L’Analogie : Études sur son usage en didactique en Chimie, en Mathématiques, en Physique.

Jacques Douaire, Laurent Vivier

Laboratoire de didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie

Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz n°15

Décembre 2015

L ’ANALOGIE :

ETUDES SUR SON USAGE EN DIDACTIQUE

CHIMIE, MATHEMATIQUES, PHYSIQUE

Publication coordonnée par Jacques Douaire et Laurent Vivier

ISSN : 2105-5203

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
UNIVERSITE PARIS DIDEROT

Imprimé par l'IREM de Paris – Université Denis Diderot Paris 7

Exemplaire **téléchargeable** sur notre site dans la section Publication
http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/

Coordonnées de l'IREM

Pour venir à l'IREM (il est possible de consulter et d'acheter les publications sur place):
Université Paris-Diderot, Bâtiment Sophie-Germain,
8 place Aurélie Nemours (sur l'avenue de France), huitième étage,
75013 Paris 13ème arrondissement
(métro Bibliothèque François Mitterrand ou tramway ligne)

Nous Contacter

Pour téléphoner: 01 57 27 91 93

Pour écrire à l'IREM concernant les publications:

par voie postale:
Locufier Nadine
IREM de Paris – Case 7018
Université Paris Diderot
75205 Paris cedex 13

par voie électronique:
nlocufier@irem.univ-paris-diderot.fr

La liste des publications de l'IREM est mise à jour sur notre site web :

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/ (en bas à gauche de la page d'accueil)

Pour rester informé:

inscription à la liste de diffusion de l'IREM de Paris également sur le site de l'IREM

L'ANALOGIE :

ETUDES SUR SON USAGE EN DIDACTIQUE :

CHIMIE, MATHÉMATIQUES, PHYSIQUE

Publication coordonnée par Jacques Douaire et Laurent Vivier

Richard Cabassut
Patricia Crépin
Anne-Amandine Decroix
Bernadette Denys
Jacques Douaire
Marie-Pierre Galisson
Katalyn Gosztonyi
Wanda Kaminski
Rita Khanfour-Armale
Alain Kuzniak
Ana Mesquita
Joris Mithalal
Cécile Ouvrier-Buffet
Bernard Parzysz
MarIe-Jeanne Perrin-Glorian
Marc Rogalski
Laurent Vivier

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Le recours à l'analogie est une réalité, tant dans des dispositifs d'enseignement en sciences que, de fait, dans les pratiques des enseignants. L'explicitation du rôle historique de l'analogie en sciences ainsi que l'étude de modèles contemporains de l'analogie apportent t'elles un éclairage sur son usage actuel dans les processus d'apprentissage ou d'enseignement ?

Pour répondre à cette question le groupe « Mathématiques et réalité » du LDAR, regroupant des enseignants chercheurs en didactique de chimie, de mathématiques et de physique s'est intéressé depuis deux ans à des travaux sur l'analogie qui relèvent de différents domaines : philosophie, sciences, histoire des sciences et épistémologie, psychologie,… C'est la présentation d'une partie de ces études en cours qui fait l'objet de cette publication.

Deux ouvrages récents, l'un publié par le laboratoire Sphère, sous la direction de M.-J. Durand-Richard « L'analogie dans la démarche scientifique » (2008) qui rassemble notamment des articles d'historiens des sciences, de physiciens, de psychologues, l'autre par D. Hofstadter et E. Sander « L'analogie cœur de pensée » (2013) ont constitué les premiers objets de notre étude. Puis, d'autres textes d'histoire des sciences ou de psychologie, des analyses d'expérimentations ou la production de synthèses sur ce thème de l'analogie ont complété nos travaux.

Cette publication, par sa thématique, par les questionnements sur l'enseignement et par sa méthode de présentation critique de textes, s'inscrit dans la continuité des précédentes publications du groupe « Mathématiques et Réalité » du LDAR sur « Modélisation » (2008) et sur « Exemples » (2013). Chaque texte présente un résumé de l'article ou de l'ouvrage étudié, ou une synthèse du sujet abordé, ainsi que des commentaires critiques. Des chercheurs du LDAR s'étaient déjà intéressés à cette question ; citons par exemple « Quatre étapes dans l'histoire des nombres complexes » que Michèle Artigue et André Deledicq ont publié dans les cahiers de DIDIREM en 1992, ainsi que les travaux du groupe « Métaphore », des colloques européens CERME[1] entre 2001 et 2007 que le responsable de ce groupe, Bernard Parzysz présente dans cette publication.

Cette publication ne présente pas l'intégralité des textes que nous avons abordés à un moment ou à un autre de ces deux années, notamment ceux sur l'analyse du fonctionnement de l'analogie dans le langage (Ricœur, 1975) ou sur les composantes du raisonnement analogique (Aristote), mais dont l'étude nous a permis de mieux délimiter les champs essentiels pour l'analyse de l'usage de l'analogie dans l'enseignement des domaines scientifiques.

Dans une première partie nous présenterons les différents textes, puis, dans une seconde partie des éléments de synthèse sur les apports ou questions issus l'étude de ces textes.

[1] http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/

A. PRÉSENTATION DES TEXTES

Nous avons regroupé les textes en trois catégories :

- ceux proposant une analyse de publications de psychologie ;
- ceux portant sur des travaux d'historiens des sciences ;
- ceux présentant des études didactiques : synthèses ou expérimentations sur des usages de l'analogie dans l'enseignement.

Les questions abordées dans ces regroupements ne sont pas étanches ; par exemple un texte sur des travaux de psychologie peut évoquer des questions d'apprentissage, ou des analyses portant sur textes d'historiens de sciences visent aussi à expliciter leur apport à des problématiques didactiques, propres aux champs de recherche de notre laboratoire.

1. Deux textes sur des publications de psychologie

L'analogie est un objet d'étude relativement récent en psychologie. Les deux textes portant sur « L'analogie cœur de pensée » de D. Hofstadter et E. Sander et « L'analogie du naïf au créatif » d'E. Sander présentent une analyse des théories psychologiques contemporaines sur l'analogie. L'ouvrage « L'analogie cœur de pensée » a constitué une des premières entrées de notre étude et une composante importante de notre première année de travail.

***« L'analogie cœur de pensée » de Douglas Hofstfadter et Emmanuel Sander** (texte de Laurent Vivier)*

Cet ouvrage est un essai sur la nature des processus de pensée notamment le processus de catégorisation en relation avec la production d'analogie. L'interprétation de toute pensée humaine à cette aune constitue la thèse centrale des auteurs : l'analogie est le moteur de la pensée. Leur propos est largement développé par des exemples, pris dans des champs très vastes, quelquefois dans des contextes inédits. De nombreuses notions sont introduites. La mise en relation de l'analogie avec d'autres processus mentaux s'accompagne d'une critique d'autres approches théoriques. Mais si les thèses (faire une analogie c'est catégoriser) ou conclusions sont assez explicites, les raisonnements à leur appui sollicitent souvent des analogies. Par ailleurs dans le domaine scientifique ou de l'enseignement des sciences, ces raisonnements par analogie peuvent rencontrer des limites.

***« L'analogie du naïf au créatif » d'Emmanuel Sander** (texte de Jacques Douaire)*

L'étude de l'ouvrage d'Hostfader et Sander, nous a conduit à nous interroger sur l'évolution des travaux en psychologie. Comment par exemple, est-on passé, pour l'étude de l'analogie, de théories privilégiant le paradigme « source/cible » vers les approches nouvelles citées dans « L'analogie cœur de pensée » ? Dans ce but nous avons étudié un ouvrage précédent d'Emmanuel Sander qui apporte un double éclairage : une présentation des modèles et théories, et de leur évolution depuis les années 60, ainsi qu'une analyse critique de ces modèles.

2. Trois textes sur des études historiques sur les mathématiques ou la physique

Trois textes sont présentés dans cette partie. Les deux premiers concernent l'histoire des mathématiques, le troisième celle de la physique.

Le texte d'Eberhard Knobloch « L'analogie et la pensée mathématique », cité par M.-J. Durand-Richard dans son introduction de « L'analogie dans la démarche scientifique », a été publié par les éditions du CNRS dans un hommage à Jules Vuillemin dirigé par R. Rashed.

Le texte « Analogie entre théorie des nombres et théorie des fonctions » de Christian Houzel est un chapitre de « L'analogie dans la démarche scientifique ». Ce texte propose aussi une comparaison des approches de Knobloch et de Houzel.

Le troisième texte porte sur un chapitre de Michel Paty sur « Les analogies mathématiques au sens de Poincaré et leur fonction en Physique » relatif aux analogies chez Maxwell, publié dans « L'analogie dans la démarche scientifique ».

« L'analogie et la pensée mathématique » de Eberhard Knobloch[2] *(texte de Jacques Douaire)*

Cet article, d'un historien des sciences et des mathématiques, s'appuie sur des textes de mathématiciens ou de philosophes s'intéressant aux mathématiques, du 17ème et 19ème siècle. Ces textes, en général, exposent chacun une avancée à laquelle l'analogie a contribué par l'usage de notions, symboles ou méthodes. Knobloch analyse aussi les justifications de ces usages. Plusieurs pistes de réflexion sont ensuite esquissées concernant les finalités de l'analogie, les processus en jeu dans le recours à l'analogie ; les justifications de ce recours, internes ou externes aux mathématiques, les rapports entre analogie et preuve.

« Analogie entre théorie des nombres et théorie des fonctions » de Christian Houzel[3] *(texte de Marc Rogalski)*

Ce texte présente l'article de Christian Houzel : « Analogie entre théorie des nombres et théorie des fonctions », qui étudie l'évolution de théories mathématiques, en particulier en ce qui concerne l'invention de l'algèbre, la « numérisation » des irrationnels, l'invention des nombres complexes, les nombres décimaux et les séries entières, les fonctions algébriques. Après une analyse critique de cette étude, ce texte précise les rapports entre l'approche de Houzel et celle du texte de Eberhard Knobloch : « L'analogie et la pensée mathématique » sous l'angle de l'analogie comme moyen de découverte. Plusieurs fonctionnements de l'analogie dans l'enseignement des mathématiques sont présentés avec l'éclairage de la didactique des mathématiques et les rapports avec l'activité de catégorisation sont ensuite exposés.

« Les analogies mathématiques au sens de Poincaré et leur fonction en Physique » de Michel Paty *(texte de Anne-Amandine Decroix et Jacques Douaire)*[4]

Dans une première partie ce texte développe l'idée « d'analogie mathématique » à laquelle Poincaré recourait fréquemment à propos des phénomènes et des lois de la physique. Cette analyse permet d'appréhender « les analogies de l'expérience » dont parlait Kant, à partir desquelles les lois générales des phénomènes peuvent être établies. Les conceptions de Poincaré sur la « physique mathématique » et sur la nature de la théorie physique sont étroitement liées au rôle fonctionnel de l'analogie, qui, à travers le travail sur la forme (mathématique), atteint la structure des phénomènes. Dans une seconde partie nous revenons sur les types d'analogies entre modèles physiques, mathématiques et leurs fonctions. Pour l'analyse des métaphores chez Maxwell nous avons pris appui sur l'article de P .G. Hamamdjian (1981) « Les concepts de métaphore scientifique et de système de métaphores scientifiques de Maxwell ».

---

[2] in « Mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'âge classique » (R. Rashed dir.)
[3] in « *L'analogie dans la démarche scientifique* », sous la direction de Marie-José Durand-Richard (L'Harmattan, 2008)
[4] in « *L'analogie dans la démarche scientifique* », sous la direction de Marie-José Durand-Richard (L'Harmattan, 2008)

3. Six études didactiques sur des problématiques d'enseignement

La première étude présente les travaux du colloque européen CERME, sur le thème de la métaphore lors de trois sessions successives. La seconde propose une synthèse sur les rapports entre l'analogie et l'ethnomathématique.
Les deux textes suivants concernent l'enseignement des sciences chimiques et physiques. Le premier présente une expérimentation sur « L'introduction du concept d'élément chimique : un exemple du rôle de l'analogie ». Le deuxième étudie des activités présentées dans différents supports sur « Les analogies en électrocinétique : appui puissant ou piège sournois ? » et analyse les risques didactiques du recours à des analogies.
Les deux derniers textes abordent des questions liées au rôle de l'analogie dans des enseignements mathématiques à l'université. L'avant dernier étudie des analogies en jeu dans la formation des enseignants sur la numération. Le dernier éclaire les enjeux liés à la formalisation par une approche didactique.

Métaphore et analogie dans l'enseignement des mathématiques. : Le groupe « Métaphore » de CERME *(texte de Bernard Parzysz)*

Ce texte présente les travaux du groupe « Métaphore », qui a été créé suite à une demande de plusieurs membres, à l'occasion du deuxième colloque CERME en 2001, et pour lequel Bernard Parszyz été sollicité pour l'animer. Ses objectifs étaient de faire se rencontrer les chercheurs travaillant sur la place et le rôle des images dans l'enseignement des mathématiques, et en particulier sur l'utilisation des métaphores dans les stratégies d'enseignement destinées à favoriser la compréhension des concepts. Le groupe a fonctionné durant quatre sessions de CERME de 2001 à 2007. Ce texte inclut un apport d'Alain Kuzniak sur la notion de métaphore chez Soto Andrade.

Ethnomathématique et analogie *(texte de Marie-Pierre Galisson)*

Ce texte présente des éléments de synthèse sur la question de l'analogie comme outil d'intelligibilité dans la lecture des connaissances mathématiques à l'œuvre dans des pratiques socio-culturelles (non écrites) et aussi comme vecteur d'apprentissage dans des contextes culturels non occidentaux.
Les ethnomathématiciens, mobilisent des processus de pensée que l'on peut apparenter à un processus de recherche d'analogies entre des traces de pratiques et des théories mathématiques détachées des contextes qui ont présidé à leur constitution. Un autre de leurs axes de travail consiste à s'appuyer sur le potentiel mathématique des ressources culturelles autochtones pour interroger la pertinence pédagogique et didactique de curricula mathématiques « occidentaux » imposés par le biais de la colonisation.
Ce texte présente les rapports qui peuvent exister entre les travaux des ethnomathématiciens et la fonction d'une certaine forme d'analogie. Le second objectif consiste à illustrer, à l'aide de quelques exemples, la nature et la fonction d'un « mode de pensée analogique » qui permet aux ethnomathématiciens de décoder des connaissances mathématiques à l'œuvre dans des pratiques. Le troisième objectif vise à éclairer ce qui peut légitimer le recours à cette « forme d'analogie » pour développer l'enseignement des mathématiques en Afrique. Enfin, nous présenterons des réflexions personnelles à propos des enjeux et des difficultés que peuvent offrir les ressources et pratiques culturelles pour le développement d'une éducation mathématiques en Afrique (plus spécifiquement).

L'introduction du concept élément chimique : un exemple du rôle de l'analogie *(texte de Rita Khanfour-Armale)*

Pour enseigner la notion d'élément chimique deux possibilités peuvent être envisagées : soit de partir de la structure de l'atome et, moyennant l'hypothèse que son noyau est préservé lors des transformations chimiques, en déduire la propriété de conservation qui caractérise cette notion ; soit encore mettre en évidence la conservation de « quelque chose » qui permet de faire émerger ensuite cette notion. Dans tous les cas l'élève construit la notion d'élément chimique avec peu de connaissances de chimie. On est ainsi ramené à l'enseignement d'une notion fondatrice de la connaissance de l'élève, c'est-à-dire d'une notion qui ne peut s'appuyer sur d'autres connaissances du même champ disciplinaire et avec laquelle celui-ci va se construire. La conservation d'un élément chimique met donc en jeu des schémas complexes que nous allons explorer en étudiant un dispositif d'enseignement prenant appui sur une analogie.

Les analogies en électrocinétique : appui puissant ou piège sournois ? *(texte de Wanda Kaminski)*

Les dispositifs d'enseignement de physique peuvent avoir recours à des analogies avec des connaissances liées au vécu des élèves, ou à d'autres domaines de la physique. Ces choix conduisent à s'interroger sur la contribution de ces analogies tant à la compréhension des notions visées qu'à celle des principes et des méthodes de la physique. Sans prétendre à aucune exhaustivité, ce texte présente, à partir de quelques exemples, issus de l'enseignement de l'électrocinétique, des interrogations et des éléments d'analyse sur les questions soulevées par l'usage des analogies.

Les analogies dans la découverte d'une autre base de numération – la base sept pour de futurs professeurs des écoles *(texte de Laurent Vivier)*

L'apprentissage fondamental du système décimal est complexe car il condense en peu de signes de nombreuses significations et les élèves éprouvent des difficultés dans son apprentissage. En formation initiale des futurs professeurs du premier degré la numération dans des bases autres que dix est utilisée pour sensibiliser aux difficultés que leurs élèves pourront rencontrer ainsi que pour dénaturaliser leurs connaissances qui peuvent faire obstacle à l'enseignement. Dans cette étude, nous élaborons une situation de découverte de la numération de position en base sept où, la proximité des règles de représentation des registres constitués par deux bases différentes (base sept et base dix) ainsi que de certains traitements, favorise largement le fonctionnement de l'analogie. Cette étude a permis de mettre en lumière l'intérêt des idées avancées par Hofstadter et Sander, toutefois la notion d'hybridation apparaît être plus complexe qu'elle n'est exposée par ces auteurs. Il s'avère nécessaire, pour l'analyse didactique, de la préciser.

Comment l'analogie intervient-elle dans les activités de formalisation en mathématiques ? Peut-on l'utiliser didactiquement dans ces activités, en classe ou à l'université ? *(texte de Marc Rogalski)*

Ce texte étudie comment les activités de formalisation en mathématiques peuvent utiliser l'analogie, y compris sur le plan didactique. Trois types d'actions de formalisations sont rappelées : les formalisations de notions auparavant imprécises permettant de résoudre de grands problèmes mal formulés, l'unification formelle de domaines différents par axiomatisation et créations de « structures », la formalisation par simplification pour la résolution de problèmes : abandon d'informations, dénomination et axiomatisation locale, dialectique particulier/général. Enfin nous reviendrons sur les rapports entre la formalisation et les analogies en physique.

B. ÉLÉMENTS DE SYNTHÈSE : CONTRIBUTION A DES PROBLEMATIQUES DIDACTIQUES

La diversité de travaux étudiés, tant par leur nature (synthèse d'approches contemporaines de l'analogie, études historiques, expérimentations…), que par les domaines abordés (philosophie, psychologie, mathématiques, sciences physique et chimique), ou par les interrogations soulevées sur l'usage de l'analogie, suppose de revenir sur des problématiques communes : quels éclairages de l'histoire des sciences à la connaissance des problématiques d'enseignement ? Quels recours aux modèles issus de la psychologie pour les dispositifs d'enseignement ? Quelles interactions avec les approches didactiques ?

Des interrogations sur l'usage de l'analogie dans l'enseignement

Plusieurs textes de cette publication formulent des questions sur le rôle que joue l'analogie dans des dispositifs d'enseignement, que cela soit en sciences physiques et chimiques (textes sur « L'introduction du concept d'élément chimique » ou sur « Les analogies en électrocinétique ») ou en mathématiques (« Analogie entre théorie des nombres et théorie des fonctions », « Les analogies dans la découverte d'une autre base de numération», « Comment l'analogie intervient-elle dans les activités de formalisation en mathématiques ?», « Analogie et ethnomathématique ») et en premier dans les travaux du groupe Métaphore de CERME présentés par B. Parzysz. Face à la variété des usages des analogies, parfois implicites, voire non justifiés, rappelons quelques unes des interrogations présentes dans ces textes qui portent sur :

- Le recours à des analogies produites par les élèves :
  - Comment les enseignants peuvent-ils recueillir et rassembler les modes de pensée initiaux de leurs élèves ?
  - L'intuition liée à la vie quotidienne est-elle toujours utile pour la pensée formelle que nous cherchons à promouvoir ? Ou peut-elle être un obstacle ?
- Les relations entre les analogies produites par les élèves et celles proposées par les enseignants :
  - L'imitation active des modèles du professeur est-elle utile pour la construction par les élèves de leurs propres images ou métaphores?
  - Qu'arrive t'il lorsqu'il y a dissonance entre les métaphores des enseignants et celles des élèves ?
- Les conditions du recours aux analogies :
  - Comment les modèles utilisés par les enseignants aident-ils ou dérangent-ils les élèves ? Comment la façon de les utiliser influence-t-elle la construction des concepts mathématiques ?
  - Comment pouvons-nous faciliter le passage des élèves d'un type de représentation à un autre?
  - Quelles difficultés pose aux enseignants le recours aux analogies ?
- Les effets ou limites du recours aux analogies :
  - Le rôle joué par des images qui peuvent inciter davantage à adhérer aux ressemblances des représentations, qu'à analyser des similitudes

éventuelles de structure.
- L'impact du recours aux analogies sur la représentation du fonctionnement de la science.
- Plus largement, certaines analogies ne visent elles pas à persuader l'apprenant, quitte à éviter, de sa part, un questionnement porteur de l'analyse du phénomène.

Des constats sur l'usage de l'analogie dans l'enseignement avaient déjà été exprimés par Michèle Artigue et André Déledicq en 1992. Pour ces auteurs, tout se passe comme si, tout en reconnaissant l'importance de l'analogie dans le fonctionnement cognitif d'un individu, le système didactique était impuissant à gérer convenablement et efficacement ce processus ; ils énoncent plusieurs raisons :

- L'enseignement usuel a plutôt tendance à trouver son économie dans le cloisonnement. Il s'agit de simplifier la tâche des élèves, d'éviter les mélanges, les confusions, la dispersion et de favoriser par un tel cloisonnement la réussite à court terme…
- Accepter de confier à l'élève la responsabilité du fonctionnement analogique et de s'appuyer sur un tel fonctionnement, c'est aussi prendre en charge le passé des élèves, un passé souvent informel et qui ne relève pas nécessairement de la mémoire collective de la classe.
- En revanche, le système ne saurait bannir purement et simplement l'analogie car elle est utilisée par lui comme un moyen privilégié d'assurer au moins superficiellement la continuité dans la progression des savoirs à laquelle il est si attaché, donc à soutenir une vision où « l'art de l'enseignement » consiste en particulier à trouver les bonnes analogies.

Ces auteurs rappellent d'ailleurs le point de vue Guy Brousseau (1986) sur l'analogie : « c'est un excellent moyen heuristique lorsqu'elle est sous la responsabilité de l'élève, mais comme elle reste le plus souvent sous la responsabilité entière de l'enseignant, elle constitue plutôt un redoutable moyen de produire des effets Topaze et Jourdain ».

Face aux questions que posent les multiples usages de l'analogie dans l'enseignement, les ouvrages de psychologie et les articles sur l'histoire des sciences étudiés dans nos textes apportent des éclairages sur le recours à des modèles de l'analogie.

L'apport des travaux de psychologie

Tout d'abord l'étude menée par L.Vivier de l'ouvrage « L'analogie cœur de pensée » de D. Hofstfadter et E. Sander a constitué non seulement une analyse approfondie des usages de l'analogie que développent ces auteurs, mais a aussi permis à l'ensemble du groupe d'appréhender dans les échanges et la critique une approche commune de ces phénomènes.

Les théories de psychologie sur l'analogie, développées depuis les années 60 ne se résument pas au modèle « source-cible » ; mais ce modèle est largement utilisé dans l'enseignement, notamment en sciences, que la source provienne ou non d'un champ de la discipline. Certains de ces usages peuvent créer des obstacles à long terme et présenter des risques sur la compréhension des structures ou la représentation de la science.

Dans le texte de R. Khanfour-Armale sur « L'introduction du concept d'élément chimique », une analyse des problématiques de cet apprentissage est largement développée, et le recours à un modèle « source » est évalué, à moyen terme, tant du côté des apprentissages que de la perception des enseignants.
De plus, comme le souligne W. Kaminski dans « Les analogies en électrocinétique : appui

puissant ou piège sournois ? », le recours aux analogies ne répond pas à un toujours à un questionnement explicite ; il peut relever d'une pratique empirique dont les risques à plus long terme sur la compréhension des concepts scientifiques, voire la constitution d'obstacles didactiques, ne sont pas questionnés. Dans l'enseignement, l'analogie semble souvent considérée comme un « marchepied », qui constituerait un moyen de gagner du temps; mais ce choix n'est-il pas une illusion ? En effet, analyser les similitudes entre les systèmes peut apporter une compréhension plus riche et plus profonde, à condition toutefois d'avoir des connaissances dans les deux domaines et de prendre assez de temps. Dans certains cas, les auteurs des analogies développent un récit, en introduisant une chronologie qui du point de vue de la physique n'existe pas, au lieu de proposer la description ou l'investigation d'un phénomène.
Dans ces deux textes les représentations imagées des phénomènes de la « source » sont au cœur de l'analogie développée.

Tous les recours au modèle « source-cible » sont-ils pour autant d'un usage ambigu pour l'enseignement ? Cette question ouverte suppose une définition de critères, pour laquelle l'ouvrage de Sander « l'analogie du Naïf au Créatif » apporte un éclairage intéressant notamment par les critiques méthodologiques qu'il développe sur le recours au modèle source/cible dans les protocoles en psychologie et les conclusions qui en sont tirées.

Par ailleurs le modèle plus récent de la catégorisation est aussi questionné pour l'enseignement des mathématiques (cf. le texte de L.Vivier « Les analogies dans la découverte d'une autre base de numération ») en particulier, sur la distinction des hybridations syntaxiques, orales ou écrites, n'affectant pas le sens de ce qui est produit et sémantiques qui, elles, l'affectent. La question se pose également de savoir si une hybridation syntaxique est opérationnelle et si elle fournit la bonne réponse ou non. Par ailleurs il semble souvent difficile de trancher entre l'hybridation et le marquage ; il semblerait utile, pour cela, de mener des entretiens précis avec les étudiants.

L'apport des travaux en histoire des sciences

Notre intention n'est pas de justifier une utilisation de l'analogie dans l'enseignement actuel par des analogies avec celles produites par exemple par les mathématiciens des 17$^{\text{ème}}$ siècle ou des physiciens du 19$^{\text{ème}}$. Toutefois les analyses et expérimentations développées dans les textes de notre publication, mettent en valeur de l'intérêt d'une étude historique explicitant les composantes de l'élaboration du savoir scientifique. Des différences dans l'usage des analogies sont aussi liées à des caractéristiques même des sciences notamment les procédures de preuve.

Les textes d'historiens des sciences, étudiés dans cette publication, s'appuient sur différents types de sources : des écrits de mathématiciens qui ne font pas allusion à l'analogie mais où celle-ci est mise en évidence par l'historien (cf. le texte de M. Rogalski « Analogie entre théorie des nombres et théorie des fonctions de C.Houzel ») mais aussi des textes de physiciens, mathématiciens ou philosophes, principalement du 17ème au 20ème siècle qui comportent un recours explicite à des analogies, ou prenant celle-ci comme le sujet central de leur propos. Un de leurs premiers apports, en général ignoré dans les traités contemporains destinés à l'enseignement, est de montrer la diversité des recours à l'analogie dans le travail du scientifique.

En sciences physiques nous avons vu plusieurs types de relations analogiques entre une théorie physique modèle et une théorie physique en construction, ou entre deux théories physiques de même niveau de développement via des mêmes principes physiques ou par leur relation à un même modèle mathématique (cf. le texte de A.-A.Decroix et J.Douaire sur « Les analogies mathématiques au sens de Poincaré et leur fonction en Physique » de Michel Paty).

En mathématiques ces analogies peuvent concerner des méthodes (le droit d'utiliser une technique connue sur de nouveaux objets non définis), des objets mathématiques pour établir leur existence ou pour les définir, les noter, ou préciser leurs propriétés, ou le rapprochement de deux domaines mathématiques. Elles peuvent avoir plusieurs fonctions (cf. le texte de J. Douaire sur « L'analogie et la pensée mathématique » de E. Knobloch) :

- Une fonction heuristique : l'activité scientifique fait usage d'un discours d'invention.
- Une fonction de communication au sein de la communauté scientifique.
- Une fonction de preuve.
- Une fonction de généralisation, de formalisation d'un savoir.

Certaines de ces fonctions heuristiques ou de formalisation perdurent et joue un rôle accru dans les mathématiques contemporaines ainsi que l'analyse Marc Rogalski.

Vers un questionnement fondamentalement didactique

Notre but était de s'interroger sur le fonctionnement de l'analogie dans les apprentissages et sur les justifications de son recours dans l'enseignement. L'ambition du groupe était de disposer d'outils conceptuels pour analyser des approches dans le cadre pluridisciplinaire de notre laboratoire.
En dehors des textes présentés dans cette publication, nous avons aussi abordé d'autres types de travaux sur l'analogie, notamment l'étude par Joris Mithalal de l'ouvrage « La Métaphore vive » de Ricœur développant une analyse de la métaphore comme processus rhétorique par lequel le discours libère le pouvoir que certaines fictions comportent de redécrire la réalité. Et, plus particulièrement, Aristote, notamment grâce à l'étude par Cécile Ouvrier-Buffet de l'article de Huneman « Sur la conception aristotélicienne de l'analogie » publié dans « l'Analogie et la démarche scientifique ».
Si ces études, qui mettent en évidence des relations entre analogie et raisonnement, n'ont pas donné lieu à des textes dans cette publication, c'est essentiellement parce que leurs relations avec les problématiques d'apprentissage ou d'enseignement devenaient moins effectives que pour les autres textes. Ces travaux fournissent un éclairage sur la structure, la cohérence interne de l'analogie plus que sur les connaissances scientifiques ou non, sollicitées dans la production ou la réception de l'analogie, leurs conditions d'emploi, et leurs effets sur la construction des savoirs dans des modalités d'enseignement. Toutefois, ces études nous ont permis non seulement de cerner les champs pouvant fournir des éclairages aux phénomènes qui nous intéressent plus particulièrement, mais aussi d'affiner nos outils d'analyse.

Des perspectives

Pour schématiser l'évolution de notre approche de l'analogie, celle-ci nous intéresse comme objet d'étude en premier par les multiples questions qu'elle pose comme outil dans les processus d'apprentissage et d'enseignement.
D'une part des questions d'enseignement sont posées en des termes généralisables. Citons, sans en reprendre l'intégralité :

- les apports critiques de la didactique à des usages des analogies dans l'enseignement, notamment dans les sciences physiques ; « est-il possible de faine vivre dans le

système didactique le processus analogique de façon plus conforme au rôle qu'il joue dans l'activité scientifique, et si oui à quelles conditions ? » comme le formulaient Artigue et Deledicq pour les mathématiques.
- les questionnements sur la possibilité de conduire un processus de formalisation.

D'autre part l'utilisation des notions de didactique, dans le but d'établir un lien entre des évolutions historiques et des questionnements sur l'enseignement, constitue davantage qu'une simple analogie, mais une mise à l'épreuve réciproque des hypothèses de ces champs par un recours « pondéré » à une interaction dialectique entre des concepts de didactique et des questions épistémologiques historiques. Comme le souligne Marie-Pierre Galisson des « mathématiques analogiques » trouveraient-elles place dans les modèles de mathématisation, de conceptualisation que sous-tendent les cadres théoriques de la Théorie Anthropologique du Didactique et de la Théorie des Situations ?

RÉFÉRENCES

Artigue, M. & Deledicq, A. (1992). *Quatre étapes dans l'histoire des nombres complexes*, Cahier didirem n°15.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *RDM* 7.2 33-115.

Durand-Richard, M.-J. (dir.) (2008). *L'analogie dans la démarche scientifique : perspective historique*, L'Harmattan.

Hammandjian, P.G (1981). Les concepts de métaphore scientifique et de système de métaphores scientifiques de Maxwell, *Analogie et connaissance* chapitre XVI -Séminaire interdisciplinaire du Collège de France, ed. Maloire.

Hofstadter, D. & Sander, E. (2013). *L'analogie cœur de pensée*, Odile Jacob.

(2013).

Khanfour-Armale, R. & Vivier, L. (coordonateurs) (2013). *Les Exemples en Chimie, en Mathématiques, en Physique*, Cahier du LDAR (7).

Kuzniak, K. & Vivier, L. (coordonateurs) (2011). *La modélisation dans l'enseignement des mathématiques - Mise en perspective critique*, Cahier du LDAR (3).

Rashed, R. (dir.) (1981). *Mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'âge classique*, hommage à Jules Vuillemin, Centre National de la Recherche Scientifique.

Ricœur, P. (1975). *La métaphore Vive*, Paris, Le seuil.

Sander, E. (2000). L'analogie du naïf au créatif, L'Harmattan.

DEUX ÉTUDES D'OUVRAGES DE PSYCHOLOGIE SUR L'ANALOGIE

« L'analogie cœur de pensée » D. Hofstfadter et E.Sander
Texte de Laurent Vivier

« L'analogie du naïf au créatif » E.Sander
Texte de Jacques Douaire

L'ANALOGIE, CŒUR DE LA PENSÉE

DOUGLAS HOFSTADTER & EMMANUEL SANDER, ODILE JACOB, 2013

Laurent VIVIER
Université Paris Diderot
laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

I PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Douglas Hofstadter est professeur de sciences cognitives à l'Indiana University, Emmanuel Sander est professeur de psychologie à l'université Paris 8. Leur ouvrage est plutôt un essai sur la nature des processus de pensée, il y a peu de références scientifiques. Cela en fait un livre facile à lire, largement accessible, souvent drôle avec de très nombreuses anecdotes et citations relevées pendant des années par les auteurs dans leur vie familiale et professionnelle. Les exemples font essentiellement référence au français et à l'anglais, mais aussi au chinois, pour une culture très différente.

Le titre reflète parfaitement le contenu du livre, même si le terme « catégorie » n'y apparaît pas. En effet, ils identifient le processus de catégorisation avec le fait de faire une analogie et interprètent toute pensée humaine à cette aune. Ceci constitue la thèse centrale des auteurs : l'analogie est le moteur de la pensée. Leur propos est largement développé par des exemples, nombreux. Le résumé qui suit reprend une petite partie de la multitude d'exemples constituant l'ouvrage.

Néanmoins, on voit mal comment ce seul point, général, pourrait être fonctionnel, on attend beaucoup du livre, sur la manière de faire fonctionner ce point de vue, mais on reste sur sa faim. On note quelques éléments qui pourraient servir à l'analyse : l'hybridation, le marquage et l'abstraction, les analogies naïves (voir ci-dessous) mais la mise en fonctionnement reste à faire.

Le livre propose néanmoins un point de vue original et sensible des processus de pensée. Il permet une entrée dans l'analogie, avec une grande ouverture. En ce sens il est très utile, mais il n'est pas possible de s'en contenter si l'on veut faire une étude de l'usage didactique de l'analogie. En particulier, on peut sans doute mettre en garde contre une étude des analogies dans un domaine que l'on ne maîtrise pas comme dans le chapitre 7 où il est notamment question de l'enseignement des mathématiques à l'école et où, pour un didacticien des mathématiques, de nombreux points sont discutables, partiels. En revanche, les exemples en sciences, notamment en physique, s'appuient surtout sur l'évolution des concepts et ils étayent bien mieux la pensée des auteurs.

A la fin du livre, une bibliographie est donnée chapitre par chapitre, mais les références ne sont que rarement faites dans le corps de l'ouvrage (on note notamment une référence à Vergnaud et à Viennot pour le chapitre 7). Le dialogue de la fin est un peu étrange et ne sert finalement pas la thèse des auteurs. Il s'agit plutôt d'un amusement.

II RÉSUMÉ[5]

La thèse défendue : tout est analogie !

Au préambule, outre l'annonce de la thèse défendue et du contenu du livre, les auteurs prennent le temps pour commencer à faire comprendre la richesse d'un mot, notamment avec le jeu de mots des zeugmes qui est l'usage d'un même mot ayant deux sens différents comme dans *on pourrait se retrouver dans cinq minutes et le jardin* ou *Kurt était et parlait allemand*. Le sens d'un mot n'est pas une « étiquette lexicale bien délimitée » comme les décrivent les dictionnaires (page 10). Le sens n'est ni homogène ni simple et si l'on s'y penche on y trouve un gouffre sans fond, c'est un processus qui ne s'arrête jamais : on a beau creuser, le sens clair et bien délimité n'apparaît jamais. Pourtant, l'usage au quotidien tend à renforcer le fait que les catégories sont de simples étiquettes bien délimitées (page 21). Les trois premiers chapitres vont tenter de s'écarter de cette vision naïve des catégories, « une catégorie est une boîte », tout en faisant le lien constant avec les analogies.
Les auteurs veulent également s'écarter de deux caricatures de l'analogie. D'un côté on trouve l'analogie proportionnelle (pages 22-23). Elle est en effet concise et précise, et légitimé par l'histoire car il s'agit d'un des aspects de l'analogie étudié par Aristote, mais cette vision est trop restrictive car le champ d'application est très limité. D'un autre côté l'analogie serait réservée aux grandes découvertes, pour les raisonnements sophistiqués (page 24). Néanmoins, ce qui est en jeu c'est la pensée humaine et non le degré de sophistication de ce qui est produit et les auteurs vont tenter tout au long de l'ouvrage d'étendre l'usage de l'analogie à tous les domaines de la pensée humaine.
Faire une analogie c'est catégoriser[6], c'est le processus caractéristique de la pensée : faire une analogie et catégoriser sont synonymes, les auteurs ne distinguent pas « catégorisation » et « analogie ». Il s'agit de la capacité à percevoir les ressemblances (page 28) pour s'adapter aux situations qui sont toujours nouvelles (page 33).

Chapitres 1 à 3 : Entrée en matière sur l'évocation lexicalisée, des mots et des expressions, ou non lexicalisée

L'objet du préambule et de ces trois premiers chapitres est de montrer l'étendue de ce que les auteurs entendent sous le terme « analogie ». Les auteurs justifient leur position en faveur de l'analogie avec de nombreux exemples.
Le **chapitre 1** concerne les mots. Bien entendu, les auteurs discutent de mots tels que « oiseau » en montrant qu'une définition « mathématique » d'un tel concept est impossible. Ils se concentrent plutôt sur les situations. Par exemple le choix entre « chaussure » et « sandale » peut dépendre de la situation dans laquelle on se trouve et pas uniquement de l'objet que l'on cherche à désigner. La distinction voiture/camion est en générale suffisante et fonctionnelle dans la vie courante, mais des raffinements sont parfois nécessaires, notamment pour les passionnés de véhicules à moteur.
Les auteurs s'appuient beaucoup sur des phrases d'enfants pour bien faire sentir l'analogie que les tout-petits font pour parler avec un langage en cours d'apprentissage. Ils font ensuite le parallèle avec des analogies importantes en sciences en prenant appui sur les lunes de Jupiter découvertes par Galilée (page 57-60) en pointant le saut cognitif effectué notamment dans le passage de « la Lune » à « les lunes ».
Ils étendent leur propos aux mots du discours qui ne désignent pas un objet comme « très » en

[5] Les notes qui suivent sont des points de vue et critiques de l'auteur du résumé.
[6] « L'activité de catégorisation consiste en une association provisoire et graduée d'une certaine entité ou situation à une catégorie existant préalablement dans l'esprit d'une personne » (page 21).

parlant de « situation très », des situations où un sentiment de creux dans le discours est à soutenir par l'usage du mot « très » (page 87). La notion de situation permet de distinguer l'usage de mots comme « et » et « mais ». Les « situations mais » présentent un discours avec un « zigzag » ce qui ne se produit pas dans les « situations et » comme on peut le sentir, par exemple, dans « j'aime New-York et les new-yorkais » et dans « j'aime New-York mais je n'aime pas les new-yorkais » où les mots « et » et « mais » ne sont pas interchangeables (page 92).

Au **chapitre 2**, les auteurs étendent la discussion aux expressions. Ils commencent par des mots composés comme « brosse à dent » ou « porte-plume » ou des acronymes (SIDA, LASER,…) qui ont le même pouvoir évocateur que les mots du chapitre 1. Ils mentionnent également les mots *simples* qui sont en fait des composés que l'histoire de la langue a concaténés (vaurien, copain, biscuit,…). Ils discutent ensuite des expressions. Tout d'abord les banalités comme « il est l'heure d'aller au lit » qui évoque beaucoup plus que ce qu'elle dit (page 126) puis, plus longuement, les expressions comme « chat échaudé craint l'eau froide » et les fables comme Renard et les raisins (expression *sour graps* en anglais qui n'a pas d'équivalent en français).

Le **chapitre 3** s'intéresse quant à lui aux analogies invisibles car liées à des catégories non lexicalisées. Certaines sont créées sur le champ, de manière *ad hoc*, pour répondre à une situation alors que d'autres sont durables car on s'en ressert (page 173-175). Les auteurs développent le cas d'un dialogue dans un TGV où le locuteur parle d'un voyage antérieur et précise qu'une personne était assise « juste là » en désignant un siège de l'index. Il est évident que ce n'est pas un « là » à prendre au pied de la lettre mais un « là » qui utilise (au moins) une analogie. Ils discutent ensuite (Page 179) des analogies liées aux expressions « moi aussi ! » ou « c'est comme moi ! » où l'évocation est parfois loin de la situation proprement dite (ils donnent l'exemple, page 185, d'un chèque signé du nom de jeune fille, qui est à refaire, qui évoque un « il m'arrive la même chose chaque mois de janvier » où le chèque est daté de l'année précédente).
Ces analogies, et d'autres plus fugitives que les auteurs nomment « mini-analogies », nous inondent à chaque instant car ce sont elles qui nous permettent de comprendre, et d'agir sur, le monde complexe dans lequel nous vivons. Les auteurs précisent que la force d'une analogie est d'autant plus grande que la proximité entre les éléments[7] de l'analogie est importante (page 193).
Certaines évocations peuvent être très spécifiques et personnelles car liées à un événement particulier et marquant (l'obtention d'un visa, une vaccination, un accident,…) alors que d'autres sont plus diffuses car noyées dans un grand nombre d'expériences (manger une pizza, aller au supermarché,…). Le rôle de l'émotion (page 210) joue aussi un grand rôle dans une évocation.
C'est à ce moment que les auteurs introduisent la notion d'encodage (page 200) : « chacun détermine pour soi où se trouvent les limites d'une situation et quels en sont les ingrédients clés […] : nous encodons des situations à tout bout de champ selon des dimensions qui, ultérieurement, détermineront quels événements nous conduiront à les évoquer. » puis (page 203) ils affirment que l' « espace des similitudes est à la fois subjectif et multidimensionnel ». Ainsi, continuent-ils, c'est par analogie que l'on produit (sans cesse) des catégories non lexicalisées qui permettent une recherche de compréhension par l'évocation. De plus (page 204), la clarté d'analogies effectuées entre deux situations parfois très lointaines apparaît à un niveau abstrait d'encodage. Plus généralement, lors d'un encodage il y a toujours de

[7] Cette notion de *proximité* n'est pas vraiment définie, on en reste au stade de la perception d'une proximité, voir d'une identité entre les éléments en jeux (mots, situations, etc.).

l'abstraction (page 218). Néanmoins, l'évocation d'un événement passé par un événement récent ne nécessite pas toujours que les deux situations aient le même squelette conceptuel, car d'autres éléments partagés entre les deux situations peuvent jouer un rôle.
Après ces trois premiers chapitres, les auteurs ont installé leurs idées centrales. Une catégorie est un mot, une étiquette verbale ou n'est pas lexicalisée. Les catégories sont construites par analogie et faire une analogie et catégoriser sont synonymes. Leur idée « constitue un point de vue unificateur sur la pensée humaine qui place en son centre les catégories et les analogies » (page 229).

La notion d'espace conceptuel

Pour préciser ce qu'est un espace conceptuel, les auteurs prennent l'image d'un espace bidimensionnel dont les points[8] sont des concepts (page 101). Une langue utilise des mots qui recouvrent certains concepts, mais pas d'autres. Afin de bien se démarquer de la perception d'une catégorie comme une boîte, ils précisent que chaque concept catégorisé par un mot est coloré par une tache sombre au centre puis dont la teinte[9] s'estompe lorsque l'on se dirige vers le *bord* d'un concept, là où la définition est moins assurée.
Au centre de l'espace conceptuel, là où la couleur est intense car formée des taches de plusieurs concepts, se trouve les concepts clés de l'humanité, ceux nécessaires à la survie. Puis, en s'éloignant de ce centre, la couleur s'estompe, on trouve des concepts liés à une culture, sous culture, propres à la langue. On peut s'imaginer la différence entre deux langues en superposant sur un même plan des couleurs différentes pour chaque langue. Autour du centre, dans un anneau (page 105), un concept peut ne pas être catégorisé par un mot pour une langue, alors qu'il peut l'être dans une autre (ils prennent l'exemple de l'anglais *pattern* qui n'a pas d'équivalent en français), mais le recouvrement des concepts catégorisés par un mot permet, dans cette zone très colorée, de recouvrir le concept à l'aide de plusieurs catégories.

Une langue répond au besoin humain de disposer de catégories pour nous aider à vivre en s'appliquant à un grand nombre de situations différentes. Le raffinement catégoriel ne va pas toujours dans le sens de la plus grande précision car le raffinement du lexique s'opère aussi par un élargissement par abstraction (page 108-109). Ils prennent l'exemple du mot « mère » en français ainsi que la traduction de « jouer d'un instrument de musique » en chinois qui ne peut se produire qu'avec un appauvrissement par abstraction de « jouer » en, par exemple « maîtriser » ou « connaître ». Ils précisent qu'« une tension existe donc entre le besoin de construire des distinctions fines qui couvrent peu de cas et des catégories larges qui en couvrent beaucoup. » (page 109)
Les trous (absence de couleur) laissés par les catégories lexicalisées par un mot d'une langue (donc forcément hors du centre voire de l'anneau), sont comblés par des catégories lexicalisées par plusieurs mots (cf. le chapitre 2, avec des expressions, parfois propres à chaque langue, comme « avoir l'esprit de l'escalier » en français et « c'est la queue qui remue le chien » en anglais qui n'ont aucun analogue dans l'autre langue) et par des catégories non lexicalisées.

[8] Dans leur représentation, les auteurs ne précisent pas si les points ont une épaisseur, même si on peut le penser, ni si leur analogie spatiale est dirigée vers un espace continu ou discret.
[9] On relève l'usage d'une analogie avec des couleurs. On pourrait s'interroger sur la validité d'une telle analogie, mais les auteurs s'appuient fortement sur leur thèse : comme toute pensée est formée d'analogies, ils ne se privent pas d'utiliser, tout au long de l'ouvrage, des analogies pour exprimer leurs idées.

Chapitre 4 : l'abstraction, le phénomène de marquage

Il est très important pour la pensée de pouvoir effectuer des glissements entre catégories, surtout ceux qui reposent sur l'abstraction (page 232). De nombreuses découvertes scientifiques reposent sur ce type de glissements. Ce qui est en jeu ici est le phénomène de marquage qui permet au langage de perdre sa rigidité et entraîne flexibilité et créativité. Entre précision et souplesse, c'est ce dont à besoin l'abstraction.

Le marquage

Pour comprendre le marquage, les auteurs énoncent, entre autre, cette phrase (page 241) : « j'ai 34 étudiants en cours dont seulement 7 sont des étudiants. » Un même mot est employé, « étudiant », mais pas avec le même niveau d'abstraction : le deuxième est utilisé avec un sens marqué et pas le premier. Ce glissement dans une même phrase demande une attention soutenue pour comprendre le sens. Mais en général, le contexte permet facilement de comprendre s'il s'agit du sens marqué ou non comme dans « une foule comptant 50% d'hommes et 50% de femmes » : il s'agit évidemment du sens marqué du mot « homme » que l'on pourrait reformuler avec le sens non marqué en « la foule comptait 100% d'hommes dont 50% de femmes. »
Parfois, le sens marqué est précisé par une majuscule (page 269) comme dans le Soleil et un soleil ou la Lune et une lune. Le terme marquage a le même sens que les marques au sens commercial comme on peut le constater avec « Scotch » ou « Frigidaire ».
On retrouve le sens non marqué dans des métaphores comme dans « André est un âne » ou « Corentin est un cochon » (page 282). Il ne s'agit évidemment pas d'un vrai âne ou d'un vrai cochon. Cet usage peut s'appuyer sur une catégorie abstraite déjà là, comme dans « Corentin est un cochon », peut être décalé comme dans « ce traitement de texte est un cochon » ou bien encore être créer de manière *ad hoc*, sur le champ, comme dans « Paul est un pont » pour signifier le lien que Paul crée entre deux personnes.

