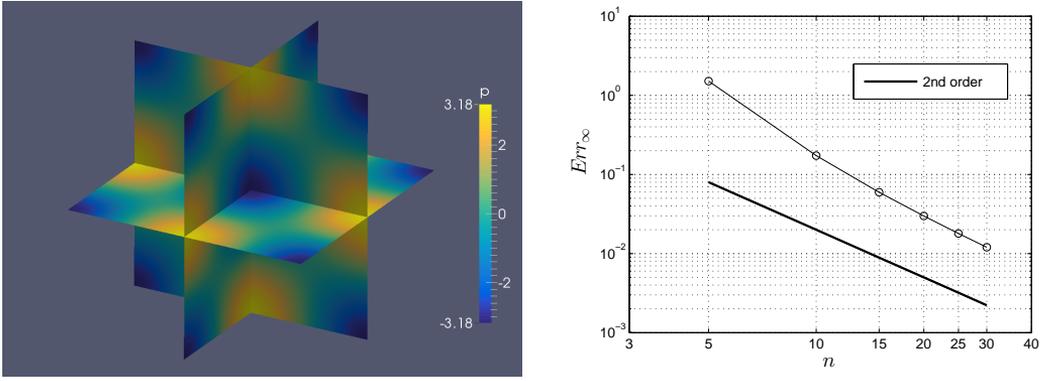


Figure 1: Validation de la méthode présentée en utilisant la solution analytique (5) des équations de Navier-Stokes. À gauche: pression reconstruite sur la grille la plus fine ($n = 30$). À droite: convergence de l'erreur en norme infinie sur la pression reconstruite par rapport à la résolution spatiale.

2.2 Aspects numériques et validation

L'implémentation numérique mise en œuvre ici utilise les bibliothèques FEniCs [11, 12] et PETSc [13] pour la discrétisation aux éléments finis. La résolution des systèmes linéaires qui en résultent bénéficient du parallélisme de ces deux bibliothèques. Plus précisément, la discrétisation des équations de Stokes est faite sur un maillage tétraédrique du domaine Ω par des éléments finis classiques de Taylor-Hood, avec une représentation quadratique pour le champ de vitesse, et linéaire pour le champ de pression. La condition *inf-sup* est ainsi correctement prise en compte, ce qui assure que le problème de Stokes discret est bien posé. Un schéma centré (au deuxième ordre en temps) est utilisé pour la discrétisation de la dérivée temporelle dans (2), grâce à la connaissance *a priori*, de toute l'histoire temporelle de \mathbf{u} . La matrice du système algébrique (4), i.e. *le complément de Schur* de la pression, n'est jamais explicitement assemblée en raison de sa structure dense (bien que les matrices L_u , \tilde{G} et G soient creuses) et la méthode itérative du GMRES est utilisée pour résoudre ce système. L'inversion de la matrice L_u peut s'effectuer soit par une approche directe de factorisation LU, en utilisant la bibliothèque MUMPS, soit par une approche itérative, en utilisant la méthode GMRES avec un préconditionneur multigrille algébrique. Cette deuxième approche devient indispensable pour traiter les cas de plus grandes tailles, pour lesquels la factorisation LU reste ingérable en termes de mémoire et de temps de calculs, même en parallèle. Une validation de la méthode est présentée dans la Figure 1. On considère dans ce cas des expressions analytiques pour les champs de pression et de vitesse données par

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \cos(2\pi z) \\ -0.5 \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \cos(2\pi z) \\ -0.5 \cos(2\pi x) \cos(2\pi y) \sin(2\pi z) \end{pmatrix}, \quad p(x, y, z) = \pi \cos(2\pi x) \cos(2\pi y) \cos(2\pi z), \quad (5)$$

qui sont solution exacte des équations des Navier-Stokes sur le domaine $\Omega \in [0, 1]^3$, auxquelles est ajouté le terme de forçage $\mathbf{f}(x, y, z)$:

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 10\pi^2 \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \cos(2\pi z) \\ -8\pi^2 \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \cos(2\pi z) \\ -8\pi^2 \cos(2\pi x) \cos(2\pi y) \sin(2\pi z) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

La Figure 1 (droite) montre la convergence de l'erreur en norme L_∞ sur la pression reconstruite par rapport au nombre n^1 de cellules dans chaque direction du domaine Ω . Une précision du deuxième ordre par rapport à la résolution spatiale est clairement vérifiée. Le résultat obtenu pour le champ de pression reconstruit sur le maillage le plus fin ($n = 30$) est aussi montré dans la Figure 1 (gauche).

¹À noter que le nombre total de cellules tétraédriques dans Ω est de $6n^3$

3 Résultats préliminaires

La validation préliminaire de la méthode présentée ici est faite grâce à une base de données PIV synthétique. Nous nous basons sur la solution numérique d'un écoulement autour d'un profil d'aile obtenue par IDDES. La géométrie considérée ici consiste en un profil NACA0015 de 80mm de corde et 140mm d'envergure, placé à 30° d'incidence dans une veine de 230mm x 230mm de section. La vitesse de l'écoulement à l'entrée est fixée à $U = 1,25$ m/s, ce qui correspond à un nombre de Reynolds basé sur la corde de $Re_c = 100000$. Les données numériques sont extraites dans trois volumes cartésiens de type PIV avec une résolution spatiale de 1mm (cf. figure 2). De plus amples précisions sur cette base de donnée peuvent être trouvées dans la contribution de Gomit *et al.* [14].

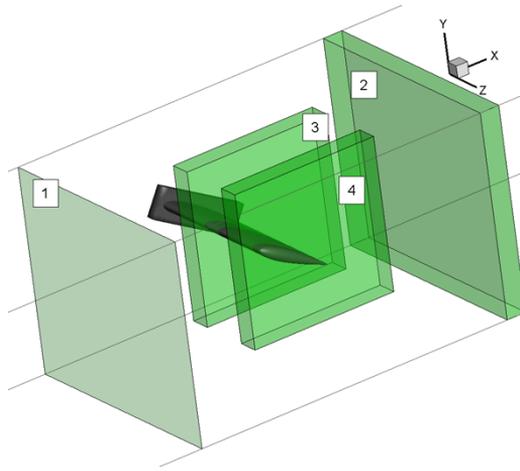


Figure 2: Volumes PIV extraits de la base de données synthétiques.

Le champ de pression a été reconstruit dans les volumes 2 et 4 qui apparaissent dans la figure 2. L'intérêt de ces deux volumes est de pouvoir évaluer les performances de la méthode dans deux configurations différentes: d'une part en présence d'un obstacle rigide (volume 4), et d'autre part dans un sillage (volume 2). Les calculs ont été effectués sur un super-calculateur de l'ONERA. Le cas le plus gourmand en ressources informatiques (volume aval) a requis de résoudre un système linéaire de taille 689778×689778 pour la pression, et 15843927×15843927 pour la vitesse, dont la convergence fut atteinte en 83 itérations. A titre indicatif, la résolution complète n'a nécessité qu'une vingtaine de minutes grâce à la parallélisation du travail sur 250 nuds de calculs. La mémoire maximale requise pendant ce calcul a atteint 152 GB.

La figure 3 donne un premier aperçu qualitatif des performances de la méthode de reconstruction du champ de pression par la méthode du complément de Schur. Plus précisément, cette figure compare le champ de pression numérique de référence donné par le calcul CFD (gauche) à celui reconstruit à partir des données de vitesse (droite). Le volume choisi pour cette représentation est le volume 4 qui englobe le saumon de l'aile. Cette première comparaison permet de mettre en évidence la capacité de la méthode à retrouver les caractéristiques classiques d'un écoulement autour d'une aile en incidence, et en particulier la zone de surpression sur l'intrados, associé à une zone de dépression sur son extrados. Il est également intéressant de noter que la méthode semble capable de capturer les petites structures qui composent le sillage de l'aile.