Le marquage peut aussi avoir plusieurs niveaux, pas seulement deux, comme dans l'exemple du mot « café » (pages 241-242). Il s'agit ici d'un phénomène d'abstraction qui s'accompagne d'un appauvrissement du concept car moins spécifique (page 307). Les auteurs signalent néanmoins que c'est cet appauvrissement par abstraction qui permet souvent de trouvé la clé d'un problème (ils donnent l'exemple d'un pique-nique sans tire-bouchon : pour ouvrir une bouteille le passage de tirer le bouchon à pousser le bouchon, une solution, ne peut s'établir qu'à un niveau plus abstrait, page 307). De plus, c'est dans cette abstraction que l'on trouve la spécificité de l'expert. Il ne peut en effet pas se contenter d'une liste de mots, de connaissances « à plat ». La « verticalité » des concepts est en effet essentiel pour l'expert : « construire trois ou quatre niveaux est un signe d'expertise dans la plupart des domaines » alors que « les novices restent souvent bloqués à deux niveaux »[10] (page 298). Ces niveaux d'abstraction sont alors organisés ce qui permet aux auteurs de préciser que catégoriser c'est différencier et associer pour permettre de distinguer (ils développent l'exemple du vin, page 301).

Les auteurs développent plusieurs exemples comme l'anecdote de la couronne de Hiéron où Archimède est sensé avoir fait une découverte dans sa baignoire : l'analogie entre le corps d'Archimède et la couronne ne peut se faire qu'au niveau abstrait des volumes, ce qui permet d'associer des objets par analogie que tout sépare sauf la propriété sur laquelle repose la

[10] Notons que l'on peut définir de cette manière l'expertise.

découverte.
Quatre exemples sont développés plus longuement dans l'ouvrage dont les trois suivants qui touchent aux sciences (le quatrième exemple est constitué par les sandwiches).

L'exemple des ombres (pages 252-258)

Nous avons tous une familiarité avec les ombres. Partant du cas le plus simple, l'ombre qui est la trace laissée par un obstacle aux rayons du soleil, les auteurs étendent le domaine de validité de ce mot en étendant la catégorie par abstraction. La première extension, la plus simple, consiste à remplacer le soleil par une autre source de lumière (ce qui amène malgré tout des phénomènes différents comme lorsque l'on marche, la nuit, dans une rue éclairée par des réverbères).
A partir de deux photos très ressemblantes, l'une montrant un arbre au soleil, avec son ombre, et l'autre le même arbre, en hiver, avec une *ombre* de neige sous l'arbre – presqu'au même endroit –, l'extension se fait ici en modifiant profondément le phénomène source de l'ombre car il ne s'agit plus de lumière, mais de neige. Ils nomment cela une « ombre nivale » en reprenant l'expression anglaise « ombre pluviale ». Cette dernière ne désigne cependant pas une partie sèche sous un abri par temps de pluie, mais l'*ombre* d'une chaîne de montagne qui bloque les nuages porteurs de pluie : désert aride d'un côté et vallée luxuriante de l'autre (ils prennent l'exemple de la chaîne Cascade dans l'Oregon). Il s'agit bien d'une ombre, mais bien plus abstraite que précédemment car ce n'est pas directement le flux, qu'il soit constitué de lumière, d'eau ou de neige, qui est bloqué.
Cette section discute aussi de l'ombre d'un camion sur l'autoroute (peu de voiture devant lui sur sa voie), des ombres que les physiciens du XIXe siècle tentaient de faire apparaître pour comprendre le phénomène lié à un flot d'électrons (particules alors inconnus), des ombres de natalité après une guerre (la deuxième guerre mondiale), ou d'autres expressions comme « grandir à l'ombre de ses parents » ou « il n'est plus que l'ombre de lui-même ».

L'exemple des ondes (pages 258-266)

Cette section se déroule comme celle sur les ombres, mais dans le domaine de la physique. « Notre conception spontanée de la notion d'onde » se forge principalement à partir d'ondulation de la vie quotidienne : ondulations au vent (drapeau, champ de blé), ondulations des vagues (au bord de l'océan ou de migration), ondes aquatiques.
Cependant, les ondes aquatiques, bien que largement partagées et vécues dans la vie de chacun, sont très complexes et mettent en jeu de nombreux phénomènes. Une partie est longitudinale (dans le sens de la propagation) et une partie transverse. Ces ondes ont permis de définir les notions de *longueur d'onde*, de *période*, de *fréquence*, de *vélocité*[11] et les phénomènes de *réflexion*, *réfraction*, *interférence*.
C'est par analogie que le son a été rapproché des ondes sur l'eau ce qui a permis de parler d'ondes sonores. Pourtant, les deux types d'ondes ont des caractéristiques très différentes. Les ondes sonores sont longitudinales et la vitesse ne dépend pas de la longueur d'onde contrairement aux ondes aquatiques. Néanmoins, « le saut mental depuis le concept d'*oscillations visibles aquatiques* vers celui d'*oscillations invisibles de l'air*, bien que relativement modeste, fut le plus important de tous les sauts qui jalonnent l'histoire du développement du concept d'*onde*. » (Page 262) Il a préparé le terrain au saut suivant, vers les ondes lumineuses. Elles sont aussi transverses, mais ce sont des quantités abstraites, les champs électrique et magnétique, qui fluctuent.
Depuis, de nombreuses autres analogies ont vue le jour en prenant appui sur le concept

[11] On dit plutôt *célérité* il me semble.

d'onde : ondes de température, onde de spin, ondes gravitationnelles, ondes quantiques ou de probabilité.

L'exemple des quadrilatères (pages 288-294)

Partant d'exercices sur les quadrilatères que l'on peut poser au CM2 sur les quadrilatères, les auteurs relèvent une contradiction entre ce qui est attendu dans la reconnaissance visuelle de forme (distinction carré, rectangle, losange, parallélogramme) des propriétés[12] de ces quadrilatères (où un carré est aussi un losange et un rectangle et un parallélogramme, etc.).
Ainsi le diagramme formel mathématique usuel (cf. figure 1) ne rend pas compte ni de la perception ni de la compréhension. Ils interprètent ce phénomène par le marquage : le rectangle perçu est le rectangle marqué (rectangle$_1$) qui exclut les carrés alors que le rectangle plus abstrait, non marqué (rectangle$_2$), inclut les carrés. Il en est de même des losanges et parallélogrammes[13]. Avec cette distinction, on peut rendre compte de la structure des catégories de quadrilatères (cf. figure 2).
Les auteurs mentionnent également, à partir de leurs études[14], que le sens marqué est très souvent ignoré tout comme l'inclusion des catégories. Le diagramme de la figure 1 n'apparaît que pour une très petite minorité et ce que l'on trouve plutôt c'est une structuration en deux niveaux, parfois en trois niveaux (figures 3 et 4).

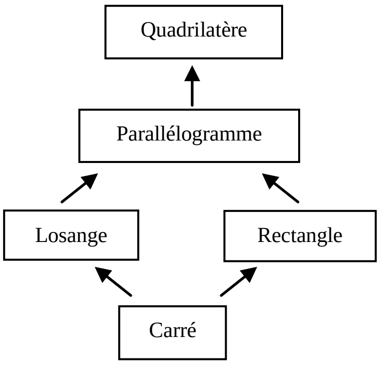


Figure 1

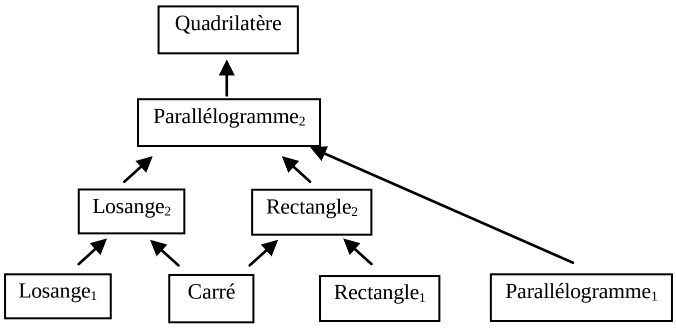


Figure 2

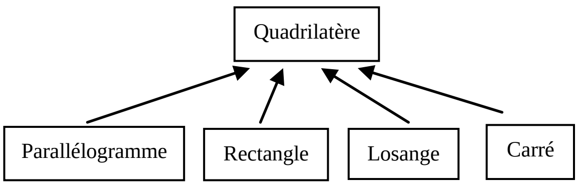


Figure 3

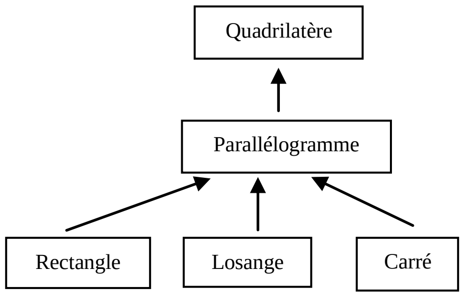


Figure 4

[12] Les auteurs ne remarquent sans doute pas que leur propos est logiquement incorrect. En effet, les propriétés sont des propriétés directes (comme « un rectangle a 4 angles droits et 4 côtés, parallèles 2 à 2 ») et non perçues ni exprimées comme caractéristiques. Ainsi, ce n'est pas parce qu'une figure a 4 angles droits et 4 côtés parallèles 2 à 2 qu'il s'agit d'un rectangle. Il n'y a donc pas de contradiction logique à ce niveau d'étude.

[13] On pourrait aussi ajouter les quadrilatères avec un sens marqué et un sens non marqué, ce que les auteurs ne font pas (sans doute parce qu'ils ne se posent pas la question, la question n'étant pas de repérer les quadrilatères mais uniquement les carrés, rectangles et losanges).

Par ailleurs, les auteurs ne mentionnent pas la forme perçue au-delà de la simple description mathématique alors même que cela influence la perception : un rectangle très allongé est un rectangle ou une « baguette » ? un carré « sur la pointe » est-il un carré ou juste un losange ?

[14] Il s'agit de collégiens et d'adultes à l'université, mais dans quelle filière ?

La pensée humaine, l'intelligence, le génie

Au chapitre 4, ils caractérisent la pensée humaine, par opposition aux autres animaux, par l'extension catégorielle, notamment par abstraction, et les glissements catégoriels (page 315). Ils discutent aussi de la différence de performance entre l'homme et l'ordinateur : la grande différence, au profit de l'homme, est la pensée, c'est-à-dire la capacité à produire des analogies (page 35). Ils reprennent ce point en fin de chapitre 6 avec un développement assez long sur la traduction.
Au chapitre 2, les auteurs précisent leur définition de l'intelligence qui est « l'art d'aller droit au but, au cœur des choses, à l'essentiel rapidement et de manière fiable » (page 157). C'est ainsi que des « génies », comme Einstein, Maxwell ou Archimède, on mis « le doigt sur des essences jusque là non perçues, en s'appuyant sur leurs répertoires de catégories, qu'ils ont alors su rendre supports d'analogies originales et importantes ». (Page 164) C'est cela qui fait leur singularité alors même que des étudiants actuels, voire des passants dans la rue, pourraient avoir « des réflexions dont la perspicacité impressionnerait » ces génies parce que passées dans le savoir commun[15].

Chapitre 5 et 6 : usages conscients et inconscients des analogies

Nous sommes souvent victimes d'analogies faites à notre insu, de manière inconsciente. L'analogie s'impose d'elle-même sans que nous en soyons maître. C'est par exemple le cas dans les amalgames, lorsque l'on veut dire deux choses en même temps, comme « de quoi tu dis ? », « non merci je n'en veux plas » (page 322) ou « que diable ai-je mis mon couteau ? » (page 326). Ce phénomène est renforcé par une proximité conceptuelle et ne se limite pas au langage car on peut aussi faire son code de carte bancaire pour faire le code d'entrée dans son immeuble (page339). Dans ce dernier cas, c'est le geste qui est le relai d'une « mauvaise pioche » faite par la catégorie *code*.
Parfois, ces analogies inconscientes agissent comme des « œillères catégorielles » (page 352) car elles nous masquent certains points de vue, par un manque de souplesse, alors que c'est souvent par un changement de point de vue que l'on peut résoudre un problème (page 355). Une obsession ou un état émotif peut orienter les analogies que l'on fait (des découvertes scientifiques peuvent d'ailleurs provenir d'une telle obsession).
Ces analogies inconscientes peuvent également être le siège d'inductions, sans validité logique même si elles peuvent être justes. C'est le cas par exemple lorsque l'on affirme que « tous les hollandais son sympas » ou que nos frites sont bonnes alors que l'on n'en a mangé que six (pages 362-373). La force de l'analogie est liée à l'hétérogénéité supposée de la catégorie et à la diversité des cas observés (page 374). Il est par ailleurs plus facile de délaisser un raisonnement logique (exemple du théorème de Fermat) qu'analogique (page 376).
Ce chapitre 5 se conclut sur le constat que nous sommes prisonnier du connu et seul le connu peut nous permettre d'agrandir notre prison.

Le **chapitre 6** est en quelque sorte le pendant du chapitre 5 en montrant des analogies que nous faisons de manière consciente. Tout d'abord les auteurs parlent d'analogies caricaturales où l'on invente une situation totalement différente d'une situation initiale, tout en étant, idéalement, exactement la même (c'est-à-dire ayant le même *squelette conceptuel*), pour amener le locuteur à la conclusion désirée en accentuant certains points. Elles sont parfois explicatives (page 391) comme « – J'ai repensé toute ma vie. J'ai tout à fait changé ! Tout va marcher comme sur des roulettes maintenant ! – Félicitations, mais tu sais, un paquebot ne fait

[15] Pensons par exemple au fait que la Terre tourne autour du Soleil.

pas demi-tour en cinq minutes. » Une analogie explicative est d'autant plus forte que les deux situations ont le même squelette conceptuel, que la situation nouvelle « va comme un gant » à la première.
Bien entendu, des détails peuvent perturber ces analogies, notamment des détails superficiels. C'est ce que l'on appelle le « biais de superficialité » (page 407) qui donne une mauvaise réputation à l'analogie : dans la résolution de problème, de nombreuses études en psychologie ont montré que les sujets s'attardaient sur des traits superficiels faisant apparaître des liens entre deux situations. Les auteurs récusent ce biais en affirmant que ces études sont liées au « paradigme source/cible » où des sujets découvrent une connaissance qu'ils doivent réappliquer juste après à une autre situation. Ils concluent qu'un apprentissage superficiel ne peut donner lieu qu'à des analogies superficielles et que ce qui est en jeu, dans les analogies faites, ce n'est pas la superficialité, mais la saillance : on remarque ce qui est le plus saillant, le plus profond que l'on puisse atteindre, expert comme novice.

Les auteurs discutent ensuite assez longuement sur le jeu du *copycat* (page 418) qu'ils transposent dans un cadre abstrait et introduise la notion d'hybridation : la chaîne *abc* racontent à d'autres chaînes le jour où elle fut changée en *abd* et une chaîne déclare alors que la même chose lui est arrivée. La suite discutent de différent cas de chaînes et de ce qui a pu leur arriver : *pqrs*, on pense rapidement à *pqrt*, mais on aurait pu penser aussi à *pqrd* ou à *pqds* ou encore *pqss*. Viennent aussi *tky* (pas la même structure interne), *iijjkk* (quel est le *c* de *iijjkk* ?), *mrrjjj* (*mrrjjk*, *mrrkkk* ou encore *mrrjjjj* avec la notion de nombre ?). Le cas de *xyz* est intéressant car on peut ajouter une idée de circularité, *xya*, ou penser à une symétrie, *wyz*. Ces exemples permettent aux auteurs d'introduire la notion d'*hybridation* (page 434) qui correspond à une analogie *incomplète* qui conserve un élément du *monde initial*, comme dans *pqrs*→*pqrd* (la dernière lettre devient un *d* comme avec *abc*) ou dans *pqrs*→*pqss* (on change la troisième lettre comme dans *abc*).
Suit une vingtaine de pages sur la traduction (dont la traduction de l'ouvrage qui a été écrit en deux langues) et sur les analogies nécessaires, justement ce que ne sait pas faire un logiciel.

Les analogie naïves (Chapitre 7)

La notion d'*analogie naïve* est le point commun à de nombreuses dénominations telles que préconception, misconception, raisonnement naïf, modèle tacite, métaphore conceptuelle, conception naïve : elle apparaît lorsqu'un concept est perçu, de manière pas parfaitement adéquate, par analogie avec une certaine connaissance antérieure, afin de rendre intelligible une nouvelle situation pour une personne sans qu'elle ait conscience de faire une analogie (page 466). Les analogies naïves ont un domaine de validité, le problème d'inadéquation apparaît donc lorsque l'on quitte se domaine de validité[16].
Les auteurs développent essentiellement, dans le reste du chapitre, le cas de l'école en discutant plus spécifiquement des mathématiques. Les trois points essentiels soulevés sont les suivants (page 469-470) :

1. c'est par le biais d'analogies naïves que les concepts scolaires sont compris[17] ;
2. les analogies naïves ne sont pas éradiquées par l'école[18] ;

[16] En didactique des mathématiques, on parlerait plutôt de « théorème-en-acte » ou simplement de conception (au sens de cKc par exemple).
[17] On ne comprend pas vraiment pourquoi cela est spécifique aux concepts de l'école, c'est le cas de tout ce qui nous entoure (cf. la conclusion du chapitre 5).
[18] Peut-être, mais l'école permet de prendre de la distance avec ces analogies naïves, de prendre conscience que l'on fait une analogie naïve, et donc de pouvoir se raccrocher à d'autres analogies plus adéquates voire à du formelle afin de traiter la situation (cf. le point 3).

3. la description formelle d'un domaine de connaissance ne reflète pas la nature des connaissances avec lesquelles un être humain pense ce domaine de connaissance.

Dans les analogies, la familiarité est un facteur important d'extension du domaine de validité (un exemple est donné avec les maladies des oiseaux : il est plus facile d'étendre du rouge-gorge au faucon que du faucon au rouge-gorge). C'est une des clés des analogies et plus spécialement des analogies naïves (page 471).
Ils donnent l'exemple de la continuité des fonctions numériques en précisant la différence entre la définition en ε/η et la pensée de l'expert alors qu'il y a un risque d'amalgame entre les deux (page 473). Ils développent cet exemple pour revenir à l'intégration des notions enseignées[19] à l'école et à l'université : elle se produit par le biais des analogies naïves et non pas de manière formelle (page 475). Puis ils concluent que les collégiens, lycéens, étudiants et les enseignants persistent à utiliser des analogies naïves qui ne sont pas éradiquées par l'école. Suit un exemple sur les technologies numériques et les analogies avec les icônes, le copier/coller, bugger, corbeille (« démonter une disquette ») avant de revenir à l'éducation et aux mathématiques.

A la page 490, ils discutent de l'égalité et de l'analogie naïve « processus/produit » qui consiste à percevoir « 3+2=5 » comme l'expression d'un processus (l'opération 3+2) qui donne (signe d'égalité) un produit (le résultat 5)[20]. On est loin de la perception de l'égalité en mathématiques comme une équivalence et ils montrent la différence avec 5=3+2 ou encore 5=5. Cette analogie naïve préexiste à la notion d'équivalence et c'est à travers elle que l'on comprend l'égalité[21] ; elle est d'ailleurs très proche d'une autre analogie cause/effet qui la renforce.
Sur cette notion d'égalité, ils donnent quelques exemples dans la publicité (pages 492-493) qui sont loin du concept mathématique et permettent de bien mettre en valeur l'analogie naïve processus/produit dont la dissymétrie devient évidente (les termes de « 1 pizza achetée = 1 offerte » ne peuvent être échangés).
Puis ils donnent des exemples en physique avec la deuxième loi de Newton (page 493) qui pourrait s'interpréter comme « une force donne une accélération »[22], donc $F/m = a$ alors qu'elle est toujours écrite $F=ma$, qui ne montre ni un processus ni un produit ; cela perturbe les étudiants. Les auteurs mentionnent alors la différence entre les points de vue psychologique et pédagogique. C'est le même cas qui se produit avec les équations de Maxwell comme $\mathrm{div}\ E = 4\pi\rho$. On perçoit toutefois l'analogie processus/produit, mais avec une inversion droite-gauche car un physicien perçoit cette formule par le fait qu'une répartition de charges électriques crée un champ électrique[23]. Les équations de la physique sont toujours écrites avec la cause et l'effet isolé de part et d'autre de l'égalité.

Les auteurs reviennent aux mathématiques élémentaires avec une autre analogie naïve : la multiplication qui est perçue par l'addition répétée (page 497). Cela gêne pour comprendre la commutativité et renforce l'obstacle « une multiplication agrandit toujours ». Comment aussi comprendre des multiplications avec des nombres comme $\sqrt{2}$ ou π ? Page 498, ils donnent comme exemple le problème suivant : « 1 gl coûte 2,47 £, combien coûte 0,26 gl ? ». Seuls 44% de collégiens reconnaissent une multiplication (56% reconnaissent une division). Pourtant, « dès l'école primaire [ce problème] devrait sembler simple comme bonjour »[24]. Ils

[19] C'est étrange que les auteurs ne parlent pas simplement d'« apprentissage ».
[20] Cela fait partie du bagage de base de la didactique des mathématiques.
[21] Puisqu'elle n'est pas éradiquée, comment alors est apparue la notion d'équivalence ? Les auteurs ne le précisent pas.
[22] Il y a aussi le cas des forces d'entraînement comme la force centrifuge.
[23] Il y a l'opérateur de divergence qui perturbe un peu ce point de vue.
[24] Les auteurs ne justifient pas leur propos ! Peut-être est-ce ici une analogie naïve sur l'apprentissage des mathématiques liée

précisent que si on demande le coût pour 5 gl alors on obtient 100% de réussite, car on est dans le domaine de validité de l'analogie naïve de l'addition répétée.
Sur la commutativité de la multiplication, ils donnent l'exemple d'adolescents brésiliens non scolarisés : « 3 chocolats à 50 cruzeiros » est réussi par 75% alors que « 50 chocolats à 3 cruzeiros » a un taux de réussite de 0%. Ils mettent en cause l'addition répétée, inopérante dans le deuxième problème (3+3+3+…) alors qu'elle l'est dans le premier (50+50+50). Bien sûr, l'école permet de lever cet obstacle mais la commutativité est utilisée dans un contexte de calcul, sans profondeur, sans justification à portée[25].

Les auteurs enchaînent ensuite avec la division et l'analogie naïve « diviser c'est partager » (cela correspond à la multiplication qui agrandit). Ils relatent une expérience posée à des étudiants[26] qui consiste à inventer un problème de division puis un problème de division qui rende plus grand. Non seulement les problèmes produits sont très peu originaux (l'originalité n'était pas demandé) mais surtout on se heurte à une impossibilité pour de très nombreux sujets de concevoir un problème de division qui augmente.
Leur idée est qu'il y a d'autres manières de concevoir la division et notamment la division-quotition (page 506) liée à la mesure[27] qui répond à la question « dans a combien de fois b ? ». Il s'agit ici d'une autre analogie naïve, « diviser c'est mesurer », moins forte que la précédente notamment parce que dans le langage courant on utilise souvent « diviser » pour « partager » (page 513).

Ensuite, ils traitent de la soustraction en mettant en évidence l'importance de pouvoir simuler une situation avec la différence entre : « Paul a 27 billes. Il en gagne pendant la récréation et maintenant il en a 31. Combien de billes a-t-il gagnées ? » et « Paul perd 27 de ses 31 billes pendant la récréation. Combien lui en reste-t-il ? ». Les deux problèmes se résolvent par la même opération, 31–27, mais le premier est plus facile à simuler (28, 29, 30, 31 donc 4) que le second (30, 29, 28,…) ce qui explique la meilleure réussite au premier problème[28].

A partir de trois problèmes, relatifs à la même opération 3×4, mais dont la situation favorise la perception en 3+3+3+3 ou en 4+4+4, les auteurs remarquent que les personnes interrogées, on leur demande de résoudre ces problèmes sans la multiplication, donnent justement les additions réitérées attendues. Ils en concluent que ce n'est donc pas la catégorie formelle qui guide les résolutions[29]. Puis, avec d'autres problèmes, ils affirment que la manière de présenter un problème, la situation, influence beaucoup la manière de le percevoir. « Si tout enseignant a parfaitement conscience que l'« habillage » d'un énoncé peut modifier profondément sa difficulté, le défi de faire de l'habillage un levier d'apprentissage doit encore être relevé. »[30]

à la naturalisation des connaissances.

[25] Il s'agit quand même d'un point pour l'école ! Par ailleurs, certaines personnes comprennent cette commutativité en profondeur…

[26] On ne connaît pas la provenance des étudiants. Y a-t-il des étudiants scientifiques ? on peut en douter.

[27] On pense évidemment aux travaux, déjà ancien, de Vergnaud. Par ailleurs, la division-quotition n'est pas uniquement liée à la mesure car il s'agit uniquement d'une recherche de la valeur de la part.

[28] On pourrait encore une fois renvoyer à Vergnaud pour ces types de problème additif. On ne peut manquer de voir, avec un point de vue didactique, la pauvreté de l'analyse présentée. Ils reviennent ensuite sur la division avec cette idée de simulation. Ils ne mentionnent jamais la notion de variable didactique qui permet justement de forcer l'utilisation d'une procédure comme celle utilisant consciemment l'opération arithmétique et non plus une simulation. Ils mentionnent également, page 511, leur inspiration en mathématiques. Ils travaillent beaucoup avec Rémi Brissiaud. Ils affirment, sans aucune justification, le fait que les manuels de primaire développés par Brissiaud sont « novateurs et efficaces » – cela n'est pas très scientifique.

[29] C'est très discutable car on enlève justement la catégorie abstraite qui unifie ces problèmes !

[30] Il n'est pas sûr que tout enseignant soit dans ce cas ; ils ne parlent pas de la manière de prendre conscience de l'influence d'un habillage ; ils ne parlent pas de la décontextualisation pourtant essentielle en mathématiques.

Ce chapitre se termine en mettant au jour une analogie naïve qui est le cœur de leur propos : « une catégorie est une boîte » et « catégoriser c'est mettre dans une boîte ».

Les analogies de haut niveau scientifique (Chapitre 8)

Ce chapitre se décompose en deux parties avec les mathématiques (pages 528-534) puis la physique et plus spécifiquement l'œuvre d'Einstein (pages 544-604).
Le premier exemple concerne l'étude des équations du troisième degré avec le passage 2nd degré → 3ème degré et le passage *abc* → *abcd* (pour les coefficients). Des références historiques sont données dont Cardan et Bombelli. Un détour par les nombres négatifs est fait en montrant la différence entre Cardan, qui traitent un grand nombre de cas pour n'avoir que des coefficients positifs, et Bombelli qui considère les négatifs comme des nombres à part entière[31].
En quelques lignes (pages 534-535), les auteurs mentionnent très rapidement l'importance de l'analogie géométrique dans la légitimation de l'existence d'objets mathématiques abstraits. Ils discutent ensuite, de manière très générale, les espaces à n dimensions (puis à dimensions infinies) dont la difficulté réside dans le passage de la dimension 3 à la dimension 4.
Ils reviennent ensuite aux résolutions des équations polynomiales (pages 536-542). L'équation du 4ème degré fait apparaître, ce qui peut paraître surprenant[32], une racine carrée avec dedans une autre racine carrée avec dedans une racine cubique qui contient elle-même une dernière racine carrée. Néanmoins, alors que le passage 2ème degré → 3ème degré permettait de percevoir une analogie (un discriminant calculé avec les coefficients, racine carrée → racine cubique) la résolution de l'équation du 4ème degré laisse penser que cela ne sera pas aussi simple. De Lagrange à Galois, les auteurs lient cette question de la résolution des équations polynomiales aux permutations des racines qui donneront naissance à la notion de groupe et aux recherches associées. Ils relèvent notamment l'intervention d'une analogie géométrique pour la table de multiplication des groupes en lien avec les « rotation » et « réflexion » appliquées aux racines des équations, comme dans l'espace à trois dimensions.

La partie sur les mathématiques se conclut sur le fait que, quoique nous fassions en mathématiques, cela est toujours guidé par une analogie. C'est par exemple le cas lorsque l'on considère les équations « $3x-7=x+3$ » ou « $2x=10$ » qui nous « invitent » à passer les termes d'un côté ou à diviser par 2. « Il s'agit d'exemples qui se situent à l'extrémité basse de la gamme de créativité », mais c'est le même processus qui est à l'œuvre lorsqu'un mathématicien se retrouve face à une situation inconnue : on reconnaît qu'il sied plutôt de faire cela dans cette situation ; l'analogie faite peut être ou non productive.
Les soixante pages sur l'œuvre d'Einstein sont difficilement résumables. Ils discutent notamment des analogies liées à la lumière, des analogies liées à la relativité restreinte (avec la notion de référentiels en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre) et liées à la relativité générale (avec la notion de référentiels en mouvement uniformément accéléré l'un par rapport à l'autre).

[31] Cela est à voir. Par ailleurs, et cela vaut également pour la suite, il serait intéressant d'introduire ici les dimensions objet et outil.

[32] Notons toutefois qu'une racine quartique n'est pas autre chose que la racine carrée de la racine carrée ! De plus, la résolution de l'équation du 3ème degré fait également apparaître des racines carrées. Cela enlève du poids au propos des auteurs.

« L'ANALOGIE DU NAÏF AU CRÉATIF » EMMANUEL SANDER [33]

Jacques DOUAIRE

Equipe ERMEL (Institut Français de l'Éducation)

jacques.douaire@wanadoo.fr

L'ouvrage « L'analogie cœur de la pensée » de Douglas Hofstadter et Emmanuel Sander présenté dans cette publication par Laurent Vivier a suscité une curiosité pour les travaux antérieurs en psychologie sur l'analogie d'Emmanuel Sander. Dans « L'Analogie du naïf au créatif » paru en 2000 et préfacé par Jean-François Richard, Sander expose les théories psychologiques sur l'analogie développées alors.
Cette présentation comporte donc, après de brefs éléments généraux ou historiques sur les travaux sur l'analogie en psychologie, un résumé des deux principales théories exposées par E. Sander, et de ses critiques à leur égard, ainsi que des éléments sur ses analyses complémentaires.
La synthèse effectuée par Marie-Dominique Gineste « Analogie et cognition »[34], parue en 1997 (avec une préface de J.-F. Le Ny) que cite Sander comme un ouvrage de référence, servira aussi d'appui dans cette présentation.

L'APPROCHE DE L'ANALOGIE EN PSYCHOLOGIE.

Pour Jean-François Richard[35], l'analogie est en fait un terme générique qui recouvre différents modes de traitement qui ont quelque chose à voir du point de vue de leur forme extérieure (c'est un mode de construction par assimilation et correction) mais qui sont forts différents du point de vue des mécanisme psychologiques qui les produisent. Ce terme désigne :

- *Le raisonnement par analogie qui est une heuristique générale pour forger des hypothèses. Il consiste en ceci : si on peut établir une correspondance entre les relations existant entre deux domaines et s'il existe une autre relation qui est vraie dans l'un des domaines, alors on peut faire l'hypothèse qu'il existe une relation correspondante dans l'autre domaine et rechercher cette relation.*
- *La forme de raisonnement qui intervient dans une tâche, abondamment utilisée dans les tests psychométriques. Celle-ci consiste, étant donnés trois termes dont deux sont dans une relation définie, à trouver un quatrième terme qui est, par rapport au troisième, dans la même relation que les deux premiers.*
- *Le transfert des significations d'un domaine, à un autre domaine : on utilise les relations d'un domaine pour connecter les éléments d'un autre domaine et ainsi construire un réseau relationnel entre ces éléments. C'est le processus en jeu dans la compréhension.*

[33] Ed. L'Harmattan (2000)
[34] « Analogie et cognition » (PUF 1997)
[35] J.-F. RICHARD Les activités mentales (A.Colin ed 2002 p 118)

- *Le fait qu'une procédure connue pour une situation ou pour une classe de situations peut être transférée à une situation qui est similaire mais n'a pas tous les traits qui permettraient de l'identifier à la classe.*

Des études récentes en psychologie

D'un point de vue historique, selon M.-D. Gineste et J.-F. Le Ny, si la question de l'analogie a été analysée avec une étonnante acuité par Aristote, l'analogie n'est devenue un objet d'étude identifié en psychologie expérimentale qu'au cours des années 1960. Aussi, selon eux, le fait de « sauter vingt-deux siècles » n'est guère préjudiciable dans le cas de l'analogie comme mécanisme psychologique.
Pour J.-F. Le Ny, l'intérêt récent pour la fonction de l'analogie et l'essor des recherches en psychologie cognitive pour décrire ce processus ne peut être dissocié, d'une part, du questionnement plus général sur la fonction du langage dans le processus de connaissance, et, d'autre part, des interrogations sur le statut du modèle dans les sciences et de leur rôle dans les développement des théories scientifiques. Les travaux en philosophie des sciences notamment, ont fortement fait progresser les idées sur les parentés entre les concepts d'analogie, de modèle, de théorie, voire même de métaphore. Par ailleurs l'idée que l'analogie peut avoir un aspect créatif ne vient pas de la psychologie mais de l'intelligence artificielle

Le « paradigme classique » de l'analogie en psychologie

L'analogie est abordée dans sa fonction psychologique qui est d'appréhender une situation nouvelle (cible) en la traitant comme une situation connue (source). J.-F. Richard précise deux critères. « Le premier concerne la symétrie entre la source et la cible. Le paradigme classique de l'analogie suppose que le sujet possède un égal savoir sur la source et la cible. Il y a aussi d'autres situations où le sujet a beaucoup de savoir en mémoire sur des sources potentielles, mais connaît peu de choses sur la cible, comme c'est le cas typiquement en résolution de problème. En ce cas ce sont les sources potentielles qui guident la description de la cible : c'est ce qui se passe quand une catégorie existe préalablement en mémoire qui permet d'assimiler la cible à cette catégorie et également quand cette catégorie n'existe pas préalablement en mémoire mais est construite à cette occasion grâce à la découverte d'une propriété commune à la cible et la source. Le premier cas relève de la catégorisation, le second relève spécifiquement de l'analogie.

Des interrogations sur les travaux en psychologie

J.-F. Le Ny formule une première réserve, dès la préface de l'ouvrage de 1997, sur le petit nombre d'études scientifiques et notamment expérimentales qui existent sur ce thème, alors que, par contraste, il commence à exister une élaboration théorique de type cognitif sensiblement plus riche, même si elle n'est pas définitive.
Nous reviendrons sur ce constat dans l'étude des critiques formulées par E.Sander sur les théories de l'analogie.
Quelques années plus tard, J.-F. Richard précise que « l'analogie a été vue sous deux angles, comme transfert d'apprentissage et comme heuristique de découverte. Ces deux points de vue paraissent plutôt antithétiques que complémentaires et on a du mal à voir comment le nouveau peut sortir du connu. Le transfert d'apprentissage a été étudié en utilisant des problèmes isomorphes : ces recherches ont montré que l'analogie entre problèmes était très difficile à reconnaître dès que les objets impliqués et leurs propriétés différaient notablement. En

revanche, lorsque les similitudes sont aisément reconnaissables, le transfert se fait d'une façon qui est automatique et apparaît relativement aveugle »[36].

Le cas de l'analogie en sciences

Pour J.-F. Le Ny, l'analogie prise au sens large est certainement un des déterminants fondamentaux du fonctionnement cognitif. Mais l'analogie prend aussi des formes rationalisées et fortement élaborées, qui font qu'elle peut être utilisée et même tenir une grande place dans les activités de haut niveau : de celles-ci, la résolution de problèmes, la recherche scientifique et l'enseignement par le langage de connaissances nouvelles sont bien représentatifs. Dans les deux premiers cas, l'analogie peut être utilisée de façon explicite et délibérée pour susciter des hypothèses qui sont nouvelles dans leur domaines d'application, mais qui sont empruntées à un domaine antérieurement connu ; cette démarche doit être tenue en lisière par les contraintes de la vérification, et c'est en ce sens que J.-F. Le Ny parle d'analogie « rationalisée ».
La fonction de l'analogie en sciences et dans la recherche scientifique est avant tout une fonction heuristique en ce qu'elle aide à formuler des hypothèses et à aller au delà des phénomènes initiaux. La fonction heuristique de l'analogie présente un double aspect, selon M.-D. Gineste, d'une part prédire des propriétés qui ne sont pas encore connues et d'autre part autoriser à introduire de nouveaux termes théoriques en leur donnant du sens.
Nous reviendrons de façon plus explicite sur ce point notamment dans les chapitres de cette publication abordant l'analogie en mathématiques.

PRÉSENTATION DE L'OUVRAGE

L 'ouvrage d'Emmanuel Sander de « L'analogie du naïf au créatif » comporte dans les deux premiers chapitres une présentation et un examen critique des théories dominantes à la fin des années 90 et dans les cinq chapitre suivants un approfondissement des relations entre source et cible, et entre catégorisation, analogie et abstraction.
Dans sa préface J.-F. Richard indique que « le lien entre les deux faces de l'analogie (transfert d'apprentissage et heuristique de découverte) n'a pas été fait jusque là : c'est le grand mérite du travail d'Emmanuel Sander de l'avoir tenté et d'avoir proposé une solution convaincante. Pour réussir, il a apporté deux innovations essentielles : en premier lieu il a élargi le champ de l'analogie en considérant des phénomènes qui n'étaient pas vus sous cet angle et en second lieu il a montré que pour établir une analogie pertinente entre la situation présente et la situation connue, il fallait procéder à une abstraction, c'est à dire à la découverte d'une propriété non identifiée comme telle jusque-là qui permet de voir la situation actuelle et la situation connue comme deux cas particuliers d'une même catégorie »[37].
Concernant l'ouvrage « Analogie et cognition de M.-D. Gineste, J.-F. Le Ny indique que le type d'analogies étudiées renvoie exclusivement à deux « domaines » qui sont l'un et l'autre conceptuels ou représentationnels, et non, comme c'est la cas dans d'autres contextes, à une relation entre une représentation et son objet (cas des représentations « analogiques » par exemple phonographique ou photographique).

[36] « L'analogie du naïf au créatif » préface p. III
[37] « L'analogie du naïf au créatif » préface p. IV

Les théories dans « le paysage cognitif contemporain » à la fin des années 90

Selon M.-D. Gineste ce paysage cognitif contemporain, où l'analogie est abordée par sa fonction psychologique qui est principalement d'appréhender une situation nouvelle (cible) en la traitant comme une situation connue (source), offre des définitions du concept d'analogie qui oscillent entre deux pôles : l'analogie est considérée tantôt comme une ressemblance entre plusieurs choses distinctes qui sont comparées, tantôt comme un processus d'imputation de ressemblances entre plusieurs choses différentes, processus qui émerge au moment de la comparaison.
Dans ce cadre on considère l'analogie, soit comme le processus de découverte de la ressemblance entre deux domaines de connaissance, ce qui autorise alors les inférences d'un domaine à l'autre - l'analogie est une part de la logique inductive et il reste à définir les conditions pour en user légitimement, soit comme ayant le même statut que celui d'un modèle. Dans ce cas la description même de l'analogie est dépendante de celle que l'on a élaborée de la notion de modèle. Or nous avons là deux concepts de modèle : représentation du monde (modèle 1) ou interprétation d'une théorie axiomatisée (modèle 2)[38] .
Les deux principales théories sont celle de Gentner d'une part, et celle d'Holoyak et de leurs collaborateurs.

Gentner : l'approche structurale

Citons Sander : « Pour Gentner (1983,1989) l'analogie est une forme de comparaison entre représentations qui dépend des similitudes syntaxiques existant entre une source et une cible, c'est à dire des similitudes de structure entre les représentations, et non des contenus spécifiques de connaissance. Une situation est vue comme étant composée d'objets, ayant des attributs, et de relations »[39].
Le formalisme de représentation utilisé est du type prédicat-argument :

- *un attribut est un prédicat à un argument (la terre est ronde), se représente Ronde*
- *une relation a aux moins deux arguments (la terre est plus lourde que le lune), se représente plus lourd que (terre, lune).*

L'ordre d'une relation est défini de manière récursive comme valant 1 si tous les arguments sont des objets et 1 plus le plus grand ordre de ses arguments si certains arguments sont déjà des relations. Par exemple «plus lourd que (terre, lune) est d'ordre 1 » car les arguments sont des objets, mais « parce que (plus lourd que (terre, lune), tourne autour (lune, terre)) » est une relation d'ordre 2 car elle comprend des arguments d'ordre 1.
Gentner distingue trois types de similitudes entre source et cible :

- *entre attributs,*
- *entre relations d'ordre faible (il s'agit des similitudes entre relations d'ordre 1),*
- *entre relation d'ordre élevé (similitudes entre relations d'ordre au moins 2).*

Sander expose dans un autre chapitre[40] la typologie des modes de comparaison de Gentner :

- *la similitude littérale dans laquelle les attributs d'objets et les relations sont mises en correspondance,*
- *la simple apparence dans laquelle simplement les attributs d'objets sont mis en correspondance mais pas les relations,*
- *l'abstraction dans laquelle la source et la cible ont peu d'attributs d'objets,*

---
[38] « Analogie et cognition » p 13
[39] « L'analogie du naïf au créatif » p. 10
[40] « L'analogie du naïf au créatif » p 141

- *l'anomalie dans laquelle il n'y a de correspondance ni entre attributs ni entre relations,*
- *l'analogie qui « est une comparaison dans laquelle les prédicats relationnels, mais peu ou pas d'attributs d'objets, peuvent être mis en relation entre la cible et la source ».*[41]

La mise en correspondance, l'étape principale et caractéristique de l'analogie repose donc sur une similitude de structures relationnelles, transférant vers la cible un système de relation de la source, indépendamment des similitudes entre les objets eux-mêmes, c'est à dire des similitudes entre attributs.

Holoyak : similitudes pragmatiques, syntaxiques, sémantiques

Sander présente l'idée centrale de la théorie de l'interaction d'Holoyak qui est de considérer que comprendre une métaphore implique en fait un changement de représentation de l'objet de la description.
Pour faire comprendre le processus métaphorique Holoyak utilise une image de Black, celle d'un ciel étoilé vu au travers d'un verre fumé avec quelques lignes claires. La métaphore fonctionne comme ce verre : rôle d'un filtre qui modifie, bouleverse la représentation de l'objet décrit… Ce qui suppose de postuler que les deux objets ont chacun une représentation stable et conventionnelle en mémoire à long terme.
Pour Sander[42], la théorie d'Holoyak est organisée autour de trois axes :

- *la primauté des similitudes liées à l'achèvement du but*
- *la relation entre analogie, induction de schémas et utilisation de schémas*
- *la notion de niveau d'abstraction*

Pour Holoyak, deux types de similitudes entre une source et une cible :

- *les similitudes préservant la structure sont celles dont la modification n'a pas d'influence sur la réalisation du but, compatibles avec la construction d'un schéma de solution commun;*
- *les similitudes altérant la structure sont celles dont la modification rend impossible la construction d'un schéma de solution commun.*
- *de structure (isomorphisme, formalisme de représentation de type prédicat/argument).*

Deux types de sources sont distingués :

- *des sources épisodiques : telles que celles utilisées dans le cadre du paradigme expérimental standard*
- *des sources familières : un ensemble de connaissances délimitées qui s'applique à un certain nombre d'objets et qui de ce fait à acquis une certaine légitimité en tant que source.*

Le point de vue développé est que les sources familières sont des sources d'analogie privilégiées et peuvent être aussi les outils d'interprétation d'une situation nouvelle.
Puis, ultérieurement, Holoyak propose que l'analogie soit contrainte par trois types de similitudes (en cela un rapprochement avec Gentner s'effectue):

- *pragmatiques (concernant l'importance des buts : propriétés importantes privilégiées dans l'analogie),*
- *sémantiques (représentations de la source et de la cible identiques ou entretiennent des relations lexicales telles que la synonymie, l'hyponymie* [43] *et la métonymie*[44]*)*

---

[41] « L'analogie du naïf au créatif » Sander E. p 141
[42] « L'analogie du naïf au créatif » Sander E. p 11
[43] Rapport d'inclusion entre des unités lexicales, considéré comme orienté du plus spécifique au plus général.
[44] Phénomène par lequel un concept est désigné par un terme désignant un autre concept qui lui est relié par une relation nécssaire.

Gineste montre, selon Le Ny, que « ce qui reste théoriquement et expérimentalement ouvert, c'est le débat qui s'est récemment établi entre deux classes de conceptions de l'analogie, d'une part, celles qui font de l'analogie, en premier lieu, une propriété cognitive, objective et durable, du couple des représentations considérées, propriété que les processus en œuvre dans la cognition auraient à secondairement déceler et extraire, et une seconde classe de conceptions, dites de l'interaction, plus nouvelles, qui accorde bien davantage, si ce n'est tout, aux processus cognitifs en jeu dans chaque occurrence d'une analogie »[45].

3- les critiques formulées par Emmanuel Sander à ces théories

De façon schématique elles peuvent être regroupées selon leur objet :

Les méthodologies employées

Sander remet en cause le paradigme expérimental d'Holoyak : dans les expériences menées par celui-ci pour analyser le recours à l'analogie et les variations de ce processus selon les choix d'exposition, de rappel, la ou les sources potentielles d'analogie sont présentées avant l'introduction de la cible. Sander considère que cette présentation de la source se situe de façon assez éloignée de la situation plus commune où le sujet peut être amené à rechercher une source ; il exprime que sous la contrainte d'un paradigme expérimental, celles-ci forment une sous-classe non représentative, et pas nécessairement la sous classe essentielle, des sources d'analogie.

La conception de l'analogie

Dans les modèles présentés existent deux présupposés :

- celui, implicite ou explicite, qu'une représentation de la cible est construite avant la réalisation de l'analogie et donc indépendamment du choix d'une source particulière qui fonde les théories actuelles de l'analogie. Le processus de compréhension initiale de la cible n'est pas considéré dans les analogies étudiées qui ne sont pas celles où l'on « comprend le nouveau défi dans les termes de ce qui est connu », mais plutôt des analogies dans lesquelles la cible est déjà comprise, puis réinterprétée dans les termes de la source.
- la conception selon laquelle représentation initiale de la cible doit être d'une complexité analogue à celle de la source n'est pas explicitement formulée mais clairement suggérée.

Ici la critique de Sander serait que, en résolution de problèmes il y aurait, dans ces théories, présupposition que le problème cible est d'abord « compris », et que l'accès à une source et son utilisation se produisent ensuite. Cet aspect lui semble paradoxal car si l'analogie permet de comprendre l'inconnu dans les termes du connu il est paradoxal d'imposer en même temps que l'inconnu soit déjà compris, et, ce avant la réalisation de l'analogie. Il précise : « il est également paradoxal de proclamer que l'analogie est enrichissante et omniprésente dans la pensée humaine et de l'évacuer pourtant d'une autre activité omniprésente qui met en jeu des connaissances antérieures : celle de la construction d'une première interprétation d'une situation. Si cette conception peut avoir une certaine vraisemblance dans le cas où la situation cible est relativement connue ou du moins fait appel à des connaissances stables en mémoire à long terme, elle apparaît peu crédible dans le cas où la situation cible n'est pas familière. »[46]

[45] « Analogie et cognition » Préface de J.-F. Le Ny p XI
[46] « L'analogie du naïf au créatif » p 47

Les modèles
Pour Sander « depuis 1989 (travaux de Gentner et d'Holoyak) la question de la modification dynamique des représentations par un mécanisme analogique n'a fait l'objet, à notre connaissance, d'aucun travail spécifique et n'a pas donné lieu à des prises de positions théoriques plus élaborées que quelques suggestions toutes compatibles avec l'approche en termes d'abstraction développée ici. » [47]
Sander y voit une raison de fond à l'échec des modèles actuels pour rendre compte de l'évolution de la représentation : les représentations de la source et de la cible sont traitées de manière isolées du reste des connaissances du sujet (elles sont complètement isolées dans l'approche de Gentner et réduites à la portion congrue sous forme d'estimation de la distance sémantique entre les éléments de la source et ceux de la cible dans l'approche d'Holoyak et Thagard et d'Hummel et Holoyak). Il n'y a pas d'éléments extérieurs aux représentations initiales pris en compte pour les modifier, pas plus que de mécanisme envisagé qui permette cette modification. Sander remet en question de l'idée que l'analogie soit, en général, une mise en correspondance symétrique entre représentations.