La figure 4 permet d'avoir une vision un peu plus quantitative des performances de la méthode, en donnant des coupes 2D provenant des plans médians des volumes 4 et 2 respectivement. La partie supérieure de la figure 4 donne les champs de pression reconstruits, tandis que la partie inférieure donne l'écart relatif entre le champ reconstruit et le champ de référence. Cette figure permet de constater que la précision de la reconstruction n'est pas uniforme à travers l'écoulement et dépend fortement de la résolution des gradients de vitesse. En effet, on peut constater que la précision de la reconstruction est dégradée par la présence de parois solides où la condition d'adhérence est respectée, ainsi que dans les zones où l'écoulement est dominé par des structures tourbillonnaires intenses telles que dans le sillage. Une estimation globale de l'erreur relative pour la méthode peut être définie dans chaque volume à

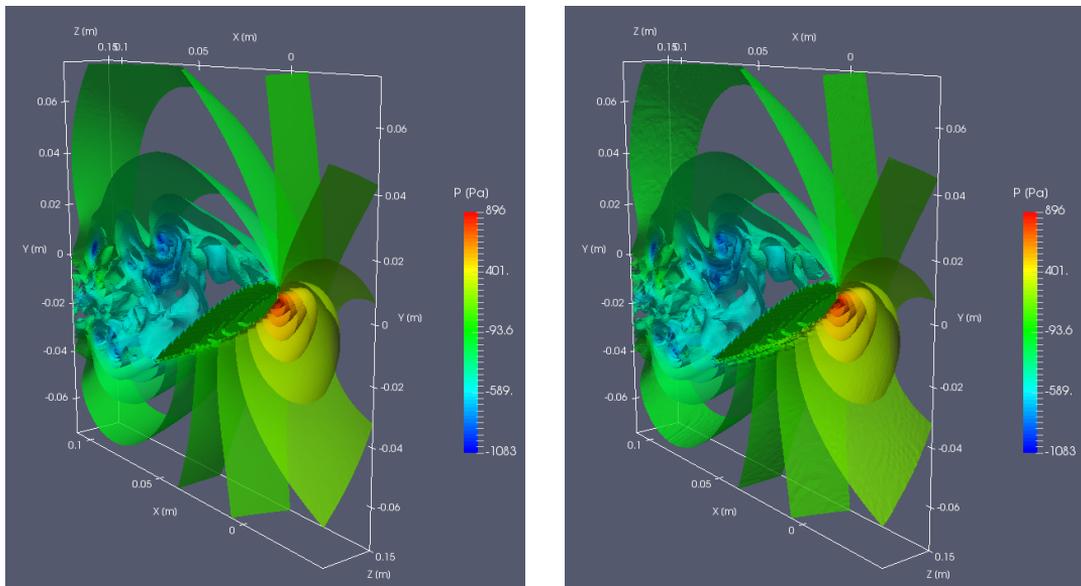


Figure 3: Comparaison qualitative entre le champ de pression numérique de référence (gauche) et le champ de pression reconstruit par la méthode du complément de Schur à partir du champ de vitesse uniquement (droite).