Des perspectives (Sander et Gineste)

Leur examen critique des travaux à la fin des années 1990 sur l'analogie en psychologie a permis de mettre en évidence certaines limites. Une approche avec l'ambition de les dépasser devrait :

1- *proposer un mécanisme intégrant la construction d'une première représentation de la situation nouvelle ;*
2- *rendre compte du processus d'encodage de la cible et ne pas se focaliser sur l'étape de mise en correspondance ;*
3- *tester la validité des connaissances supposées sur les situations potentielles ;*
4- *s'affranchir du paradigme expérimental central standard afin d'étudier des sources moins spécifiques et mieux connues que celles prises en compte jusqu'à maintenant ;*
5- *fonder les notions de traits de structure et de surface sur des définitions non paradoxales et interprétables en termes d'économie cognitive ;*
6- *dépasser une vision locale de l'analogie et envisager qu'elle puisse guider un cheminement en plusieurs étapes par une modification dynamique de la représentation.*

M.-D. Gineste quelques années auparavant précisaient déjà : tous les auteurs s'accordent à considérer comme cruciale l'étape de la récupération en mémoire des connaissances anciennes ou analogues. Mais aucune donnée expérimentale ne permet de donner une quelconque réalité à cette hypothèse théorique. Traiter des informations analogues implique qu'une structure ou qu'un schéma représentant la connaissance ancienne est présent au moment de la nouveauté. L'intégration de l'information entrante s'amorce avec la sélection et l'activation de cette structure de base. Mais à ce point d'argumentation théorique, pour Gineste il paraît urgent de concevoir une expérience[48] qui testerait la présence de cette structure de base par l'analyse des anticipations que les lecteurs sont amenés à construire, cela à l'aide de tâches de décision lexicale et de compatibilité sémantique au cours de la lecture.

[47] « L'analogie du naïf au créatif » p 168
[48] Ripoll T. La recherche sur le raisonnement analogique, *L'année psychologique,* 1992, 92, 263-288, « insiste sur l'ignorance dans laquelle nous sommes actuellement relativement aux processus d'accès à la source et aux représentations activées à ce moment du traitement ». ciré par Gineste (« Analogie et cognition » p132)

4- Catégorisation et analogie

Dans les chapitres suivants E.Sander étudie les relations entre catégorisation et analogie. Nous ne détaillerons pas ses analyses, qui, avec leurs évolutions, sont largement exposées par Laurent Vivier dans le précédent chapitre de cette publication consacré à « L'analogie cœur de la pensée » de Douglas Hofstadter et Emmanuel Sander, mais en nous indiquerons simplement quelques aspects.

Dans le chapitre 4 « Catégorisation versus Analogie : quelles différences ? » Sander aborde les différences entre catégorisation et analogie. Il constate tout d'abord « une absence quasi totale de références croisées entre ces deux domaines »[49] dans les théories sur l'analogie (Gentner, Holoyak…) qui ne se réfèrent pas à la catégorisation et ceux sur la catégorisation qui ne se réfèrent pas à l'analogie. Pourtant, souligne t'il, il existe des points communs essentiels entre ces deux notions. En effet, tant dans l'analogie que dans la catégorisation on utilise ce qui est connu pour traiter la nouveauté. Pourtant on peut faire un parallèle immédiat entre ceux qui voient l'analogie comme « ce qui permet de rendre la nouveauté familière en la reliant à un savoir antérieur » et ceux pour qui les catégories « permettent de traiter les choses nouvelles comme si elles étaient familières »[50].
Pour Sander « la catégorisation (l'analogie) permet d'inférer éventuellement à tort des nouvelles propriétés de l'objet (de la cible), celles de la catégorie (de la source). Ainsi, il apparaît que les définitions de l'analogie et de la catégorisation sont fondamentalement semblables du point de vue fonctionnel. Est-il alors justifié que les deux domaines de recherche soient si cloisonnés ? »[51]

Mais, si les définitions sont proches, les études expérimentales et les modèles théoriques portent sur des objets différents. Sander indique plusieurs différences qu'il remet en question successivement.

Une première différence serait que les formalismes de représentation des catégories ne font pas généralement intervenir des relations entre objets (par exemple la catégorie des objets ronds, grands et bleus), contrairement aux travaux expérimentaux et aux modèles sur l'analogie (par exemple les relation entre le soleil et les planètes dans l'analogie avec l'atome). La complexité des relations entre entités cognitives mises en jeu paraît être un critère de démarcation entre catégorisation et analogie : s'ils s'agit d'objets ou de concepts, alors il s'agit de catégorisation ; s'il s'agit de situations complexes, alors il s'agit d'analogie. Mais ce critère ne résiste pas : la complexité étant largement liée au formalisme adopté pour représenter les connaissances sur la source ou sur la cible, aucune complexité intrinsèque ne pouvant être invoquée comme critère.

Une seconde différence, qui tiendrait à l'idée selon laquelle l'analogie se réduit aux raisonnements par analogie (considérée comme un cas particulier du raisonnement inductif) et aux recherches délibérées d'analogies est aussi contestable selon Sander qui cite Mitchell (1993) « la capacité humaine de faire des analogies est bien plus qu'un simple outil utilisé dans le contexte de la résolution de problèmes ou au service d'un moteur d'inférences. C'est un mécanisme central de la cognition ; elle est omniprésente à tous les niveaux, à la fois conscients et inconscients et ne peut pas être connectée ou déconnectée à volonté »[52]. Le

[49] « L'analogie du naïf au créatif » p 101
[50] « L'analogie du naïf au créatif » p 101
[51] « L'analogie du naïf au créatif » p 102
[52] « L'analogie du naïf au créatif » p 108

caractère conscient de l'analogie semblant alors plus le produit du paradigme expérimental qu'une propriété générale. De même pour la catégorisation une large part du processus est considérée comme cognitivement impénétrable.

Une troisième différence affirmant que l'analogie doit faire intervenir des différences de surface et des similitudes de structure est aussi contestable ; le lien entre similitudes de surface et propriétés profondes permet aux similitudes de surface d'être une bonne heuristique pour rechercher des propriétés plus profondes.

Après d'autres caractéristiques Sander conclut : « on aurait pu penser qu'analogie et catégorisation se différencient selon plusieurs dimensions : l'analogie se fait entre des systèmes et entre des situations spécifiques est une activité de haut niveau, circonscrite, consciente, conduit à des découvertes, alors que la catégorisation concerne des objets, selon une dimension général-spécifique, est une activité omniprésente, de bas niveau, souvent inconsciente, et n'apporte pas d'informations nouvelles. En fait l'analyse de ces différents points a montré qu'aucune de ces distinctions n'est clairement recevable et des exemples ont révélé des cas qui semblent indécidables. Cela conforte l'idée qu'analogie et catégorisation sont dans une relation très proche, pouvant traduire la mise en œuvre de processus cognitifs similaires et la possibilité d'utiliser les approches et les résultats sur l'un des domaines pour examiner l'autre. »[53]

Dans le chapitre 5 « De la catégorisation à l'analogie » Sander explicite les relations entre catégorisation et métaphore, et l'apport des recherches sur l'analogie, issues de l'intelligence artificielle de Hofstader. Nous ne reviendrons pas sur cette évolution largement développée dans le chapitre précédent de notre publication portant sur « L'analogie cœur de la pensée » de Douglas Hofstadter et Emmanuel Sander.
Sander indique que pour modéliser leur approche de l'analogie, une des spécificités d'Hofstadter et de ses collaborateurs est d'avoir élaboré uniquement des modèles portant sur des micro domaines, définis par un nombre limité et explicité d'objets et de relations. L'approche d'Hofstadter est d'accroître l'étendue de l'analogie pour qu'elle intègre également la reconnaissance d'objets, la catégorisation et la généralisation ; « un faible degré de glissement conceptuel est perçu comme une catégorisation… alors que des degrés importants de glissement sont perçus comme des analogies ».[54]

Une raison profonde qui a conduit à distinguer analogie et catégorisation pourrait bien être un certain modèle intuitif de l'un et de l'autre. A l'extrême la catégorisation est vue comme la classification d'un objet comme appartenant à une catégorie préexistante et stable. Mais la catégorisation est un mécanisme qui ne s'avère pas moins fluide que l'analogie (les catégories n'ont pas de frontières clairement définies, par exemple : animal avec contexte traire : vache ou chèvre ; animal avec contexte monter : cheval ou mulet) et sa principale utilité n'est pas de classifier mais de faire des inférences.
Sander note une distinction entre analogies directes pour lesquelles la source permet de construire une première représentation de la cible pour comprendre et agir sur la situation nouvelle et des analogies élaborées pour lesquelles la première représentation de la situation cible se révèle non adéquate et où il est nécessaire de modifier la représentation, de se référer à d'autres sources.

[53] « L'analogie du naïf au créatif » p 123
[54] Sander citant French p 142

A la fin de ce chapitre 5 Sander distingue donc un versant « naïf » dans lequel le cœur de l'analogie réside dans la construction d'une première représentation de la cible impliquant la source lors de l'encodage, pour comprendre et agir et un versant « créatif » dans lequel il s'agit de modifier une représentation, permettant de considérer l'analogie comme un processus qui n'est pas simplement local mais suffisamment puissant pour pouvoir guider la résolution d'un problème en plusieurs étapes ou l'apprentissage d'un domaine complexe.

Catégorisation et abstraction

Sander pose deux questions au début du chapitre 6 (« La construction de la représentation de la cible par le processus de catégorisation ») : comment se fait la recherche de la source en mémoire, sachant que le point de départ peut être une information minimale sur la cible ? Et comment s'opère l'encodage d'une situation cible qui aboutit à la construction d'une représentation ?

Pour la recherche de la source, il s'agit de déterminer quels sont les traits qui permettent, dans une situation nouvelle, de sélectionner une source parmi les connaissances en mémoire. Les propriétés saillantes sont définies comme les propriétés auxquelles le sujet a accès dans la situation nouvelle, compte tenu de ses connaissances et du contexte avant la sélection d'une source, et qu'il considère pertinente. Elles peuvent être :

- *perceptives (les propriétés perceptives de l'analogie ont été étonnamment négligées dans les travaux sur l'analogie en psychologie, qui ont considéré généralement des situations verbales),*
- *sémantiques (propriétés d'un objet ou relationnelles),*
- *ou liées aux buts et aux procédures.*[55]

Les traits de structure peuvent être définis, comme étant les traits pertinents pour la solution d'un problème qui sont présents dans la source (connue) mais absent de la cible en ce qu'ils n'ont pas été des critères de catégorisation. Un trait de structure pour un novice peut être un trait saillant pur un expert.

Dans le chapitre 7 « l'analogie guidée par un mécanisme d'abstraction » Sander constate notamment que dans les théories étudiées (jusqu'à la fin des années 90) l'échec des modèles pour rendre compte de l'aspect dynamique de l'évolution des représentations par le mécanisme analogique tient au fait que les représentations de la source et de la cible sont traitées de manière isolées du reste des connaissances du sujet. Il n'y a pas d'éléments extérieurs aux représentations initiales pris en compte pour les modifier, pas plus que de mécanisme envisagé qui permette cette modification.

Perspectives de recherche

Sander rappelle, dans la conclusion et la postface, que pour des raisons partiellement scientifiques, institutionnelles et culturelles, la confrontation entre approches est souvent privilégiée. En revanche les domaines de validité des théories sont rarement examinés. Pourtant mettre en évidence les conditions d'application d'un mécanisme psychologique est sans doute aussi fondamental que l'identification de ce mécanisme.
Il semble raisonnable, bien que les données empiriques soient rares du fait de la difficulté d'enseigner des connaissances approfondies dans un cadre expérimental, d'envisager également un mécanisme de test d'hypothèse ou d'appariement lorsque les représentations

[55] « L'analogie du naïf au créatif » p 146

source et cible, toujours de complexité comparables et construites indépendamment sont plus élaborées. Il semble donc que les analogies pour lesquelles les mécanismes d'appariement pourraient s'appliquer sont donc des cas dans lequel le sujet est engagé dans une comparaison. Elles relèvent plus d'une activité intentionnelle de test d'hypothèses ou d'appariement que d'une activité d'attribution de propriétés par activation de connaissances.
A l'inverse, les analogies pouvant être décrites comme le résultat d'un mécanisme de catégorisation et d'abstraction, sont mises en œuvre dans des situations qui présentent des asymétries :

- *source bien connue versus cible peu connue ;*
- *cible qui sert d'indice pour évoquer la source et non l'inverse ;*
- *première représentation de la cible influencée par les connaissances sur la source, mais pas sur la cible, intégrées en mémoire à long terme.*

Selon Sander, on retrouve là les caractéristiques des analogies en situation naturelle qui sont produites de manière spontanée sans qu'aucune source n'ait été fournie de manière externe : le sujet recherche en mémoire une source sans savoir par avance qu'il y a des mises en relation possibles. Ce sont ces analogies qui sont produites pour appréhender une situation nouvelle et agir sur elles. Elles sont omniprésentes car comme l'a bien noté Nguyen-Xuan (1995), lorsqu'on ne sait rien d'une situation, il n'y a guère d'autre alternative que de recourir à une situation connue. Elles guident notre premier regard sur elles et elles peuvent influencer ceux qui suivent. Elles mériteraient, elles aussi, qu'on s'y attarde quelque peu.

QUELQUES REMARQUES SUR CE TEXTE

Cette brève présentation, ne permet pas, bien entendu d'expliciter le passage de cette étude critique de théories et des conditions protocolaires de leur élaboration par Sander à l'universalité de l'analogie qu'il développe avec Douglas Hofstadter dans « L'analogie cœur de la pensée ».
Mais pour des lecteurs s'intéressant, ainsi que les auteurs de cette brochure, au rôle de l'analogie dans les sciences, dans leur développement, dans leur enseignement et dans les modèles ou outils élaborés en didactique pour leur étude, les critères d'analyse développés dans ces ouvrages peuvent contribuer, non seulement à mieux délimiter le champ de l'analogie, mais aussi à préciser la part d'induction, d'hypothèses, voir de simples affirmations et la nature des justifications qu'elle mobilise dans ces champs.

TROIS ÉTUDES EN HISTOIRE DES SCIENCES

« L'analogie et la pensée mathématique » de E.Knobloch
Texte de Jacques Douaire

« Analogie entre théorie des nombres et théorie des fonctions » de C. Houzel
Texte de Marc Rogalski

« Les analogies mathématiques au sens de Poincaré et leur fonction en Physique » de M.Paty
Texte de Anne-Amandine Decroix et Jacques Douaire

« L'ANALOGIE ET LA PENSÉE MATHÉMATIQUE »

EBERHARD KNOBLOCH [56]

Jacques DOUAIRE

Equipe ERMEL (Institut Français de l'Éducation)

jacques.douaire@wanadoo.fr

Une référence à ce texte d'E. Knobloch dans l'introduction de « L'analogie dans la démarche scientifique » est à l'origine de cet article : « L'installation du formalisme algébrique à partir du 16ème siècle a d'ailleurs conduit mathématiciens et historiens des mathématiques à reconnaître de plus en plus volontiers l'importance de l'analogie dont ils caractérisent souvent l'intervention comme point de départ de l'abstraction, sans préciser pour autant la signification d'un tel ancrage. Eberhard Knobloch va ainsi jusqu'à affirmer que « les mathématiques sont le domaine légitime de l'analogie » ce dont il témoigne par de nombreux exemples empruntés à leur histoire. »

Eberhard Knobloch, historien allemand des sciences et des mathématiques a publié cet article d'une vingtaine de pages dans l'hommage à Jules Vuillemin « Mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'âge classique » dirigé par R.Rashed (1991, CNRS), qui comporte aussi des contributions de G.-G. Granger, C.Houzel, R. Bkouche.

A- PRESENTATION DE L'ARTICLE

Pour Knobloch l'analogie a conservé la signification d'égalité de proportions qu'elle avait dans les mathématiques grecques, et a adopté par la suite celles de « similitude, extension d'une règle aux cas semblables » ; les mathématiciens « les plus créateurs et les plus féconds » des 17ème et 18ème siècles (Kepler, Wallis, Leibniz, Newton, Euler, Laplace) « ont mis en évidence le rôle éminent de l'analogie pour la découverte de nouvelles vérités mathématiques ». Knobloch précise que ceux-ci distinguaient le contexte de la découverte du contexte de la justification : l'analogie guide la connaissance mais ne la justifie pas et que leur application d'analogies, leur justification de cette méthode, leur confiance dans la justesse des résultats dépendaient de leur philosophie des mathématiques. Knobloch se propose de traiter six aspects :

1. Platonisme et le principe de continuité, ou les voix géométriques de l'analogie
2. Les analogies et le passage aux limites
3. Les analogies et l'extension des règles
4. Les analogies et l'extension des notions
5. La méthode d'inventer et le langage
6. Traductions ou constructions au lieu de découvertes

[56] in « Mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'âge classique » (R. Rashed dir.)

1- Le principe de continuité ou les voix géométriques de l’analogie (Kepler)

Selon Knobloch, Kepler utilise des considérations analogiques pour aller des lois connues de la réflexion à la loi inconnue de la réfraction ; dans ce but il insère un chapitre sur la génération projective des sections coniques pour décrire le principe de continuité qui permet de passer le la droite (l’hyperbole la plus plate) au cercle. Ici l’analogie s’appuie sur l’existence d’une famille continue de transformations projectives (Kepler dit sur « l’affinité continue ») entre toutes les sections coniques.

Pour Kepler l’analogie permet d’exposer quelque chose de « manière mécanique, et populaire en raison de la difficulté du sujet », et, il demande aux géomètres de lui pardonner ce recours qu’il justifie ainsi : « … car j’aime le plus les analogies, mes maîtres les plus fidèles qui connaissent tous les secrets de la nature. On doit les regarder en particulier en géométrie quand elles réunissent des cas infiniment nombreux entre les cas extrêmes … et quand elles mettent clairement sous les yeux l’essence d’une chose quelconque. »

Selon la conception de Kepler, platonicien, le monde est construit d’après des lois mathématiques que l’on doit découvrir : « Les mathématiques contribuent le plus à la considération de la nature en découvrant la structure bien mise en ordre des pensées d’après lesquelles l’univers est construit, et en montrant l’analogie qui - comme Timée disait autrefois - lie tout dans le monde, qui réconcilie ce qui est opposé et qui établit une relation et une sympathie entre ce qui est éloigné. »

Knobloch tire cinq conclusions des propos képlériens :

1. Pour Kepler, l’application d’analogies est justifiée et nécessaire dans les mathématiques de même que dans les sciences naturelles parce que toutes les deux ont la même structure.
2. La méthode qui consiste à recourir aux analogies est basée sur la métaphysique : l’analogie - chez Kepler le principe de continuité, le principe d’affinité, chez Platon, au sens étroit, l’égalité de proportions - est le principe de construction du monde.
3. La méthode analogique est sûre, il est vrai, mais elle a besoin de la méthode démonstrative des mathématiques. L’analogie trouve, les mathématiques (la géométrie) prouve.
4. L’analogie inclut en particulier les cas extrêmes dont les désignations couvrent l’affinité avec les autres cas, dont les désignations peuvent induire en erreur.
5. La distribution des rôles entre l’analogie, qui guide les connaissances et la géométrie, qui prouve les découvertes, concerne la solution de problèmes, la déduction de théorèmes ou de théories, la réalisation de constructions mécaniques.

Knobloch affirme que « tant que les mathématiciens tenaient au platonisme, tant qu’ils liaient leurs opinions sur l’existence des objets mathématiques à leurs opinions sur la structure du monde ces cinq conclusions restaient largement valables pour les successeurs de Kepler en particulier pour Leibniz, les Bernoulli, Euler, Lagrange »

2- Les analogies et le passage aux limites (Leibniz)

Leibniz dans son Traité sur l’art d’inventer des théorèmes soulignait l’importance de l’analogie comme fondement des inductions valables. Comme Kepler, Leibniz adhérait au principe de continuité, qu’il prenait pour le fondement des raisonnements par analogie : « l’analogie repose sur le fait suivant : nous supposons que ce qui s’accorde avec beaucoup de choses ou ce qui est contraire s’accorde aussi avec les choses qui sont voisines des choses précédentes ou leur est contraire ». La différence entre les opinions de Leibniz et de Kepler consiste en la valeur de vérité de la découverte (connaissance) : la probabilité leibnizienne a pris la place de la certitude képlérienne et se manifeste quand il se présente comme un fondateur du formalisme mathématique. Knobloch développe trois exemples de la conception de l’analogie chez Leibniz aux frontières des domaines qui étaient valables jusque là : les racines imaginaires de l’algèbre comme √-1, l’infiniment petit, ou l’infini des quantités possibles.

Les racines imaginaires

Ce sont des quantités qui sont propres au calcul, mais qui sont des fictions de la raison, d’une simple façon de parler, des « énonciations toléramment vraies ». Elles ne sont pas vraies dans toute la force du terme, mais deviennent rigoureuses seulement par une explication. Donc la pensée analogique entraine des quantités provisoires sans leur donner une vraie existence.

Leibniz appelait √-1 un amphibie entre être et non être, et que c’est au métaphysicien d’examiner s’il y a de telles quantités en réalité ; le mathématicien n’examine que les conclusions ayant fait usage de celles-ci.

Cauchy parlait de combinaisons de signes qui ne signifient rien en elles mêmes : il faut calculer, il ne faut pas philosopher. D’autres savants refusaient une telle attitude pragmatique. Lambert l’appelait symbole de l’absurdité, une quantité impossible qui ne signifie rien.

Le domaine de l’infini

La maxime leibnizienne que les mêmes règles sont valables dans le domaine de l’infini aussi bien que dans le domaine du fini était basée sur cette pensée analogique ; par exemple pour Leibniz la validité de l’axiome euclidien « le tout (l’entier) est plus grand que chacune de ses parties » est valable dans les deux domaines du fini et de l’infini. Donc il n’y a aucun nombre qui soit le plus grand, et pour cette raison, infini. Car l’existence d’un tel nombre entrainerait une contradiction avec cet axiome. Knobloch souligne que c’est une ironie de l’histoire des sciences que quelques cent années plus tard Dedekind transforma la contradiction originaire en une définition de l’infini. D’après lui un ensemble s’appelle infini si et seulement s’il y a une application semblable - aujourd’hui on dit une bijection - entre lui-même et un sous-ensemble propre.

Le calcul infinitésimal et algébrique :

Leibniz voulait créer un calcul infinitésimal qui fût analogue au calcul algébrique avec les quantités finies. Il était d’autant plus heureux quand il découvrit l’analogie secrète (expression leibnizienne) entre les puissances d’une somme et les différentielles d’un produit. Cette « analogie singulière » ainsi nommé par Laplace, a été étendue aux puissances négatives et aux intégrales par Jean Bernoulli et par Lagrange pour qui les conclusions que l’on peut tirer de cette manière ne sont pas moins rigoureuses. On peut se convaincre de cela a posteriori. Contrairement à Leibniz, Lagrange tient beaucoup à introduire formellement les dérivées comme les coefficients d’une série infinie indépendante de toute métaphysique ou de toute théorie de quantités infiniment petites.

Donc Lagrange était intéressé à découvrir les analogies structurelles entre les domaines d’objets mathématiques et soulignait que de tels calculs contribuaient à faire de nouvelles découvertes. Mais l’existence des objets (cas des dérivées) doit être garantie par des définitions formelles.

3- Les analogies et l'extension des règles

Une règle est appliquée dans un cas pour lequel elle n'était pas établie ; Laplace mentionne les passages du positif au négatif, du réel à l'imaginaire, du fini à l'infiniment petit : c'est un passage qui est représenté par les signes leibniziens du calcul différentiel. On peut donc considérer ces passages comme un moyen de découverte, pareil à l'induction et à l'analogie, employées depuis longtemps par les géomètres d'abord avec une extrême réserve, ensuite avec une entière confiance, en un grand nombre d'exemples ayant justifié leur emploi. Cependant il est toujours nécessaire de confirmer par des démonstrations directes les résultats obtenus par ces divers moyens.

Knobloch propose quelques exemples dont l'extension par Newton du théorème binomial aux exposants négatifs ou fractionnels à l'aide d'analogies sans donner de preuve : « Pour cette raison on doit autant que faire se peut attribuer les mêmes causes aux mêmes effets » (Newton).

Ce principe était pour Laplace le fondement de l'analogie mais avec un accroissement de la probabilité directement proportionnel à la perfection de la similitude.

4- Les analogies et l'extension des notions

Le maniement de l'infini, inévitable depuis le 17ème siècle en raison de l'application des séries infinies, restait problématique et controversé. Knobloch l'illustre avec la somme de la série 1-1+1-1+1… Aujourd'hui on dit que c'est une série alternée avec deux points d'accumulation. Donc selon la définition de la convergence d'une série infinie, cette série est divergente. On ne peut pas lui attribuer une somme dans le cadre d'une méthode régulière de sommation. Les mathématiciens des 17ème et 18ème siècles étaient d'un autre avis.

Dans le cas de la série alternée on obtient 0 ou 1 selon qu'on prend en considération un nombre pair ou un nombre impair des termes de la série. Pour Leibniz par un artifice admirable de la nature le passage du fini à l'infini implique en même temps le passage à une moyenne positive entre les deux termes. Il admet que son argumentation semble être plus métaphysique que mathématique. Néanmoins elle est sûre.… La métaphysique peut être rigoureuse pour le rationaliste Leibniz

Cette question a été l'objet de querelles ; d'après Euler une série est divergente si les termes ne deviennent jamais plus petits qu'une certaine limite ou s'ils deviennent infiniment grands. Donc sa définition de la divergence d'une série ne comprend qu'un vrai sous-ensemble de l'ensemble des séries qui sont divergentes d'après la définition moderne : apparemment la définition n'implique pas la série harmonique, la série divergente la plus fameuse. Euler substitue une définition conceptuelle à la définition opérationnelle qui ne fonctionne pas dans le cas des séries divergentes. La somme est la quantité, l'expression finie, dont le développement est l'origine de la série. La méthode eulérienne repose sur la présupposition suivante : il faut distinguer entre deux espèces de définitions :

1. Une définition est une clarification : elle rend explicites les propriétés essentielles. Elle est une traduction ou une transformation d'un terme dans un langage plus clair, une transformation qui conserve la signification.
2. La définition mathématique produit (crée) la signification mathématique… on doit abandonner la vieille notion pour la remplacer par une nouvelle.

Euler a plusieurs critères pour justifier sa définition :

1. La nouvelle définition s'accorde avec l'ancienne définition dans le cas de séries

convergentes (principe de permanence).

2. Sa méthode de transformation qui est basée sur des différences finies fournit la même valeur.
3. La définition nouvelle n'implique aucun désavantage pour des séries divergentes. Au contraire elles apportent de cette manière des preuves de leur utilité.

Knobloch souligne trois points :

1. Une considération analogique entraîne une extension de la règle qui est justifiée par une extension de la notion. Ce cas est tout à fait caractéristique des mathématiques
2. On n'a pas de doute sur la justesse du résultat qui fut déduit par une considération analogique. Après qu'il a été déduit, il s'agit de le justifier.
3. Seules les méthodes de la justifications distinguent les auteurs

Pour Leibniz, la force de persuasion de l'analogie justificatrice est basée sur la ressemblance prouvée (similitude) entre les deux domaines (sa série infinie et le calcul des probabilités).

Euler choisit la méthode qui consiste à interpréter et définir de nouveau les vieilles notions.

En ce qui concerne les séries divergentes, Abel les avait exilées hors du domaine des mathématiques légitimes et Cauchy avait contesté leur sommabilité. De même pour la somme de la série 1+ 1/2n+ 1/3n +1/4n +… la totalisation des nombres carrés réciproques pour n = 2 (la fonction zeta de Riemann), problème posé dès 1650, que personne ne résolut jusqu'à Euler, celui-ci dit que sa méthode de résolution est entièrement nouvelle. Euler transférait une règle pour les équations algébriques à l'aide d'une analogie, aux équations qui ne le sont pas en représentant (sin x)/x par un polynôme infini. Il transférait la décomposition des polynômes aux fonctions transcendantes. Il n'examinait pas la base de son hypothèse mais les conséquences de cette dernière[57]. Sa méthode entraînait des commentaires critiques :

1. Les uns croyaient que sa méthode est permise mais qu'on doit l'améliorer. Ils demandaient de fournir la preuve de la validité des présuppositions (que la série converge par exemple)
2. Les autres croyaient que sa méthode n'est pas permise parce qu'elle est basée sur un passage dans un autre genre (par exemple un équation qui dépend d'une série n'a pas les mêmes propriétés qu'une équation algébrique)

Avant d'utiliser une méthode d'intégration incontestable, Euler restreignit l'extension des règles au contexte de sa découverte.

5- La méthode d'inventer et le langage

Pour Condillac, l'algèbre, est le langage des mathématiques, la seule langue bien faite, la plus parfaite et la plus simple. Les mathématiciens ne savent pas qu'elle n'a pas encore de grammaire, ni que seule la métaphysique peut la lui donner. Pour lui les sciences sont des langues bien faites dont le progrès dépend du dispositif linguistique. L'algèbre a ces qualités car elle est faite, créée par l'analogie, en un mot la méthode d'inventer est l'analogie même. L 'analogie est la créativité méthodique du langage ; elle fournit la force cohésive nécessaire pour chaque association d'idées. Améliorer les méthodes veut dire simplifier les méthodes, appliquer des signes simples au lieu de mots. Les signes tiennent lieu d'idées exactes avec lesquels on manipule de manières différentes. Car penser veut dire calculer pour Condillac !

[57] cf aussi le chapitre de Marc Rogalski sur Houzel

Les connaissances mathématiques sont définies par les propriétés analytiques de leur langue et ses créations n'ont rien à voir avec l'ontologie. L'analogie devient une propriété sensible des systèmes de signes. Les mathématiciens peuvent calculer avec l'infini parce qu'ils utilisent le signe. Un mot devient le signe d'une idée si cette idée est analogue à la première idée qui est désignée par le mot. D'après Condillac on utilise donc une analogie si on parle de multiplication ou de division par 1. Ce sont les cas extrêmes képlériens qui sont intégrés par l'analogie.

Concernant un contexte non-mathématique l'analogie a pour Condillac des degrés de certitudes tout à fait différents ; elle n'est souvent qu'une faible conjecture. Elle est la plus concluante si elle repose sur des relations entre cause et effet ou l'inverse et devient une preuve si elle est confirmée par les efforts combinés de toutes les circonstances. Elle est basée sur la supposition que les mêmes effets ont les mêmes causes. C'est une supposition incontestable si elle est confirmée par de nouvelles analogies (influence newtonienne sur Condillac).

6- Traductions ou constructions au lieu de découvertes

Dans la mesure où les mathématiciens commençaient à croire que les mathématiques sont faites par les hommes, les analogies obtenaient un nouveau rôle dans les mathématiques. Cette conviction était entraînée par l'expérience du 19ème siècle qu'on peut construire des théories sur des systèmes consistants d'axiomes. Klein ayant énuméré les axiomes de groupes regrettait que cette méthode axiomatique ne soit pas propre à découvrir de nouvelles idées ou méthodes, qu'elle n'anime pas du tout la pensée.

Cependant la méthode des éléments idéaux montre que l'analogie n'a pas perdu de son importance même si elle est dotée d'une fonction nouvelle, par exemple l'introduction des points imaginaires en géométrie afin d'obtenir des théorèmes universellement reconnus dans le domaine des courbes ou des surfaces algébriques. Les analogies sont alors construites à l'aide de définitions. Knobloch prend deux exemples :

1. Le principe de dualité de la géométrie projective (points idéaux, points à l'infini… droites à l'infini) introduits par Desargues en 1639. En 1822 Poncelet qualifie par l'adjectif imaginaire « tout objet qui d'absolu et réel qu'il était dans une certaine figure, serait devenu entièrement impossible ou inconstructible dans la figure corrélative. L'épithète idéal servirait à qualifier le mode particulier d'existence d'un objet, qui en demeurant au contraire réel dans la transformation de la figure primitive, cesserait cependant de dépendre d'une manière absolue et réelle d'autres objets qui le définissent graphiquement, parce des objets seraient devenus imaginaires ». Le principe de dualité devient valable : les notions fondamentales de point et de droite et leur seule notion de relation, la relation d'incidence, peuvent être remplacées par leur pendant dual.
2. Le système d'axiomes d'incidence présente une symétrie : « au moins deux points différents sont situés sur chaque droite », « au moins deux droites passent par chaque point », « une droite et une seule passe par deux points différents », « un point et un seul est situé sur deux droites différentes ». Cette analogie, construite par l'introduction d'objets correspondants (les points et les droites à l'infini), se trouvait être, aussitôt créée, un instrument très efficace pour découvrir de nouveaux théorèmes géométriques. On a besoin seulement du principe de langue duale afin de dériver le théorème de Branchion de 1806 du théorème de Pascal de 1640. C'est un des exemples les plus beaux du principe de dualité. Le processus de recherche s'est transformé en un processus de traduction en raison d'analogies présupposées.

L'analogie exprimée par Condillac entre l'addition et la multiplication, entre la soustraction et la division (déjà observée par Stifel en introduisant les logarithmes en 1543), atteint un nouveau niveau conceptuel par les structures isomorphes entre les groupes (R,x) et (R,+) : on dit la même chose dans deux langues différentes. Les structures mathématiques impliquent selon Polya des analogies complètement clarifiées. L'exemple concret est une interprétation des lois abstraites.

Le système des axiomes est l'origine logique des sciences possibles. La thèse de Condillac selon laquelle la science et le langage sont identiques a revêtu une nouvelle signification avec les mathématiques structurelles.

B- REMARQUES SUR L'ARTICLE

Nous nous proposons de synthétiser des apports du texte de Knobloch et d'esquisser des perspectives relatives à l'étude de l'analogie.

1- Les apports du texte de Knobloch

Cet article, d'un historien des sciences et des mathématiques, s'appuie sur des textes de mathématiciens ou d'un philosophe s'intéressant aux mathématiques, principalement des 17ème et 18ème siècles mais aussi du 19èm. Ces textes, en général, exposent chacun une difficulté résolue ou une avancée en mathématiques pour laquelle l'analogie a contribué par l'usage de notions, symboles ou méthodes issues d'un autre domaine des mathématiques. Knobloch analyse aussi leurs justifications de cet usage, leur confiance dans la justesse des résultats qui dépendaient selon lui de leur philosophie des mathématiques. Plusieurs pistes de réflexion peuvent être privilégies concernant :

- les finalités de l'analogie ;
- les processus en jeu dans le recours à l'analogie ;
- les justifications de ce recours, internes ou externes aux mathématiques ;
- Les rapports entre analogie et preuve

Ainsi que des remarques sur les hypothèses de Knobloch et des perspectives.

2- Les finalités de l'analogie

Trois finalités sont explicitées :

1. la première, citée pour Kepler, est de permettre la compréhension d'une connaissance nouvelle par un public plus large que les seuls mathématiciens.
2. La deuxième est d'élaborer des connaissances nouvelles, qui, ainsi que les titres mêmes des paragraphes l'indiquent concernent : le passage aux limites, l'extension des règles, l'extension des notions, le langage.
3. La troisième est à partir des processus utilisés de s'interroger sur leur validité.

3- Les processus en jeu dans le recours à l'analogie

Knobloch cite plusieurs processus, rappelons les brièvement :

1. **Le recours à un principe général**. La continuité, par exemple, explicite ce qu'il y a de commun entre des observables dont l'appartenance à une même famille n'est pas

directement perceptible (la droite et le cercle par exemple).

2. **L'extension des usages**. L'écriture d'un objet mathématique qui n'est pas encore défini mais qui est produit comme le résultat d'un calcul. Le mathématicien qui y a recours en premier, ou la communauté scientifique, exprime des réserves pouvant porter sur leur existence, sur leur nature, sur leurs propriétés et aussi sur leurs représentations (langagière ou symbolique). La formulation langagière permet aussi d'exprimer ces réserves (« imaginaires ») mieux que la représentation symbolique qui apparaît à certains comme abusive.
3. **Le passage aux limites.** L'extension, par exemple à l'infini, des règles appliquées aux nombres finis.
4. **L'extension des écritures**. La similitude des calculs, ou du moins leur proximité invite à une extension des règles dans des domaines différents
5. **La redéfinition des notions** : notamment par leur extension à d'autres notions, ou en remplaçant une définition conceptuelle par une définition opérationnelle
6. **Les analogies structurelles,** liées à l'identification de ces structures, à l'utilisation d'un langage mettant en évidence la dualité ou le développement d'une axiomatique.

4- Les justifications du recours à l'analogie

Celles-ci relèvent de plusieurs domaines ; elles peuvent être :

Extérieures aux mathématiques

- La philosophie de la nature, le fait que celle-ci soit bien ordonnée. Ceci pouvant être fondée sur l'approche platonicienne que les lois préexistent et que l'homme les découvre. Ou sur des similitudes, voire une identité entre des sciences (Kepler).
- Des relations entre cause et effets : « on doit autant que faire se peut attribuer les mêmes causes aux mêmes effets « (Newton).
- Ou relever explicitement de la métaphysique que Leibniz qualifie de rigoureuse.

Internes à l'analogie même dans son fonctionnement

- D'ordre quasiment tautologique sur l'analogie : « l'analogie repose sur le fait suivant : nous supposons que ce qui s'accorde avec beaucoup de choses ou ce qui est contraire s'accorde aussi avec les choses qui sont voisines des choses précédentes ou leur est contraire » (Leibniz)
- Perfection de la similitude : mais avec un accroissement de la probabilité directement proportionnel à la perfection de la similitude (Laplace)
- Ou justifiées par l'accompagnement d'une explication. Elles ne sont pas vraies dans toute la force du terme, mais deviennent rigoureuses seulement par une explication.

Appuyées par l'appel à un champ scientifique :

- Que ce soit un champ mathématique comme pour l'optique ou pour les nombreux exemples s'appuyant sur un autre domaine des mathématiques
- Fondé sur une conception des mathématiques qui accepte la coexistence d'une

approche pragmatique ou fonctionnaliste issue des calculs et renvoie aux métaphysiciens les questions d'ontologie. Ce clivage dans les pratiques suppose de justifier le recours à des quantités provisoires sans leur donner une vraie existence que l'on retrouve dans les expressions : « Tolérament vraies », « êtres amphibies », « entre être et non être ».

- Interne aux mathématiques comme les justifications probabiliste ou les similitudes des écritures entre les puissances d'une somme et les différentielles d'un produit.
- Spécifiques du recours à un système de signes propre aux mathématiques (Condillac) : les connaissances mathématiques sont définies par les propriétés analytiques d'un système de signes.
- La nécessité du recours à une preuve. Celle-ci est exprimées sous différents termes : confirmation a posteriori, preuve géométrique, preuve par le calcul.

5- Les rapports entre l'analogie et la preuve

L'analogie apparaît d'abord comme une méthode d'inventer. Toutefois les documents sur lesquels s'appuie Knobloch semblent principalement des écrits destinés à d'autres savants des époques considérées ; ils ont donc une fonction de communication, d'explication et de justification d'une pensée déjà organisée et semblent plus être des brouillons, des essais, ou correspondances entre mathématiciens cherchant à résoudre un problème. En cela ils nous renseignent moins sur le rôle de l'analogie dans l'émergence d'idées nouvelles, malgré l'affirmation de Condillac qui, selon Knobloch, réduit toutes les méthodes de recherche et d'invention à l'analogie même. Les relations entre intuition et analogie parfois citées, sans être différenciées, ne sont donc pas l'objet de l'article.

La fonction de preuve de l'analogie doit donc être analysée dans ce contexte historique de communication entre savants portant sur des domaines où la généralisation du processus d'axiomatisation n'est présentée implicitement que comme naissante à la fin de la période étudiée.

Pour reprendre ce qu'écrivait F.Gil : "Une proposition est dite prouvée si, ayant été obtenue moyennant une méthode généralement reconnue, elle fait l'objet d'une croyance justifiée - et cette formulation permet de distinguer quatre versants dans la théorie de la preuve : un élément sémantico-formel (la proposition qu'il s'agit de prouver), un dispositif objectif (la méthode) ayant des effets subjectifs (la croyance) et intersubjectifs (la reconnaissance générale)".

Dans la plupart des exemples cités par Knobloch si la proposition et les effets subjectifs sont affirmés, celui-ci explicite les réserves sur les effets intersubjectifs ainsi que le dispositif objectif ayant lui aussi évolué (exemple de la définition de l'infini par Leibniz).

Ce point du degré de crédibilité est explicité dans la référence à Laplace « … l'induction et à l'analogie, employées depuis longtemps par les géomètres d'abord avec une extrême réserve, ensuite avec une entière confiance, en un grand nombre d'exemples ayant justifié leur emploi. »

Les exemples ci-dessous ont donc pour objet d'ouvrir un champ des possibles sur l'utilisation de l'analogie et non d'affirmer une quelconque progressivité dans les preuves ou encore plus de réduire la conception de la preuve de tel auteur à l'allusion qui en est faite ici.

La validité du recours à l'analogie comme preuve est abordée dans ce texte :

- De façon éventuellement redondante : C'est une supposition incontestable si elle est confirmée par de nouvelles analogies (influence newtonienne sur Condillac)

- Sous l'angle des limites de l'analogie : « la méthode analogique est sûre, il est vrai, mais elle a besoin de la méthode démonstrative des mathématiques. L'analogie trouve, les mathématiques (la géométrie) prouve »
- Une confirmation par l'expérience : « elle devient une preuve si elle est confirmée par les efforts combinés en toute circonstance »
- La distribution des rôles entre l'analogie, qui guide les connaissances et la géométrie, qui prouve les découvertes concerne la solution de problèmes, la déduction de théorèmes ou de théories, la réalisation de constructions mécaniques »
- Les connaissances produites ou redéfinies doivent avoir une compatibilité avec les anciennes définitions (Euler).
- Cependant il est toujours nécessaire de confirmer par des démonstrations directes les résultats obtenus par ces divers moyens et de se convaincre de la rigueur des conclusions a posteriori par d'autres méthodes.

La démonstration, et à plus forte raison son évolution historique, n'est pas l'objet de l'étude de cet article, centré sur les phases de découvertes. Donc il n'évoque pas les débats remontant au moins au 17ème siècle sur la démonstration ; pour Arnaud et Nicole le but de la démonstration devrait être plus d'éclairer, de permettre de bien comprendre pourquoi un énoncé est vrai, que de convaincre par des démonstrations synthétiques, celles-ci ne permettant pas de voir comment une propriété avait été découverte58.

6- Sur une hypothèse de Knobloch

Knobloch n'utilise que des textes des mathématiciens eux-mêmes et de Condillac. Dans ce contexte il ne cherche pas à introduire de l'analogie là où ceux-ci n'auraient pas vu ou reconnu sa présence. Bien entendu les catégorisations des usages de l'analogie sont les siennes et non celles des mathématiciens cités. De plus son approche d'historien nous invite implicitement à abandonner un regard contemporain sur l'analogie - que la démonstration ne tolère pas - pour identifier la richesse et la complexité d'une science en construction.

Knobloch qui s'appuie sur de nombreux exemples, formule une hypothèse initiale : la philosophie des mathématiques des auteurs cités entrainerait leur conception de l'analogie. Les relations établies avec la philosophie platonicienne ou avec l'émergence du langage algébrique ou avec celle d'une axiomatisation des mathématiques s'appuient sur des écrits des mathématiciens. Toutefois la conception de la philosophie des mathématiques, platonicienne d'abord, apparaît plus comme une interprétation que comme une justification même du recours à l'analogie.

En d'autres termes, en faisant une analogie avec un débat qui semble toujours ouvert (Arsac, Szabo, Caveing…) sur l'apparition des irrationnels en Grèce comme ayant une origine interne aux mathématiques ou externe (issue des débats dans les sociétés grecques) est-ce l'évanescence progressive de la conception platonicienne des mathématiques qui fonde l'abandon du recours à l'analogie comme preuve (cause externe) ou est-ce la double émergence des conditions de démonstrations plus rigoureuses et du développement de l'axiomatique qui en sont la cause ?

[58] On retrouvera aussi un écho de ces débats sur la démonstration dans les échanges portant entre argumentation et démonstration (cf. notamment les articles de E. Barbin et R.Duval (Repère n° 12 1992) et aussi ceux de N.Balacheff ou R.Duval le site « La lettre de la preuve » à la fin des années 90).

7- Perspectives

Le texte de Knobloch, conduit à identifier d'autres pistes d'évolution que le formalisme algébrique cité dans l'introduction de « L'analogie dans la démarche scientifique ». En dehors même des hypothèses de Knobloch d'autres principes comme celui de continuité, ou celui de dualité semblent avoir joué un rôle. Par ailleurs le texte de Knobloch, n'érige pas l' « abstraction » en principe.

Mais une autre question est issue de cette introduction : « en quoi les mathématiques seraient-elles le domaine légitime de l'analogie ? », au delà du simple rappel de la première signification historique du terme. En quoi l'analogie serait elle plus « légitime » en mathématiques que dans d'autres domaines, scientifiques ou non ? D'autres articles de notre publication analysent des travaux qui visent à mettre en évidence le caractère universel de l'analogie (cf. Hoftsadter et Sander) et s'inscrivent en faux contre cette hypothèse.

Une piste de recherche pourrait être formulée ainsi : « peut t'on spécifier les caractéristiques d'une analogie dans un domaine mathématique » ?

Parmi les travaux qui peuvent apporter un éclairage à cette question, deux types me sembleraient contribuer à cette exploration:

Analogie et champ conceptuel

Les analogies historiques étudiées par Knobloch mettent en évidence des questions :

1. de méthode de résolution de problème
2. de définition d'un langage (précision, redéfinition)
3. de recours à des propriétés
4. de fonctionnement de preuves

Une analyse s'appuyant sur le quadruplet « problèmes, propriétés, représentations symboliques, systèmes de preuve »[59] permettrait-elle de mieux qualifier les analogies utilisées en mathématiques, que cela soit dans des travaux historiques, dans le processus même de résolution d'un problème par un mathématicien, que dans les analogies produites par un élève en cours de résolution ?

« Analogie » entre analogie et argumentation

Les exemples cités par Knobloch présentent des échanges dans des communautés scientifiques où des mathématiciens développent, en s'appuyant sur des analogies, des argumentations pour convaincre d'autres mathématiciens de la validité de leur propositions. Ces discours par leurs méthodes et leurs fonctions induisent un rapprochement avec les conceptions contemporaines de l'argumentation.

1. La fonction. : L'analogie vise dans les travaux présentés par Knobloch à convaincre un auditoire et à établir le vrai ou le vraisemblable ce qui constitue la double finalité de l'argumentation pour Perelman.
2. Le domaine scientifique considéré. L'analogie en mathématiques semble pouvoir être caractérisée comme l'argumentation en sciences qui est considérée par Perelman comme un cas particulier du processus argumentatif : « celui où la preuve de la vérité ou de la probabilité d'une thèse peut être administrée à l'intérieur d'un domaine

[59] Cf Vergnaud, Balacheff

formellement, scientifiquement ou techniquement circonscrit, d'un commun accord par tous les interlocuteurs. C'est alors, uniquement, que la possibilité de prouver le pour et le contre est l'indice d'une contradiction qu'il faut éliminer » (Perelman C. et Olbrechts-Tyteca L. 1988 p 61).

3. L'existence. A l'issue de longs échanges notamment avec R.Duval, Balacheff affirmait : « S'il n'y a pas d'argumentation mathématique, il existe pourtant une argumentation en mathématiques. La résolution de problèmes… est le lieu où peuvent se développer des pratiques argumentatives reprenant des moyens opérationnels ailleurs (métaphore, analogie, abduction, induction, etc.) qui s'effaceront lors de la construction du discours qui seul sera acceptable au regard des règles propres aux mathématiques. … » [60]

4. La structure. Pour Toulmin, le discours argumentatif est organisé sur un mode ternaire permettant le passage de données à une conclusion sous le contrôle le plus souvent implicite d'une "licence d'inférer"[61]. Le recours aux schémas d'argumentation de Toulmin, souvent utilisé en didactique des mathématiques[62,] permet de caractériser les enchaînements, en particulier l'explicitation des garanties et des fondements, et de repérer les changements s'opérant dans la nature des justifications produites.

BIBLIOGRAPHIE

Arsac, G. (1988). L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique, *Recherches en Didactique des mathématiques*, Vol 8 n° 3 pp.267-312.

Balacheff, N. (1999). L'argumentation est-elle un obstacle ? La lettre de la preuve <www.lettredelapreuv.it>.

Caveing, M. (1997). *La figure et le nombre : recherches sur les premières mathématiques des Grecs*, Presses Universitaires du Septentrion, Villeneuve-d'Ascq.

Gil, F. (1988). *Preuves*, Aubier.

Knobloch, E. (1991). L'analogie et la pensée mathématique, in *Mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'âge classique*, dir. R.Rashed CNRS.

Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports entre l'argumentation et la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*, Thèse Université Joseph Fourier (Grenoble I) et Université de Gênes.

Perelman, C. & Olbrechts-Tyteca, L. (1958,1988). *Traité de l'argumentation*, Ed. Université de Bruxelles.

Szabo, A. (2000). *L'aube des mathématiques grecques*, Vrin.

Toulmin, S.E. (1958, 1993). *Les usages de l'argumentation*, PUF.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des mathématiques*, Vol 10 n°2-3 pp 133-169.

[60] N.Balacheff, (1999).
[61] Toulmin (1993 p 128).
[62] Pedemonte (2002).

« ANALOGIE ENTRE THÉORIE DES FONCTIONS ET THÉORIE DES NOMBRES », PAR CHRISTIAN HOUZEL [63]

QUELQUES COMMENTAIRES SUSCITÉS SUR L'ANALOGIE EN MATHÉMATIQUES, DANS L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES ET EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Marc ROGALSKI

Université Pierre et Marie Curie

marc.rogalski@imj-prg.fr

Résumé

Ce texte présente l'article de Christian Houzel : « *Analogie entre théorie des nombres et théorie des fonctions* » (qui étudie l'évolution de théories mathématiques sous l'angle de l'analogie), puis, après une analyse critique de cette étude, précise les rapports entre l'approche de Houzel et celle du texte de Eberhard Knobloch : « *L'analogie et la pensée mathématique* ». Des fonctionnements de l'analogie dans l'enseignement des mathématiques, avec l'éclairage de la didactique des mathématiques et les rapports avec l'activité de catégorisation, sont ensuite exposés.

Mots clés : analogie, théorie des nombres, fonctions, histoire, didactique.

Plan

A Présentation de l'article « « *Analogie entre théorie des nombres et théorie des fonctions* » de C. Houzel

- **(1)** Invention de l'algèbre
- **(2)** L'algèbre des polynômes
- **(3)** La « numérisation » des irrationnels
- **(4)** L'invention des nombres complexes
- **(5) Nombres décimaux et séries entières**
- **(6)** Fonctions algébriques d'une variable et nombres algébriques

B- Remarques et perspectives

I. Discussion, rapports avec l'article de Knobloch

- **(1)** Moyen de découverte ou analyse *a posteriori* ?
- **(2)** D'autres interprétations épistémologiques possibles
- **(3)** Des approches différentes ?

II. Quelques exemples dans l'enseignement des mathématiques,

III. Commentaires généraux sur l'analogie dans les sciences et les mathématiques et l'activité de catégorisation

---

[63] « *L'analogie dans la démarche scientifique* », sous la direction de Marie-José Durand-Richard (L'Harmattan, 2008)

A- PRÉSENTATION DE L'ARTICLE

Commençant par une longue citation d'André Weil, évoquant les analogies vagues, parfois appréhendées comme métaphysiques par des mathématiciens au XVIII siècle, l'article de C. Houzel veut illustrer l'intervention de l'analogie, non seulement pour éclairer des similitudes entre des résultats, mais aussi pour créer de nouveaux objets ou de nouvelles théories dans certaines étapes historiques en prenant six exemples, que nous allons analyser.

(1) Invention de l'algèbre [al-Khwãrizmî, 9ème siècle]

L'auteur montre comment l'analogie entre des problèmes d'origine géométrique et des problèmes d'origine numérique permet une unification algébrique, qui passe par une extension des objets avec le concept d'équation du second degré. Une telle équation va s'énoncer avec les termes « racine » ou « chose », « carré » : $x^2 + 10x = 39$ se lit « un carré et 10 racines égalent 39 ».
La démarche est : analogie-unification par conceptualisation (algébrique). Mais les preuves restent géométriques, alors que les algorithmes sont numériques.

(2) L'algèbre des polynômes [al-Karajî, 10ème-11ème siècles]

De nouvelles puissances de l'inconnue (x^3, x^4, $1/x$, $1/x^2$…) étaient connues. Al-Karajî introduit les autres, notées « simples » (des monômes), avec les règles de multiplication et divisions, puis les « quantités composées » (des polynômes). Al-Karajî développe un calcul sur les polynômes construit par analogie avec le calcul usuel sur les nombres. Citons Houzel :

> « Cette analogie s'inscrit d'abord dans une pratique : elle n'est pas nommée, et de ce fait, pas justifiée non plus ».

Il précise :

> « L'analogie entre les comportements opératoires de l'inconnue, des puissances de 10, et des irrationnelles, s'impose ainsi dans la pratique sans être pour autant explicitée. Comme l'écrit Roshi Rashed, "ils étendent leurs opérations algébrique aux quantités irrationnelles sans s'interroger sur les raisons de leur succès ni justifier cette extension" ».

(3) La « numérisation » des irrationnels [al-Karajî, al-Samaw'al, 12ème siècle]

Les quantités irrationnelles étaient uniquement géométriques (tels la racine de 2, longueur de la diagonale du carré de côté 1, ou la racine de 5, diagonale du pentagone régulier). A partir de al-Karajî, on peut les déterminer en résolvant des équations, elles deviennent donc des valeurs prises par la « chose ». D'où une arithmétique des irrationnels, obtenue en remplaçant la chose par un irrationnel dans un polynôme.
Al-Samaww'al précise comment utiliser les instruments arithmétiques dans les quantités irrationnelles. Citons Houzel :

> « L'analogie entre les comportements opératoires de l'inconnue, des puissances de 10 et des irrationnelles s'impose ainsi dans la pratique, sans être pour autant explicitée ».

(4) L'invention des nombres complexes et de leurs règles de calcul [R. Bombelli, 1572]

Avec l'exemple de l'équation $x^3 = 15x + 4$, la méthode de Cardan conduit à l'expression littérale $2 + \sqrt{(-121)}$, et à en extraire la racine cubique. Bombelli donne un « droit au calcul » sur ces symboles $a + \sqrt{(-b)}$ ($b > 0$). Citons Bombelli :

> « Cette sorte de racine carrée a dans son algorithme des opérations différentes des autres et un nom différent ;…l'excès ne peut être appelé ni plus ni moins, mais … piu di meno quand on devra l'ajouter… et cette opération est très nécessaire… ».

[Nécessaire, parce qu'il faut, pour résoudre l'équation, qu'on ait l'égalité $(2 + \sqrt{(-1)})^3 = 2 + \sqrt{(-121)}$. Mais s'agit-il alors d'une analogie ou d'un « outil », qui demandera plusieurs siècles pour devenir « objet » ?
Houzel parle de « transfert opératoire », et dit :

> « l'analogie porte sur les pratiques opératoires…Ces pratiques constituent des mathématiques en acte. L'énonciation effective de ces analogies constitue cependant une autre étape… ».

Là encore, donc, c'est l'auteur qui parle d'analogie, et non Bombelli.

(5) Nombres décimaux et séries entières : une analogie assumée par Newton [17ème siècle]

En 1670, Newton écrit :

> «… la grande conformité qui se trouve dans les opérations littérales de l'algèbre et dans les opérations numériques de l'arithmétique ; cette ressemblance ou analogie, qui serait parfaite si les caractères n'étaient pas différents, les premiers étant généraux et indéfinis, et les autres particuliers et définis, devait naturellement nous conduire à en faire usage… appliquer à l'algèbre la doctrine des fractions décimales, puisque cette application ouvre la route pour arriver à des découvertes plus importantes et plus difficiles. … observer la correspondance qui doit être entre les fractions décimales et les termes algébriques continués à l'infini pour faire les opérations…».

Newton vise en particulier le développement en série

$$(1+x)^a = 1 + a\,x + a(a-1)/2!\,x^2 + a(a-1)(a-2)/3!\,x^3 + \ldots.$$

Il faut remarquer qu'ici c'est Newton qui revendique une analogie.

(6) Fonctions algébriques d'une variable et nombres algébriques [19ème siècle], et au-delà…

L'équation $F(x,y) = 0$ (F polynôme) « définit » y comme une « fonction algébrique » de x… mais multiforme. D'où l'invention des surfaces de Riemann (1851), avec leurs feuillets et points de ramification, bien compliquées…
Dedekind et Weber, en 1882,

> « exploitent l'analogie opératoire entre la notion de fonction algébrique d'une variable et celle de nombre algébrique »,

dit Houzel. Si $P(y) = 0$ « définit » un nombre algébrique (avec P polynôme à coefficients rationnels), les opérations sur y donnent un sous-corps $Q(y)$ de $\mathbf{C}$. De même, le corps quotient de $C(x)[Y]$ par l'idéal engendré par F est engendré sur le corps $\mathbf{C}(x)$ par la classe de Y modulo F : on a remplacé Q par $\mathbf{C}(x)$… Après, tout se complique…de l'algèbre remplace la surface de Riemann. Puis Weil… et le programme de Langlands explicitement formulé pour rendre compte d'analogies apparentes mais qui semblent très profondes…

B- REMARQUES ET PERSPECTIVES

I. Discussion, rapports avec l'article de Knobloch

Plusieurs différences apparaissent entre ce texte de Houzel, qui présente une lecture a posteriori *pouvant être interprétée comme orientée par ce qu'on sait de la suite de l'histoire et celui de Knobloch qui décrit le rôle de l'analogie* ***exprimé*** *par des mathématiciens.*

(1) L'analogie moyen de découverte en mathématiques, ou l'analogie moyen d'analyse d'un historien ou d'un épistémologue ?

Houzel dit clairement à quel point certaines analogies qu'il voit ne sont pas du tout formulées ni même évoquées par ceux qui, dit-il, s'en servent. N'est-ce alors qu'un moyen d'analyse d'une avancée de l'histoire, et ne relève-t-elle pas d'une vue très récurrente de l'histoire ? C'est d'autant plus vraisemblable que Houzel donne en exergue de son texte la citation suivante de André Weil :

> « Nous savons, nous, ce que cherchait à deviner Lagrange lorsqu'il parlait de la métaphysique à propos de ses travaux d'algèbre ; c'est la théorie de Galois, qu'il touche presque du doigt, à travers un écran qu'il n'arrive pas à percer… Là où Lagrange voyait des analogies, nous voyons nous des théorèmes ».

Il semble donc qu'il faille se garder de confondre le rôle de l'analogie dans l'évolution des mathématiques, tel que le décrit Knobloch, de façon convaincante dans un certain nombre de cas, avec une lecture *a posteriori*, très orientée par ce qu'on sait de la suite de l'histoire, et une vue souvent assez structuraliste (nous reportons au paragraphe 3 suivant une comparaison plus précise entre l'approche de Houzel et celle de Knobloch).
Ce qui ne veut pas dire que cette lecture soit toujours erronée, mais qu'elle reste douteuse en l'absence d'indices confirmant que les auteurs concernés en étaient conscients.

Par contre, même une lecture épistémologique *a posteriori* peut être intéressante pour le didacticien, car il peut éventuellement en faire une transposition pertinente.

(2) D'autres interprétations épistémologiques possibles

Quand on regarde la création par Bombelli des nombres complexes et de leurs règles de calcul, on est frappé par le fait qu'il insiste sur le caractère nécessaire de ces « trucs » et des calculs à faire sur eux. Comme nous l'avons signalé, la formule de Cardan pour l'équation exemplaire $x^3 = 15x + 4$ conduit à l'expression $2 + \sqrt{(-121)}$, dont il faut trouver une racine cubique, et de plus il faut que celle ci soit $2 + \sqrt{(-1)}$, donc les règles de calculs sont nécessaires. Ainsi, plus que l'analogie vue par Houzel (et aussi par Knobloch), nous y verrions plutôt la création d'un outil comme moyen de résolution d'un problème, outil qui ne deviendra objet qu'après une longue histoire et une utilisation formelle très efficace (en particulier par Euler) au moyen des règles de calculs qui avaient été établies par nécessité à l'origine (voir Artigue et Deledicq 1992). Mais, et c'est là un phénomène fréquent en mathématique, une lecture *a posteriori* comme analogie de cet épisode historique a « justifié » sa généralisation à l'analogie revendiquée du « prolongement des règles de calculs ».

Dans un autre ordre d'idées, quand on regarde l'exemple (6) de Houzel, passer d'une surface de Riemann à une version en termes d'algèbre, cela relève pour nous plus du changement de cadres (Douady 1987 et Rogalski 2002) que de l'analogie. Peut-il avoir été suggéré par une analogie ? Ce n'est pas vraiment ce qu'indique l'auteur…

On peut aussi critiquer l'interprétation comme analogie que donne Knobloch de la démarche d'Euler « prouvant » la relation $\zeta(2) = \pi^2/6$; il dit :
« Euler transfère une règle pour les équations algébriques [la somme des racines], à l'aide d'une analogie, aux équations qui ne sont pas algébriques ». En fait, il utilise une équation *vraiment polynômiale* $(\sin x)/x = 1/1! - x^2/2! + \ldots + (-1)^n x^{2n}/(2n+1)! = 0$, mais pour n « infiniment grand », et il fait des calculs avec un n *écrit* mais infiniment grand. *Il ne s'agit donc pas d'une analogie, mais de la pratique des infiniments grands*. Et ce fut la cause de bien des critiques de ses contemporains…

(3) Des approches différentes ?

Pour comparer ces articles nous regarderons les sources utilisées, les objets étudiés, les finalités énoncées.

- **Les sources**. Knobloch étudie des commentaires de mathématiciens sur les fonctions qu'ils attribuent à l'analogie, principalement pour étendre des méthodes à des domaines où elles ne sont pas encore validées ou pour recourir à des notions qui ne sont pas encore définies. L'usage du terme analogie appartient à leur propos même. Il cite des échanges entre savants. Il s'agit de cas bien plus récents (à partir du 17ème siècle), que les quatre premiers de Houzel et dans lesquels les auteurs font des analogies consciemment. L'article de Houzel, qui révèle aussi des extensions de méthodes ou de notions, analyse des travaux de mathématiciens, alors que ceux-ci n'ont pas, en général, recours, dans les exemples qu'il cite jusqu'à Newton, au terme « analogie ». L'emploi du terme « analogie » relève donc du choix de Houzel.
- **Les objets.** Ainsi que cela est présenté précédemment, Houzel structure ses analyses sur l'étude de l'évolution des savoirs mathématiques dans certains domaines sur plusieurs siècles, ce qui permet d'en suivre les étapes. Knobloch se centre non sur l'évolution d'un savoir donné, mais sur celle des processus que permet un recours explicite à l'analogie et sur les justifications apportées par les mathématiciens.
- **Les finalités.** Knobloch cherche de plus à mettre en évidence les liens entre le rôle attribué à l'analogie par les mathématiciens et leur philosophie des mathématiques ; Houzel vise à présenter des processus d'évolution internes aux mathématiques, en se centrant sur la construction de nouvelles théories. Houzel analyse ainsi le processus d'analogie : « Faire intervenir des analogies ne consiste pas seulement… à observer des similitudes…Repérer des analogies conduit aussi à créer de nouveaux objets ou de nouvelles théories en mobilisant le modèle d'une théorie déjà existante, avant d'englober éventuellement les deux théories, le modèle et la copie, dans une même théorie plus générale ». Autant ce point de vue paraît confirmé par les exemples (1), (5) et (6), autant il semble une opinion de l'historien dans les cas (2), (3) et (4), pour rendre compréhensible par lui-même une étape historique,

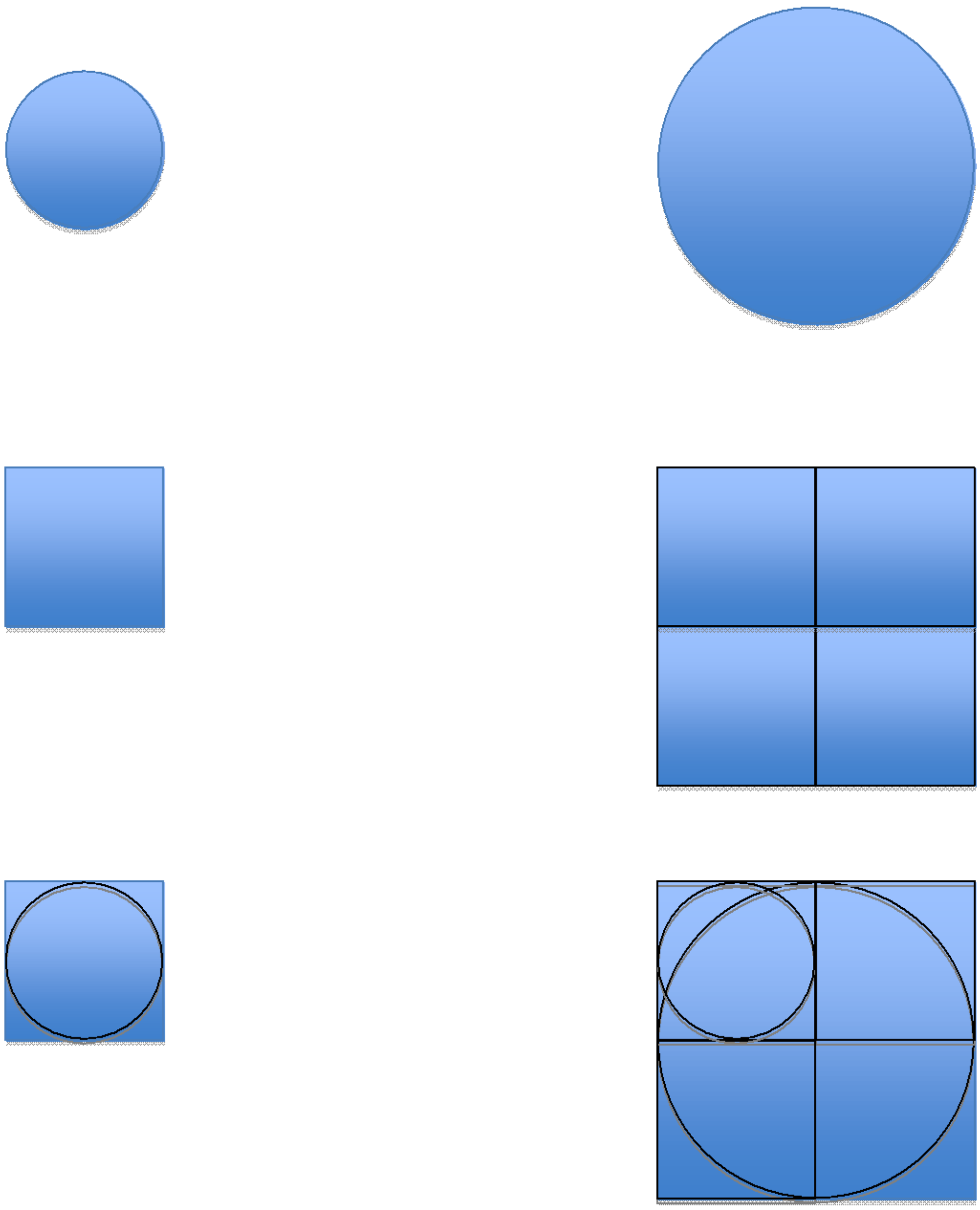
Si ces deux articles portent sur des objets en partie distincts et ont des approches épistémologiques distinctes, ils se complètent sur l'analyse de processus, largement décrits par Knobloch (extension des règles, des notions, des notations…) avec, compte tenu des sources utilisées par Knobloch, un questionnement possible sur les justifications fournies par les mathématiciens eux-mêmes et une importance donnée par Houzel à la construction d'une nouvelle théorie. Comme nous l'avons vu, si le lecteur peut toutefois s'interroger sur les attributions en termes d'analogie par Houzel d'évolutions qu'il analyse, l'étude plus exhaustive qu'en fait Knobloch n'infirme pas cette attribution.

II. Quelques exemples dans l'enseignement des mathématiques ?

D'abord, il semble que les analogies soient nettement plus utilisables dans les sciences expérimentales qu'en mathématiques, tant du point de vue épistémologique (voir l'article de Claude Comte dans le même livre Durand-Richard 2008) que pour l'usage didactique (voir le livre Johsua et Dupin 1998). En ce qui concerne la didactique des mathématiques, voici néanmoins quelques exemples possibles.

(1) En quatrième, les élèves voient que si on double le côté d'un carré, son aire est quadruplée, par un quadrillage spontané. Et pour un disque ? En général, le transfert de cette propriété n'est pas assuré pour certains élèves, sauf si on associe à chaque disque son carré circonscrit, et que pour le grand disque on divise son carré circonscrit en quatre et on trace les 4 disques inscrits dans ces petits carrés (voir les figures).

En fait il s'agit de l'analogie au sens premier : « *a* est à *b* comme *c* est à *d* », c.à.d. la proportion ; ici : l'aire du disque et du carré circonscrit sont proportionnelles (leur rapport est indépendant du rayon).



(2) En L1, quand on veut faire comprendre le rôle de l'axiomatique dans l'introduction des espaces vectoriels, on peut consacrer une séance préparatoire à faire dégager par les étudiants les règles de calcul qu'on utilise dans la résolution d'équations « linéaires » variées :

• trouver un polynôme P à coefficients rationnels vérifiant

$$(3/2)x - 2 + 5P = x^2 - 5x - 4P + 7 \,;$$

• si V_0 est un vecteur donné de IR^3, trouver un vecteur V tel que

$$(9/4)V + V_0 = - 2V_0 + [\text{racine}\,(7)]V \,;$$

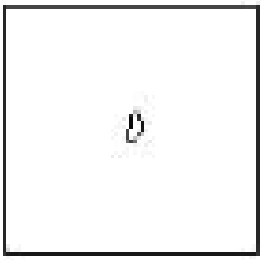
• trouver une fonction f sur]- π/2, π/2[telle que pour tout x on ait

$$(6/5)f(x) + 4\tan x = - f(x) + \cos x + 3\tan x.$$

On recueille toutes les règles dégagées (une douzaine), ainsi que les objets (polynômes, vecteurs, fonctions) et le type de nombres qui « opèrent » dessus, de façon *analogique*.
Dans le cours qui suit, après avoir rappelé toutes les règles repérées dans les séances préparatoires, on discute de l'intérêt d'en trouver un nombre minimal d'où se déduisent les autres. Et voici les axiomes des espaces vectoriels…Avant les séances préparatoires, on fait réfléchir les étudiants sur le fait que certaines lois ne vérifient pas les propriétés usuelles des nombres, par exemple le x^y des calculatrices n'est ni commutatif ni associatif.
Et aussi à l'avantage de représentations symboliques pour noter des éléments de groupes simples, par exemple de permutations…

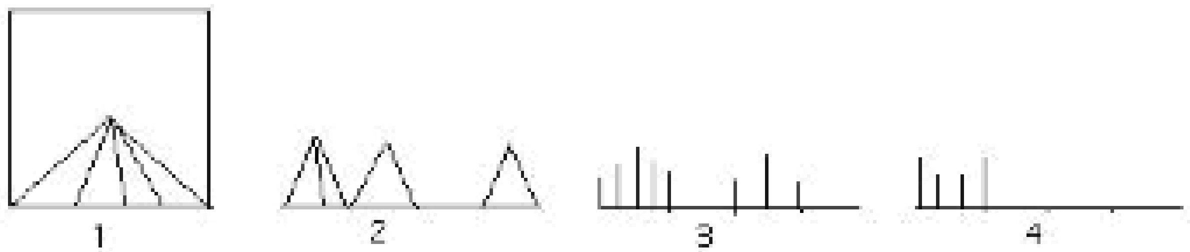
(3) En troisième, pour introduire le concept de fonction comme graphe, on peut essayer de dégager l'analogie entre plusieurs représentations graphiques qu'on fait construire par les élèves eux-mêmes pour modéliser des dépendances variées entre grandeurs (voir Kryzinska et Schneider 2010, Hitt F. 1998).

Voici deux exemples :
* Variation de la distance à la statue située au centre d'un square carré quand on se déplace sur son pourtour ? Voir (Hitt 2010).
L'objectif de l'activité est d'amener les élèves à « inventer » la notion de graphe comme outil de représentation de covariations de grandeurs. Les élèves travaillent en petits groupes. Voici l'énoncé.



Vous vous promenez sur les bords d'un square carré, qui a une statue en son centre. Pouvez-vous décrire comment varie la distance entre la statue et vous lors de votre promenade sur le bord du square ? Essayez de le faire d'abord oralement, puis de transmettre un dessin pour expliquer cette variation à un camarade qui ne peut vous entendre. Que deviendrait votre dessin si la statue était à un coin du square ?

Présentons simplement ici les dessins produits successivement par les élèves.

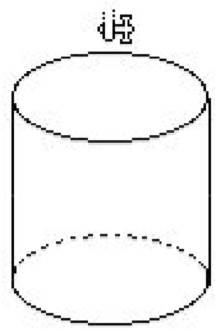


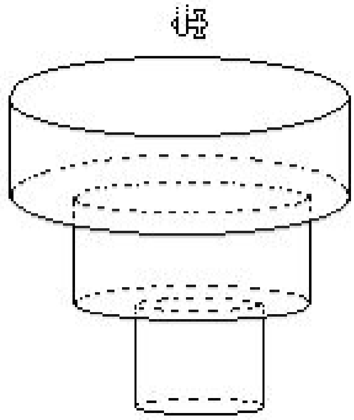
Ils attestent du franchissement par les élèves de différents *seuils épistémologiques* :

- détermination des relations entre deux grandeurs, l'une étant conçue comme dépendant de l'autre ;
- représenter la grandeur « variable » par ses mesures étalées sur une droite ((1) $\rightarrow$ (2)) ;
- représenter la grandeur « fonction » de façon plus abstraite (et non « concrète » comme dans (1) et (2)) par des longueurs verticales : passage (2) $\rightarrow$ (3) ;
- prendre en compte le sens de variation dans le passage (3) $\rightarrow$ (4), en se détachant de la forme de la représentation « concrète » (sens de la convexité dans (1) et (2) contaminant (3) - où le sens devrait être inverse comme il l'est dans (4)).

Le dernier pas à franchir, dans l'institutionnalisation, est, compte-tenu de la continuité de la droite horizontale, d'imaginer la réunion des extrémités supérieures des segments verticaux comme une « courbe ».

*Représenter par un dessin la variation de la hauteur du liquide quand on remplit des récipients de formes variées ?





On peut espérer qu'après plusieurs essais de représenter des covariations de grandeurs, l'analogie entre ces différents problèmes fera apparaître la notion de graphe *comme outil adéquat commun* à ces représentations.

(4) En L1, après plusieurs *modélisations* conduisant à des sommes de Riemann ou Darboux mobilisant des sommes de puissances d'entiers, on peut exploiter leur analogie pour transformer des problèmes de mesure de grandeurs en le calcul d'intégrales de fonctions.

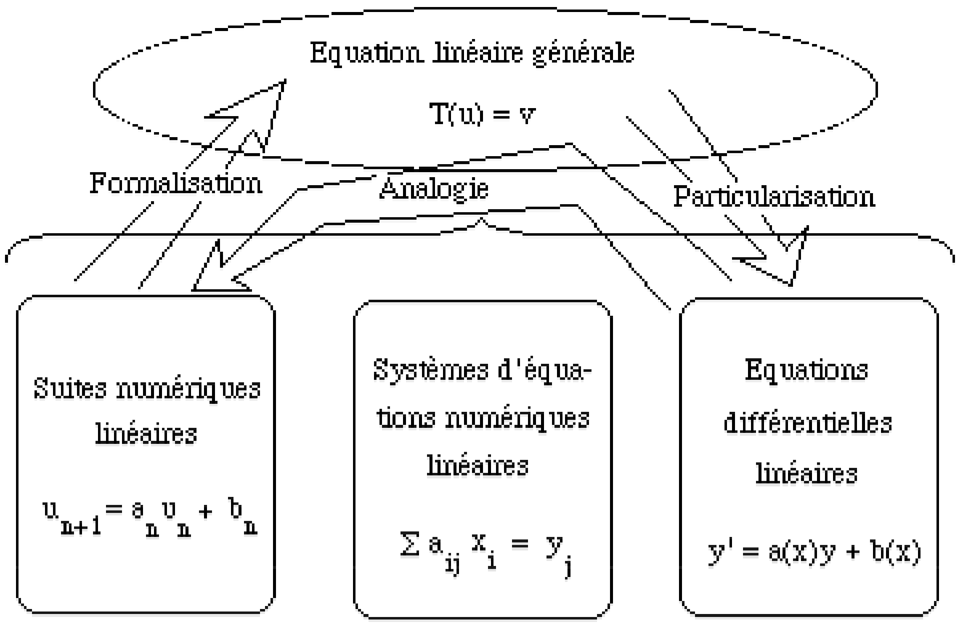
Par exemple le volume d'un tronc de cône de révolution et l'aire de la spirale d'Archimède conduisent tous deux à la somme $\sum_{1\leq k\leq n} k^2$; le calcul de Galilée mène à la somme $\sum_{1\leq k\leq n} k$; l'attraction du barreau de (M. Legrand 1990) conduit à la somme $\sum_{1\leq k\leq n} 1/(6k+3n)^2$.
Cela peut permettre (comme dans l'histoire) de passer par analogie-unification au concept d'intégrale (aire sous la courbe) des fonctions $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow x$, $x \rightarrow 1/(3+x)^2$?
[On sait qu'une autre méthode pour introduire l'intégrale d'une fonction est de mesurer des grandeurs produits, voir (Rogalski 2001).]

(5) On peut aussi situer le cadre où l'on se pose un problème dans une théorie plus générale qui contient d'autres cadres, et aller chercher dans ceux-ci une idée, une analogie, pouvant être *importée*. Voici deux exemples analogues en L1 (voir Rogalski 2002).
* On se propose de déterminer toutes les suites numériques $u = (u_n)$ vérifiant les relations

$$u_{n+1} = au_n + b, \quad \text{ou} \quad u_{n+1} = au_n + b_n, \quad \text{ou même} \quad u_{n+1} = a_n u_n + b_n,$$

les suites $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ étant données.
La première chose est de reconnaître, dans le cadre des suites numériques, qu'il s'agit d'un *problème linéaire*, et donc de reformuler le problème sous la forme canonique de l'équation linéaire générale du cadre plus théorique de l'algèbre linéaire : $T(u) = v$ (ici, $u = (u_n)$, $v = (b_n)$, et T est l'application linéaire de l'espace vectoriel $\sum$ des suites dans lui-même définie par la relation $T(u) = (u_{n+1} - a_n u_n)_n$). On a ainsi changé de "niveau de conceptualisation" par "formalisation".
La théorie dit alors qu'il faut résoudre l'équation "sans second membre" : $u_{n+1} - a_n u_n = 0$, ce qui donne tout de suite $u_n = C\prod_{0\leq p\leq n-1} a_p$, où C est une constante arbitraire (le noyau de T est de dimension 1). *Il faut alors trouver une solution particulière, et le problème est de savoir comment.*

La théorie générale de l'équation linéaire contient d'autres cadres, par exemple celui des équations différentielles linéaires, où on peut aller chercher une idée ou une analogie qu'on pourra peut-être importer dans le cadre des suites récurrentes linéaires. Et on ne peut pas ne pas penser à la méthode de variation des constantes… et cela marche ! On "fait varier" la constante C de la solution de l'équation homogène (un élément quelconque du noyau de T), en posant $u_n = w_n\prod_{0\leq p\leq n-1} a_p$. La nouvelle suite inconnue vérifie $w_{n+1} - w_n = b_n(\prod_{0\leq p\leq n} a_p)^{-1}$, et le résultat s'en suit par sommation.



Un fonctionnement de l'analogie : changement de cadre par généralisation, réimportation d'une idée fructueuse (la variation de la constante) pour résou- un problème sur les suites numériques, comme pour les équations différen- tielles.

* Voici un autre exemple du même type, mais avec une équation fonctionnelle : trouver toutes les fonctions numériques sur IR qui vérifient l'équation

$$f(x+1) = 2f(x) + 2^x.$$

La même formalisation s'écrit $T(f) = v$, où $v(x) = 2^x$, T étant l'application linéaire dans l'espace vectoriel E des fonctions réelles d'une variable réelle, définie par

$$T : f \rightarrow \{x \rightarrow f(x+1) - 2f(x)\}.$$

Il faut résoudre l'équation sans second membre $f(x+1) = 2f(x)$, et on pense de suite comme solution évidente à la fonction $x \rightarrow 2^x$. Pour savoir s'il y en a d'autres, on compare la fonction inconnue générale à celle-ci en posant $f(x) = g(x).2^x$, et g vérifie $g(x+1) = g(x)$: elle est 1-périodique. On a donc trouvé toutes les solutions de l'équation homogène, elles s'écrivent $f(x) = g(x).2^x$, g étant une fonction 1-périodique *arbitraire*. Remarquons que dans cet exemple le noyau de T (c'est-à-dire le sous-espace $T^{-1}(0)$) est de dimension infinie, alors qu'il était de dimension 1 dans l'exemple précédent.
Il faut maintenant trouver une solution particulière. *L'analogie avec l'exemple précédent* consiste à faire varier « ce qui est arbitraire » dans la solution de l'équation homogène, c'est-à-dire g… mais qui est déjà variable ! On pose donc, *dans l'équation complète* (avec deuxième membre), $f(x) = g(x).2^x$, et on trouve que g doit vérifier l'équation $g(x+1) = g(x) + 1/2$. Comment ne pas penser à la solution particulière évidente $g(x) = x/2$? On peut donc prendre pour solution particulière de l'équation la fonction $x \rightarrow (x/2).2^x = x.2^{x-1}$. On obtient ainsi la solution complète $f(x) = g(x).2^x + x.2^{x-1}$, où g est une fonction 1-périodique arbitraire.

(6) On peut aussi introduire *une méthode générale de résolution* en s'appuyant sur la résolution d'exemples particuliers appartenant à des domaines différents. C'est ainsi que parmi les thèmes de mémoires donnés aux étudiants de première année à Lille dans les années 80 figurait le suivant (voir Rogalski 1990) :

« Une population, un circuit électrique, la ruine des joueurs…une même méthode mathématique ».

Le but du mémoire est de montrer que trois problèmes d'origines différentes, se modélisant en trois problèmes mathématiques distincts, peuvent se résoudre par une même méthode mathématique générale. […] L'évolution d'une population […] L'intensité I du courant dans un circuit RLC […] La probabilité de la ruine d'un joueur […]

On a ainsi trois classes de problèmes mathématiques (a, b et c y sont des constantes) :

1/ Trouver les suites vérifiant $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$;

2/ trouver les fonctions y deux fois dérivables vérifiant $ay'' + by' + cy = 0$;

3/ trouver les fonctions sur IR vérifiant $af(x+2h) + bf(x+h) + cf(x) = 0$. »

Le but était d'arriver à la méthode pour résoudre l'équation $(aT^2 + bT + cI_d)(u) = 0$, T étant un opérateur dans un espace vectoriel… Voir les rapports avec le point (5)…

(7) Un autre aspect de l'activité mathématique est celui de *la résolution de problèmes*, où certains auteurs comme Polya (1965) présentent le recours à l'analogie comme l'un des constituants de *l'heuristique*. Remarquons que ce recours demande à être très nuancé, comme l'a bien montré Schoenfeld (1980), et ne prend vraiment sa valeur qu'intégré à un enseignement de méthodes explicites dans un domaine précis des mathématiques. Nous n'approfondirons pas cette question ici, renvoyant aux deux auteurs cités et à Rogalski (1990).

III. Commentaires généraux sur l'analogie dans les sciences et les mathématiques et l'activité de catégorisation

Dans les deux exemples précédents du point (5) du chapitre III, on voit que l'analogie ne peut être « découverte » que grâce à *la connaissance d'un niveau de conceptualisation plus formel* qui va contenir le problème dont on part dans un certain cadre (les suites, les fonctions) et un problème *du même type* qu'on sait déjà résoudre, dans un autre cadre (les équations différentielles). Ici, « du même type » signifie pour ces problèmes que les deux ont la *même forme* dans le niveau plus formel où on peut les écrire tous deux.
Cette structure du fonctionnement de l'analogie en mathématiques est sans doute fréquente… et *on ne voit guère comment l'interpréter dans le paradigme de la catégorisation* de (Hofstadter et Sander 2013) ! Ce type de raisonnement analogique demande d'utiliser et de comparer plusieurs concepts situés dans des cadres différents et à des niveaux de conceptualisation différents.

Il peut sembler qu'il pourrait en être autrement dans un autre aspect du fonctionnement analogique, celui de *l'unification formelle de plusieurs théories en une théorie axiomatique plus générale* (le cas des notions FUG : formalisatrices, unificatrices, généralisatrices).

Regardons par exemple le cas des anneaux. Unifier ce qu'on a fait sur **Z**, ce qu'on a fait sur l'ensemble **P** des polynômes et ce qu'on a fait sur l'ensemble M_n des matrices carrées *n* x *n*, pour dégager la structure d'anneau, est-ce une activité de catégorisation ? *En fait, il s'agit de conceptualiser à un niveau d'abstraction supérieur, en mettant en évidence ou en construisant un invariant,* ici *la forme des calculs* qu'on fait dans ces trois exemples (rappelons-nous *l'effet Jourdain* du temps des « math. modernes » : « voici tel objet, et tel autre, etc. ; je vous dis : ce sont tous des groupes » ; *la catégorisation sans conceptualisation n'est que ruine de l'âme… mathématique !*).
Il ne s'agit donc pas de simple rassemblements ensemblistes, il y faut *une volonté de chercher un invariant conceptuel, supposé faire mieux comprendre la structure des cas particuliers qu'on compare*, et bien sûr c'est *l'analogie de la forme des calculs* qui fait surgir ce besoin - parce que les mathématiciens savent bien l'importance qu'il y a à *comprendre* le sens des calculs qu'ils font, même au prix d'une abstraction nouvelle et d'un formalisme nouveau (voir Rogalski 2012). C'est ainsi qu'on a essayé, dans l'exemple (2) du chapitre III., de faire surgir les axiomes des espaces vectoriels par analogie entre des formes de calculs sur des objets différents.
Il est douteux que la notion de catégorisation utilisée par certains psychologues, *sans aucun recours à l'idée d'invariant*, puisse raisonnablement rendre compte des procédés d'unifications formelles et abstraites, c'est-à-dire de conceptualisations, en mathématiques, et probablement dans les sciences.

Par exemple, dégager le *concept* d'énergie, ce n'est certainement pas simplement *catégoriser* les diverses énergies déjà vues (cinétique, potentielle, électrique, calorifique, etc.). *C'est la création d'un invariant conceptuel conservé dans certaines transformations*, en s'appuyant sur la notion de travail. Voir aussi l'article de cette publication sur le chapitre de Paty sur « les analogies mathématiques au sens de Poincaré et leur fonctions en physique » publié dans « *L'analogie dans la démarche scientifique* ».
De même en mathématiques, comment définir la notion de géométrie affine sans évoquer des *invariances* dans des transformations (par exemple celle des rapports d'aires dans des transformations affines), et il s'agit de bien plus qu'une catégorisation. On peut aussi penser à la constitution de l'idée de fonction à partir de tout un ensemble de situations dans des domaines et des registres variés (voir le § (3) du paragraphe B. II, et aussi Rogalski 2013).

Même dans certaines sciences humaines, cette idée de catégorisation semble impuissante à dégager tous les concepts qui peuvent être utiles dans une discipline. Par exemple, en ergonomie cognitive, la notion de gestion d'un environnement dynamique s'est certes obtenue sur la base de cas particuliers, mais c'est *la recherche d'invariants dans l'activité de gestion de l'action* qui permet de dire que l'analyse de la gestion d'un feux de forêt et celle de la gestion de la recherche d'un enfant disparu vont utiliser les mêmes concepts.

En résumé, il me semble que l'activité de conceptualisation en sciences ne peut se résumer à la catégorisation (même si elle peut parfois fonctionner efficacement à un niveau élémentaire chez l'enfant), il y faut souvent utiliser les notions d'invariants par transformations, de changements de cadres de fonctionnement et de registres de représentation, où l'analogie a un fonctionnement plus complexe que la simple catégorisation.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Artigue, Michèle et Deledicq, André, 1992 : *Quatre étapes dans l'histoire des nombres complexes*, brochure Didirem, Irem de Paris-Diderot.

Comte, Claude, 2008 : *Le pouvoir heuristique de l'analogie en physique*, dans le livre *L'analogie dans la démarche scientifique*, sous la direction de Marie-José Durand-Richard, l'Harmattan, Paris.

Douady, Régine, 1987 : Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7/2, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Durand-Richard, Marie-José (éd), 2008 : *L'analogie dans la démarche scientifique*, l'Harmattan, Paris.

Hitt, Fernando, 1998 *Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function*. Journal of Mathematical Behavior, 17 (1), 123-134.

Hitt, Fernando, 2010, *Les représentations fonctionnelles dans les processus d'apprentissage de la covariation comme prélude au concept de fonction dans un contexte d'apprentissage collaboratif, débat scientifique et d'auto – réflexion (ACODESA)*, Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques, 2010, IREM de Paris-Diderot.

Hofstadter, Douglas et Sander, Emmanuel, 2013 : *L'analogie, cœur de la pensée*, Paris, Odile Jacob.

Houzel, Christian, 2008 : *Analogie entre théorie des nombres et théorie des fonctions* , dans le livre *L'analogie dans la démarche scientifique*, sous la direction de Marie-José Durand-Richard, l'Harmattan, Paris.

Johsua, Samuel et Dupin, Jean-Jacques, 1993 : *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, PUF, Paris.

Knobloch, Eberhard, 1991 : *L'analogie et la pensée mathématique*, dans *Mathématiques et philosophie de l'antiquité à l'âge classique : hommage à Jules Vuillemin*, sous la direction de

Roshdi Rashed, Éditions du CNRS, Paris.

Kryzinska, Maria. et Schneider, Maggy, 2010 : *Émergence de modélisations fonctionnelles*, Les éditions de l'Université de Liège.

Legrand, Marc, 199O : Un changement de point de vue sur l'intégrale, dans *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année*, publication de la Commission Inter-IREM Université, diffusée par l'IREM de Paris-Diderot.

Polya, Georges, 1965 : *Comment poser et résoudre un problème*. Paris : Dunod.

Rogalski, Marc, 1990a : Un exemple de pratique des mémoires en DEUG A première année, dans *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année*, publication de la Commission Inter-IREM Université, diffusée par l'IREM de Paris-Diderot.

Rogalski, Marc, 1990b : Enseigner des méthodes en mathématiques, dans *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année*, publication de la Commission Inter-IREM Université, diffusée par l'IREM de Paris-Diderot.

Rogalski, Marc, 2001 : *Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie*, en collaboration avec N. Pouyanne et A. Robert, Ellipses, Paris.

Rogalski, Marc, 2002 : Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady, *Actes de la journée en hommage à Régine Douady* (juin 2001), Publication de l'IREM de Paris-Diderot.

Rogalski, Marc, 2012 : Approches épistémologique et didactique de l'activité de formalisation en mathématiques, *Actes de emf 2012*, http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012.

Rogalski, Marc, 2013 : Quelques points sur l'histoire et l'épistémologie des fonctions, pouvant éclairer certaines questions didactiques sur leur enseignement, *Intern. J. for Studies in Mathmatics Educ.* (JIEEM en brésilien), Saõ Paulo, juillet 2013, en ligne http://periodicos.uniban.br.

Schoenfeld, Alan, 1980 : Teaching problem-solving skills. *American Math. Monthly*, 794–805.

LES ANALOGIES MATHÉMATIQUES AU SENS DE POINCARÉ ET LEUR FONCTION EN PHYSIQUE, MICHEL PATY[64]

Anne-Amandine DECROIX

Université d'Artois - ESPE Lille Nord de France

aamandine.decrois@espe-lnf.fr

Jacques DOUAIRE

Equipe ERMEL (Institut Français de l'Éducation)

jacques.douaire@wanadoo.fr

1. PLAN DE L'ARTICLE

A- Présentation du texte

1. Introduction
2. Le premier stade de l'analogie en physique : les analogies mécaniques.
3. Le deuxième stade les analogies mathématiques.
4. Analogies de l'expérience.
5. Analogie, harmonie et réalité.

B- Commentaires

1. Compléments historiques
2. Remarques sur les qualifications de l'analogie chez Maxwell
3. Des fonctions de l'analogie en mathématiques et en physique

Le résumé de l'article de Paty :

L'idée d'analogie à laquelle Poincaré recourait fréquemment à propos des phénomènes et des lois de la physique n'était pas celle, superficielle, de l'apparence, des images ou des modèles. C'était, très précisément, « l'analogie mathématique », l'analogie dans la forme que donne l'analyse (mathématique), cette analyse qui permet à la physique d'appréhender « les analogies de l'expérience » dont parlait Kant, à partir desquelles nous pouvons établir les lois générales des phénomènes. Les conceptions de Poincaré sur la « physique mathématique » et sur la nature de la théorie physique sont étroitement liées au rôle fonctionnel de l'analogie, qui, à travers le travail sur la forme (mathématique), atteint la structure des phénomènes. En même temps, l'analyse et l'intuition apparaissent implicitement liées dans la pensée, en physique aussi bien qu'en mathématiques.

Mots-Clés: Analogie, Analyse, épistémologie, Intuition, Mathématiques, Modèles mécaniques, Philosophie des sciences, Physique, Kant, Kelvin, Maxwell, Poincaré.

[64] In *L'analogie dans la démarche scientifique. Perspective historique* (sous la direction de M.-J. Durand-Richard)

PRESENTATION DE L'ARTICLE

1. Introduction

Paty s'intéresse au sens de l'analogie telle que Poincaré l'invoque à propos de la physique. Poincaré emploi régulièrement ce mot dans ses écrits, avec des sens variés (l'inventaire n'est pas donné dans l'article de Paty). L'analogie, c'est-à-dire ce qui est similitude porteuse de sens entre des éléments, souvent par-delà les dissemblances matérielles, guide « le choix des faits » qui est susceptible, s'il est fécond, de révéler des parentés insoupçonnées entre d'autres faits. Le rôle de l'analogie c'est : « retrouver les similitudes cachées sous les divergences apparentes ». «Ce que le vrai physicien seul sait voir, c'est le lien qui unit plusieurs faits dont l'analogie est profonde mais cachée ».
Paty montre que la science pourrait être assimilé à une étude d'analogies permettant d'ordonner la complexité du monde d'en révéler l'«harmonie», entendons l'intelligibilité. Il précise cependant que l'analogie n'est pas un principe d'explication", mais plutôt "une constatation d'identité profonde de structure (dans les théories mathématiques ou dans les phénomènes physiques)". Il souligne également le fait que l'analogie au sens de Poincaré "n'était pas celle, superficielle, de l'apparence, des images ou des modèles". La seule analogie que Poincaré juge intéressante est : « l'analogie mathématique », qu'il défini comme "l'analogie dans la forme que donne l'analyse (mathématique)" aux résultats des théories physiques. C'est cette analogie mathématique qui permet à la physique d'établir les lois générales des phénomènes.
Dans cet article, Paty montre également les liens existant entre les conceptions de Poincaré sur la « physique mathématique » et sur la nature de la théorie physique et entre le rôle fonctionnel de l'analogie.