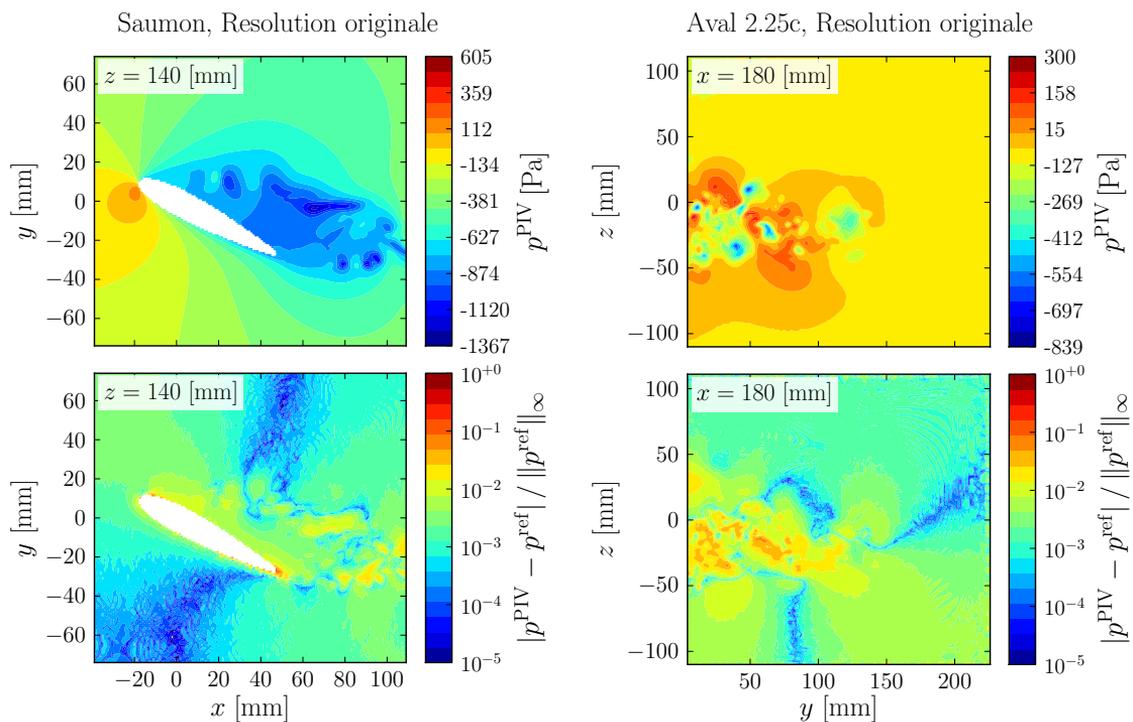


Figure 4: Champs de pression reconstruits (Haut); Erreur relative locale entre champ reconstruit et solution numérique de référence (Bas). Les cartes du côté gauche correspondent au volume intersectant le saumon d'aile, celles de droite correspondent au volume aval dans le sillage.

partir de la norme L2 usuelle: $\epsilon = \|p^{\text{PIV}} - p^{\text{ref}}\|_2 / \|p^{\text{ref}}\|_2$. On trouve alors $\epsilon = 2.7\%$ dans le volume 4 et $\epsilon = 10\%$ dans le volume 2.

4 Conclusion et perspectives

Nous venons de présenter une méthode permettant de reconstruire un champ de pression à partir d'un champ de vitesse 3D. Cette méthode s'écrit sous la forme d'un problème de Stokes forcé par un terme source provenant des données PIV. Elle requiert ainsi uniquement des conditions aux limites sur le champ de vitesse qui est connu par défaut, et permet de s'affranchir du problème des conditions aux limites sur la pression. Cette caractéristique est un atout majeur dans un contexte expérimental où de larges volumes sont mesurés, car permet (du moins formellement) de calculer différents sous-volumes indépendamment les des autres sans introduire de source d'erreur supplémentaire venant des conditions aux limites.

Cette méthode a été testée sur des données synthétiques provenant d'une simulation numérique, et les résultats préliminaires montrent un bon accord entre champ de pression numérique et champ de pression reconstruit à partir du champ de vitesse. Une étude plus approfondie des performances de cette méthode, et de sa sensibilité à la résolution spatiale des données et au bruit de mesure sera trouvée dans la contribution de Gomit *et al.* [14].