2. Le premier stade de l'analogie en physique : les analogies mécaniques.

Le philosophe Abel Rey, a étudié les conceptions des physiciens du XIXe siècle, et a classé leurs travaux selon trois écoles. Ce classement s'intéresse à la position de ces physiciens par rapport à la conception mécaniste, (représentation en termes concrets de mouvement de corps (d'atomes)). Il nomme la 1ère école « conceptuelle » ou « énergétique ». Cette école s'oppose au mécanisme. La 2ème école, qu'Abel Rey définie comme celle de Poincaré admettait l'utilité de « schèmes mécanistes » et le droit de s'en servir, au nom de "l'intuition empirique". La 3ème était l'école mécaniste (Maxwell)
Paty relate les commentaires d'Abel Rey sur ces trois école : " la première n'admet jamais, le seconde admet d'une façon accessoire , et la troisième admet toujours et d'une façon essentielle des éléments figuratifs, empruntés à la représentation du mouvement".
Pour Maxwell (3ème école) : "l'analogie n'est pas explicative, elle porte sur les relations à l'intérieur des phénomènes" : Maxwell appelait l'analogie "métaphore scientifique ", "la concevant comme transfert de mouvements et de concepts d'un phénomène à un autre".

Maxwell montre des analogies entre différents domaines de la physique (chaleur, électrostatique, électrocinétique et induction magnétique) et les relies par une même équation de continuité. La fonction qui vérifie cette équation, Des fonctions aussi différentes que la température, un potentiel sont vérifiées par cette équation. Cependant la température est un état physique des corps, tandis que des potentiels ne sont pas des états physiques car ils varient à une constante près. La portée de l'analogie est ici limitée par la signification physique.

Poincaré souligne dans le premier volume d'*Électricité et optique* la qualité de cette théorie électromagnétique de Maxwell qui unifie l'éther optique et l'éther électrique et magnétique. Poincaré indique que cette "*identité des propriétés essentielles* de l'éther [de] Fresnel (…) et du fluide que Maxwell suppose présider aux actions électromagnétiques", "est une confirmation de l'existence d'un fluide servant de véhicule à l'énergie". Paty met en avant le fait que le terme analogie n'est employé ni par Maxwell, ni par Poincaré, "l'*identité* étant plus forte". Paty considère qu'il s'agit "d'une forme particulière (ou limite) de l'analogie".

Pour Poincaré, le terme d'analogie en physique à un sens plus faible que pour Maxwell, le sens de l'« analogie figurative » par les modèles, notamment les modèles mécaniques. Abel Rey utilise le terme d'analogie « figurative » pour parler de l'analogie au sens de Poincaré, elle est indifférente à la réalité physique. Pour Poincaré, cette analogie "figurative" permet à la pensée de parvenir à des rapports d'analogie "plus profonds, structurels, mathématiques, qui expriment des propriétés physiques réelles". Paty souligne le fait que "ce passage correspond, dans l'histoire de la physique, à celui d'une mécanique des forces centrales (la mécanique newtonienne) à une physique des principes, qui est analytique : la *physique mathématique* dans le sens où il l'entend, lagrangienne et hamiltonienne".

Paty indique que pour Poincaré, l'induction électrique permet de fournir un exemple frappant d'explication sur le mode "analogique" des phénomènes de l'électrodynamique par rapport à la mécanique : elle est une sorte d'équivalent de l'inertie. Poincaré analyse d'ailleurs de cette manière d'autres concepts de la théorie électromagnétique en analogie avec ceux de la mécanique. Il précise que « Ces lois, en effet, sont indépendantes du mécanisme particulier auquel elles s'appliquent. Elles doivent se retrouver invariables à travers la diversité des apparences ».
La « conformité des lois de l'électrostatique et de l'électrodynamique avec les principes de la dynamique » est précisément ce qui les constitue en physique mathématique.
Selon Paty l'analyse mathématique montre que la concordance, esquissée dans ses grandes lignes, est vérifiée dans tous les détails. Il indique d'ailleurs que les "explications mécaniques provisoires et relatives auront en quelque sorte constitué des échafaudages (supports mécaniques…) permettant la formulation de lois spécifiques pour des phénomènes (ici, électromagnétiques) qui sortaient à première vue du domaine de la mécanique, sans les réduire à cette dernière".
La physique mathématique, chez Poincaré, va au-delà de la mécanique au sens courant. Pour Poincaré, la forme mathématique "est un outil puissant d'exploration en profondeur de la réalité physique, dépassant les cas ou les phénomènes particuliers". Pour y parvenir il faut cependant avoir maîtriser la formulation des principes et tenir compte des invariances. Paty prend ainsi l'exemple de l'électrodynamique des corps en mouvement qui devient, chez Poincaré, une physique mathématique au sens plein du terme lorsqu'elle réussit à incorporer le principe de relativité.

3. Le deuxième stade : les analogies mathématiques.

Paty dans cette partie souligne le fait que pour Poincaré, la physique mathématique bien que différente de la mécanique, reste tributaire de ses représentations. Paty suggère d'ailleurs que cela est probablement "un effet de sa conception des analogies mécaniques, qui préparent les analogies plus profondes".
Paty indique ensuite que seule les analogies mathématiques donnent la possibilité de généraliser, alors que les analogies figuratives des modèles mécaniques ne peuvent éventuellement "qu'illustrer" et donc "aider l'intuition". Paty précise d'ailleurs que pour

Poincaré, la fonction de l'analogie mathématique est de mener à la généralisation en mathématiques comme en physique.
Poincaré privilégie donc, pour sa « physique mathématique » (Définition de Paty : *physique théorique* tournée vers les phénomènes et les concepts, *physique mathématique* au sens propre ramenée au formalisme), « l'analogie mathématique », qui est définie comme "l'analogie dans la forme que donne l'analyse". L'analogie mathématique permet d'établir des relations de structure entre les différentes grandeurs physiques. Paty utilise le terme d'"analogies des phénomènes " et de l'expérience. Cette analogie mathématique permet également, grâce à la puissance de la forme mathématique, de généraliser.
Paty conclue cette partie en citant Poincaré : « le but de la physique mathématique », par-delà l'octroi d'outils de calcul, « est surtout de (…) faire connaître l'harmonie cachée des choses en les (…) faisant voir d'un nouveau biais. De toutes les parties de l'analyse, ce sont les plus élevées, ce sont les plus pures, pour ainsi dire, qui seront les plus fécondes entre les mains de ceux qui savent s'en servir »

4. Analogies de l'expérience.

Poincaré illustre, à travers l'exemple de la loi différentielle de la gravitation newtonienne, la capacité de l'analogie mathématique à étendre et à généraliser la loi physique. Cet exemple comprend à la fois :

- la loi de la gravitation qui exprime la force en fonction de l'inverse carré de la distance,
- la seconde loi générale du mouvement de Newton, qui exprime le changement de la quantité de mouvement en fonction de la force et permet, à partir de la relation causale entre deux points infiniment voisins de la trajectoire, de connaître tous les points de celle-ci.

Paty pose alors la question suivante : "Mais où se trouve ici, exactement, l'analogie ? "

Paty indique que l'analogie, pour Poincaré, "désigne une opération qui identifie en profondeur, par-delà ce qui est visible ou directement constatable, des traits structurels qui se rapportent aux phénomènes, et qui rapprochent les mouvements dus à la même attraction mutuelle de deux aussi bien que de plusieurs corps". Paty indique que le l'analogie pour Poincaré fait penser : au sens philosophique des « analogies de l'expérience » tel qu'on le trouve développé par Emmanuel Kant dans la *Critique de la raison pure*.
Paty considère que, pour Poincaré, « les mathématiques, essentiellement par l'Analyse, ont pour la physique la fonction de procurer une réalisation effective (ou une application ?) de ces lois transcendantales que sont les analogies de l'expérience au sens kantien. Lorsqu'il invoque les analogies mathématiques, Poincaré se situe, en effet, pour une part sur le plan des conditions transcendantales, et pour une autre sur celui de la connaissance des grandeurs " quantitatives et constitutives" - selon la terminologie kantienne - des phénomènes ». Pour Poincaré "les analogies mathématiques, tout en étant plus précises, particulières et constitutives que les analogies de l'expérience de Kant, auraient alors une fonction assez voisine dans l'entendement".

5. Analogie, harmonie et réalité

Paty commence par citer Poincaré dans l'introduction à *La valeur de la science :* « L'harmonie interne du monde », révélée par « les analogies intimes des choses », est « la seule véritable réalité objective ». Poincaré exprime également l'idée que ce que l'on appelle « la réalité objective (…) est, en dernière analyse, ce qui est commun à plusieurs êtres pensants, et

pourrait être commun à tous », et cela ne peut être que « l'harmonie exprimée par des lois mathématiques ». Paty voie dans cette citation le fondement de la conception poincaréenne de l'analogie. Pour Paty, Analogie, harmonie et mathématiques s'appellent en effet naturellement dans la pensée de Poincaré, et Paty souligne que Poincaré n'est pas indifférent que soit confiée à l'analogie (dans le sens profond, celui de l'analogie mathématique) la fonction d'exprimer l'harmonie de la réalité qui se donne dans les lois mathématiques (= les lois physiques exprimées mathématiquement).
Pour Poincaré le rôle de la physique mathématique, est de montrer au physicien « l'harmonie cachée des choses » en les lui montrant sous un nouveau jour, grâce au recours aux analogies mathématiques. Paty le reformule en disant que "cette harmonie, c'est aussi bien l'unité du monde, ou du moins de parties de celui-ci, pour laquelle la physique dispose de l'intuition que lui donnent les liens d'unité qu'expriment les mathématiques, cette science des relations".

B- COMMENTAIRES

Le texte de M.Paty comporte plusieurs objets d'étude:

- *Les types d'analogies formulées explicitement par Maxwell et les fonctions que celui-ci leur attribue.*
- *Le regard de Poincaré sur les analogies mathématiques utilisées par Maxwell et plus largement sur le rôle des analogies mathématiques dans l'évolution de la physique.*
- *Une mise en relation des catégorisations de Maxwell et de Poincaré avec des approches philosophiques.*

Nous présenterons en premier quelques éléments complémentaires sur le rôle de l'analogie dans la physique au XIXème siècle. Puis nous reviendrons sur les différents termes utilisés et leur évolution. Enfin nous ébaucherons quelques éléments de comparaisons des analogies mathématiques utilisées en mathématiques et en physique.

1. Compléments historiques sur le rapport de l'analogie aux théories physiques du XIX ème

Pour ce bref rappel de quelques éléments du contexte historique du XIXème siècle, nous nous appuierons sur la communication de P .G. Hamamdjian au séminaire interdisciplinaire du Collège de France sur l'analogie[65], sur l'ouvrage de Poincaré « la Valeur de la Science » et sur la préface Jules Vuillemin à la réédition de cet ouvrage, à laquelle Paty renvoie dans son article. Pour le recours aux analogies entre les domaines de la physique nous pouvons distinguer plusieurs dominantes :

1. *La référence au modèle de la mécanique newtonienne, où la scientificité des autres branches de la physique peuvent jugée à l'aune de la compatibilité avec celle-ci (cf. Abel Rey déjà cité).*
2. *Un recours à l'analyse mathématique : citons Poincaré « Une même équation, celle de Laplace se rencontre dans la théorie de l'attraction newtonienne, dans celle du mouvement des liquides, dans celle du potentiel électrique, dans celle du magnétisme, dans celle de la propagation de la chaleur et dans bien d'autres encore… Ainsi les analogies mathématiques, non seulement peuvent nous faire pressentir des analogies physiques, mais encore ne cessent pas d'être utiles, quand ces dernières font défaut ».[66]*

Comme l'exprime Hamamdjian : « cette mathématisation profonde de la mécanique par

[65] P .G. Hamamdjian (1981) « Les concepts de métaphore scientifique et de système de métaphores scientifiques de Maxwell » *Séminaire interdisciplinaire du Collège de France* (ed. Maloire)
[66] Poincaré « La Valeur de la Science » (édition de 1909) p 146

Lagrange et par ses successeurs (Hamilton, Jacobi, etc) a rendu les méthodes puissantes de la mécanique analytique inaccessibles, tant aux mécaniciens expérimentaux qu'aux physiciens et aux chimistes pendant près de 80 ans… qui en avaient le plus grand besoin dans les années 1842-1847, avec la découverte et la redécouverte des principes de l'Énergétique »[67]. Hamamdjian précise que Maxwell avait déjà rappelé que Lagrange se proposait de ramener la dynamique à ne dépendre que du calcul : « ils se sont efforcés de bannir toute autre idée que celle de quantité, non seulement se dispensant des représentations figurées, mais encore éliminant les idées de vitesse, de quantité de mouvement et d'énergie, remplacées une fois pour toutes par des symboles dans les équations primitives ».[68]

3. *L'importation de principes (notamment thermodynamique) : conservation de l'énergie, équivalence travail chaleur dans d'autres domaines de la physique.*

Pour Maxwell «… Les concepts et les principes de la mécanique élémentaire qui ont été énoncés par Newton… suffisent à résoudre tous les problèmes dans lesquels les mouvements sont effectivement observables … Mais, poursuit Maxwell, quand nous avons des raisons de penser que les phénomènes qui tombent sous notre observation ne constituent qu'une très petite partie de ce qui a réellement lieu dans ce système (ces concepts ne suffisent plus), la question est … quelle est la spécification la plus générale d'un système matériel consistante avec la condition que les mouvements du système que nous pouvons observer sont ce que nous les trouvons être ? » [69]. Selon Jules Vuillemin, Poincaré oppose d'abord à la physique réaliste des forces centrales la physique plus phénoméniste des principes. Le passage de la première à la seconde représente la première crise de la physique mathématique.

Du point de vue des analogies entre théories physiques et mathématiques, nous rencontrons donc plusieurs types de relations :

1. *entre une théorie physique modèle et une théorie physique en construction, qui peut s'appliquer, par exemple, au rapport entre la mécanique et d'autres domaines*
2. *directement entre deux théories physiques de même niveau de développement*
    a. *Hamamdjian cite la définition que Maxwell donnait de l'analogie physique : « En vue d'obtenir des idées physiques sans adopter une théorie physique (théorie qui lui paraissait prématurée jusqu'en 1864), nous devons nous familiariser avec l'existence des analogies physiques. Par analogie physique, j'entends cette similitude partielle entre les lois d'une science et celle d'une autre qui permet à chacune d'elle d'illustrer l'autre ».*[70]
    b. *entre deux théories physiques via des mêmes principes physiques.*
3. *entre deux théories physiques via leur relation à un même modèle mathématique : ce sont, précisément, les « analogies mathématiques » entendues dans le sens strict : la forme d'une relation mathématique suggère les relations de grandeur physique et les phénomènes correspondant.*[71]

2. Remarques sur les qualifications de l'analogie chez Maxwell

Un premier constat porte sur la multiplicité des termes employés par Maxwell et cités par Paty: analogie, métaphore, « analogie métaphorique », « métaphore scientifique », « métaphore parfaitement analogue », « analogie au sens faible » appelée aussi « analogie figurative »… et aussi les « métaphores audacieuses » citées par Hamamdjian ainsi que des

[67] Hamamdjian p 186
[68] Hamamdjian p 186
[69] Hamamdjian p 187
[70] Hamamdjian p 194-195
[71] Paty p 173

synonymes : similitudes, pour nommer des relations analogiques, et dans le texte de Paty : « analogie véritable ». Il est difficile d'en faire un relevé exhaustif, comme le souligne Paty.
Ces termes sont parfois associés et justifiés par une conception de la science exprimée à des expressions, elles-mêmes associées à des analogies: « profonde mais cachée », « analogie des phénomènes », « sens intime des analogies mathématiques » pour Poincaré, « identité profonde de structure », « parfait parallélisme », « analogie qui introduisent de l'ordre dans la complexité du monde » qui en révèlent « l'harmonie », « exploration en profondeur de la réalité ».
De plus, la qualification même des analogies par Maxwell a pu évoluer, notamment en relation avec les changements d'approche de la question de l'éther. En 1865, comme le rappelle Hamamdjian, Maxwell croyait avoir fait un système de métaphores électro/dynamique parfaitement analogues, comme l'indique son mémoire de la même année une *théorie dynamique* de l'électromagnétisme. « Il paraît naturel de supposer que tous les effets directs de n'importe quelle cause qui a elle-*même un caractère longitudinal doivent être eux mêmes longitudinaux, et que les effets directs d'un* agent rotatoire doivent être eux-mêmes rotatoires. Un mouvement de translation autour d'un axe ne peut produire une rotation autour de cet axe à moins qu'il ne se rencontre avec quelque mécanisme spécial, comme celui d'une vis… fonction que Maxwell attribue à l'éther ».
Poincaré a parfaitement défini la nature de ce que Maxwell pensait avoir réalisé en 1865 : « Maxwell ne donne pas une expression mécanique de l'électricité et du magnétisme ; il se borne à démontrer que cette explication est possible… Pour démontrer, ajoutait Poincaré, la possibilité d'une explication mécanique de l'électricité, nous n'avons pas à nous préoccuper de trouver cette explication elle-même, il nous suffit de trouver l'expression des deux fonctions (qui représentent l'énergie cinétique et l'énergie potentielle), qui sont les deux parties de l'‘énergie, de former avec ces deux fonctions les équations de Lagrange et de comparer ensuite ces équations avec les résultats *expérimentaux* [72] ».

C'est en 1870 que Maxwell a proposé les concepts de Métaphore Scientifique et de Système de Métaphore Scientifiques. « La figure de style ou de pensée par laquelle nous transformons le langage et les idées d'une science familière à une science à laquelle nous sommes moins accoutumés peut être appelée Métaphore Scientifique. La caractéristique d'un vrai Système Scientifique de Métaphores est que chaque terme dans son sens métaphorique retient toutes les relations formelles avec les autres termes du système qu'il avait dans son sens original. La méthode est alors vraiment scientifique - c'est à dire, (qu'elle est) non seulement un produit légitime de la science, mais qu'elle est capable d'engendrer de la science à son tour … »[73].
Maxwell qualifiera de « métaphores audacieuses » certaines de ces analogies antérieures.

3. Les fonctions de l'analogie en mathématique et en physique

Dans le contexte de cette publication pluridisciplinaire, il peut sembler utile de comparer les fonctions des analogies mathématiques en physique, telles qu'elles sont présentées dans le texte de Paty, et en mathématiques, telles qu'elles sont caractérisées par certains des auteurs cités : Poincaré, Lichnerowicz[74], ou dans d'autres articles de cette publication.
Nous pourrions envisage plusieurs fonctions, historiques, de l'analogie en sciences :

1. *Une fonction heuristique que souligne Lichnerowicz : « C'est le plus souvent à partir d'analogies aussi conscientes que possible que l'esprit du savant procède : c'est elles*

[72] Hamamdjian p 192
[73] Hamamdjian p 184
[74] Introduction au tome 2 *Analogie et connaissance* Séminaire interdisciplinaire du Collège de France (1981)

qu'il met en œuvre dans son monologue intérieur ou dans le discours qui règne au sein d'une équipe de recherche. A côté du discours de communication, l'activité scientifique fait usage d'un discours d'invention, de création, d'un discours que l'on parle, mais que l'on écrit fort peu avec toutes sortes de réserves.

2. *Une fonction de communication au sein de la communauté scientifique. Ainsi que le précise Lichnerowicz[75] : « Le discours de communication, qui se veut nécessaire et contraignant pour l'autre, [est] capable quand il s'agit de Mathématique d'interdire par sa forme le refus de son contenu».*
3. *Une fonction de preuve. Cet aspect est développé dans cet article de Paty, sous l'étude de la justification du recours à une autre théorie. Mais si un ou deux siècles auparavant, des mathématiciens utilisaient des analogies pour s'autoriser à faire des calculs sur des objets non définis, ou pour justifier un raisonnement, ils précisaient qu'il est aussi nécessaire de disposer d'une démonstration pour prouver[76].*
4. *Une fonction de généralisation. Cet aspect est souligné tant pour les sciences physiques que pour les mathématiques. Paty précise : « Dans ce sens l'analogie n'a qu'un rôle méta-théorique, qualifiant et généralisant une propriété des objets du raisonnement révélée par celui-ci, plutôt que désignant un aspect de dernier. En d'autres termes l'analogie ne concerne pas tant la méthode que la signification. ... L'analogie n'est pas* un principe d'explication, *mais une constatation* d'identité *profonde* de structure *(dans les théories mathématiques ou dans les phénomènes physiques) ». Toutefois la restructuration des champs scientifique en physique est elle analogue à celle entrainée en mathématiques par l'axiomatisation, la mise en évidence des structures communes, et plus largement l'évolution des démonstration [77] ?*

[75] Lichnerowicz op. cité
[76] cf les articles sur les travaux de Knobloch et Houzel dans cette publication
[77] cf. Article M.Rogalski sur formalisation dans cette publication

SIX SYNTHÈSES OU EXPÉRIMENTATIONS EN DIDACTIQUE

LE GROUPE « MÉTAPHORE » DE CERME

Bernard PARZYSZ

Université d'Orléans

parzysz.bernard@wanadoo.fr

Ce groupe a été créé suite à une demande de plusieurs membres, à l'occasion du deuxième colloque CERME en 2001, et j'ai été sollicité pour l'animer. Ses objectifs étaient de faire se rencontrer les chercheurs travaillant sur la place et le rôle des images dans l'enseignement de la mathématique, et en particulier sur l'utilisation des métaphores dans les stratégies d'enseignement destinées à favoriser la compréhension des concepts. Le groupe a fonctionné durant quatre sessions de CERME :

CERME 2 (2001) à Márianské Lázně (République tchèque). Co-animatrice : N. Gorgorió.

CERME 3 (2003) à Bellaria (Italie). Co-animateurs : C. Bergsten, J. M. Matos, A. Pesci.

CERME 4 (2005) à Sant Feliú de Guixols (Espagne). Co-animateurs: C. Bergsten, A. Pesci.

CERME 5 (2007) à Larnaca (Chypre). Co-animateurs : G. Kadunz, E. Robotti, L. Rogers.

À son titre initial, « Metaphors and images in the learning and understanding of mathematics », a été ajoutée dès la seconde édition, toujours en raison de la demande, la précision « this includes embodied cognition ».

À l'époque, n'ayant pas particulièrement travaillé ce domaine, cette circonstance fortuite m'a fourni l'occasion de commencer à l'explorer. Ayant auparavant travaillé sur les « figures » de géométrie élémentaire je connaissais déjà les travaux de Duval et ceux de Fischbein relatifs à ce thème, un peu ceux de Hofstadter − grâce à Gödel, Escher, Bach −, mais pas ceux de Lakoff, Johnson et Núñez, que j'ai découverts à cette occasion.

1. LA MÉTAPHORE : OÙ ? QUOI ? COMMENT ? POURQUOI ?

Une « niche écologique » extrêmement favorable à la métaphore est la sagesse populaire, et plus particulièrement les proverbes et dictons. Par exemple :

Chat échaudé craint l'eau froide

Qui veut noyer son chien l'accuse de la rage

Une hirondelle ne fait pas le printemps

Qui veut voyager loin ménage sa monture

La caque sent toujours le hareng

Après la pluie vient le beau temps

C'est en forgeant qu'on devient forgeron

Tant va la cruche à l'eau qu'enfin elle se casse

Qui trop embrasse mal étreint

Tous les chemins mènent à Rome

Etc. Etc.

Mais la métaphore est également très présente dans le langage courant. Ainsi :

Bras de fauteuil	Gravir les échelons
Bras de mer	Route en lacet
Pied de table	Baguette bien cuite
Tête de lit	Coup de foudre
Patte d'oie	Ruse de Sioux
Aile d'avion	Epée de Damoclès
Taille de guêpe	Gel des salaires
Tenir la jambe	Racine du mal
Œil du cyclone	Œuf de Colomb…
Se casser les dents	Poser un lapin
Marcher sur la tête	Etc. Etc.

La littérature, et surtout la poésie, en font grand usage :

Cette faucille d'or dans le champ des étoiles (Hugo, Booz endormi)

Les sanglots longs des violons de l'automne… (Verlaine, Chanson d'automne)

Ma jeunesse ne fut qu'un ténébreux orage (Baudelaire, L'ennemi)

Selon le Petit Larousse, une métaphore est un « procédé par lequel on transporte la signification propre d'un mot à une autre signification qui ne lui convient qu'en vertu d'une analogie, d'une comparaison sous-entendue. » Ainsi, dans le cas du vers de Hugo, l'analogie se situe à la fois dans la forme (croissant → faucille) et la couleur (jaune → or) de la lune dans le ciel nocturne.

La métaphore et la comparaison sont souvent regroupées sous le terme commun de « figures de la ressemblance ». Et, selon le même dictionnaire, la comparaison est une « figure de style établissant de manière explicite une relation de similitude entre deux objets (le comparant et le comparé). » Exemple :

Le poète est semblable au prince des nuées,

Qui hante la tempête et se rit de l'archer (Baudelaire, l'Albatros)

La belle Ophélia flotte comme un grand lys. (Rimbaud, Ophélie)

Ce qui différencie la métaphore de la comparaison est donc l'absence de référence au sens originel. Dans la métaphore, le comparé A est remplacé par le comparant B, tel que :

- A et B ont un point commun

- aucun signe lexical ne signale la comparaison.

Comme dans la comparaison, on a ici un champ sémantique source (celui du comparant) et un champ sémantique cible (celui du comparé), mais ici seule la source est présente, et c'est au destinataire à identifier la cible. Il y a donc nécessité d'une connivence entre l'émetteur et le destinataire.

Qu'est-ce qui permet d'établir cette connivence ?

> « La métaphore consiste à transposer une relation existante dans un domaine conceptuel dans un autre domaine, en appliquant certaines qualités choisies de l'un sur l'autre. Cette structuration ne s'effectue pas au hasard : elle est généralement due, non seulement à l'expérience physique, mais aussi aux expériences culturelles et sociales. » ([Moriceau 2003]

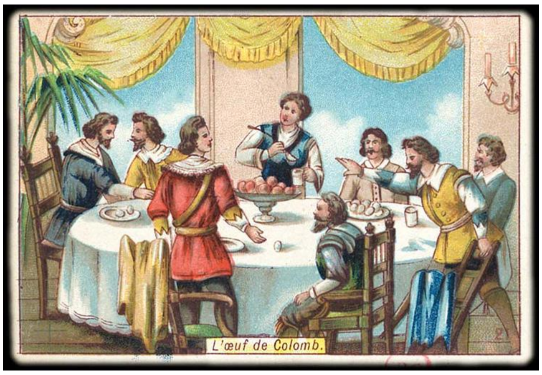
Dans Gödel, Escher, Bach, Hofstadter distingue trois composants dans un message [Hofstadter 1979] :

- le message interne, qui est celui voulu par son créateur,
- le message cadre, qui dit « je suis un message, décode-moi si tu peux »,
- le message externe, qui indique comment décoder le message interne.

Dans le cas de la métaphore :

- le message externe est celui qui contient le comparant B,
- le message interne est relatif au comparé A,
- le message cadre tient au seul fait qu'on ne peut pas prendre B au pied de la lettre[78].

Exemple : La solution de ce problème ? Mais c'est l'œuf de Colomb !



(vignette du 19e siècle)

> Lors d'un repas, des courtisans espagnols dirent à Christophe Colomb, de retour des Amériques, que sa découverte n'avait rien d'extraordinaire et que n'importe qui aurait pu la faire. Le navigateur leur demanda alors de faire tenir un œuf debout sur une table, ce qu'ils ne purent réaliser. Colomb, à son tour, prit l'œuf, en écrasa l'extrémité sur la table. Et l'œuf tint debout.

Ici, le comparé A est la solution du problème. Le message externe est l'expression

[78] Autre métaphore !

« œuf de Colomb », qui constitue le comparant B. Quant au message cadre, c'est le fait que l'auteur applique cette expression à un problème qui n'a rien à voir, ni avec un œuf, ni avec Christophe Colomb, et qu'elle est donc à prendre comme une métaphore. Pour la décoder il faut, soit connaître l'anecdote de référence, soit à défaut savoir qu'elle signifie qu'une chose qui paraît compliquée peut en fait être d'une extrême simplicité. Le message interne est donc : même si la solution de ce problème semble compliquée, elle est extrêmement simple.

En reprenant la classification de Hofstadter :

- comprendre le message cadre, c'est identifier le besoin d'un mécanisme de décodage (c'est-à-dire repérer le caractère métaphorique du message externe) ;
- comprendre le message externe, c'est construire le mécanisme permettant le décodage correct du message interne (c'est-à-dire repérer les deux domaines en jeu) ;
- comprendre le message interne, c'est extraire du message le sens voulu par l'émetteur (c'est-à-dire établir la correspondance entre les deux domaines).

Pourquoi utiliser la métaphore ? Le recours à une métaphore, parce qu'elle établit une connivence entre l'émetteur et le récepteur, permet de communiquer indirectement des idées complexes :

> « La métaphore exprime (…) l'énigmatique : ce qu'elle dit ne peut être pris au pied de la lettre. Elle est une façon de dire le problématique au sein du champ propositionnel. Elle se situe à mi-chemin entre l'ancien, qui n'a plus à être énoncé puisque connu, et le nouveau, qui est irréductible aux données dont on dispose, puisque nouveau. Bref, la métaphore négocie l'intelligibilité des situations et des émotions nouvelles par rapport aux anciennes, dont elle modifie le sens tout en le préservant : et c'est cette dualité que l'on retrouve dans les expressions métaphoriques. » [Meyer 2008]

2. EN QUOI LES MATHÉMATIQUES RELÈVENT-ELLES DE LA MÉTAPHORE ?

Pour Lakoff & Núñez, les concepts mathématiques reposent sur la permanence de nos expériences quotidiennement vécues :

> « Les idées mathématiques de base présentent une impressionnante stabilité tout au long de centaines, et parfois de milliers, d'années. Pour se produire, cela nécessite, d'une part, un ensemble commun de structures neurales et corporelles avec lesquelles construire les concepts mathématiques et, d'autre part, que cette construction conceptuelle recoure aux plus banales des expériences quotidiennes telles que le mouvement, les relations spatiales, la manipulation d'objets, l'espace et le temps.[79] » (Nuñez, Edwards & Matos 1999, p. 61)

C'est ce qu'ils appellent la cognition incarnée (embodied cognition). Selon eux, l'ensemble de nos comportements repose sur des constantes, les schèmes d'image (image schemata) :

> « Il s'agit de modèles [patterns] qui commandent nos actions, nos perceptions et nos conceptions. Ces modèles naissent comme des structures signifiantes pour nous, principalement à travers nos expériences corporelles de déplacement dans l'espace, de manipulation d'objets et d'interactions perceptives.[3] » (ibid. p. 51)

[79] Dans cet article, les traductions de l'anglais me sont imputables.

(La dimension sociale – dont l'importance avait mise en évidence par Vygotsky (Vygotsky 1934) − apparaît ici secondaire par rapport à l'aspect individuel. Cependant, depuis une dizaine d'années, un certain nombre de recherches ont pris en compte cette dimension.)

Ce qui fait l'intérêt du modèle de Lakoff & Núñez, c'est que nous avons la faculté de transposer les schèmes d'image d'un domaine conceptuel à un autre, d'où la notion de métaphore conceptuelle :

> « Il s'agit de cartographies [mappings] conservant la structure inférentielle d'un domaine source lorsqu'on le projette sur un domaine cible. Ainsi, le domaine cible est compris, souvent inconsciemment, en terme de relations relatives au domaine source. (…) Les 'projections' ou 'correspondances' en jeu dans les métaphores conceptuelles ne sont pas arbitraires; elles peuvent être étudiées empiriquement et formulées de façon précise. Elles ne sont pas arbitraires, parce qu'elles sont motivées par notre expérience quotidienne, en particulier par l'expérience corporelle, qui est biologiquement contrainte. » [3] » (ibid. p. 52)

Les auteurs font remarquer que ces métaphores ne se cantonnent pas au niveau linguistique, mais mettent en jeu des concepts, d'où le qualificatif de « conceptuel » (Mais n'est-ce pas également le cas des métaphores ordinaires, dans la mesure où tout message est véhicule en principe des concepts ?).

Elles se situent le plus souvent au niveau inconscient et mettent en jeu des situations prototypiques ; elles passent donc généralement inaperçues. Elles s'élaborent dans nos interactions sociales, leur source se situe dans notre nature biologique :

> « Le sens est, de maintes façons, socialement construit, mais il n'est pas arbitraire. Il est soumis à des contraintes qui proviennent de processus biologiques incarnés prenant place dans l'interaction constante entre des signifiants mutuellement construits et le média dans lequel ils existent. »
>
> (ibid. p. 53)

En s'appuyant sur le concret, les métaphores conceptuelles nous permettent d'accéder aux abstractions, et en particulier d'aborder les concepts mathématiques :

> « Les métaphores conceptuelles font intervenir un concept plus abstrait comme but et un concept plus concret ou physique comme source. (…) Il en résulte que les concepts abstraits sont compris en termes de processus concrets prototypiques. » (Lakoff & Johnson 1980)
>
> « Pour enseigner les mathématiques, on doit enseigner la différence entre les concepts quotidiens et les concepts techniques, en explicitant la nature métaphorique des concepts techniques. » (Lakoff & Núñez 2000)

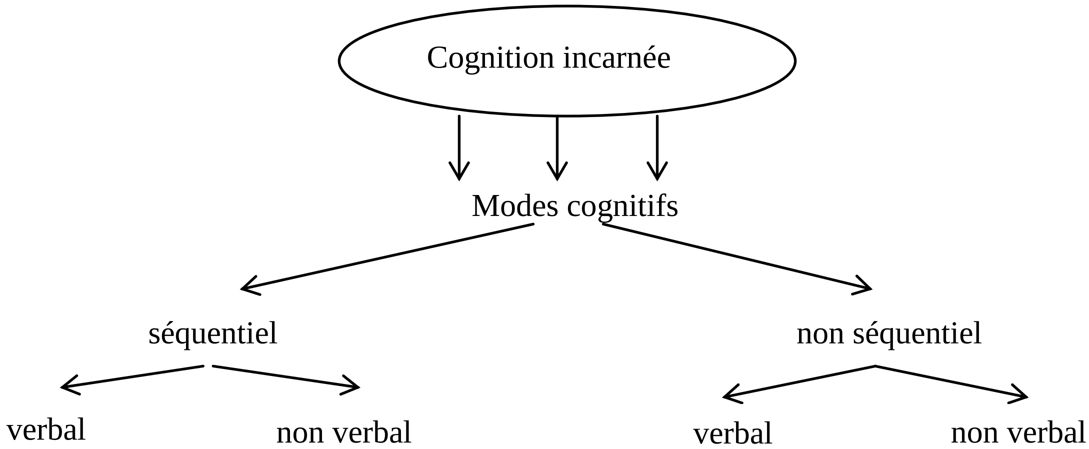
Ceci pose en filigrane la question de la nature des concepts mathématiques. Fischbein a introduit en géométrie la notion de « concept figural », en considérant que les concepts géométriques réalisent une symbiose entre concept et figure, étant donné qu'il s'agit d'entités abstraites qui possèdent également des propriétés figurales :

> « Dans cette symbiose entre concept et figure, comme elle se révèle dans les notions géométriques, c'est la composante imagée qui stimule de nouvelles directions de pensée, mais il y a des contraintes logiques et conceptuelles qui

contrôlent la rigueur formelle du processus »[80] (Fischbein 1993, p. 139).

Peut-on alors considérer qu'un objet géométrique constitue une métaphore du dessin ou de la maquette qui le représente ? (voir plus loin)

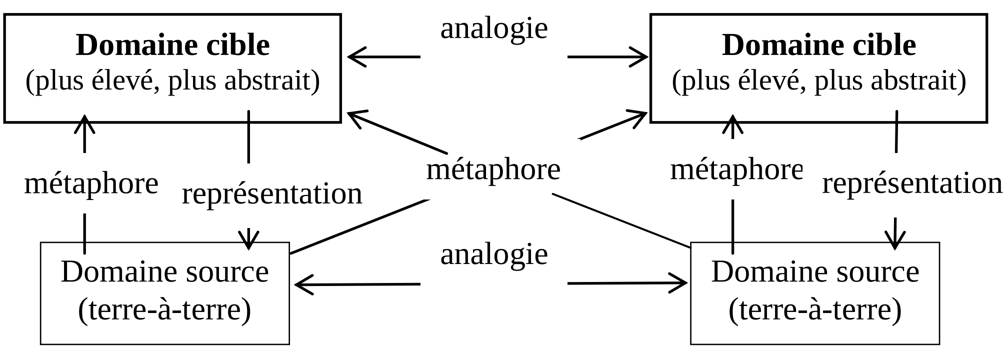
Par ailleurs, la cognition apparaît selon différents modes, qui peuvent être présentés sous la forme d'oppositions : verbal vs non verbal, séquentiel vs non séquentiel[81], etc.



(Diagramme présenté dans le texte de présentation des travaux du groupe à CERME 5)

Si la cognition incarnée se réfère à la notion de métaphore conceptuelle, d'autres cadres théoriques qui sont intervenus dans le groupe, comme celui de Duval, s'intéressent aux représentations sémiotiques. D'où la question : quel rapport y a-t-il entre ces deux notions ? J. Soto-Andrade a tenté de le préciser à CERME 5, à l'aide d'un schéma :

Aujourd'hui le terme "métaphore" est souvent pris dans un sens large, comme synonyme de "représentation", "analogie", "modèle", "image", etc. (...) Nous voulons néanmoins être plus précis ; le diagramme qui suit peut être utile pour clarifier notre point de vue sur la différence entre métaphores, représentations et analogies.



[80] " In this symbiosis between concept and figure, as it is revealed in geometrical entities, it is the image component which stimulates new directions of thought, but there are the logical, conceptual constraints which control the formal rigour of the process."

[81] Alexander Luria (Luria 1973) a distingué et décrit deux processus différents de traitement de l'information : un processus séquentiel (par ex. pour une information auditive) et un processus simultané (par ex. pour un dessin).

Autrement dit, pour lui la métaphore comme la représentation relient un domaine source et un domaine cible, mais en sens inverse :

- la métaphore va du domaine source vers le domaine cible (ici, mathématique),
- la représentation va du domaine cible vers le domaine source (ici, le système de représentation).

3. Les travaux du groupe de CERME

À l'exception des probabilités, à peu près tous les domaines des mathématiques ont été abordés au cours des quatre sessions du groupe, totalisant quelque 35 contributions[82] (voir liste en annexe). Les cadres théoriques de référence ont essentiellement été, outre celui de Lakoff & Núñez (embodied cognition), ceux de Duval (registre sémiotique) et de Fischbein (figural concept).

Un certain nombre de questions ont été soulevées, notamment :

- Comment les modèles utilisés par les enseignants aident-ils ou dérangent-ils les élèves ?
- Quelles métaphores et les images devraient être mises en avant par les enseignants ?
- L'imitation active des modèles du professeur est-elle utile pour la construction, par les élèves, de leurs propres images et métaphores ?
- Même si les métaphores de la vie courante peuvent être très riches, l'intuition liée à la vie quotidienne est-elle toujours utile pour la pensée formelle que nous cherchons à promouvoir ? Ou peut-elle être un obstacle ?
- Comment les enseignants peuvent-ils recueillir et rassembler les modes de pensée initiaux de leurs élèves ?
- Comment les métaphores et les représentations contribuent-elles à l'apprentissage et à la communication des concepts mathématiques ?
- Comment la façon de les utiliser influence-t-elle la construction des concepts mathématiques ?
- Comment pouvons-nous faciliter le passage des élèves d'un type de représentation à un autre ?
- Comment l'enseignement peut-il amener un changement dans les métaphores des élèves ?
- Qu'arrive-t-il lorsqu'il y a discordance entre les métaphores des enseignants et celles des élèves ?

[82] Les actes de ces colloques sont disponibles à l'adresse suivante : www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/index.php?slab=proceedings

Une grande variété de sujets, résumés dans le tableau suivant, a été abordée :

Sujet	CERME 2	CERME 3	CERME 4	CERME 5
Arithmétique		X	X	X
Calcul mental		X		
Algèbre	X	X		
Algèbre linéaire	X			
Analyse	X	X	X	
Géométrie plane	X	X	X	X
Géométrie de l'espace			X	
Trigonométrie				X
Statistiques				X
Relativité				X
Résolution de problèmes				X
Écriture mathématique				X
Modélisation			X	X
Modes cognitifs				X
Cognition incarnée		X		
Registres sémiotiques	X			
Métaphore conceptuelle			X	X
Gestuelle			X	

Des **précisions** ont été apportées sur la notion de métaphore :

- (Bolite, CERME 4) *Le domaine source des professeurs est les mathématiques et la cible est la vie quotidienne, parce qu'ils essaient de penser un espace commun de communication avec les élèves. Cependant, le domaine de la vie quotidienne n'est pas toujours le même pour les deux, car le professeur n'utilise que la partie du concept de la vie quotidienne qui est appliquée sur le domaine mathématique. Les élèves ont souvent un domaine de la vie quotidienne plus vaste que celui qui est appliqué et qui n'est pas dans le même domaine mathématique que celui du professeur.*
- (Ferrara, CERME 3) *La similarité a semblé être un facteur important dans les choix des enfants. La familiarité avec l'objet physique semble être un autre facteur des choix des enfants.*
- (Pesci, CERME 4) *Chaque métaphore communique à deux niveaux : un niveau superficiel de contenu discursif et un niveau profond de significations implicites qui sont évoquées. Ce dernier niveau est donné par le langage symbolique, qui est perçu par l'inconscient et engendre des interprétations strictement personnelles, et souvent originales et signifiantes. Il en résulte que les métaphores, s'étendant des verbales aux artistiques, deviennent une forme privilégiée de communication, précisément parce qu'elles sont capables de communiquer en profondeur avec les gens.*

Le **geste** a été pris en compte en tant que métaphore :

- (Edwards, CERME 4) *Récemment, la recherche sur la relation entre le geste physique et le langage a ajouté une nouvelle dimension au paradigme de la cognition incarnée. Selon les travaux dans ce secteur, les gestes humains font intégralement partie du langage, de la pensée et de la communication.* (…)
- *Les gestes effectués par les élèves relèvent de trois catégories : iconique, métaphorique et déictique*. [Mc Neill 1992]
- [Les gestes iconiques] *ressemblent à leur référent dans le discours*. (…)
- [Les gestes métaphoriques] *représentent une idée abstraite plutôt qu'un objet ou un événement concret*. (…)
- [Un geste déictique est] *un mouvement indicateur qui sélectionne une partie de l'espace gestuel*.

GESTE ICONIQUE

« Je me souviens d'avoir appris qu'on plaçait l'un sur l'autre… »

GESTE MÉTAPHORIQUE

« Chacun de nous en a moins… »

GESTE DÉICTIQUE

« Ceci peut rester le même que ceci… »

- (Edwards, CERME 4) *Les gestes des élèves liés à "plus" et "moins" semblaient associés à l'amalgame [blend] conceptuel qui identifie les nombres à des points sur la droite, et à des caractéristiques conventionnelles de la droite numérique graduée*.
- (Bolite Frant, CERME 4) *Les élèves et les professeurs utilisent l'expression "de zéro à plus l'infini". Les élèves le font oralement et le professeur ajoute une expression écrite (0, +∞) et fait un geste vers la partie positive de l'axe des abscisses (déplaçant sa main de l'origine vers la droite) C'est la métaphore qui considère la demi-droite numérique comme un chemin avec une source (point de départ) et un but (plus l'infini). Le synchronisme du langage dynamique et du mouvement de la main permet aux élèves de comprendre le domaine (...) comme résultant d'un mouvement qui a un début mais pas de fin*.

Les **limites** et les **difficulté**s liées aux métaphores ont été soulignées :

- (Leron, CERME 3) *Étant donné que beaucoup de domaines des mathématiques modernes (en particulier ceux qui s'intéressent aux diverses facettes de l'infini) vont* *fortement à l'encontre de nos intuitions « naturelles », il est difficile d'en élaborer des compréhensions uniquement via des extensions métaphoriques des structures cognitives existantes de l'apprenant*.

- (Bolite Frant, CERME 4) *Les cartographies conceptuelles ne proviennent pas tous de l'expérience physique directe, ni ne font intervenir la manipulation d'objets physiques. Nous sommes également conscients que seuls certains aspects du domaine source sont révélés par une métaphore et, en général, nous ne savons pas quels aspects du domaine source sont appliqués par les élèves*.
- (Bills, CERME 3) *La manipulation de référents concrets des nombres, comme par exemple ajouter des boules et en retirer, fournit des métaphores physiques et linguistiques pour les opérations. L'addition, réunir ou mettre en plus, devient alors synonyme d'ajouter. La soustraction devient synonyme d'enlever, donc de diminuer. Lorsque la métaphore « soustraire, c'est enlever » est le modèle constitutif de la théorie pour un enfant, alors la soustraction des nombres négatifs devient problématique. De même, les métaphores « multiplier, c'est plusieurs » et « diviser, c'est partager » laissent les enfants mal équipés pour les calculs avec autre chose que les entiers naturels* (…)

  Le langage métaphorique utilisé par les enfants peut indiquer que leur pensée est enracinée dans une représentation pédagogique particulière. Si c'est le cas, alors les futurs enseignants de ces élèves risquent d'avoir des difficultés à communiquer avec eux s'ils utilisent une métaphore différente pour le calcul.

Enfin, des pistes vers des **solutions** ont été proposées :

> (Gagatsis, CERME 4) *L'apprentissage (...) peut être réalisé grâce à la "dé-compartimentation" et à la coordination de différentes représentations de la même situation mathématique (Duval 2002). Par conséquent, l'utilisation de multiples représentations dans l'apprentissage des mathématiques, la connexion et la comparaison des uns et des autres, et la conversion d'un mode de représentation à un autre ne devrait pas être laissé au hasard, mais devrait être enseigné et appris systématiquement, afin que les élèves développent des savoir-faire pour représenter et manipuler de façon flexible les connaissances mathématiques sous des formes variées*.

BIBLIOGRAPHIE

Fischbein, E. (1993) The theory of figural concepts. Educational Studies in mathematics 24, pp. 139-162.

Hofstadter, D. (1979) Gödel, Escher, Bach : les Brins d'une Guirlande Éternelle. InterÉditions, Paris.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1980) Metaphors we live by. Chicago University Press.

Lakoff; G. & Núñez, R. (2000) Where mathematics come from. How the embodied mind brings mathematics to being. Basic Books, New York.

Lassègue, J. (2014) La genèse des concepts mathématiques, entre sciences de la cognition et sciences de la culture.

http://download.springer.com/static/pdf/648/art%253A10.1007%252FBF02963406.pdf?auth6

6=1426001216_b3edf72b4d997108fb623dc1d28ca073&ext=.pdf

Luria, A. (1973) The working brain. An introduction to neuropsychology. Penguin Books Ltd.

Meyer, M. (2008) Principia Rhetorica. Une théorie générale de l'argumentation. Ed. Fayard, Paris.

Moriceau, V. (2003) Un modèle de représentation sémantique de la métaphore. Mémoire de DEA. Université Paul-Sabatier (Toulouse).

Nuñez, R.E, Edwards, L.D., Matos, J.F. (1999) Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. Educational Studies in Mathematics 39 pp. 45-65.

Vygotsky, L.S. (1934) Mind in society : the development of higher psychological processes. Traduction anglaise 1978. Harvard University Press, Cambridge MA.

ANNEXE : LISTE DES CONTRIBUTIONS AU GROUPE « MÉTAPHORES » DE CERME[83]

CERME 2

Chartier, G. Using "geometrical intuition" to learn linear algebra.

Maschietto, M. The transition from algebra to analysis. The use of metaphors in a graphic calculator environment.

Régnier, J.-C., Priolet, M. Teachers' use of semiotic registers.

Robotti, E. Verbalization as a mediator between figural and theoretical aspects.

Rogers, L. From icons to symbols. Reflections on the historical development of the language of algebra.

Sykora, V. Semiotic representations in the process of construction of mathematical concept.

Ulovec, A. The role of image schemata in the development of new cognitive objects.

CERME 3

Attorps, I. Teachers' images of the 'equation' concept.

Bills, C. Metaphor in young children's mental calculation.

Edwards, L. The nature of mathematics as viewed from cognitive science.

Ferrara, F. Bridging perception and theory: what role can metaphors and imagery play?

Matheron, Y. Some examples of the relationship between the use of images and metaphors and the production of memory in the teaching and learning of mathematics.

Orfanos, S. The need of teaching the limits and the possibilities of the representation systems that offer the surrounding support for comprehending the concept of fraction.

Parzysz, B. Pre-service elementary teachers and the fundamental ambiguity of diagrams in geometry problem-solving.

Robotti, E. Functions of natural language in the resolution of a plane geometry problem.

CERME 4

[83] http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/

Bergsten, C., Fransson, T. Students interacting with an artefact designed to visualize three-dimensional analytic geometry.

Bolite Frant, J, Acevedo, J., Font, V. Metaphors in mathematics classrooms : analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions.

Edwards, L. Metaphors and gestures in fraction talk.

Gagatsis, A., Elia, I. A review of some recent studies on the role of representations in mathematics education in Cyprus and Greece.

Jore, F., Parzysz, B. Metaphorical objects and actions in the learning of geometry. The case of French pre-service elementary teachers.

Pesci, A. Mediation of metaphorical discourse in the reflection of one's own individual relationship with the taught discipline. An experience with mathematics teachers.

Söbbeke, E. Building visual structures in arithmetical knowledge. A theoretical characterization of young students' "visual structurizing ability" (ViSA).

Vom Hofe, R., Kleine, M., Blum, W., Pekrun, R. The effects of mental models ("Grundvorstellungen") for the development of mathematical competencies. First results of the longitudinal study PALMA.

Xistouri, X., Pitta-Pantazi, D. A dyslexic child strategies and images in arithmetic: a longitudinal study.

CERME 5

Anastasiadou, S. Gagatsis, A. Exploring the effects of representations on the learning of statistics in Greek primary schools.

Araya, R. Guess what is inside this box: look at these open boxes for clues.

Doritou, M., Gray, E. The number line as metaphor of the number system: a case study of a primary school.

Gobert, S. Ways of thinking about the uses of images in learning and teaching geometry: a more thorough investigation of the links between drawings and figures.

Kadunz, G. Mathematical writing.

Monoyiou, A., Papageorgiou, P. Gagatsis, A. Students' and teachers' representations in problem solving.

Murphy, C. The role of the conceptual metaphor in the development of children's arithmetic.

Presmeg, N. The powers and perils of metaphor in making internal connections in trigonometry and geometry.

Rinvold, R. Metaphors and image schemata in concept formation and reasoning.

Rogers, L. Caines, P. Teaching special relativity.

Soto-Andrade, J. Metaphors and cognitive modes in the teaching-learning of mathematics.

ETHNOMATHÉMATIQUE ET ANALOGIE

L'ANALOGIE COMME OUTIL D'INTELLIGIBILITÉ DANS LA LECTURE DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES À L'ŒUVRE DANS DES PRATIQUES SOCIO-CULTURELLES, COMME VECTEUR D'APPRENTISSAGE DANS DES CONTEXTES NON OCCIDENTAUX

Marie-Pierre GALISSON

Université d'Artois - ESPE Lille Nord de France

mpierre.galisson@espe-lnf.fr

Résumé

Les ethnomathématiciens, mobilisent des processus de pensée que l'on peut apparenter à un processus de recherche d'analogies entre des traces de pratiques et des théories mathématiques détachées des contextes qui ont présidé à leur constitution. Un autre de leurs axes de travail consiste à s'appuyer sur le potentiel mathématique des ressources culturelles autochtones pour interroger la pertinence pédagogique et didactique de curricula mathématiques « occidentaux » imposés par le biais de la colonisation.

Ce texte présente les rapports qui peuvent exister entre les travaux des ethnomathématiciens et la fonction d'une certaine forme d'analogie. Le second objectif consiste à illustrer, à l'aide de quelques exemples, la nature et la fonction d'un « mode de pensée analogique » qui permet aux ethnomathématiciens de décoder des connaissances mathématiques à l'œuvre dans des pratiques. Le troisième objectif vise à éclairer ce qui peut légitimer le recours à cette « forme d'analogie » pour développer l'enseignement des mathématiques en Afrique. Enfin, nous présenterons des réflexions personnelles à propos des enjeux et des difficultés que peuvent offrir les ressources et pratiques culturelles pour le développement d'une éducation mathématiques en Afrique (plus spécifiquement)

Mots clés

Ethnomathématique, pratiques socio-culturelles, ressources culturelles mathématiques, rationalité mathématique

INTRODUCTION

L'un des axes de travail des ethnomathématiciens, mettre « en évidence des structures mathématiques dans certaines activités spécialisées de sociétés de tradition orale (Chemillier, 2007, p.11) mobilise chez les chercheurs des processus de pensée que l'on peut apparenter à un processus de recherche d'analogies entre des traces de pratiques et des théories mathématiques détachées des contextes, des métissages culturels qui ont présidé à leur constitution. Certaines de ces recherches tendent à étudier parallèlement des données ethnographiques pour mettre à jour les liens entre ces propriétés mathématiques abstraites et les processus cognitifs repérés des membres de ces sociétés traditionnelles.

Un des enjeux de ces recherches interroger « l'universalité de la pensée rationnelle » (Chemillier, 2007, p.38) met encore en jeu un certain recours à l'analogie (ces activités sont pratiquées dans plusieurs régions du monde, la description des méthodes sur le terrain peut éclairer leur rapport avec des opérations mentales des acteurs).

Un autre axe de travail et non le moindre consiste à s'appuyer sur le potentiel mathématique des ressources culturelles autochtones pour interroger la pertinence pédagogique et didactique de curricula mathématiques « occidentaux » imposés par le biais de la colonisation (d'Ambrosio : Brésil, Bishop : Australie, Gerdès : Mozambique …). Ce contexte est spécifique, ne prend pas en compte les pays asiatiques. On peut supposer que si le caractère universel des concepts mathématiques est d'une certaine façon « naturalisée » pour ces chercheurs, par contre, les processus d'apprentissage et d'enseignement qu'ils préconisent (expérimentent) prennent en compte les environnements sociétaux en s'appuyant sur une certaine analogie entre des pratiques culturelles (quotidiennes) et leur interprétation en termes de « structures formelles » pour favoriser les conditions d'acquisition de celles-ci.

Les travaux des chercheurs sur le potentiel mathématique des pratiques culturelles suscitent des questions d'ordre didactique sur les fonctions d'une certaine forme d'analogie. Comment la caractérisent-ils ? Sur quels présupposés s'appuient ceux qui tendent à légitimer une approche de l'apprentissage et de l'enseignement fondée sur des ressources culturelles (enculturation vs acculturation, (Bishop, 1991)) ? Quels liens possibles entre la « transposition mathématique fonctionnelle » des ethnomathématiciens et une transposition didactique dans un système éducatif « non occidental » ? Quel est le potentiel didactique de cette forme d'analogie ? Les questions que se pose le didacticien sont, entre autres : Quelles mathématiques ? Pour qui ? Pour quoi faire ? Les ethnomathématiciens peuvent apporter des réponses (au moins partielles).

Ce texte a pour premier objectif de présenter les rapports qui peuvent exister entre les travaux des ethnomathématiciens et la fonction d'une certaine forme d'analogie. Analogie qui s'appuie sur la comparaison entre des modes de « faire », des procédures finalisées et l'expression de modèles mathématiques.

Le second objectif consiste à illustrer, à l'aide de quelques exemples, la nature et la fonction d'un « mode de pensée analogique » qui permet aux ethnomathématiciens de décoder des connaissances mathématiques à l'œuvre dans des pratiques.

Le troisième objectif vise à éclairer ce qui peut légitimer le recours à cette « forme d'analogie » pour développer l'enseignement des mathématiques en Afrique. Enfin, nous développerons des réflexions personnelles à propos des enjeux et des difficultés que peuvent offrir les ressources et pratiques culturelles pour le développement d'une éducation mathématiques en Afrique (plus spécifiquement).

1. ETHNOMATHÉMATIQUE : DES DÉFINITIONS FLUCTUANTES, MATHÉMATIQUES NATURELLES (VS MATHÉMATIQUES FORMELLES) OU MATHÉMATIQUES ANALOGICO-EXPÉRIMENTALES

A. Le contexte d'émergence

L'ethnomathématique est un domaine d'étude qui interroge la croyance en l'universalité des mathématiques dites formelles ou académiques telles que les caractérisent les curricula scolaires occidentaux.

Ce domaine d'étude est né dans un contexte d'émancipation culturelle et économique des anciennes colonies européennes à partir des années 1960. A ce titre, l'ethnomathématique se caractérise par une dimension politique :

- d'une part, à travers l'idée que les mathématiques formelles ou académiques véhiculent un système de valeurs (rationalité, progrès, objectivité) inhérent à la civilisation occidentale (D'Ambrosio, 2001) non nécessairement compatible avec le système de valeurs des populations dans lesquelles ces mathématiques à enseigner ont été transposées
- d'autre part, à travers l'idée que des savoirs traditionnels, des pratiques culturelles ne sont toujours pas reconnus, demeurent dévalorisés alors qu'ils témoignent d'une forme de rationalité mathématique, d'un certain type de pratiques mathématique (non écrites) (Gerdes,1993).

Au-delà de cette revendication politique et identitaire, c'est une question plus pragmatique qui génère encore le développement des recherches en ce domaine.

- Lutter contre l'échec scolaire dans le domaine de l'enseignement des mathématiques nécessite de prendre en compte le contexte socio-culturel des élèves (par exemple, les programmes de mathématiques occidentaux ont été transposés presque intégralement jusque dans les années 1990 en Afrique francophone)
- Favoriser l'apprentissage des élèves dans leur milieu implique d'adapter les contenus des programmes en octroyant une place aux mathématiques locales et/ou informelles

L'étendue et la complexité de ce domaine de recherche sont illustrées par la multiplicité des définitions de l'ethnomathématique qui tendent à la caractériser.

Une première définition qui du point de vue de Gerdes (1993) peut traduire un point de vue traditionnel « colonialiste » (opposant pensée dite primitive et pensée occidentale) nous renseigne toutefois sur le processus de pensée des chercheurs : la recherche d'une ressemblance entre des notions qui relèvent de cultures, de pratiques ancrées dans des environnements sociétaux distincts.

> L'Ethnomathématique est l'étude des idées mathématiques des peuples sans écriture. Nous reconnaissons comme pensée mathématique des notions qui correspondent en quelque sorte à ce label, dans notre culture. (Asher & Asher (1986), cité par Gerdes, 1993, p.19)

Quelle que soit l'interprétation idéologique de cette caractérisation, un des aspects cruciaux des situations étudiées réside dans le fait que les « ostensifs » ne réfèrent pas au registre de représentation d'un langage « écrit ». La recherche de similitudes entre ces situations et des modèles mathématiques constitués, des théories déjà existantes se démarque en partie de celle du mathématicien telle que l'entend Weil (cité par Houzel, 2008). Elle n'a pas pour objet de créer de nouveaux objets ou de nouvelles théories (finalité que lui assigne Weil), même si de ce décryptage mathématique peuvent émerger des questions de recherche.

D'autres définitions de l'ethnomathématique proposées cette fois par des chercheurs animés par la volonté de valoriser l'existence d'idées mathématiques dans l'ensemble des pratiques culturelles autochtones caractérisent l'étendue du champ d'exploration de ces idées mathématiques.

Nous retiendrons :

- La sociomathématique d'Afrique [Zaslavsky, 1973]
- La mathématique spontanée [D'Ambrosio, 1982]
- La mathématique orale [Kane, 1987]

– La mathématique opprimée [Gerdes, 1982]
– La mathématique non standardisée [Gerdes,1985]
– La mathématique congelée [Gerdes, 1982, 1985]

Ces caractérisations qui renvoient à un ensemble de pratiques sociales à l'œuvre dans des groupes culturels ou à de l'ostracisme mettent en évidence l'existence pour ces chercheurs de théories dont « les références varient historiquement et géographiquement, selon la façon dont est conçue la relation du sujet au monde » (Durand-Richard, 2008).

La création en 1985 du Groupe International d'Etudes d'Ethnomathématique (ISGEm-International Study Group on Ethnomathematics) permet de rassembler sous une même dénomination « Ethnomathématique » ces divers secteurs de recherches. Ce groupe produit ainsi deux définitions :

> « Mathématique dans le contexte culturel » ou « Mathématique dans la société »
> « La voie particulière (et peut-être spécifique) par laquelle des groupes culturels réalisent des tâches de classement, de mise en ordre et de mesure »

Pour D'Ambrosio (1991), il y a différentes ethnomathématiques, un pluriel correspondant à différentes formes de savoir (Figure 1).

> «Les mathématiques qui se pratiquent au sein de groupes culturels bien distincts, comme les sociétés nationales-tribales, les groupes de travail, les enfants d'une certaine tranche d'âge, les catégories professionnelles, etc… »

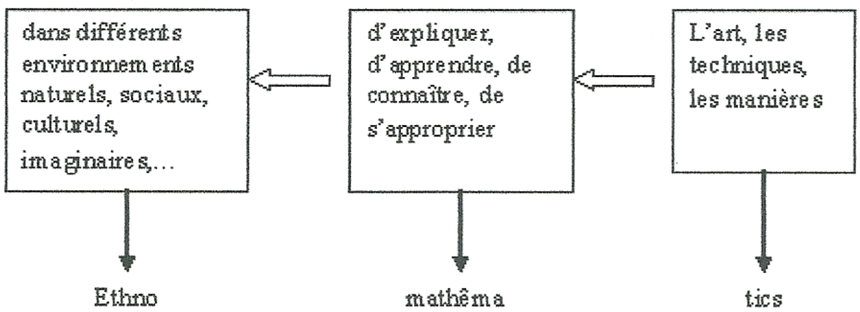


Figure 1 : *Définition de l'ethnomathématique selon D'Ambrosio (source Traore Kh, Barry S. (2007), p.4)*

Pour Gerdes (1993), l'ethnomathématique conjugue diverses caractérisations :
– Anthropologie culturelle des mathématiques et de l'enseignement mathématique.
– Etude des pratiques et des idées mathématiques dans ses rapports avec l'ensemble de la vie culturelle et sociale.
– Recherche d'éléments culturels pouvant servir comme point de départ d'activités mathématiques dans l'enseignement.
– Recherche « citoyenne », pour reconstituer une mémoire effacée ou mutilée par la colonisation[84].
– Ethnomathématique : Illustration du proverbe africain : « *Si tu as perdu ton chemin, il ne faut pas courir en avant mais revenir jusqu'au point que tu reconnais*» (proverbe africain)

[84] Dans le contexte de l'Afrique post-coloniale

Au confluent de l'ethnologie, de la sociologie et des mathématiques, l'ethnomathématique comme le souligne Gerdes, et comme le relève l'ISGEm fait encore partie de la didactique des mathématiques. «… Des exemples de pratiques mathématiques issus de groupes culturels connus, et leurs liens avec des modes de raisonnement et des modèles de pensée peuvent permettre de développer des programmes qui misent sur la compréhension intuitive et les modes de pensée que les élèves possèdent quand ils viennent à l'école. C'est sans doute dans le tiers monde que le développement de tels programmes serait le plus nécessaire, mais il est avéré que les écoles ne prennent pas en compte cet ensemble de compétences mathématiques et scientifiques « intuitives ».[85] (ISGEm-Newsletter, 1985, Vol.1 N°1, 2)

Parce que l'échec scolaire dans le domaine de l'enseignement des mathématiques trouve une explication dans la non prise en compte d'une forme contextualisée de mathématisation issue de pratiques ou ancrée culturellement, les ethnomathématiciens disqualifient les modalités d'accès à « la » conceptualisation des objets mathématiques, les méthodes d'apprentissage empruntées au curricula occidentaux. Il s'agit donc d'appréhender des modes de pensée contextuellement situées pour implémenter de nouvelles méthodes d'apprentissage : des méthodes « congrues analogiquement » au rapport que le sujet entretient avec le monde. Nous noterons que le caractère universel des concepts eux-mêmes n'est pas interrogé. Nous allons maintenant tenter d'illustrer la nature d'un mode de pensée mathématique « analogique ».

B. Mathématiques formelles et mathématiques naturelles

Dans son ouvrage « Les mathématiques naturelles », Chemillier (2007) s'appuie sur la distinction entre mathématiques analytiques « occidentales » nécessitant le recours aux symboles et à l'écrit, et les mathématiques analogiques –expérimentales (mathématiques analogiques) telles que les définissent Philip J. Davis et Reuben Hersh (cité par Chemillier, 2007).

Pour ces auteurs, les mathématiques analogiques peuvent être pratiquées par n'importe quel individu agissant dans un monde de relations spatiales et de technologie quotidienne. Les résultats d'une mathématisation analogique ne s'expriment pas en mots mais en compréhension, en intuition, en impression. Pour les auteurs, cette mathématisation analogique n'est pas absente dans l'activité du mathématicien spécialisé quand il cherche. En ce sens, ces mathématiques primitives seraient constitutives de l'activité de tout individu.

A titre d'exemples, l'ouvrage de Chemillier présente la démonstration du théorème de Pythagore extrait d'un ouvrage chinois datant du 5^{e} siècle avant J.C. donc antérieur aux travaux pythagoriciens. La technique de démonstration est visuelle. Le support est un type de tangram composé de carrés et de triangles qu'il s'agit de déplacer pour montrer (faire voir sans doute, mais aussi emporter la conviction ?) le théorème (Figure 2). Ce théorème s'appuie sur un résultat admis aussi par les Grecs plus tard (Euclide, 3^{e} siècle avant J.C.) : « Deux portions de plans superposables ont même surface ».

[85] « …examples of Ethnomathematics derived from culturally identifiable groups, and related inferences about patterns of reasoning and models of thought can lead to curriculum development projects that build on the intuitive understanding and practiced methods students bring with them to school. Perhaps, the most striking need for such curriculum development may be in the Third World countries, yet there is mounting evidence that schools in general do not take advantage of their students' intuitive mathematical and scientific grasp of the world."

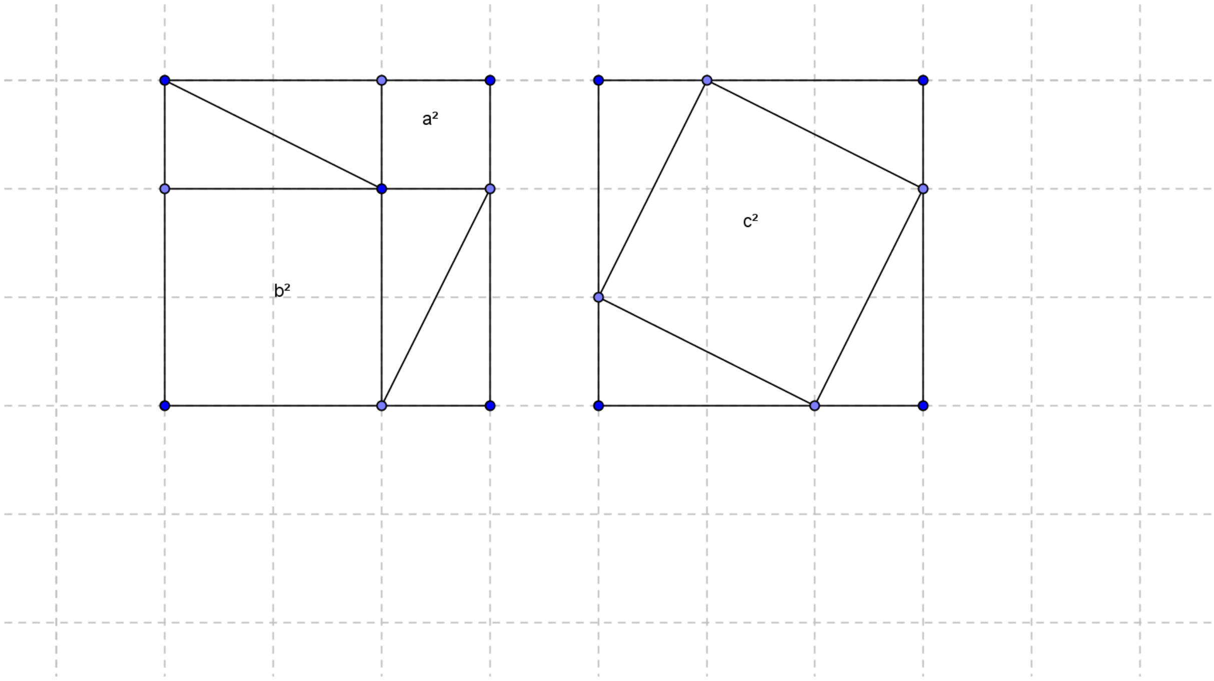


Figure 2- *Exemple de démonstration du théorème de Pythagore*

Certes, si l'exemple peut illustrer une « mathématisation analogique », nous devons noter que l'enjeu de la tâche a un caractère proprement mathématique : ce mode de raisonnement est-il encore à l'œuvre dans des pratiques que ne sous-tendent pas clairement un enjeu mathématiques ? C'est la question à laquelle cherchent à répondre les ethnomathématiciens. Leur travail tend à traquer dans une multiplicité de pratiques, de productions, qu'elles relèvent de l'art, de l'artisanat, de rituels, des idées mathématiques qu'une mathématisation analogique complexe peut permettre de faire émerger.

S'agit-il d'un processus de mathématisation analogique ou d'un autre processus de pensée ? Quelles activités cognitives l'ethnomathématicien mobilise-t-il dans un premier temps- ce temps où nécessairement il doit se référer aux concepts mathématiques qu'il connaît- à savoir, les concepts d'une mathématique formelle ? Il semble que de prime abord la recherche d'une modélisation mathématique relève davantage de l'approche de Ascher et Ascher (1986), cité par Gerdes (1993,p.19).

2. ANALOGIE ET PROCESSUS DE RE-DÉCOUVERTE DES MATHÉMATIQUES NON ÉCRITES

A. Quelques exemples (Gerdes, 1993)

Pour illustrer des idées mathématiques indigènes, l'auteur décrit les « axiomes du rectangle » utilisés par les paysans au Mozambique. Les paysans utilisent deux techniques pour construire les bases rectangulaires des maisons.

- deux paires de bambous suffisamment longs de même longueur (une paire pour les longueurs, une paire pour les largeurs ; assemblés pour constituer un parallélogramme, ajustés pour que les diagonales mesurées avec une corde soit égales
- deux cordes de même longueur nouées en leur milieu ; deux extrémités des deux cordes attachées à un bambou qui correspond à la largeur désirée de la maison ; les bouts des extrémités sont fixés dans le sol. Les cordes sont alors tendues et de

nouveaux bouts plantés aux extrémités qui restent. Les quatre sommets de la base rectangulaire de la maison sont déterminés.

Gerdes en tire deux axiomes alternatifs du rectangle (comme les désigne l'auteur).

- Un parallélogramme dont les diagonales sont égales est un rectangle
- Un quadrilatère dont les diagonales sont égales et se coupent en leur milieu est un rectangle.

Gerdes montre que ces deux axiomes peuvent s'inscrire dans une construction axiomatique de la géométrie euclidienne telle celle d'Alexandrov[86]. Le challenge qui est proposé aux enseignants (l'activité est proposée en formation des maîtres), c'est de prendre appui sur ces connaissances en acte, culturelles, pour développer une axiomatique « formelle » mais « presque déjà là ». Toutefois, nous pouvons nous interroger sur le plan cognitif. Les paysans disposent de techniques pour résoudre un type de tâches : ces connaissances ponctuelles en acte sont-elles un levier d'apprentissage dans un contexte scolaire ? Sous quelles conditions de transfert, de transposition didactique ?

B. Tracés eulériens

Les dessins sur le sable et leurs liens avec les tracés eulériens constituent encore des exemples choisis par Gerdes (1993) et repris par Chemillier (2007). Les sona (pluriel de lusona) sont des dessins tracés dans le sable (pratiques culturelles dans plusieurs parties du monde mais en particulier en Angola). Il s'agit de tracer un sillon sur le sable en respectant un principe « règle de la ligne continue » (Ne pas lever le doigt et ne pas repasser sur un sillon déjà tracé). De tels tracés sont donc des chemins eulériens au sens de la théorie des graphes (Figure 3).

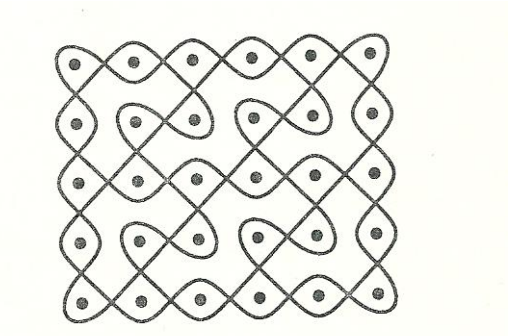


Figure 3- *Exemple de sona*

Pour mémoriser les pictogrammes et idéogrammes standardisés, le dessinateur utilise une mnémotechnie. Il marque avec son doigt un réseau de points équidistants, le nombre de lignes et colonnes dépend du motif à représenter, ensuite il applique un « algorithme géométrique ». L'étude mathématique de ces dessins a fait l'objet de nombreuses recherches.
Pour cette famille de dessins appelés « coq en fuite », Gerdes montre par exemple que le réseau de points sous-jacent doit comporter un nombre impair de ligne $2m+1$ et un nombre pair d colonnes. Le nombre de courbes nécessaire pour tracer le dessin est tel que $f\,(2m+1, 2n) = \text{pgcd}\,(m+1, n+1)$. Ainsi le dessin (5×6) ci-dessus est monolinéaire. Il correspond à $m=2$ et $n=3$.

[86] Axiomatique dans laquelle le cinquième postulat d'Euclide est remplacé par :
Si le quadrilatère ABCD est tel que les angles en A et B sont droits, AD égale BC alors les angles C et D sont droits et AB égale CD.

Pour Chemillier, ce questionnement et ses réponses soulèvent des questions similaires sur le plan cognitif. L'artiste connaît-il les relations liant le nombre de courbes et les dimensions du réseau de points sous-jacents ?

C. Pratiques et modes de pensée du sujet

Cette absence de connaissances sur les modes de pensée des artistes, des praticiens conduit Chemillier à distinguer une ethnomathématique « de laboratoire » d'une ethnomathématique de terrain. Une ethnomathématique de terrain (quand elle est possible) tend à conduire conjointement analyse mathématique et collecte de données ethnographiques. Seule, cette dernière pourrait légitimer la présence d'« idées mathématiques » à l'œuvre dans les pratiques des artistes.

Chemillier ne donne pas de réponse pour les sona. Par contre, il propose un exemple d'étude relative aux règles de la divination malgache. Celle-ci emprunte à la géomancie arabe ; cette diffusion et l'appropriation de ces règles pourra témoigner dans l'article du principe d'une « rationalité mathématique » partagée par diverses cultures ou du moins de l'existence de rituels « analogues » dans des cultures différentes. L'auteur s'appuie donc, non seulement, sur une enquête ethnographique mais aussi sur une étude historique de textes qui ont circulé dans toute l'Afrique.

La divination *sikidy* repose sur une technique consistant à construire un tableau de graines de tamarin (exemple en Annexe). Voici les propos de l'auteur pour décrire le rituel et le tableau :

> La technique divinatoire utilise des graines de tamarin, que l'on brasse en tas sur une natte, en prononçant diverses incantations. On prend une poignée de graines au hasard, puis on la pose sur le sol, en éliminant les graines par paires, jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'une ou deux. Ce reste, produit d'un tirage aléatoire, manifeste la destinée du consultant.
> Pour procéder à la divination, on place le reste obtenu (une ou deux graines) dans un tableau en forme de matrice carrée de dimension quatre, que l'on remplit en réitérant seize fois le tirage. Les éléments qui interviennent dans le processus de divination sont les suivants :
> - *Matrice mère* (appelée *renin-tsikidy*) : c'est le tableau carré de quatre par quatre obtenu par tirage aléatoire, dont les éléments valent 1 ou 2.
> - *Colonnes filles* : ce sont huit nouvelles colonnes calculées de façon entièrement déterministe à partir de la matrice mère, ayant chacune quatre éléments (qui valent 1 ou 2). Le tableau complet de divination est constitué de la matrice mère et des huit colonnes filles.
> - *Positions* : ce sont les quadruplets définis par le tableau, dont les éléments valent 1 ou 2.
> Il s'agit :
> • des quatre lignes et quatre colonnes de la matrice mère,
> • des huit colonnes filles,
> soit au total seize positions qui ont toutes un nom vernaculaire (*tale*, *maly*, *fahatelo*, etc.).
> - *Figures* : ce sont tous les quadruplets que l'on peut théoriquement former avec des 1et des 2, par exemple (1, 1, 1, 2). Ils sont au nombre de seize et chacun a un nom vernaculaire (*karija, tareky, asombola*, etc.). Leur apparition dans telle ou telle position du tableau détermine la prédiction du devin.
> - *Princes/esclaves* : les figures avec un nombre pair de graines sont appelées « princes », les autres « esclaves ». L'apparition d'un prince ou d'un esclave dans telle ou telle position du tableau est un paramètre important de la divination.
> - *Points cardinaux* : il existe une répartition des figures en quatre sous-ensembles orientés selon les points cardinaux. L'apparition d'un point cardinal dans telle ou telle position du tableau influence la prédiction. (Chemillier, 2007,pp.24,25)

L’étude mathématique conduit l’auteur à modéliser ainsi la matrice mère.

$$\begin{matrix} a14 & a13 & a12 & a11 \\ a24 & a23 & a22 & a21 \\ a34 & a33 & a32 & a31 \\ a44 & a43 & a42 & a41 \end{matrix}$$

L’auteur reprend. Voir tableau A en annexe.

Chaque élément *aij* vaut une ou deux graines. Cette matrice appelée *renin-tsikidy* définit huit positions, qui sont les quadruplets apparaissant dans les quatre colonnes et les quatre lignes (lues de droite à gauche). À partir de ces huit quadruplets initiaux, on construit huit colonnes secondaires (les filles) placées sous la matrice mère les unes à côté des autres, et dérivées des quadruplets initiaux en respectant la règle de combinaison suivante :
- une graine et une graine donnent deux graines,
- deux graines et une graine donnent une graine,
- deux graines et deux graines donnent deux graines.

On reconnaît la loi de composition interne du groupe abélien Z/2Z Les deux graines correspondent à l'élément neutre 0˙, et la graine isolée correspond à 1. L'opération de combinaison des figures se fait dans le groupe produit $(Z/2Z)^4$ des quadruplets de Z/2Z. La Figure (2, 2, 2, 2) est l'élément neutre pour cette opération. Toute figure est son propre inverse. (Chemillier,p.25)

L’analyse qui suit, très développée ne saurait être résumée ici. Notons qu’elle permet d’explorer nombre des méthodes développées par les devins en les modélisant à l’aide de propriétés algébriques par exemple en termes de morphismes de groupes.

L’étude mathématique croisée avec ce qui est exprimé dans les méthodes des devins permet de mettre en évidence que ceux-ci sont conscients de certaines propriétés mais que les méthodes qu’ils utilisent pour obtenir certaines configurations constituent un problème encore non résolu. Par ailleurs, l’auteur note que la recherche de certains types de tableaux est considérée par les devins comme un exercice intellectuel en dehors du contexte de la divination. C’est, nous semble t-il, dans ces exercices gratuits que l’on peut déceler une réelle activité mathématique.

Le travail de l’auteur contribue donc à mettre en évidence les liens entre constructions élaborées par les ethnomathématiciens et processus mentaux des experts indigènes, et d’une certaine façon, l’existence de véritables mathématiques indigènes (en termes d’exercices intellectuels « mathématiques »).

3. ETHNOMATHÉMATIQUE ET PISTES POUR UNE ÉDUCATION MATHÉMATIQUE « ENDOGÈNE »

La volonté d’adapter l’éducation mathématique à des sociétés non occidentales est revendiquée par de nombreux chercheurs. Les enjeux des travaux de Traoré et Bednarz (2008) couvrent à la fois les objectifs précédents mais cherchent encore à légitimer l’intégration de ressources mobilisées dans les pratiques de calcul au marché dans des curricula mieux adaptés au contexte socio-culturel du Burkina-Faso. Traore et Bednarz (2008) proposent une vision de l’enseignement des mathématiques qui renvoie à des mathématiques contextuelles, ancrées dans une culture à l’instar de Bishop, en référence à la définition des ethnomathématiques de D’Ambrosio.

Leur recherche de type ethnographique (entretiens avec des paysans) pour comprendre le système de représentation oral des nombres dans les pratiques développées en contexte les conduit à conclure que dans une pratique donnée, les acteurs mobilisent en contexte toute sorte de ressources qui vont structurer en retour cette pratique. Ces ressources dans le champ de l'ethnomathématique et de la cognition située agissent comme des ressources en acte.

L'analyse des auteurs met en évidence que le système oral de désignation des nombres sous-jacents au comptage de la monnaie balisent les procédures de calcul et que ce système de représentation oral agit comme une ressource structurante dans le comptage de la monnaie, le calcul mental. Ils insistent aussi sur la flexibilité des acteurs pour passer d'une désignation à l'autre et en déduisent que cette capacité est un élément central dans l'apprentissage des mathématiques.

4. Analogie (prise en compte d'un contexte de pratiques) et approches de l'apprentissage et de l'enseignement / TAD et TSD

Les travaux précédents peuvent suggérer une hypothèse. La prise en compte des logiques sous-jacentes aux pratiques mathématiques présentes dans les activités contextuellement, culturellement situées constituerait un moyen de résoudre les difficultés d'un enseignement mathématique « formel », « occidental » dans les pays anciennement colonisées. Un transfert par « une certaine forme d'analogie » de ces logiques sous-jacentes serait une clé du problème. Un certain nombre d'initiatives témoignent de la prise en compte de cette hypothèse.

Les travaux de Gerdes, en cohérence avec ses caractérisations de l'ethnomathématique montrent à travers la grande multiplicité de ses publications destinés aux enseignants et aux élèves l'existence d'un réel mouvement de prise en compte du contexte socio-culturel. Ses fonctions d'enseignant, de formateur illustrent aussi son travail dans le cadre de la formation.

Nous ignorons par contre si au niveau officiel, ces travaux ont une incidence sur les curricula, sur une nouvelle organisation d'un texte de savoir mathématique enseigné.

La même question se pose au Burkina Faso : qu'en est-il de la rénovation des programmes que promouvaient Traoré et Bednarz en 2008 ?

Au Mali, depuis les années 2000, la réforme des programmes est fondée sur la mise en œuvre de la Pédagogie Convergente. Cette méthode active d'apprentissage des langues a pour objectif le développement d'un bilinguisme fonctionnel dans des situations contextualisées et elle est appliquée aux mathématiques (considérées aussi comme un langage). Cette réforme légitimée, annoncée par Vellard (2009) soulève cependant des questions d'ordre didactique que l'implémentation de nouvelles méthodes pédagogiques ne peut régler. La pédagogie convergente n'est pas la « Magna Didactica » que Comenius (1642) souhaitait instaurer. Les questions de transpositions didactiques se posent tant au niveau de l'apprentissage des langues qu'au niveau de l'apprentissage des mathématiques.

Les travaux de Bishop (pris comme référence par Traore et Bednarz) traduisent peut-être un impact plus sensible (notamment en Papouasie- Nouvelle Guinée, Mozambique, Iran). Bishop s'appuie sur les six types d'activités (partagées, analogues) à savoir, « compter, repérer, mesurer, désigner, jouer et expliquer » dont dériveraient les mathématiques occidentales mais qui peuvent d'évidence être développées mathématiquement dans toutes les cultures. Cette conception d'un apprentissage qui renverrait à l'articulation entre une certaine « enculturation » (l'élève s'initie à sa propre culture) et à une acculturation (l'élève s'initie à une culture en un certain sens étrangère) réfère *a priori* à une conceptualisation en contexte dans le domaine de l'éducation mathématique. Nous ne savons pour autant si l'élaboration de curricula dans leur contexte culturel, organisée à partir de ces grands types de tâches a pu être réalisée et faire l'objet d'une expérimentation.

Dans le cadre de la didactique française, quels échos trouvent ou peuvent trouver ces travaux en lien avec l'ethnomathématique ? Peut-on discerner des analogies en termes de conceptions des situations d'apprentissage ? Des « mathématiques analogiques » trouveraient-elles place dans les modèles de mathématisation, de conceptualisation que sous-tendent les cadres théoriques de la Théorie Anthropologique du Didactique et de la Théorie des Situations ?

L'article de Chevallard (1990), expose ses réactions à propos du recueil d'articles réuni et présenté par A. Bishop dans le numéro de la revue ESM dédiée à la question des liens entre éducation mathématique et culture en mai 1988. Chevallard se place en posture d'anthropologue centré sur les besoins de toute société démocratique, peu sensible aux conditions qui relèvent des particularismes locaux (du moins au sens que leur octroient les contributeurs).

Chevallard, nous semble t-il, reproche aux auteurs de ne pas prendre la mesure des métissages culturels qui ont permis l'émergence d'un corpus mathématique « constitué », (a priori au-delà des divergences culturelles d'origine), et d'oublier la nécessité d'un travail de transposition et de didactification qui permette de construire des organisations mathématiques enseignables.

C'est la raison pour laquelle il semble disqualifier les idées prônées par Gerdes : « défrigérer » des mathématiques cachées dans des traditions pour reconstruire des mathématiques enseignées qui valorisent la culture nationale (ou la réhabilitent) ; promouvoir la réinvention de concepts par les élèves à partir de production de techniques culturelles qui sous-tendrait l'accès à une pensée mathématique en elle-même (par analogie ?)

Cette absence de travail de transposition est aussi ce que semble relever Chevallard dans les propos de Bishop qui tend à traiter des notions protomathématiques sans prendre en compte les conditions d'émergence d'un savoir constitué et reconnu explicitement. Chevallard semble récuser la légitimité d'une éducation mathématique qui s'appuierait sur un processus d'enculturation.

En ce sens, le processus de transposition didactique parce qu'il opère habituellement à partir d'un savoir académique tout structuré pour aller vers une forme scolaire occidentale « naturalisée » pose toutefois question : quels possibles pour une transposition à l'adresse de formes scolaires « non occidentalisées » ?

Les propos de G. Brousseau à l'égard de l'ethnomathématique et de ses liens avec la didactique présentent des perspectives constructives. L'auteur soutient que la Théorie des situations didactiques pourrait s'élargir à l'ethnomathématique qui y trouverait un outil théorique et expérimental adéquat… Ingénierie didactique et théorie des situations, ethnomathématique pourraient constituer un nouveau domaine scientifique. Ce constat s'appuie sur les similitudes des objets d'étude. Brousseau écarte l'objection selon laquelle l'ethnomathématique étudie les mathématiques elles-mêmes et la didactique ses transpositions : toute trace d'activité mathématique comporte une composante didactique, en tant que construit culturel.

Tout un programme est peut-être en marche dans certains pays d'Afrique.

ANNEXE

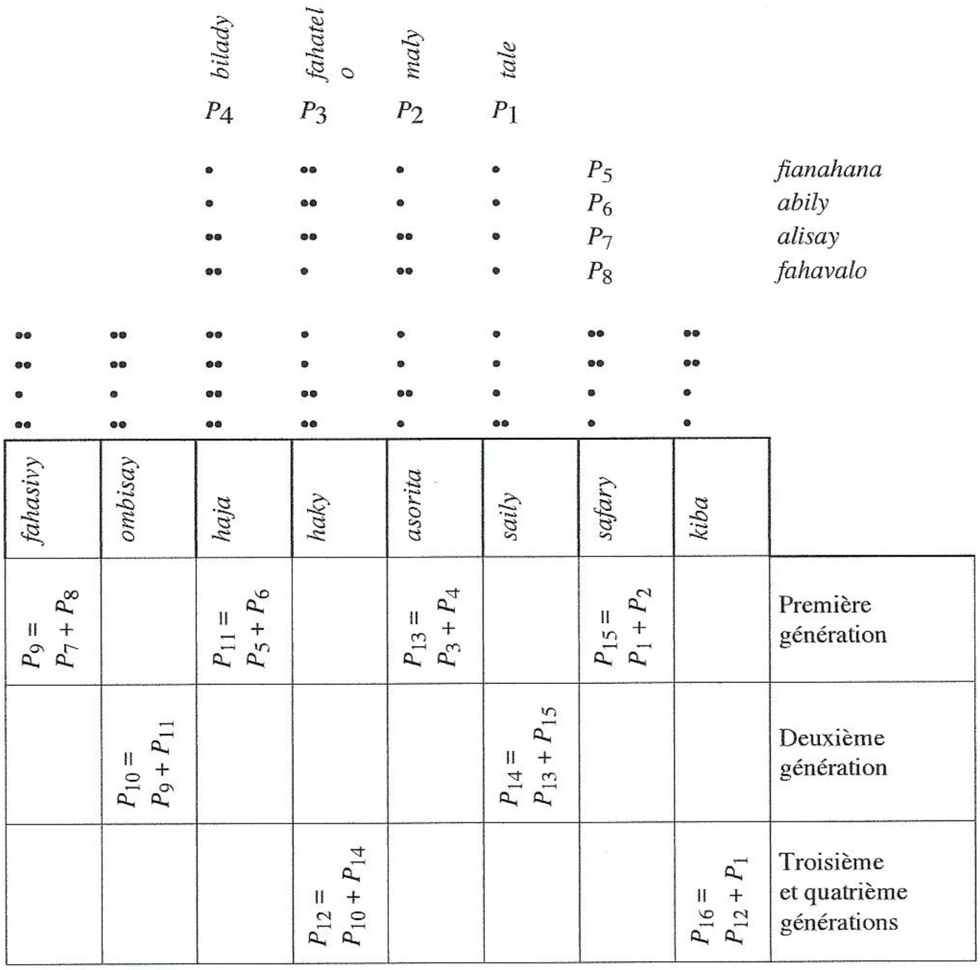


TABLEAU 4. Calcul des colonnes secondaires dites « filles »

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Bishop, A.J. (1993). Conceptualising cultural and social contexts in mathematics education. In B. Atweh, M. Carss & G. Booker (Eds). *Proceeding of the 16th annual Conference of MERGA (pp.5-10).* Brisbane: MERGA.

Brousseau,G. (2006) Didactique et ethnomathématiques, *VII réunion Didactiqa del Cone Sul 9-14 oct. 2006.* Sao Paolo. Brésil.

Chemillier M. (2007) Mathématiques de tradition orale, *Mathematics and social sciences (n°178),* p.11-40.

Chemillier M. (2007) *Les mathématiques naturelles,* Paris, Odile Jacob, 238p.

Chevallard, Y. (1990) On mathematics education and culture : critical afterthoughts, *Educational Studies in Mathematics* 21 :3-27 Kluwer Academic Publishers, printed in the Netherlands

D'Ambrosio, U. (2001). General remarks on ethnomathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM, International review on Mathematical Education)*, *33*(3), 67-69.

Gerdes, P. (1993), *L'ethnomathématique comme nouveau domaine de recherché en Afrique.* Institut Supérieur de Pédagogie du Mozambique, Maputo, Mozambique.

Gerdes, P. (1995), *Une tradition géométrique en Afrique les dessins sur le sable*, vol.2 Exploration mathématique et éducative. Paris, L'Harmattan, (pp. 257-429)

Philip J. Davis et Reuben Hersh (1981). *Mathematical experience*, National Book Award 1983.

Traore Kh., Bednarz N. (2008), Mathématiques construites en contexte : une analyse du système de numération oral utilisé par les Siamous au Burkina Faso, *Nordic Journal of African Studies 17(3) : 175-197*

Traoré Kh, Barry S. (2007) «La problématique d'une voie africaine en didactique des mathématiques : vrais et faux enjeux». RADISMA, Numéro 2 (2007), 30 mars 2007, http://www.radisma.info/document.php?id=476. ISSN 1990-3219

Vellard, D. (2009). Vers une éducation postcoloniale favorisant un développement endogène en Afrique sub-saharienne : proposition d'un enseignement endogène des mathématiques donné en langue locale à l'école primaire africaine et ouvert sur le monde, *Actes du colloque international EMF 2009*, Dakar, Sénégal. Groupe de travail 4 (pp. 124-138).

L'ANALOGIE DES BLICKS POUR INTRODUIRE LE CONCEPT ÉLÉMENT CHIMIQUE

Rita Khanfour-Armale
Université de Cergy-Pontoise
Rita.Khanfour-Armale@u-cergy.fr

1. INTRODUCTION [87]

La transformation chimique a donné lieu à d'innombrables recherches didactiques au cours desquelles plusieurs aspects ont été abordés. Celui de la conservation et de la non-conservation est essentiel et a fait l'objet de quelques travaux (Solomonidou & Stavridou, 2000) car ces deux aspects sont simultanément présents et difficiles à intégrer lors de l'apprentissage. En effet, au cours d'une telle transformation, les espèces chimiques ne se conservent pas alors que les éléments chimiques, dont elles sont constituées, eux, se conservent. L'enseignement doit ainsi s'efforcer de faire émerger, à peu près en même temps, les délicates notions de transformation chimique, d'espèce chimique et d'élément chimique. Dans leur étude sur la construction de la notion d'espèce chimique, Solomonidou et Stavridou (2000) ont constaté que des lycéens avaient le plus grand mal à comprendre que, lors d'une transformation chimique, les changements observés correspondent à des changements d'espèces chimiques. Ces auteurs rapportent des phrases fréquemment entendues, telles que « l'espèce chimique blanche a changé de couleur », avec l'idée qu'il s'agit toujours de la même espèce chimique.

La notion d'invariant est essentielle en science parce que les grandeurs qui se conservent, comme l'énergie, la masse ou la charge permettent d'étudier de nombreuses situations. La notion d'élément chimique est également un invariant, mais à la différence de ceux qui viennent d'être cités, il ne s'agit pas d'une grandeur, et à ce titre n'est donc ni mesurable ni calculable.

Pour enseigner la notion d'élément chimique deux possibilités peuvent être envisagées : soit de partir de la structure de l'atome et, moyennant l'hypothèse que son noyau est préservé lors des transformations chimiques, en déduire la propriété de conservation qui caractérise cette notion ; soit encore mettre en évidence la conservation de « quelque chose » qui permet de faire émerger ensuite la notion. Dans tous les cas, il est prévu que l'élève construise la notion d'élément chimique avec peu de connaissances de chimie. On est ainsi ramené à l'enseignement d'une notion fondatrice de la connaissance de l'élève, c'est-à-dire d'une notion qui ne peut s'appuyer sur d'autres connaissances du même champ disciplinaire et avec laquelle celui-ci va se construire. Ce n'est jamais simple (CNCRE, 1998). Dans de tels cas, le recours à l'analogie est souvent proposé, en ce qu'elle favorise la création d'un modèle provisoire permettant à l'élève de se faire une idée de la notion à apprendre grâce à une autre qui lui est plus familière (Gilbert 1989).

[87] Ce texte a pour origine l'article de Khanfour-Armalé, R. & Le Maréchal, J.-F (2008). Construire une catégorie grâce à une analogie : Cas du concept d'élément chimique. *Didaskalia* n°32, juin 2008, pp.117-157.

Pour autant, l'analogie, quand elle est utilisée dans l'enseignement, doit l'être avec certaines précautions. Ainsi, une analogie apprise par cœur, sans que du sens lui soit donnée, peut être néfaste pour l'apprentissage. Taber (2003) précise qu'il ne sert à rien qu'un élève puisse répéter qu'une structure métallique est comme des cations métalliques baignant dans une mer d'électrons, surtout s'il imagine, au premier degré, que les structures métalliques contiennent de l'eau par exemple.