Dans le futur, cette méthode sera validée sur des données expérimentales provenant de mesures tomo-PIV effectuées sur l'extrados d'une maquette de la géométrie SACCON (cf. [15]). La validation expérimentale consistera à reconstruire le champ de pression dans le volume de mesure, puis à extraire le profil de pression moyenne le long de l'extrados, où des prises de pression statique ont été installées.

Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier, pour leur soutien financier, l'Agence Nationale pour la Recherche et la DGA pour leur soutien financier au travers du projet ANR-16-ASTR-0005-01, ainsi que le CPER-FEDER de la Région Hauts de France.

Références

- [1] F. Scarano. Tomographic piv: principles and practice. *Meas. Science Technol.*, 24(1):012001, 2012.
- [2] B. W. Van Oudheusden. Piv-based pressure measurement. *Meas. Science Technol.*, 24(3):032001, 2013.
- [3] R. De Kat and B. W. Van Oudheusden. Instantaneous planar pressure determination from piv in turbulent flow. *Exp. Fluids*, 52(5):1089–1106, 2012.
- [4] B. W. Van Oudheusden. Principles and application of velocimetry-based planar pressure imaging in compressible flows with shocks. *Exp. Fluids*, 45(4):657–674, 2008.
- [5] X. Liu and J. Katz. Instantaneous pressure and material acceleration measurements using a four-exposure piv system. *Exp. Fluids*, 41(2):227, 2006.
- [6] D. Rempfer. On boundary conditions for incompressible navier-stokes problems. *App. Mech. Rev.*, 59(3):107–125, 2006.
- [7] Z. Pan, J. Whitehead, S. Thomson, and T. Truscott. Error propagation dynamics of piv-based pressure field calculations: How well does the pressure poisson solver perform inherently? *Meas. Science Technol.*, 27(8):084012, 2016.
- [8] L. Quartapelle and M. Napolitano. Integral conditions for the pressure in the computation of incompressible viscous flows. *J. Comp. Phys.*, 62(2):340–348, 1986.
- [9] R. Glowinski and O. Pironneau. On a mixed finite element approximation of the stokes problem (i). *Num. Math.*, 33(4):397–424, 1979.
- [10] F. Auteri, M. Carini, D. Zagaglia, D. Montagnani, G. Gibertini, C. B. Merz, and A. Zanotti. A novel approach for reconstructing pressure from piv velocity measurements. *Exp. Fluids*, 56(2):45, 2015.

- [11] Martin S. Alnæs, Jan Blechta, Johan Hake, August Johansson, Benjamin Kehlet, Anders Logg, Chris Richardson, Johannes Ring, Marie E. Rognes, and Garth N. Wells. The fenics project version 1.5. *Archive of Numerical Software*, 3(100), 2015.
- [12] A. Logg, K.-A. Mardal, G. N. Wells, et al. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Springer, 2012.
- [13] S. Balay, S. Abhyankar, M. F. Adams, J. Brown, P. Brune, K. Buschelman, L. Dalcin, V. Eijkhout, W. D. Gropp, D. Kaushik, M. G. Knepley, D. A. May, L. Curfman McInnes, R. Tran Mills, T. Munson, K. Rupp, P. Sanan, B. F. Smith, S. Zampini, and H. Zhang. PETSc Web page: <http://www.mcs.anl.gov/petsc>, 2018.
- [14] G. Gomit, M. Carini, A. Dartois, N. Baker, A. Beaudoin, B. Leclaire, F. Pons, L. Chatellier, L. Tremblais, T. Lionel, P. Braud, and L. David. Comparaison de méthodes dévaluation de la pression à partir de mesures piv. *16ème Congrès Francophone de Techniques Laser*, 2018.
- [15] N. T. Baker, D. Diaz, D. Bailly, F. Pons, J.-C. Monnier, L. David, and B. Leclaire. Comparaison de méthodes dévaluation defforts par mesures piv. *16ème Congrès Francophone de Techniques Laser*, 2018.