Dans le cas de la transformation chimique, le problème est d'abord de remettre en cause la conservation de la substance puisque, par exemple le cuivre métallique disparaît quand il est immergé dans l'acide nitrique, cela se voit. Le problème est ensuite de faire émerger un nouveau type de conservation, celui d'élément chimique, qui lui ne se voit pas. Ce type de conservation se distingue encore par le fait qu'il n'appartient de près ou de loin à aucune des catégories de Piaget. La conservation d'un élément chimique met donc en jeu des schémas plus complexes que nous allons explorer.

2. Les travaux sur l'élément chimique

Entre l'élément chimique et l'atome, il y a une relation d'hyperonymie[88] comme fruit et pomme, ou siège et chaise. En accord avec cette relation, Viovy (1984) formule la définition de la façon suivante : l'élément est ce qui est en commun au corps simple et à tous les corps composés qu'il peut former (ex. : l'élément oxygène est commun au dioxygène (gaz oxygène), à l'ozone et à tous les composés oxygénés).

Il nous est apparu essentiel de se priver de l'écriture symbolique des équations chimiques, d'apparence facile (Hesse & Anderson, 1992), mais pour laquelle la signification en relation avec les théories et modèle qui leur donne sens est absente chez l'apprenant de ce niveau (Yarroch, 1985). Pour cet auteur, équilibrer une équation chimique n'est qu'un jeu mathématique d'additions et d'égalités de symboles de part et d'autre d'un signe égal fictif. Pour cette raison, nous avons basé la séquence d'enseignement sur une analogie que nous allons analyser. Cette analogie, d'apparence naïve, présente plusieurs originalités dont la pertinence va être justifiée tant d'un point de vue théorique que par l'apprentissage que nous avons constaté chez des élèves de Seconde.

Quand des transformations chimiques sont impliquées sans prendre en compte leur aspect quantitatif (bilan de matière par exemple), les difficultés (niveau lycée) se traduisent par le fait que les élèves ne font pas apparaître des connaissances théoriques qu'ils connaissent pourtant par ailleurs. Au lieu d'interpréter des observations relatives aux réactions chimiques par des réarrangements d'atomes, ils en appellent fréquemment à des analogies superficielles d'événements de la vie quotidienne, par exemple « rouiller, c'est se détériorer » (Hesse et Anderson 1992). En cela, ils acceptent que les propriétés d'un composé chimique se modifient même ne soit modifié. Si la modification du composé chimique est reconnue, alors les élèves l'imaginent facilement comme le résultat du mélange et non comme un réarrangement des structures moléculaires (Hesse & Anderson, 1992).

3. Cadre théorique

L'analyse des programmes de seconde montre que l'élève doit apprendre la notion d'élément chimique alors qu'il ne dispose que de peu de connaissances en chimie. Il sait à

[88] Hyperonymie, subst. fém. Relation d'inclusion établie entre un terme général et un ou plusieurs termes spécifiques. D'après le dictionnaire *Trésor de la langue française*.

peine ce qu'est une transformation chimique, n'a aucune notion d'atomistique, pas plus qu'il ne connaît la classification périodique. La principale caractéristique de l'élément chimique sur laquelle l'enseignant est supposé s'appuyer est celle de conservation au cours des transformations chimiques. L'objet de ce cadre théorique est de montrer que la notion de conservation d'un élément chimique diffère largement de la conservation telle qu'elle est acquise chez l'enfant.

3.1. Création d'une catégorie : élément de psychologie cognitive

Construire chez l'élève le concept d'élément chimique revient à construire, non pas une nouvelle catégorie, mais un nouveau type de catégorie. Il s'agit de regrouper des entités que l'élève n'a jamais vues (atomes ou ions de différents isotopes) ayant le même nombre de protons dans leur noyau (concepts inconnus de l'élève) sous l'hypéronyme d'élément chimique. A la place, la catégorie qu'il faut construire est définie par la seule propriété de conservation lors d'une transformation chimique. Outre la difficulté de donner du sens à une catégorie ainsi définie, il faut garder à l'esprit que la notion de transformation chimique est en cours de construction chez l'élève. La construction de la notion d'élément chimique est basée sur les expériences suivantes : oxyder (et donc faire disparaître) du cuivre métallique en ions Cu^{2+}, puis faire quelques transformations chimiques dont la dernière fait réapparaître le métal, caractérisé par sa couleur. C'est là tout l'intérêt du choix du cuivre. La conclusion d'un tel travail est que si le cuivre métallique a pu disparaître puis réapparaître, c'est que quelque chose en rapport avec lui se conserve (Laugier & Dumon, 2003). Dans le langage habituel, celui-ci désigne en effet soit le *métal cuivre*, soit l'*élément chimique cuivre*. L'hypothèse que seul le premier sens soit connu des élèves peut être formulée. Ainsi, évoquer le terme *cuivre* à des élèves revient, de leur point de vue, à parler du métal, alors que le plus souvent, l'enseignant semblerait avoir en tête l'élément chimique.

La figure 1 représente les diverses connaissances liées à la notion d'élément chimique. Les relations entre ces connaissances sont indiquées par des liens. En gris gras apparaissent les connaissances et les relations qui doivent être construites, à partir de celles, déjà connues qui sont indiquées en noir maigre. Ce schéma précise : la connaissance initiale des élèves pour qui cuivre et métal cuivre sont identiques ; la polysémie qui existe autour du mot *cuivre*, suivant qu'il est métal ou élément chimique ; le fait que l'élément chimique cuivre est un élément de la catégorie *éléments chimiques ;* et les principales propriétés de l'*élément chimique* qui permettent de définir la catégorie.

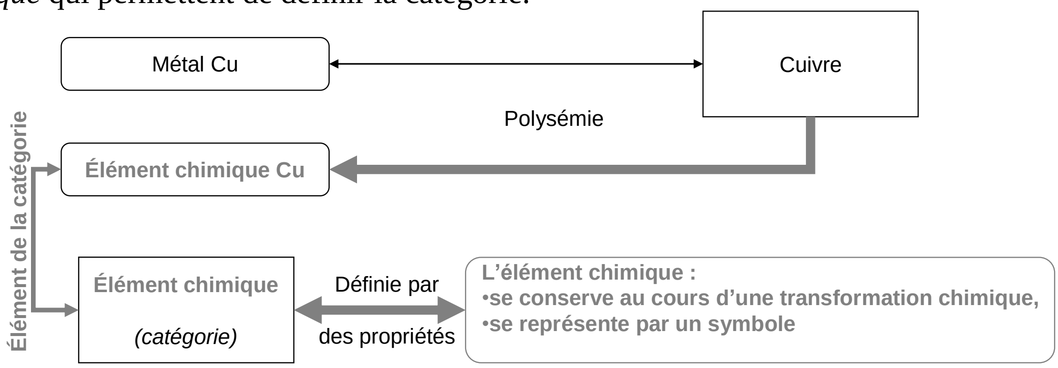


Figure 1 – Les diverses connaissances liées à la notion d'élément chimique dans la situation d'enseignement étudiée.

3.2. Analogie

La puissance de l'analogie réside dans l'association d'une situation source, connue, et d'une situation cible, à découvrir grâce à des points communs avec la source (Sander, 1998).

L'utilisation de la dualité cible / source dans l'enseignement a été largement étudiée (voir par exemple Glynn & Takahashi, 1998). Ces auteurs rappellent six lignes directrices à suivre : (a) Introduire le concept cible, (b) s'assurer que la situation source est connue de l'élève, (c) identifier les caractéristiques pertinentes de la cible et de la source, (d) comparer leurs points communs, (e) donner les limites de la dualité cible / source, et finalement (f) conclure. Ces six lignes ont été rédigées pour des situations où les analogies sont présentes dans un livre ou dans un cours. Dans notre cas, où les élèves seront dans une situation d'investigation expérimentale en relative autonomie suivie de moments de commentaires en classe entière, ces six points seront adaptés comme il sera décrit dans la partie méthodologique de cet article.

4. Questions de recherche

La validation de la séquence d'enseignement de l'élément chimique qui va être proposée, en s'appuyant sur une analogie de la transformation chimique, est structurée en trois questions de recherche :

1) Pendant le travail des élèves, le transfert de l'analogie entre la source et la cible a-t-il lieu ?
2) La polysémie liée à un terme comme « cuivre » engendre-t-elle une contradiction ? Sera – t- elle profitable à l'apprentissage ?
3) Quel est le fonctionnement de l'enseignant lors du bilan de cette séquence ?

5. Méthode

5.1. Recueil et analyse des données

La séquence d'enseignement mettant en scène l'analogie ci-dessous a été élaborée avec des enseignants en tenant compte de la figure 1. Elle a été testée pendant plusieurs années avec une dizaine d'enseignants afin d'améliorer la présentation du texte de la tâche, et sa réalisation en classe. Une fois le texte stabilisé, ce qui constitue une condition nécessaire à sa validation, des données ont été prises pendant deux ans dans divers établissements en classe de Seconde afin d'être analysées et croisées :

- les réponses écrites dans 98 comptes rendus (196 élèves) dans différentes classes;
- l'observation de 2 binômes d'élèves qui ont été filmés pendant la séance de TP;
- l'observation de trois professeurs (pseudos : H, M et D) qui ont été filmés (H quatre fois, M deux fois et D une fois) alors qu'ils utilisaient le travail des élèves pour introduire la notion d'élément chimique.

L'analyse de ces données doit permettre de confirmer que les six lignes directrices (voir 3.2) ont été prises en compte, soit par les élèves en autonomie, soit par l'enseignant lors de ses commentaires. Des indices seront recherchés soit dans les données élèves, soit dans les observations de l'enseignant. La suite présente d'abord la séquence d'enseignement qui contient l'analogie et son utilisation, puis l'intérêt de la séquence utilisée, au regard de l'analogie, et enfin la méthode d'analyse des données filmées.

5.2. Séquence d'enseignement

L'introduction de l'élément chimique se base sur une activité expérimentale classique qui consiste à faire « disparaître » du cuivre métallique et le faire « réapparaître » pour en inspirer l'idée de conservation (Viovy, 1984). Cette démarche, qui s'apparentait en 1984 à de l'inductivisme, est doublée ici de l'utilisation d'une analogie dont la représentation joue le rôle de modèle provisoire (Justi & Gilbert, 2006). Celui-ci devrait contribuer, dans un second temps, à permettre la compréhension de la notion d'élément chimique. Dans ce qui suit nous détaillons seulement la partie concernant l'analogie.

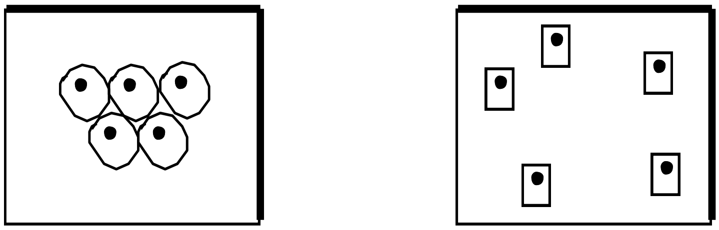
L'élève trouve sur sa paillasse des échantillons métalliques et la question (la première question) suivante est posée. Comment peut-on reconnaître simplement le cuivre d'autres métaux comme le fer ou le plomb ? Cette première question exploite la connaissance initiale de l'élève (flèche supérieure figure 1). Elle prépare la reconnaissance du cuivre à la partie 5.

5) Les " Blicks "[89] sont des êtres imaginaires : admettons que l'on en a enfermé 5 dans une boîte ; voir le schéma ci-dessous. On observe la boîte le matin et le soir.

A partir des schémas des deux boîtes rectangulaires ci-contre répondre aux questions a et b :

Question a : Qu'est ce qui ne s'est pas conservé dans cette boîte ?

Question b : Qu'est ce qui s'est conservé pendant la transformation ?

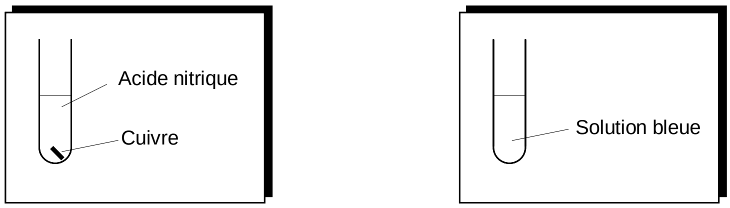


une boîte le matin — la même boîte le soir

Le contenu de la boîte s'est transformé entre le matin et le soir.

Cette 5[e] question met l'élève face à la source de l'analogie. C'est la première étape d'un fonctionnement par analogie (Sander, 1998, p.27). L'idée est d'attirer l'attention de l'élève sur ce qui est essentiel, une transformation dans laquelle certaines « choses » se conservent et d'autres non. Ces idées sont à la base de la construction de la catégorie « élément chimique », voir Figure 1, et permettront d'interpréter la transformation chimique en s'appuyant sur l'analogie. La représentation des Blicks oriente vers l'idée que les noyaux des atomes se conservent lors d'une transformation chimique. Une limite de cette analogie est l'absence de prise en compte de la notion de stœchiométrie[90], mais celle-ci n'est objet d'apprentissage que plusieurs mois après dans la séquence d'enseignement adoptée.

6) A propos de l'expérience entre le cuivre et l'acide nitrique que l'on peut schématiser ainsi, répondre aux questions C et D :



Tube à essais au début — et à la fin de l'expérience

Le contenu du tube s'est transformé entre le début et la fin de l'expérience.

Question c: Qu'est-ce qui ne s'est pas conservé dans ce tube ?
Question d : Qu'est-ce qui s'est conservé pendant la transformation ?
Quel lien peut-on établir entre les boîtes de Blicks de la 5 et cette expérience avec le cuivre et l'acide nitrique?

Il s'agit maintenant d'aborder le cœur de l'apprentissage de l'élément chimique. On attend pour la question c : « le cuivre a disparu, la solution s'est colorée, les vapeurs rousses sont apparues », et pour la question d que « le cuivre est toujours présent dans la solution bleue, puisqu'il peut "réapparaître" ». Comment est-ce possible que le cuivre puisse disparaître tout en restant présent ? Dans ce qui suit, nous évoquons ce point en termes de

[89] Le terme de Blicks a été choisi parce que, lors de nos premières tentatives d'utilisation de tels schémas, les élèves se posaient inutilement la question de savoir ce que représentaient ces formes.

[90] Partie de la chimie qui mesure les proportions dans lesquelles des éléments chimiques produisent une réaction déterminée, ainsi que les quantités des substances résultant de toute réaction chimique.

contradiction. Celle-ci est due à la polysémie du mot cuivre (Figure 1). Nous nous sommes intéressés à savoir si elle apparaissait effectivement, et comment les élèves s'en sortaient, puis comment les enseignants l'utilisaient. Suivant les enseignants, la suite du TP a pris différentes formes. Le plus souvent, la notion d'élément chimique, ***en termes de conservation et de son symbole***, une fois introduite est réutilisée dans des réactions de précipitation d'hydroxyde de cuivre et de formation d'aminocomplexe[91]. A chaque fois, la solution bleu pâle est restituée par acidification. De nouveaux petits cycles peuvent être soumis à la sagacité des élèves.

Les connaissances *a priori* d'un tel TP sont résumées dans la figure 2. Cette figure montre comment la contradiction a été préparée par les branches de gauche (non-conservation) et de droite (conservation).

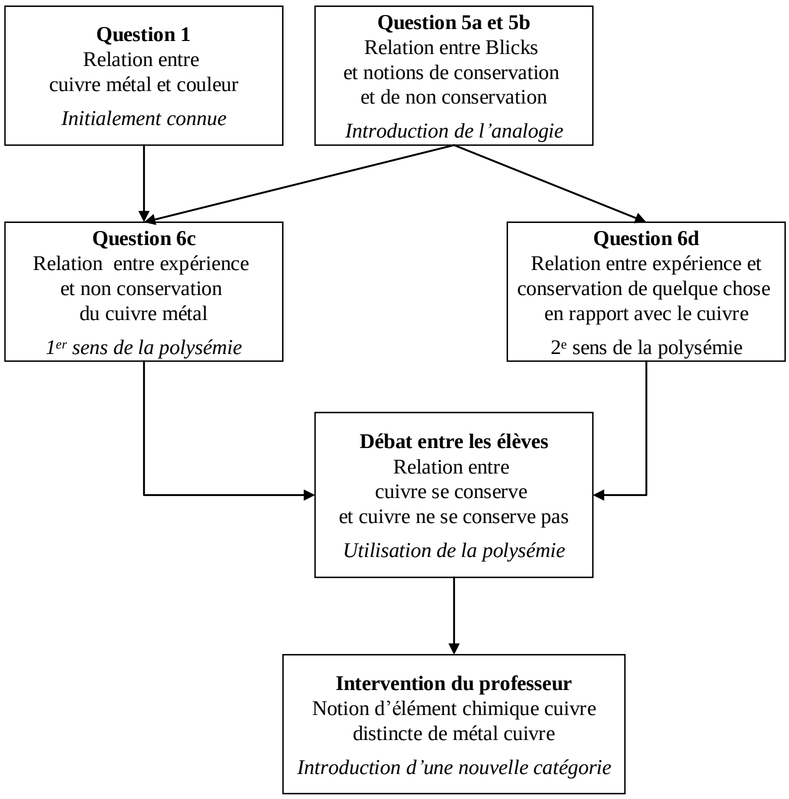


Figure 2 – Principales connaissances a priori mises en jeu pendant l'activité. Les flèches indiquent la filiation des idées.

5.3. Analyse de la situation des Blicks

La transformation des Blicks se déroule avec quelques changements (de forme et d'espacement) et quelques conservations (du nombre de Blicks et de la présence de leur noyau), et par ailleurs la transformation chimique se déroule aussi avec au moins un changement (le métal cuivre disparaît) et au moins une conservation (l'élément chimique cuivre est conservé). Par ailleurs, la boîte de Blicks est analogue au tube à essais, puisque les relations entre les Blicks le matin et les Blicks le soir sont analogues aux relations entre les tubes à essais avant et après transformation (figure 3).

L'analogie entre les deux situations a été conçue pour effectuer un travail sur la polysémie (figures 1 et 2). On constate qu'à chaque sens du mot *cuivre* est associée une relation entre le tube à essai avant et après transformation, et que ces deux relations ont leurs

[91] Molécule ou ion dans lequel un atome central est lié à d'autres atomes en nombre supérieur (ligand) à la charge ou au degré d'oxydation de l'atome central. Ici il s'agit du ligand ammine NH3.

analogues avec les Blicks. Au-delà de la relation entre situations source et cible, il est permis d'espérer que les propriétés de conservation et de non-conservation soient mises au centre de la réflexion des élèves, comme une façon privilégiée d'introduire la notion d'élément chimique.

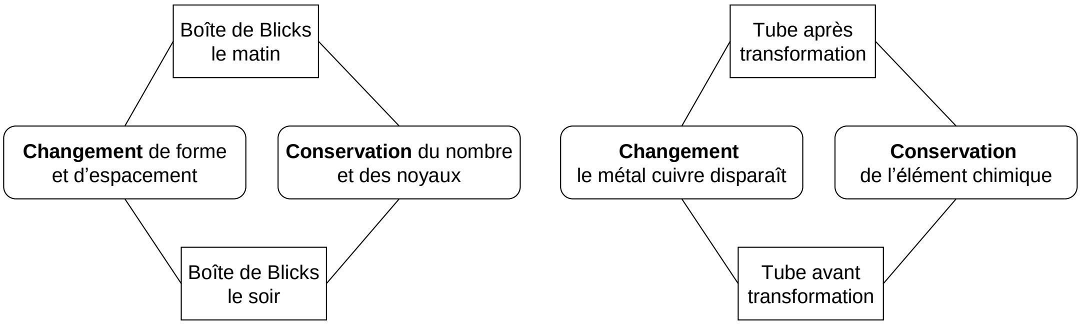


Figure 3 – Analyse de l'analogie entre la boîte de Blicks et le tube à essai dans lequel s'effectue la transformation chimique.

5.4. Méthode d'analyse

L'analyse des comptes rendus et des binômes filmés a consisté à catégoriser les réponses aux questions apparaissant figure 2. Les traces de ce qui concernait la polysémie ainsi que la contradiction ont été relevées. Le tableau 5 (voir 7.1.3.) n'a été rempli, pour des raisons de temps, que dans deux classes (31 binômes) pendant le TP. Nous n'avons pas étudié les questions correspondantes quand les enseignants les ont traitées collectivement avec leurs élèves. Cette question D a été analysée en recherchant comment les critères de conservation et de non conservation apparaissaient dans les schémas produits par les élèves.

Nous nous sommes intéressés aux interventions des professeurs dans les vidéos où nous avons cherché à savoir comment intervenait l'analogie.

6. RÉSULTATS

6.1. Transfert source – cible et conservation

Le transfert source-cible est examiné à la fois à travers les 98 comptes rendus des élèves et les transcriptions des enregistrements vidéos de deux binômes. Il constitue une partie de la validation de la séquence d'enseignement. La situation initiale (cuivre / acide nitrique) et les expériences sur la solution ionique seront analysées.

6.1.1. Fonctionnement de l'analogie

Les connaissances effectivement mises en jeu par les élèves sont décrites ici dans le même ordre que sur la figure 2.

- A la question 1, 96 des 98 comptes rendus ont proposé de reconnaître le cuivre à sa couleur. Il s'agit là d'une confirmation que la ligne directrice (a) – introduire le concept cible – a été prise en compte ; les élèves se sont donc appropriés une première notion en relation avec le concept cible.
- A la question 5a, la forme et la disposition des Blicks ont été considérées par 85 des 98 comptes rendus comme « ne se conservant pas » dans la transformation impliquant les Blicks. A la question 5b, 46 des 98 comptes rendus indiquent que le noyau et le nombre des Blicks étaient conservés pendant cette transformation, et

52 écrivent que l'une ou l'autre de ces caractéristiques se conserve, en plus d'autres comme structure, taille... Cela montre que la ligne directrice (b) – s'assurer que la situation source est comprise des élèves – est en place. Cela indique également que la notion de conservation (et de non conservation) émerge explicitement pour la source.

- A la question 6c, 87 des 98 comptes rendus indiquent que le cuivre ne se conserve pas, et à la question 6d, 42 indiquent que le cuivre se conserve. Alors que les autres questions ont permis de mettre en jeu l'essentiel des connaissances importantes de l'activité, seuls 33 comptes rendus font apparaître simultanément que le cuivre s'est et ne s'est pas conservé. Les lignes directrices (c) – les caractéristiques pertinentes de la cible et de la source ont été relevées – et (d) – des comparaisons entre leurs points communs ont eu lieu – sont donc acquises pour une partie des élèves.

Ces résultats indiquent comment l'analogie a fonctionné chez la plupart des élèves. Ils montrent également qu'une propriété commune aux situations source et cible (conservation et non conservation) a pu devenir un centre d'intérêt crucial de la discussion des élèves.

6.1.2. Rôle de l'analogie

Le rôle de l'expérience en relation avec la situation analogue des Blicks a été déterminant puisqu'il a permis au moins à la moitié des élèves de prendre simultanément en compte la non-conservation et la conservation du cuivre. Savoir si les Blicks ont été importants pour les élèves est discutée avec la question 6d et à la dernière question lorsque l'on demande aux élèves de produire des représentations inspirées des Blicks pour traduire d'autres cycles impliquant l'élément chimique cuivre.

Les comptes rendus de la question 6d : *Quel lien peut-on établir entre les boîtes de Blicks de la question 5 et cette expérience avec le cuivre et l'acide nitrique* font apparaître 72 fois sur 98 (72%) l'idée : « Comme les Blicks, le cuivre a changé de forme / d'aspect ». Pour 12 autres comptes rendus, on a trouvé « Le même fonctionnement [pour le cuivre que pour les Blicks] ». La relation attendue apparaît donc largement et de façon correcte puisque seuls 14 binômes sur 98 (14%) ne font pas de relation avec les Blicks.

A l'issue de ce travail, les enseignants interrompent l'activité expérimentale pour introduire la notion d'élément chimique, y compris sa notation symbolique (par exemple Cu pour le cuivre). Celle-ci peut donc être utilisée dans la suite du travail.

6.1.3. Transfert de l'analogie

La suite du travail propose une série d'expériences pour généraliser la conservation de l'élément chimique cuivre à d'autres transformations et pour faire intervenir le transfert de l'analogie, mais cette fois en relation avec les symboles chimiques.

• Description du travail

Cette partie, pour laquelle nous n'avons conservé que les travaux réalisés en autonomie, et non ceux remplis sous la direction de l'enseignant, est étudiée par l'intermédiaire de 31 comptes rendus. Elle consiste en quelques expériences en tubes à essais. La solution bleue contenant des ions Cu^{2+} est mise en milieu basique pour former le précipité $Cu(OH)_2$ puis redissous en milieu ammoniacal pour former l'ion $Cu(NH_3)_4{}^{2+}$. Enfin, un ajout d'acide nitrique permet de faire réapparaître la couleur bleue caractéristique des ions Cu^{2+}.

formule chimique	aspect couleur	état physique	préciser : métal, ions ou précipité ?	obtenu par quelle transformation ?
Cu^{2+}	bleu pâle	en solution		
Cu	rouge-orangé	solide		
$Cu(NH_3)_4^{2+}$	bleu céleste	en solution		
$Cu(OH)_2$	Bleu	solide		

Tableau 5 – Les formules chimiques et quelques propriétés des corps chimiques

L'interprétation de ce cycle, un peu plus long que le précédant puisqu'il met en jeu trois réactions et non deux, a été proposée (tableau 5). Celui-ci associe l'ensemble des manipulations expérimentales de la séance et les couleurs observées (bleu pâle, orangé, bleu céleste). Il met également en évidence la variété des formes (en solution ou solide ; ion, précipité ou métal) sous laquelle l'élément chimique est impliqué, alors même qu'il se conserve. Les différents états physiques ont été fournis aux élèves car ceux-ci ne connaissent pas l'état « en solution » pour un ion. Dans ces conditions, le tableau fut correctement rempli dans 100% des comptes rendus, soit en rappelant le mode opératoire utilisé, soit en indiquant seulement le réactif impliqué dans la transformation, voire le numéro de la transformation.

Le remplissage du tableau par les élèves implique qu'ils ont fait des liens entre les expériences réalisées, leur description et la nature des « objets » (métal, ions) impliqués dans les transformations. Cela constitue un indice que ces connaissances de diverses natures font sens pour les élèves.

• Relation source – cible lors du transfert

Une fois le tableau rempli, les élèves devaient réutiliser l'analogie des Blicks pour décrire ces nouvelles transformations et répondre à la question : « De même que les boîtes de Blicks illustrent l'une des transformations chimiques de la question ***B***, proposer, toujours à l'aide de Blicks, une illustration des transformations chimiques de la question ***C***. » Les 31 comptes rendus font effectivement apparaître des représentations de type Blicks.

Nous avons cherché à savoir si l'utilisation que les élèves en font laisse apparaître la relation avec la réaction chimique, et la conservation / non-conservation de certains critères propres aux transformations chimiques. Nous avons considéré que la relation avec les réactions chimiques était effective (23 sur 31 comptes rendus) soit quand les élèves ont mis sur le même schéma des Blicks et des symboles chimiques (20 sur 31 ; voir Figure 4), soit s'ils ont réutilisé la numérotation des réactions chimiques (8 sur 31 ; voir figure 5). Certains ont les deux critères.

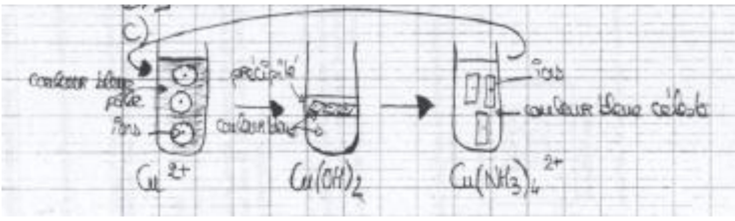


Fig. 4 – Mise en correspondance de l'analogie des Blicks avec les symboles chimiques.

• Conservation lors du transfert de l'analogie

Les critères de conservation, notion essentielle, touchent à la quantité de Blicks utilisée, et au fait que, s'ils ont un noyau dans une représentation, tous doivent l'avoir. Nous avons observé que 25 des 31 comptes rendus conservent le même nombre de Blicks et 30 conservent le noyau. Les raisons pour lesquelles les élèves n'ont pas respecté la conservation du nombre de Blicks sont variées. Le non respect 'simple' est exceptionnel (Fig.5). En revanche, la non-conservation intervient notamment quand l'élève a cherché à étendre l'analogie à d'autres éléments chimiques que le cuivre (Fig.6). Cela peut être mis en relation avec l'absence de généralisation à d'autres éléments chimiques à ce stade de l'enseignement.

Cette analyse indique donc que l'utilisation de l'analogie permet de comprendre l'essentiel de la notion de conservation même si sa mise en forme n'est pas générale dans les cas difficiles. Elle montre la limite de l'utilisation des Blicks, à savoir que si plusieurs éléments chimiques peuvent être simultanément représentés avec leur caractère conservatif sur un même schéma, ceux appartenant au solvant (H et O) peuvent ne pas l'être. Bien que cette limite de l'analogie apparaisse dans les productions des élèves, nous n'avons vu aucun des enseignants la reprendre en classe entière. A ce titre, la ligne directrice (e) n'a pas été mise en jeu.

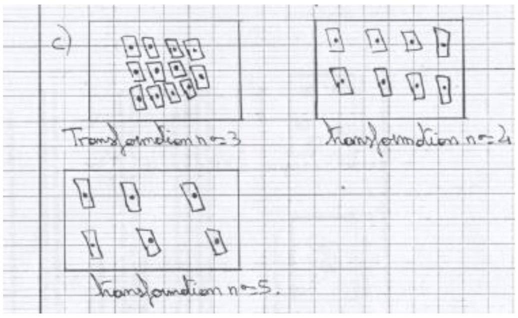


Fig. 5 – Schéma d'élève montrant le non respect de la conservation (cas rare).

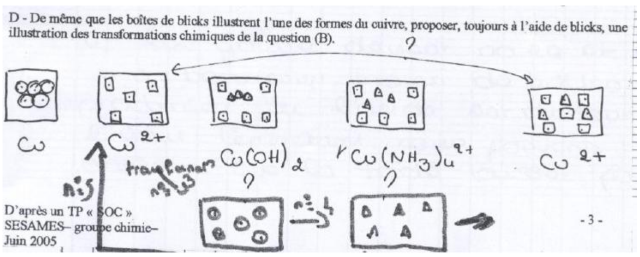


Fig. 6 – Schéma d'élève montrant le respect de la conservation pour Cu et le non respect pour d'autres éléments chimiques.

• Affinement de la compréhension de l'analogie lors du transfert

La représentation d'une transformation doit nécessairement faire apparaître certaines non-conservations, comme la représentation du changement d'état physique dû à la formation ou à la redissolution d'un précipité dans les exemples qui nous concernent. Nous nous sommes posé la question de savoir si la dispersion des ions en solution, comparée à la phase condensée que représente le précipité, a été prise en compte par les élèves dans l'analogie des Blicks. Nous avons constaté que 30 des 31 comptes rendus (97%) ont proposé des modifications d'espacements, et que 26 d'entre eux (84%) ont modifié la forme des Blicks. Parmi ceux-là, 17 (51%) ont fait correspondre l'état condensé du précipité avec des Blicks au contact, et l'état en solution avec des Blicks dispersés (Fig.4), comme s'ils avaient décodé d'eux-mêmes cette correspondance sur l'analogie donnée dans le TP. Les quelques éléments, sur le modèle particulaire de la matière, enseignés au collège, en particulier sur les solides et les liquides, ont dû être activés lors de ce travail. En revanche, sur l'exemple de la figure 4, les espacements sont variables, mais pas en correspondance avec le changement d'état, et la forme des Blicks est la même avant et après. Ajoutées à ce qui a été dit précédemment sur le réinvestissement des Blicks, ces informations montrent que l'analogie permet de donner du sens à des transformations chimiques, en respectant la conservation et la non-conservation de certaines notions qui comptent pour le chimiste.

6.2. Polysémie et contradiction

Nous montrons ici que la contradiction s'installe effectivement et nous examinons la façon dont les élèves la gèrent. Rappelons que la gestion de la polysémie du terme « cuivre », à l'origine de la contradiction, nous parait capitale pour comprendre la notion d'élément chimique au sens strict.

6.2.1. Entrée dans la contradiction

La contradiction conservation / non-conservation du cuivre est clairement apparue dans le débat d'un des deux binômes filmés (« le cuivre a disparu », et « le cuivre s'est conservé »), ce qui montre que l'analogie et l'expérience ont joué leur rôle respectif. Il en est ainsi d'une analogie, de permettre l'attribution d'une propriété cruciale d'un objet de la situation source (la conservation des Blicks) à un des objets de la situation cible (la conservation du « cuivre ») (Sander, 1998, p.51). Quant à l'expérience, elle a clairement montré que le « cuivre » (le copeau métallique) ne se conservait pas lors de la transformation chimique.

6.2.2. Sortie de la contradiction

Les élèves ont cherché à lever leur contradiction, exemple de tour de parole « [le cuivre] s'est conservé mais liquide ». L'intérêt d'une telle distinction entre le « morceau de cuivre » et le « cuivre conservé mais liquide », tient au fait que le terme « cuivre » jusqu'à présent utilisé, a donné naissance à deux notions (le morceau qui ne se conserve pas, et autre chose qui se conserve). L'enseignant introduira également deux notions : « le cuivre métal » et « l'élément chimique cuivre ». En favorisant la distinction de deux concepts, l'analogie a permis aux élèves d'adapter leur point de vue sur la situation expérimentale au point de vue théorique qui distingue métal et élément chimique. Par là, l'analogie estompe une difficulté centrale de l'activité de modélisation qui provient du fait que la structure des connaissances sur le champ expérimental n'est pas isomorphe à celle du niveau théorique. Cette adaptation des deux niveaux de connaissance, délicate pour les élèves, est advenue avec la sortie de la contradiction qui se traduit par la distinction des deux sens du mot « cuivre ».

Ces résultats montrent que la séquence d'enseignement peut soulever une contradiction. Nous avons fait l'hypothèse que celle-ci était indispensable pour que la polysémie du terme « cuivre » puisse être traitée par l'enseignant lors du bilan. Bien avant celui-ci, dans le feu de l'action, certains élèves (au moins ceux observés en vidéo) sont sortis de la contradiction en faisant émerger deux notions distinctes autour du terme « cuivre ». C'est un pas important dans l'apprentissage de la notion d'élément chimique.

6.3. Les enseignants et la séquence

Une dizaine d'enseignants ont été impliqués dans la préparation, la réalisation et l'amélioration de cette activité au cours d'une douzaine d'années. Trois ont souhaité fournir des explications à l'ensemble de la classe juste après la question 6, quitte à ce que les élèves ne terminent pas la totalité du travail demandé lors de la séance. Deux d'entre eux (H et M) ont été filmés pendant cette explication. Six enregistrements sont ainsi disponibles. Un septième a été réalisé avec un autre professeur (D) qui a regroupé l'ensemble de ses commentaires dans la séance suivante.

6.3.1 Réutilisation de la situation expérimentale et de l'analogie par l'enseignant

Lors du bilan de ce TP, les trois enseignants ont commencé par reprendre l'analogie et la situation expérimentale avant d'introduire la notion d'élément chimique. Dans la discussion de classe qui précède cette introduction, nous avons constaté que le professeur fait intervenir les Blicks en tant qu'objet. Il évoque leur forme, leur nombre, leur structure : « *ils sont collés / ils sont des êtres imaginaires / ce sont des choses différentes* ». De plus, cette évocation est en relation avec la transformation et la conservation : « *le contenu de la boite s'est transformé là on a fait des transformations est ce qu'on peut raisonner un peu de la même façon / ça veut dire qu'est ce qui s'est conservé qu'est ce qui ne s'est pas conservé pendant la transformation et on parle de quelle transformation ?* ». Cette discussion fut de durée variable mais a toujours eu lieu. En revanche, les connaissances impliquées : la non-conservation et la conservation du cuivre, la contradiction qui en résulte et l'introduction de la notion d'élément chimique qui vient ensuite, ont profondément différé entre ces enseignants. H, enregistré quatre fois en deux ans, a fait intervenir toutes ces notions dans cet ordre. M, enregistré deux fois la même année, n'a pas explicité la contradiction, pas plus que D qui n'a également pas parlé de conservation avant d'introduire la notion d'élément chimique.

L'ensemble des résultats présentés dans cette partie permet de conclure que l'analogie fonctionne. Les élèves ont effectivement utilisés ses différents attributs et ont pu la réinvestir dans une autre situation, tout en prenant en compte d'anciennes connaissances sur le modèle particulaire et les différents états de la matière. Les observations expérimentales ont également été utilisées en relation avec l'analogie, même s'il n'est pas évident que les élèves reconnaissent en elles l'indice que le cuivre ait été conservé. Ceci était pourtant pris pour acquis dans les différentes publications impliquant cette méthode pédagogique. L'analogie a donc le plus souvent joué son rôle de modèle provisoire. La polysémie du cuivre a largement pu être mise à profit pour que de nombreux élèves fassent émerger le besoin d'un nouveau concept que l'enseignant a institutionnalisé sous le nom d'élément chimique. Une notation symbolique a été en même temps introduite et les élèves ont pu l'utiliser en lui donnant du sens, ce qui est reconnu comme une difficulté. Lors du bilan, les enseignants ont pu éprouver des difficultés pour rassembler l'ensemble des connaissances avant d'introduire la notion d'élément chimique, et cette introduction n'a pas toujours pu respecter la polysémie du terme « cuivre ».

7. Discussion et application à l'enseignement

7.1. L'élément chimique et les enseignants

Ce n'est pas parce que le cuivre métallique a pu disparaître et réapparaître qu'on peut être convaincu que quelque chose en rapport avec lui a toujours été présent. Nombre de contre-exemples pourraient être fournis, ainsi, les arbres perdent leurs feuilles à l'automne et en retrouvent au printemps sans que celles-ci se conservent. Or, dans leur discours, les enseignants semble prendre pour acquis que l'expérience « démontre » la permanence de quelque chose : « *on ne peut pas dire le morceau de cuivre s'est conservé est ce qu'on peut dire ça / non parce qu'il a disparu mais le cuivre quand même il est toujours là* ». Cela ne permet pas non plus d'affirmer que le cuivre est un élément chimique. Par exemple, de l'eau peut disparaître au cours d'une première réaction chimique (hydrolyse d'un ester) et réapparaître au cours d'une seconde (combustion des produits de l'hydrolyse) alors qu'elle n'est pas un élément chimique.

Les enseignants auraient été certainement plus convaincants s'ils avaient séparé leur discours en deux phases : (a) nous avons vu que le cuivre métallique a disparu puis est réapparu, et (b) le chimiste interprète cela avec la notion d'élément chimique qui traduit la conservation de quelque chose pendant les transformations. La première phase est une activité de monstration (Johsua & Dupin, 2003), et la seconde est une interprétation dont les mots clés « conservation » et « transformation » ont, grâce à l'analogie, un sens commun pour la classe. Nos enseignants n'ont pas adopté cette présentation, indiquant le manque de confort au moment de la délicate introduction de la notion d'élément chimique.

7.2. Analogie et conservation

L'analogie utilisée précédemment a non seulement permis d'activer la notion de conservation / non-conservation, mais a également servi d'outil de représentation de concepts en cours de construction, comme ceux liés à la structure de la matière ou à la transformation chimique. Pour les élèves qui se satisfont de fournir des explications en fournissant des analogies avec les évènements de la vie quotidienne et qui pensent que le professeur ne fait qu'ajouter des mots originaux (« *fancy words* » ; Hesse & Anderson, 1992), l'usage d'une analogie plus construite, comme celle des Blicks, est donc un intermédiaire entre l'explication naïve et l'explication scientifique.

8. Conclusion

Notre recherche s'est posée la question de l'introduction d'une nouvelle notion dont la propriété centrale met en jeu la conservation au cours d'une transformation chimique Nos résultats font apparaître que des difficultés qui ne semblent pas avoir été préalablement prises en compte, en particulier celle liée à la polysémie d'un terme central dans le travail des élèves, ont pu être gérées.

L'approche de l'analogie semble avoir été une voie intéressante, mais pour laquelle la prise en charge pose des difficultés à l'enseignant. En particulier, il semble qu'elle estompe le rôle de la notion de modèle qui met en jeu, en filigrane, la notion de fonctionnement de la science, rarement prise en compte dans l'enseignement. L'intérêt de cette analogie est de prendre en main la totalité de la séquence. Ce n'est pas une simple aide ponctuelle, mais l'installation d'un schéma de pensée et d'un outil d'expression aussi cadré que possible. Nous notons sur cet exemple qu'une analogie n'a nul besoin d'être complexe pour être utile dans plusieurs situations d'apprentissage. Cette analogie, qui fut qualifiée par certains de naïve, a pu être utilisée autant pour activer les notions de conservation / non-conservation que pour fournir aux élèves un outil leur permettant de représenter une réaction chimique à un stade de l'enseignement délicat, puisqu'intermédiaire entre l'introduction des concepts et la symbolique qui sert à leur description.

Le travail sur la compréhension de la transformation chimique a été reconnu comme difficile car la conservation des espèces[92] chimiques, et non des éléments chimiques, est une conception profondément ancrée. Nous avons mis cette question au centre de notre recherche et montré que l'analogie permettait d'apporter des réponses pour faire comprendre ce qui se conserve et ce qui ne se conserve pas pendant une transformation chimique.

RÉFÉRENCES

CNCRE. (1998) Rapport bilan du Comité national de coordination de la recherche en éducation http://www.inrp.fr/Cncre/Pdf/Rapport_bilan.pdf (visité 01/08).

GILBERT, S.W. (1989). An evaluation of the use of analogy, simile, and metaphor in science texts. *Journal of research in science Teaching*, vol. 26, pp. 315-327.

GLYNN S.-M., TAKAHASHI T. (1998). Learning from Analogy-Enhanced Science Text. *Journal of research in science teaching*, vol. 35, n° 10, pp. 1129-1149.

HESSE J.J.III, ANDERSON C.W. (1992). Students' conceptions of chemical change. *Journal of Research in Science Teaching*, vol. 29 , n° 3, pp. 277-299.

JOHSUA S., DUPIN J.-J. (2003). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Paris, Presses universitaires de France.

JUSTI R., GILBERT J. (1996) The role of analog models in the understanding of the nature of models in chemistry *In* Aubusson P., Harrison A.-G.and Ritchie S.-M.(Eds) Metaphor and analogy in science education *Science and technology education library* pp.119-130.

LAUGIER A. & DUMON A. (2003). Obstacles épistémologiques et didactiques du concept d'élément chimique : quelles convergences. *Didaskalia*, vol. 22, pp. 69-97.

PEKDAĞ B. & LE MARÉCHAL J.-F (2007). Memorisation of Information from Scientific Movies. In Roser Pintó and Digna Couso (Eds.), *Contributions from Science Education Research* (p. 199-210). Springer: Dordrecht, The Netherlands.

SANDER E. (1998). *L'analogie, du naïf au créatif. Analogie et Catégorisation.* Paris, L'Harmattan.

SOLOMONIDOU C. & STAVRIDOU H. (2000). From inert object to chemical substance: students' initial conception and conceptual development during an introductory experimental chemistry sequence. *Science Education*, vol. 84, pp. 382-400.

TABER K.S. (2003). Mediating Mental Models of Metals: Acknowledging the Priority of the Learner's Prior Learning. *Science Education*, vol. 87, pp. 732-758.

VIOVY R. (1984). La notion d'élément chimique. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, vol. 663, pp. 901-910.

YARROCH W.L. (1985). Students' understanding of chemical equation balancing. *Journal of Research in Science Teaching,* vol. 5, pp. 449-459.

[92] Un ensemble d'entités moléculaires, ioniques ou atomiques identiques constitue une espèce chimique.

LES ANALOGIES EN ÉLECTROCINÉTIQUE : APPUI PUISSANT OU PIÈGE SOURNOIS ?

Wanda **KAMINSKI**

Université de Reims Champagne Ardennes

WANDA.KAMINSKI@univ-reims.fr

Les dispositifs d'enseignement de physique peuvent avoir recours à des analogies avec des connaissances liées au vécu des élèves, ou à d'autres domaines de la physique. Ces choix conduisent à s'interroger sur la contribution de ces analogies tant à la compréhension des notions visées qu'à celle des principes et des méthodes de la physique. Sans prétendre à aucune exhaustivité, ce texte présente, à partir de quelques exemples, issus de l'enseignement de l'électrocinétique, des interrogations et des éléments d'analyse sur les questions soulevées par l'usage des analogies.

1- QUESTIONNEMENT INITIAL

Plusieurs facteurs semblent favoriser le recours à des analogies en électrocinétique.

D'une part, l'impossibilité d'observer directement certains phénomènes rend difficile l'introduction des notions telles que la tension électrique, l'intensité du courant, la résistance électrique.

D'autre part, la présence dans la vie de tous les jours des dispositifs dont le fonctionnement s'explique par l'électrocinétique, inspire des descriptions destinées à un large public. Par conséquent, le choix des termes du vocabulaire peut ne pas être piloté par des considérations purement scientifiques. C'est le cas de l'« énergie électrique fournie » par le générateur que nous mettons entre guillemets puisqu'il n'y a, dans le circuit, que des transferts d'énergie (aucune forme d'énergie n'est stockée dans les appareils électroménagers…). Le générateur est couramment appelé « source », avec l'idée, plus ou moins implicite, qu'il constitue une source de courant et non, comme c'est le cas dans toutes les applications domestiques, une source de tension électrique (pratiquement toujours de 230V).

Il peut alors être tentant de décrire le fonctionnement du circuit en suivant ce qui « sort de la source », « fait » tourner les appareils électroménagers, briller les lampes, chauffer les radiateurs, etc. Le courant électrique serait alors (en contradiction à la réalité expérimentale et aux lois de la physique) « consommé » en traversant, et en faisant fonctionner, les différents éléments du circuit.

Autre facteur, important dans l'histoire de la physique, serait une assimilation du courant électrique à une décharge entre deux objets électrisés de signes contraires (ici, pôles « plus » et « moins » du générateur). Le développement de l'électrostatique ayant précédé de plusieurs décennies l'élaboration du circuit électrique par Volta (début XIX^{e}) et la différenciation de deux phénomènes (vers 1850 avec les travaux d'Ohm), cette confusion, ainsi qu'une fixation sur les pôles du générateur, ne semblent surmontées ni dans la vulgarisation ni dans certains documents utilisés par les enseignants (Benseghir 1989a, 1989b, 1993).

2. LE RAISONNEMENT SÉQUENTIEL EN ÉLECTROCINÉTIQUE

Jean-Louis Closset a consacré une partie importante de sa thèse (1983) à étudier les raisonnements des élèves du lycée et du premier cycle universitaire relatifs aux circuits électriques simples où les différents éléments sont branchés en série. Dans un tel circuit, l'intensité du courant possède la même valeur dans tout point du circuit, et le changement d'ordre de différents éléments ne modifie pas cette valeur. En revanche, cette valeur est bouleversée dans tout point du circuit dès qu'un élément est modifié (une résistance augmentée, une lampe ajoutée ou enlevée, etc.). Il suffit de brancher un ampèremètre (ou plusieurs) à quelques endroits du circuit, composé de plusieurs lampes, moteurs, électrolyseurs, résistances chauffantes, etc., pour s'en assurer.

Or, ce comportement du courant électrique semble ignoré, après enseignement, par les élèves et les étudiants participant à la recherche de Closset qui interprète leurs réponses dans le cadre de son modèle, le raisonnement séquentiel. La difficulté que ce modèle met en évidence consiste à nier le fait que, bien que responsable du fonctionnement de différents éléments du circuit, l'intensité du courant « revenant » au générateur puisse avoir la même valeur que l'intensité du courant « sortant » du générateur.

Des réponses à toute une série de questions, adaptées à la progression de l'enseignement d'électrocinétique, sont là pour montrer la résistance de cette difficulté à l'enseignement. Les étudiants de l'université donnent des réponses correctes lorsque le circuit ne contient que les résistors et les lampes, mais ils sont nombreux à faire une analyse « séquentielle » dans un circuit avec les condensateurs (Cf. le tableau 1).

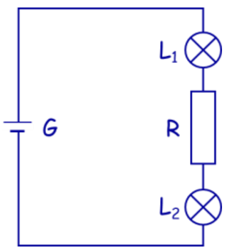
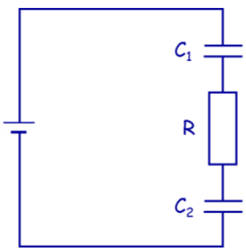
 Question : Les deux lampes identiques, L_1 et L_2, brillent-elles pareil, ou bien une d'elles brille-t-elle plus que l'autre ? Réponse : L_2 brille moins fort. Lycée : 51% (N = 91) Université : 10% (N = 96) Réponse correcte : même brillance car même intensité du courant.	Question : Les deux condensateurs, C_1 et C_2, se chargent-ils aussi vite, ou bien l'un d'eux se charge-t-il moins vite que l'autre ?  Réponse : C_2 se charge moins vite. Lycée : 68% (N=44) Université : 37% (N=109) Réponse correcte : même durée car même évolution de l'intensité du courant durant la charge.

Tableau 1 : *Exemple des réponses aux deux questions de l'enquête de Jean-Louis Closset (1983).*

Ces mêmes élèves savent analyser de tels circuits quand ils répondent aux questions du professeur faisant appel aux formules mémorisées et ils savent, bien sûr, calculer l'intensité du courant dans un circuit série. Ces mêmes étudiants savent également calculer la durée nécessaire pour charger un condensateur. Cependant, face aux questions inhabituelles, ils ne font pas appel à ces connaissances, ni à ce savoir-faire.

3- LES ANALOGIES INEFFICACES CONTRE LE RAISONNEMENT SÉQUENTIEL

Nous allons présenter brièvement plusieurs exemples d'analogies utilisées en électrocinétique. La première est issue d'un livret « L'ÉLECTRICITÉ comment s'en protéger » édité par INRS (Institut National de Recherche et de Sécurité) en 1994 « à l'usage du personnel d'exécution non électricien ».

	Le texte associé à cette image (page 18 du livret) précise le rôle de la Potion Magique : « Le générateur électrique permet aux électrons libres d'acquérir de l'énergie ». En revanche, ni ce texte, ni l'image, ne suggèrent aucunement que l'intensité du courant (ici représentée par la vitesse des « électrons ») garde la même valeur à l'entrée et à la sortie du générateur. Ils peuvent conforter l'idée contraire, « séquentielle ».
	Page 15 du livret, non seulement le commentaire est « séquentiel », mais encore suggère-t-il une lecture incorrecte physiquement : « Pour faciliter le passage du courant électrique, la section des conducteurs doit être suffisante. En assurant ainsi la libre circulation des électrons libres, on évitera l'échauffement des câbles d'alimentation. » En effet, dans les appareils alimentés par des générateurs de tension, ce sont les fils de grande section qui dégagent plus de chaleur…

Tableau 2 : *Exemple des propositions qui risquent de renforcer la lecture séquentielle du circuit électrique, issues de la vulgarisation (INRS 1994).*

D'autres analogies très visuelles, s'appuyant sur des images en couleur, où des personnages sympathiques représentent les « habitants » du circuit, existent sur Internet. Elles sont, malheureusement, appréciées par le public, y compris d'enseignants, que ne semble pas inquiéter le fait que le plaisir visuel et de la bonne humeur se dégageant de ces analogies participent efficacement à renforcer les difficultés des élèves.

4- Les analogies avec des circuits hydrauliques

Les analogies hydrauliques sont tellement courantes qu'il semble impossible qu'un élève de lycée, sans même parler d'un étudiant de physique, puisse ne pas les avoir rencontrées. Certaines d'entre elles proposent un découpage du circuit et des correspondances locales. Ainsi, un fil de connexion fonctionnerait-il comme un tuyau, un résistor comme un rétrécissement du tuyau et un générateur comme une pompe (Cf. par exemple Gentner & Gentner 1982). Si la comparaison ne va pas plus loin, cette analogie ferait appel aux connaissances extrascolaires, sans demander une maîtrise de l'hydrodynamique. En effet, cette dernière n'est pas au programme du lycée et elle apparaît dans le cursus universitaire bien plus tard que l'électrocinétique. Il est d'ailleurs fréquent de se servir de cette analogie « à l'envers » lorsqu'il s'agit d'analyser des circuits hydrauliques compliqués.

Au niveau du lycée, où le comportement du fluide est évoqué qualitativement ou bien montré sur une image (une vidéo, une maquette…), l'analogie hydraulique favorise des interprétations séquentielles. Elle est impuissante à expliquer le fonctionnement d'un interrupteur : le fluide s'écoule si l'on « ouvre » un circuit hydraulique.

La compréhension du rôle joué par un interrupteur dans un circuit électrique simple a été étudiée par Monique Couchouron et Laurence Viennot (2000). Elles soulignent la difficulté à surmonter l'analyse séquentielle ; la moitié des élèves environ, interrogés après l'enseignement destiné à soutenir des analyses systémiques (collège et la classe de seconde) persiste à nier l'absence du courant dans toutes les portions d'un circuit ouvert. Ces mêmes élèves peuvent donner des réponses correctes à propos de l'indication d'ampèremètres situés respectivement avant et après une ampoule dans un circuit fermé.

5- L'ANALOGIE DE LA FOULE

L'analogie de la foule est destinée à faciliter l'analyse d'un circuit comportant une dérivation. Elle existe également en version « hydraulique » lorsque la bifurcation de la route (Cf. le Tableau 3) est remplacée par une rivière dont les eaux contournent une île.

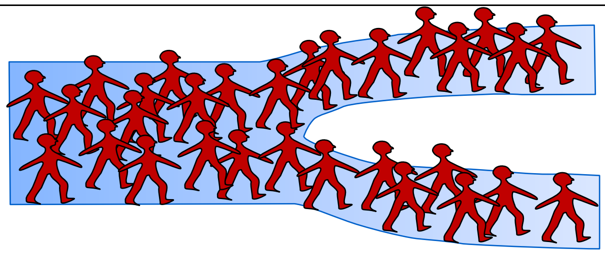
	Le dessin ci-contre est inspiré d'une figure du manuel Hachette des Sciences physiques de la classe de Quatrième (1979). Voici le texte qui l'accompagne : Ici, la route représente une **portion du circuit**. Le courant est représenté sous la forme d'un défilé très serré de petits bonshommes marchant régulièrement et au même pas. Cette image représente le mouvement des charges électriques : quand les charges se présentent devant les deux branches du circuit, une partie va à gauche, l'autre à droite.

***Tableau 3 :** Exemple d'un dessin commenté, support de l'analogie de la foule.*

Au moins deux aspects de cette analogie méritent l'attention. Même s'il ne s'agit pas ici d'un circuit série, la lecture séquentielle du comportement des « bonshommes / charges » n'est aucunement découragée. L'autre aspect explique une difficulté aux conséquences parfois très graves. Cette image laisse croire qu'une dérivation divise le courant ; par conséquent, plusieurs éléments du circuit associés en dérivation seraient parcourus par un courant d'intensité « divisée », inférieure. Malheureusement, surtout pour des installations électriques dans des habitations négligeant les normes, l'intensité du courant **en amont des dérivations** augmente à chaque appareil électroménager ajouté. Il arrive qu'avec une dérivation de trop, cette intensité du courant est tellement grande qu'elle provoque un incendie (elle fait « sauter » un fusible si l'installation est bien protégée). L'analogie de la foule n'aide nullement à comprendre ce phénomène.

6- DES ANALOGIES DESTINÉES À SURMONTER LA LECTURE SÉQUENTIELLE

Des analogies visant explicitement l'opposition au raisonnement séquentiel proposent des images (vidéos, maquettes…) d'un circuit série fermé avec un générateur responsable d'une circulation d'ensemble de « charges ». Elles peuvent aider efficacement à rectifier certains problèmes posés par des analogies présentées avant, mais ne sont pas capables d'affronter l'ouverture du circuit (fonctionnement de l'interrupteur).

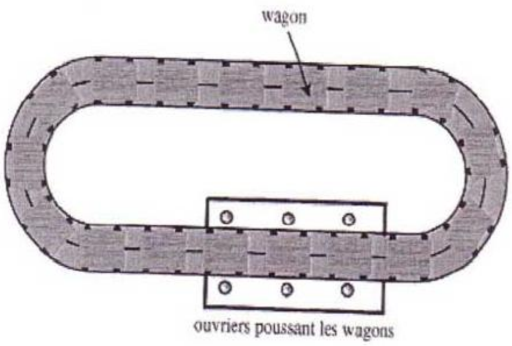
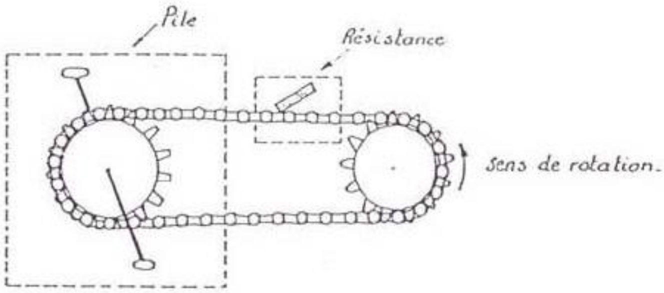
	**L'analogie du petit train** (Smith & Wilson 1974), présentée également sur le site de « La main à la Pâte », rend compte de l'interdépendance des charges mobiles (aucun wagonnet ne bouge de manière indépendante des autres). Il n'y a pas de « potion magique » dans le générateur : ce sont les ouvriers qui poussent les wagons. Le générateur n'est ni une « source », ni un « réservoir » des charges. Loin de là : le courant traverse le générateur. Des problèmes apparaissent dès que les ouvriers ajoutent de la marchandise dans les wagons et qu'elle est déchargée ailleurs (par d'autres ouvriers…). Ces opérations ne semblent pas réalistes sans perturber la vitesse constante des wagons et l'analyse énergétique du circuit.
	**L'analogie de la chaîne du vélo** (Closset 1983) propose, en plus du générateur / pédalier, une « résistance » pouvant ralentir la circulation de l'ensemble de la chaîne. Cet élément illustre le sens d'obstruction ou d'entrave propre au concept de résistance sans pour autant avoir besoin de ralentir le courant « après » l'obstacle. Dans ce modèle, l'augmentation de la résistance provoque un ralentissement quasi simultané du courant partout dans le circuit (toute la chaîne ralentit ensemble). Si, en revanche, le cycliste souhaite garder la même vitesse de la chaîne, il est obligé de pédaler plus fort (de développer une puissance plus grande).

Tableau 4 : *Deux exemples d'analogies destinées à surmonter le raisonnement séquentiel dans l'analyse du fonctionnement d'un circuit série.*

Il n'existe pas d'analogie permettant de rendre compte de tous les problèmes liés à la compréhension du fonctionnement d'un circuit électrique, même tout simple. La dernière analogie, celle « de la chaîne du vélo », présente clairement ses limites. Elle n'explique que la réaction d'un circuit série à l'augmentation de la résistance. Ce circuit est le plus simple possible, il n'a même pas d'interrupteur. Il est, cependant, le seul à ne renforcer aucune difficulté des élèves, contrairement aux autres analogies présentées aux paragraphes précédents.

7- QUELQUES ÉLÉMENTS DE CONCLUSION

Des analogies le plus couramment rencontrées suscitent une réflexion sur le processus en jeu chez l'apprenant et notamment sur ce qui est « mobilisé » chez lui lorsqu'il les rencontre.

Dans certains cas, les auteurs des analogies développent le récit, en introduisant une chronologie qui du point de vue de la physique n'existe pas, au lieu de proposer la description ou l'investigation d'un phénomène physique dans des systèmes en régime stationnaire ou quasi-stationnaire. Le recours à une chronologie est rarement nécessaire étant donné que l'analyse des évolutions ou des régimes transitoires pose beaucoup moins des problèmes aux élèves.

En second lieu nous avons vu le rôle joué par les images qui incitent davantage à adhérer aux ressemblances des représentations, qu'à analyser des similitudes éventuelles de structure.

Plus largement, l'usage de certaines analogies vise à « persuader », à éviter par des représentations facilement accessibles, mais sujettes à des interprétations personnelles - l'énoncé de doutes, critiques, réserves de la part de l'apprenant, plutôt qu'à convaincre par le développement d'un questionnement porteur de l'analyse du phénomène.

Dans l'enseignement l'analogie semble considérée comme un « marchepied », qui constituerait un moyen de gagner du temps… Mais ce choix n'est-il pas une illusion ? En effet, analyser les similitudes entre les systèmes peut apporter une compréhension plus riche et plus profonde, à condition toutefois d'avoir des connaissances dans les deux domaines et de prendre assez de temps.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BENSEGHIR A. (1989a). *Transition électrostatique-électrocinétique : point de vue historique et analyse des difficulties des élèves*. Thèse, Université Paris 7.

BENSEGHIR A. (1989b). Formation des concepts d'électrocinétique : point de vue historique. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, n°713, pp.451-466.

BENSEGHIR A. (1993). Signes + et - : perception du circuit électrique. *TREMA* n°3-4, pp.19-25.

de CHANUT Y., CHARLES M., DARGENCOURT A., GUESNE E., PEZET Robert. (1979) *Sciences physiques Quatrième*. Hachette collection libres parcours.

CLOSSET J.-L. (1983). *Le raisonnement séquentiel en électrocinétique*. Thèse de 3ème cycle, Université Paris 7, 249 pages.

CLOSSET J.-L. (1983). D'où proviennent certaines « erreurs » rencontrées chez les élèves et les étudiants en électrocinétique ? Peut-on y remédier ?. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, n°657, pp.81-102.

CLOSSET J.-L. (1989). Les obstacles à l'apprentissage de l'électrocinétique. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, n°716, pp.931-949.

CLOSSET J.-L. (1992). Raisonnements en électricité et en hydrodynamique. *ASTER*, n°14, pp. 143-155.

COUCHOURON M., VIENNOT L. (2000). Les intentions didactiques manifestées dans les programmes d'électricité de 1993, classe de quatrième : mise en œuvre d'un outil pour en évaluer l'impact sur les acquis des élèves, *Didaskalia*, n°16, pp. 57-80.

GENTNER D. & GENTNER D. R. (1982). Flowing Waters or Teeming Crowds: Mental Models of Electricity. Report No. 4981, Office of Naval Research, Personnel and Training Research Programs (83 pages).

Institut National de Recherche et de Sécurité. (1994). *L'électricité comment s'en protéger ? à l'usage du personnel d'exécution non électricien.* (livret de 56 pages)

SMITH F.A. & WILSON J. D. (1974). Electrical circuits and water analogies. *The Physics Teacher*, 12, 7, 396-400.

LES ANALOGIES DANS LA DÉCOUVERTE D'UNE AUTRE BASE DE NUMÉRATION – LA BASE SEPT POUR DE FUTURS PROFESSEURS DES ÉCOLES

Laurent VIVIER

Université Paris Diderot

laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Résumé

Cet texte propose d'analyser avec le point de vue sur l'analogie de Hofstadter et Sander une situation de découverte de la base sept pour de futurs professeurs d'écoles primaires en France. On tente d'opérationnaliser les distinctions que ces auteurs font entre les analogies.

Mots clés

Nombre entier, Numération de position, Analogie, Marquage, Hybridation.

INTRODUCTION

Le domaine numérique est sans conteste une des parties essentielles des mathématiques. Son enseignement commence dès l'école maternelle et continue pendant toute la scolarité, s'enrichissant sans cesse de nouveaux nombres ou de nouveaux points de vue théoriques. Dans ce contexte, le système décimal est, bien que non spécifique mathématiquement, fondamental car on peut sans conteste affirmer qu'une grande part du numérique repose sur lui.

Or, ce système décimal est complexe car il condense en peu de signes de nombreuses significations et les élèves éprouvent des difficultés dans son apprentissage. Dans ce contexte, on comprend pourquoi la formation initiale et continue des enseignants s'intéresse de près à ce domaine numérique et plus spécifiquement au système décimal. C'est dans cet objectif que Tempier (2013) a cherché des modalités de formation continue afin d'améliorer l'enseignement de la numération en base dix. Il est notamment apparu que certains enseignants de l'étude éprouvaient eux-mêmes des difficultés dans la compréhension du système décimal. Bien que ces difficultés ne soient pas aux mêmes niveaux que celles des élèves, on peut penser qu'elles constituent un obstacle à l'enseignement de la numération décimale et ainsi à l'apprentissage des élèves.

En formation initiale, la numération dans des bases autres que dix est utilisée pour sensibiliser les futurs enseignants aux difficultés que leurs élèves pourront rencontrer ainsi que pour dénaturaliser leurs connaissances[93] qui peuvent faire obstacle à l'enseignement. Cependant, les activités proposées en formation initiale ne sont que très partiellement des situations d'homologie. En effet, les jeunes adultes, futurs enseignants, maîtrisent l'essentiel de la base dix. Ainsi, deux phénomènes peuvent se passer qui sont hors de portée des élèves de primaire :

---

[93] On peut notamment penser à l'association *naturelle* entre 5, « cinq » et  ou entre 12, « douze » et . Il est à mentionner l'étude d'Anselmo, Dussuc et Zucchetta (2013) qui propose une suite orale pour la base six dont les chiffres sont les lettres de A à F.

- un retour à la base dix pour traiter les tâches initialement posées dans une autre base – la réponse dans la nouvelle base peut être donner à l'aide d'une double conversion. Dans ce cas, on peut penser que l'on passe à côté de l'objectif de formation puisque le nouveau système de représentation des nombres ne peut se développer (Nikolantonakis et Vivier, 2010, 2013) ; le système ne remplit alors qu'une fonction de communication et ne se constitue pas comme un registre puisqu'il ne remplit pas les deux autres fonctions cognitives de traitement et d'objectivation Duval (1996).
- dans le cas où le travail se fait de manière interne, la proximité des règles de représentation des registres constitués par deux bases différentes – ainsi que de certains traitements – favorise largement le fonctionnement de l'analogie.

Dans cette étude, nous reprenons des idées de la thèse de Tempier (2013) pour élaborer une situation de découverte de la numération de position en base sept. Le choix de la base répond à plusieurs contrainte : avoir une base inférieure à dix pour éviter l'obstacle d'ajouter des signes, d'avoir suffisamment de chiffres mais en enlevant plusieurs (ce qui exclut les bases deux et neuf), pouvoir accéder facilement aux nombres à trois chiffres sans qu'ils viennent trop rapidement, ne pas avoir trop de similarité avec la base dix (cela exclut notamment la base cinq). Dans ces conditions, on avait en fait le choix entre la base six, comme dans l'étude de Anselmo et Zucchetta. (2013), et la base sept. Il se trouve que dans des études précédentes, on avait demandé le successeur de 66 en base sept et le choix a donc été la base sept.

La situation a été testée en troisième année d'université, en L3 pluridisciplinaire dont les deux tiers des étudiants se destinent au professorat des écoles. L'analyse est produite avec les idées sur l'analogie du livre de Hofstadter & Sander (2013) ce qui en constitue une mise à l'épreuve pour l'analyse didactique.

I ANALYSE A PRIORI

1. Les idées de Hofstadter & Sander

Nous commençons par exposer rapidement les phénomènes de marquage et d'hybridation ainsi qu'une analogie naïve qui nous paraissent essentiels pour analyser l'analogie dans le thème de l'étude (cf. la fiche de lecture sur (Hofstadter & Sander, 2013)).

Le marquage, l'abstraction

Le marquage sert à spécifier le degré d'abstraction d'un mot, plus il est marqué, moins il est étendu comme dans la différence entre « le Soleil » et « un soleil ». Ici, la notion de chiffre doit se dégager de son interprétation en base dix pour devenir plus abstrait. En effet, un chiffre est, usuellement en base dix, un des signes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 ce qui n'est plus le cas en base sept[94] où seuls les sept premiers signes sont des chiffres[95]. Du côté des écritures chiffrées également le phénomène de marquage doit apparaître puisque « 10 » doit désigner la base de numération, sept ici, et non plus dix.

[94] Si le même phénomène apparaît pour toutes les bases inférieures à dix, la situation est très différente pour une base supérieure à dix où l'ajout de nouveaux signes est une difficulté cognitive de première importance dans le travail dans des bases autres que dix (Nikolantonakis et Vivier, 2010).

[95] Pour l'essentiel, nous en restons, dans cette étude, à l'utilisation des chiffres usuels, contrairement aux travaux de Anselmo et al. (2013).

L'hybridation

Le phénomène d'hybridation est sans doute le plus complexe. Hofstadter et Sander le définissent comme une importation d'un monde dans un autre lors d'une analogie mais il apparaît nécessaire de le préciser afin de le rendre opérationnel. Dans une version simple, on peut facilement voir une hybridation, une importation du monde de la base dix dans le monde de la base sept, lorsque l'on affirme que le successeur de 36 est 37 ou bien que le successeur de 66 est 70. On peut sans doute aussi voir une hybridation lorsque l'on parle de dizaine pour appeler des groupements de sept car dans « dizaine » on entend « dix »[96] – cette hybridation est sans doute favorisée par le fait que le terme « septaine » n'existe pas. Mais en est-il autant de « trente-six » pour nommer 36 en base sept ? Cela n'est pas du tout certain car on entend le « 3 » et le « 6 » et cela peut tout à fait être interprété comme un phénomène de marquage. Il en est de même des nombres 11 à 16 que l'on pourrait nommer[97] onze, douze, treize, quatorze, quinze et seize puisque l'on n'entend rien du système décimal. La même ambiguïté peut être pointée avec « cent » et « centaine » pour nommer 100.

Analogie naïve

Une analogie naïve consiste à interpréter des écritures chiffrées comme étant des nombres écrits en base dix. En particulier 10 est lu et interprété comme étant dix. Liée à cette analogie naïve, on peut signaler aussi le fait que n'est nombre qu'une écriture chiffrée en base dix avec une identification entre nombre et son écriture en base dix.

La première analogie consiste à remplacer dix par sept mais aussi à repérer les endroits où cela est important, même si l'analogie entre dix et sept n'est pas directe comme avec 9 ↔ 12 et onze ↔ 14. On relève un problème à l'oral car il n'y a pas d'analogue pour dire les nombres, cela favorisera vraisemblablement un phénomène d'hybridation orale.

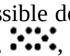
2. Analyse a priori des items

L'ensemble des items proposés se trouve en annexe. Nous produisons ici une analyse de questions posées.

A) La suite des nombres

Ce tableau sert à comprendre l'algorithme de formation des nombres à partir de la notion de successeur. On peut le voir comme une dévolution de la situation ; c'est à ce moment que doit s'installer l'analogie principale dans son aspect ordinal.

Les passages aux écritures X0 et X00 ne se produisent pas après les mêmes chiffres et dès cet item il est nécessaire de revoir la notion de chiffres (marquage). On peut s'attendre à voir apparaître des 37 et des 70 (Nikolantonakis et Vivier, 2010) car le nombre de case dépasse 7^2. Un autre phénomène d'hybridation peut apparaître s'il y a un appui sur la suite orale (voir ci-dessus).

[96] Le cas de dix est très particulier. Bien entendu, il est toujours possible de dire « dix » pour 10 en base sept en considérant un marquage. Mais dix fait directement référence au nombre dix, , avec notamment les « dix doigts de la main ».

[97] Cela est propre à la langue : en grec par exemple, onze se dit *ένδεκα* c'est-à-dire « un-dix », puis δώδεκα « deux-dix » et ensuite c'est plus régulier : δεκατρία « dix-trois », δεκατέσσερα « dix-quatre »,… Il est également à noter qu'en base huit, par exemple, le 17 prononcé « dix-sept » serait plutôt interprété comme une hybridation à cause du « dix » que l'on entend.

B) Comparaison

Ici, l'analogie directe avec la base dix est adéquate et l'on s'attend à une bonne réussite. En particulier, l'analogie naïve permet de donner les bonnes réponses. Mais alors, peut-on parler d'analogie naïve ? peut-on parler d'hybridation ?

C) Dénombrement d'une collection

Il s'agit ici de faire travailler l'aspect cardinal. L'analogie dix ↔ sept doit donc déboucher sur la réalisation de paquets de sept. Néanmoins, dans ce type de tâches, la technique usuelle consiste plutôt en un pointage successif de chaque élément avec, en parallèle, la prononciation de la suite orale des nombres. Or, il n'y a pas, a priori, de mot pour nommer les nombres écrits en base sept. Si toutefois une suite orale est apparue dans le groupe, vraisemblablement avec une hybridation, alors la même technique peut être effectuée avec cette nouvelle suite orale (d'ailleurs, cette suite orale peut être une conséquence de la recherche d'une technique analogue à la technique usuelle, même si elle a pu apparaître dès le tableau). Sinon, il est toujours possible de dénombrer en base dix puis de convertir le résultat en base sept, par exemple en s'aidant du tableau (le pointage en parallèle des « o » à dénombrer et des cases du tableau est toujours possible, mais ils se trouvent sur deux feuilles différentes).

Dans ce deuxième cas, peut-on parler d'hybridation ? En effet, il n'y a pas, à proprement parler, d'importation du monde de la base dix dans le monde de la base sept puisqu'il y a une conversion. En fait, pour pouvoir percevoir l'hybridation, il est nécessaire de se placer au niveau des types de tâches et des techniques (cf. Nikolantonakis et Vivier, 2010, 2013) : la tâche, au lieu d'être effectuée en base sept est transformée en une tâche en base dix avec l'application d'une technique de la base dix. Il semble qu'ici la notion d'hybridation ne soit pas suffisamment précise et il faudrait distinguer une hybridation dans les écritures, importation d'unité de la base dix dans le registre de la base sept, et une hybridation dans la transformation des tâches, par une conversion.

A noter que l'on peut aussi se contenter d'une réponse dans la base dix ce qui sera interprété comme une trace de l'analogie naïve.

D) Les unités relatives à chaque rang

Il n'y a pas de mots spécifique pour les dire. L'utilisation de « cent » pour u_2 et de « mille » pour u_3 peuvent être considérées comme une hybridation ou bien comme un marquage.

Il n'est pas attendu de difficulté dans cet item mais on peut éventuellement voir une manifestation de l'analogie naïve : aux rangs 5 et 6, continuant la liste, on écrit 100000 et 1000000 mais pour le rang 10, au lieu de continuer avec sept zéros après un 1, la lecture de « u_{dix} » peut entraîner la réponse 10000000000 et de même pour les suivants. Bien sûr, l'avertissement du début « tous les nombres sont écrits dans ce système » peut être oublié. On peut y voir un piège, mais cette réponse entraîne une perte de sens puisque l'on fait un saut de sept à dix zéros pour les unités de rang.

Pour trouver les écritures chiffrées, les deux aspects importants sont le rôle spécifique du chiffre zéro et l'ordre. L'analogie directe avec la base dix est adéquate.

E) Les sommes

C'est ici que l'analogie naïve a le plus de chance d'apparaître puisque pour faire une somme il faut des nombres. On peut donc s'attendre à voir des sommes effectuées comme en base dix et de laisser cette somme comme réponse.

Néanmoins, le passage par les signes 7, 8 et 9 peut n'être que transitoire car ils peuvent être ensuite transformés en 10, 11 et 12 avec le report d'une retenue. Est-ce une hybridation ? Avoir des sommes de chiffres supérieures à dix aurait pu apporter d'autres éléments pour l'analyse.

Il est aussi possible de faire directement la somme avec les retenues, par une analogie avec la technique en base dix. A l'opposé, la somme peut également être effectuée après une double conversion (hybridation).

F) Commandes, conversions d'unités

L'analogie directe avec la base dix est adéquate ici.

En conclusion, on peut penser qu'il y aura des hybridations, notamment liées à une analogie naïve. Cela peut entraîner des erreurs, mais pas nécessairement car des adaptations peuvent donner le bon résultat. Lorsque l'analogie directe avec la base dix est adéquate, on peut s'attendre à une bonne réussite. Il faudra alors être attentif aux explications données.

II ANALYSE DES RÉSULTATS

1. Contexte de l'activité

Les 28 étudiants de l'étude sont en troisième année de licence pluridisciplinaire à l'université Paris Diderot. Les deux tiers suivent le parcours Professorat des Ecoles et un tiers suit le parcours Médiation Scientifique. Pour l'essentiel ce sont des étudiants n'ayant pas suivi un cursus mathématique dans leur deux premières années universitaires et peu sont scientifiques. Tous les étudiants (sauf peut-être une) n'ont aucune connaissance sur les bases de numération.

Il s'agit d'une séance de mathématiques, dont je suis l'enseignant, de 3h, avec 2h dédiées au travail de groupe, qui se déroule début décembre 2013. Les groupes sont constitués de manière libre et l'on dénombre 9 groupes (2 de 4, 6 de 3 et 1 de 2). Le sujet est donné en entier par groupe, sur 4 pages recto.

Je regarde l'avancée des groupes, leurs questions, les blocages. Je relance et questionne sans donner d'indication excepté pour le tableau du A) où une mise en commun était prévue.

2. Analyse des réponses de l'activité de groupe

Les groupes sont nommés, lorsque cela est nécessaire, par les initiales des étudiants.

A) Le tableau

Le tableau n'est réussi par aucun groupe en première intention et tous les groupes proposent soit 36 37, soit 66 70. On note également des 81, 91 et 99 100. L'hybridation attendue est donc bien au rendez-vous. L'intervention collective prévue s'avère nécessaire afin que chaque groupe puisse avancer. Après cette mise en commun, tous les tableaux sont corrects. Du côté des explications on relève :

- Beaucoup (7 groupes sur les 9) de descriptions des chiffres (0 à 6 ou 7, 8 et 9 n'existent pas) ;
- Le groupe SML dit +1 et quand c'est 6 on fait +4 (c'est un cas d'hybridation fort) ;
- Le groupe AJFB renomme tous les chiffres et donne les tables d'addition (cf. la figure 1) ;
- 5 groupes sur les 9 parlent de « dizaines » ou de « dizaine supérieure » dont un groupe qui mentionne le terme « centaine » (mais, pour ce dernier, est-ce une hybridation ?).

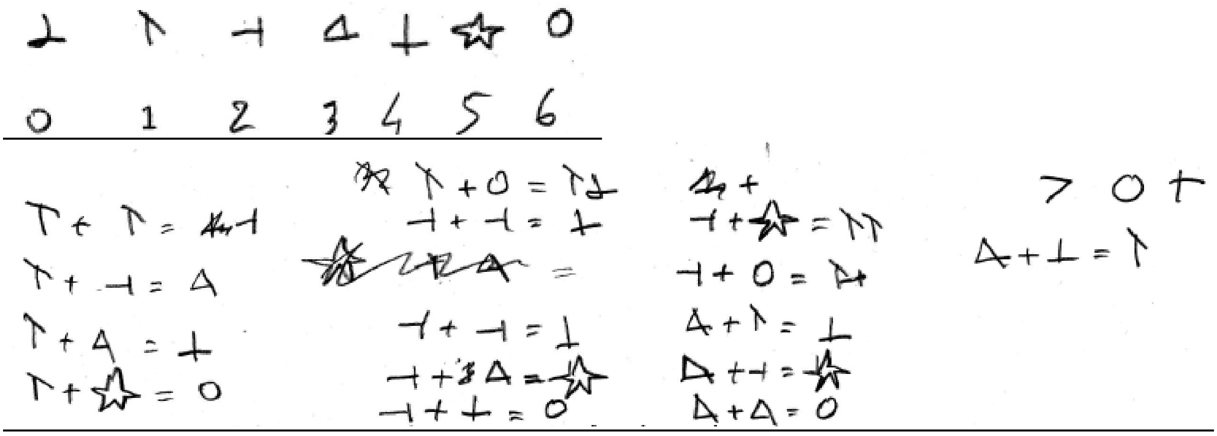


Figure 1 (groupe AJFB)

B) Comparaison

La comparaison est (bien sûr !) réussie par tous les groupes avec parfois des traces de conversion en base dix (sauf une contradiction liée à une erreur : 100>64 malgré 49<56 en base dix).

On note pour 6 groupes une explication liée à l'ordre du tableau (mentionnée à l'oral) et trois analogies explicites :

- « comparaison des valeurs décimales comme dans un système classique » (SML, avec hybridation) ;
- « même comparaison que pour le système décimal » (OSM) ;
- « même manière » (MCC).

C) Dénombrement de collection

8 groupes sur les 9 donnent le bon résultat avec :

- 5 groupes font des paquets de sept (même le groupe NAA affirme faire des paquets de 6) ;
- 2 groupes, LM et MFML, utilisent le tableau comme abaque après un dénombrement oral en base dix (hybridation avec conversion, cf. ci-dessus) ;
- Le groupe AJFB donne le résultat avec « on compte jusqu'à six plusieurs fois et on passe à la », le manque de mot se fait sentir car ils ne savent pas comment dire.

Le groupe IOW dénombre en base dix et utilise le tableau comme abaque, mais à l'envers : 36 est sur la vingt-septième case donc 27. Il y a ici plusieurs hybridations qui sont sans doute liées à l'analogie naïve : la tâche est d'abord effectuée en base dix (hybridation avec conversion) puis le nombre « trente-six » en base dix est associé avec l'écriture chiffrée 36 du tableau (qui est normalement en base sept, deuxième hybridation ou analogie naïve) qui se trouve être sur la vingt-septième case (en base dix, hybridation avec conversion) donc 27 en base sept (analogie naïve qui associe le nombre nommé en base dix avec son écriture chiffrée considérée comme une écriture en base sept, avec en plus l'utilisation du signe 7).

Le groupe MCC (le groupe scientifique) qui a répondu correctement :

- « on groupe les o par paquet de 10 ! », ici on voit bien le marquage effectué sur l'écriture chiffrée 10 (le point d'exclamation est essentiel) ;
- compte oralement : un, deux .. six, dix, onze .. seize, vingt, vingt et un… et donne ainsi le bon résultat chiffré ! On pourrait penser qu'il s'agit d'une hybridation mais, avec le point précédent il est aussi possible qu'il s'agisse d'un marquage. En tout cas, c'est opérationnel.

On relève également deux explicitations de conversion

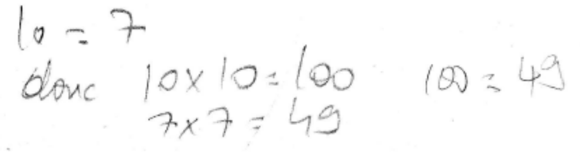


Figure 2a (groupe IOW)

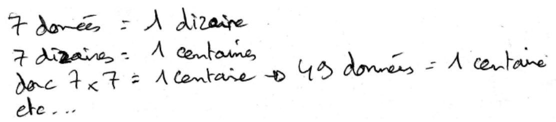


Figure 2b (groupe SML)

Dans la première (figure 2a), les différentes égalités demandent de jongler entre les bases sept et dix : les deux premières en base sept, la troisième (7×7=49) en base dix, avec finalement un souci d'écriture dans 100=49 car les deux bases coexistent dans la même égalité (il faudrait préciser la base pour lever l'ambiguïté). En figure 2b on relève la même ambiguïté dans 49 données=1 centaine qui est *à cheval* sur les deux bases. On remarque également une hybridation avec le mot « dizaine » au lieu de « septaine » (et toujours l'ambiguïté pour centaine : hybridation ou marquage ?).

D) Unités de numération

Dans l'écriture des u_k pour k=5,6,10,11 et 12 :

- 7 réponses correctes (attendue) ;
- deux réponses, NAA et OSM, $u_{10}=u_{\text{dix}}$ (idem pour u_{11} et u_{12} ; le groupe MFML a proposé cela en première intention avant de le rayer et de répondre correctement) – il s'agit ici vraisemblablement de la manifestation de l'analogie naïve.

On note aussi des écritures intéressantes permettant d'aller plus loin dans la compréhension de ce nouveau système :

- 7^k et $(6+1)^k$ et $u_{10}=(6+1)^{6+1}$ (groupe SML) ;
- $u_{100}=10^{100}$ (groupe OSM);
- et aussi un $u_k=10^k$ effacé (groupe MFML).

E) Écritures Chiffrées

8 réponses sont correctes (ce ne sont pas les mêmes groupes que ci-dessus, l'erreur pour $u_{10}=u_{\text{dix}}$ est sans incidence ici ; deux erreurs mineures non comptées ici). Il y a sans doute des placements par rang (avec ajout de zéro si nécessaire), mais il y a peu de traces visibles. On relève néanmoins, peut-être pour justifier :

- Des tableaux de numération (MCC et SML, voir figure 3) ;
- Des calculs corrects comme 4000+500+2=4502 ou 4000 ; 500 ; 2 → 4502 voire avec une décomposition multiplicative 4×1000+5×100+2×1 ;

- des calculs erronés comme 4×10=55 ou 4×100 1×1000 et 5×10=101 (l'explication provient de 40_{dix} = 55_{sept} et 50_{dix} = 101_{sept}). Il s'agit de l'analogie naïve appliquée par le groupe IOW (c'est très proche de leur erreur au B).

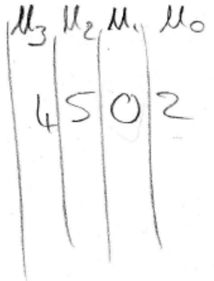


Figure 3 (groupe MCC)

F) Sommes

Quatre réponses correctes, un groupe n'a pas répondu, deux groupes, RLC et IOW, font des additions en base dix par analogie naïve (réponses 425, 4**8**3, **9**6, 46**9**3) ; on relève deux autres erreurs.
Parmi les réponses correctes, on relève :

- des conversions directes dans la somme *brute* avec des écritures transitoires utilisant les signes 7, 8 et 9 :

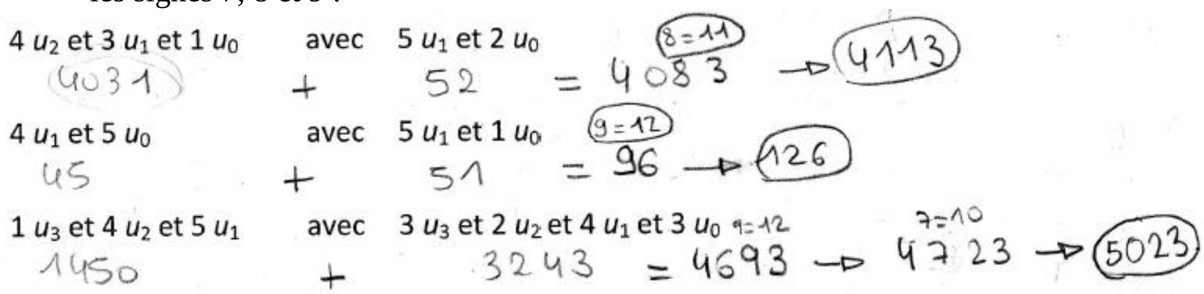


Figure 4 (groupe LM)

- des gestions de retenues dans des additions posées ou en ligne

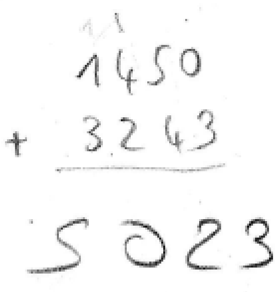


Figure 5a (groupe OSM) *Figure 5b (groupe MCC)*

A noter également un groupe qui pose l'addition et utilise les retenues mais avec une mauvaise gestion car il reporte la somme des deux chiffres. Il semble que cela soit hors analogie.

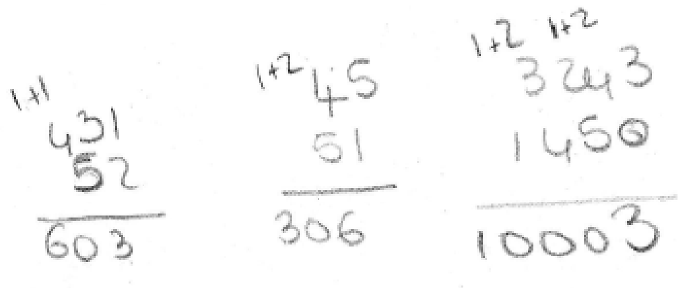


Figure 6 (groupe NAA)

G) Conversions

Aucun problème à signaler malgré deux non réponses sans doute dû au temps et on relève parfois plusieurs réponses (correctes). À noter des réponses du type :

- 4 u_3 et 201 u_2 (groupe NAA) ;
- 24100 = $(24\times u_3) + (1\times u_2)$ (groupe OSM) ;
- $1u_2$, $4u_3$ et $2\times(6+1)u_3$ (groupe SML) ;

<u>H) Synthèse </u>: les réponses sont peu exploitables.

3. Epilogue 1 : un autre système de numération

La séance sur la base sept s'étant bien passée, j'ai proposé, la semaine suivante, la même situation mais à partir d'un système de numération de position basé sur la suite de Fibonacci (les chiffres sont 0 et 1, ils sont utilisés sans séquence 11 à cause des conversions d'unités de rang liées à la suite de Fibonacci) et non plus en base usuelle avec une suite géométrique. Les chiffres n'étaient pas proposés dans leur forme usuel : ● et | (respectivement pour 0 et 1).

Rapidement, de grosses difficultés apparaissent. Il n'y a pas ou (trop) peu d'analogies possibles. En particulier, des difficultés à penser la somme, comme |+| ou ●+|. Est-ce que l'utilisation de 1 et 0 aurait favorisé les analogies ? Au bout d'une heure, et malgré mes nombreuses interventions et aides, seuls deux groupes comprenaient à peu près comment remplir le tableau et j'ai préféré clore l'activité de groupe à ce moment.

4. Epilogue 2 : examen de janvier

L'examen de janvier du cours de mathématiques du semestre 1 proposait quelques questions sur les entiers en base autre que dix. Les exercices du sujet était numérotés en base trois de 1 à 22, le dernier exercice n'étant pas numéroté.

<u>Exercice 22</u>, « Dans quelle base de numération les numéros des exercices de ce sujet sont-ils codés ? »
A cet exercice :

- 17 répondent base trois (ou 3) ;
- 6 répondent base deux (ou 2) ;
- Une réponse 10 ;
- Une réponse 6 ;
- Une non réponse.

Exercice __ « Le numéro de cet exercice a été effacé. Quel était ce numéro ? »
A cet exercice :

- 14 répondent 100 ;
- 11 répondent 30 (hybridation) ;
- Une réponse 200 (**?**).

Il était également demandé d'« Écrire, en base douze, le nombre de « o » dans chacun de ces deux cadres » :

oooooo ooo oo o ooo oo o oo o o o o oo o o

oo o o ooo o o o o o oo o o o o o o oo ooooo o o o ooo o

Comme il s'agit d'une base supérieure à dix (non travaillée explicitement), il est nécessaire d'ajouter des nouveaux signes et l'on relève :

- Deux étudiants ajoutent des signes pour dix et onze (dont un assigne un nouveau signe pour chaque chiffre, il s'agit de B du groupe AJFB). Ces réponses sont correctes même si on note une erreur pour le deuxième cadre : 30 au lieu de 2□, qui provient sans doute de l'analogie naïve qui resurgit puisque □=dix=10 donc 20+10=30).
- Une réponse (F de AJFB) avec un nouveau signe X pour douze et un séparateur « , » : 2X,4 et 2X,10 ; c'est correct mais il ne s'agit plus d'un système positionnel.
- Deux réponses ambiguës car sans séparation comme 204 et 210 pour 2 04 et 2 10 (un des deux étudiants ne donne pas de réponse correcte car il se réfère à une mauvaise liste des nombres.

On note souvent un appui sur des listes de nombres en base douze avec notamment des listes du type : 0…9 10 11 20 21… 29 30 31 40… qui montre une hybridation qui a des répercussions importantes sur le sens car 20 n'est plus 2 douzaines mais douze.
Des mentions de « dizaines » mais aussi de « douzaines » terme qui existe dans la langue et qui favorise l'analogie.

Enfin, quatre étudiants ne répondent pas à cet exercice.

En croisant les résultats individuels avec les productions des groupes, on peut préciser le travail au sein des groupes, hormis MFML (avec une absente), ce qui correspond à la perception lors de l'observation en séance. Il est également difficile de préciser le travail de AJFB même si le travail sur les chiffres, sous l'impulsion de B, a profité aussi à F (A était absente à l'examen).

Par exemple, le groupe scientifique MCC, qui a bien réussi le travail de groupe, est homogène et les trois étudiants réussissent les questions. Les groupes IOW et NAA, qui ont montré de nombreuses difficultés dans le travail sur la base sept, semblent également homogènes : les étudiants ne réussissent pas les items (seules deux étudiantes, une dans chaque groupe, donnent 100 comme réponse).

En revanche, les groupes RLC et OSM, avec des productions tout à fait correctes, était vraisemblablement hétérogènes car menés, respectivement, par C et M qui réussissent très bien les items de l'examen alors que les quatre autres ne répondent pas correctement au dénombrement en base douze et proposent tous 30 comme successeur à 22 en base trois. Il est vraisemblable que ce soit le même type de fonctionnement avec LMS mené par M, mais ce dernier était absent à l'examen.

Enfin, les étudiantes du groupe LM qui, avec MCC, a fourni une production de qualité, ne réussit pas les items du test (avec notamment une réponse 100 pour M et 200 pour L).

III CONCLUSION

Cette étude a permis de mettre en lumière l'intérêt des idées avancées par Hofstadter et Sander. Le thème et la situation s'y prête particulièrement bien car l'analogie dix ↔ sept permet d'interpréter beaucoup de réponses. Il reste toutefois des réponses qui échappent apparemment au point de vue adopté de tout voir par le prisme de l'analogie. C'est le cas en particulier des éléments nouveaux, hors analogie, qui apparaissent (retenue 1+2 pour 12 ou 1+1 pour 11).

De plus, la notion d'hybridation apparaît être plus complexe qu'elle n'est exposée par Hofstadter et Sander. Il s'avère nécessaire, pour l'analyse didactique, de la préciser. Sans viser à l'exhaustivité, il est apparu des hybridations :

- simples (au sens de Hofstadter et Sander) comme 36 37 et 66 70 mais qui peuvent être invisibles car l'analogie directe est adéquate ;
- avec conversion (éventuellement plusieurs) ;
- avec mélanges entre les deux mondes (registres) comme dans 49=1 centaine ou 100=49 ;
- multiple (double hybridation ou avec une analogie naïve).

De plus, il semble important de distinguer des hybridations syntaxique, orale ou écrite, et sémantique. Une hybridation syntaxique n'affectant pas le sens de ce qui est produit, comme dans les suites orales ou bien dans 70 pour le successeur de 66) contrairement à une hybridation sémantique (comme dans les suites écrites de la base douze à l'examen). La question se pose également de savoir si une hybridation syntaxique est opérationnelle et fournie la bonne réponse ou non.

Enfin, entre l'hybridation et le marquage il est souvent difficile de trancher. Il faudrait pour cela mener des entretiens plus précis avec les étudiants.

BIBLIOGRAPHIE

Anselmo, B. & Zucchetta, H. (2013). Du comptage à la numération - Une formation sur l'enseignement de la numération, *Grand N* (91).

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16/3, La Pensée Sauvage.

Hofstadter, D. & Sander, E. (2013). *L'analogie, Cœur de la pensée*, Odile Jacob.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2010). Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce, in *Analyse statistique implicative - objet de recherche et de formation en analyse de données, outil pour la recherche multidisciplinaire*, Actes du 5e colloque A.S.I., J.-C. Régnier, F. Spagnolo, B. Di Paola & R. Gras éds, Palermo 2010.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2013). Positions numeration in any base for future Elementary school teachers in France and Greece: one discussion via Registers and Praxis, MENON: Journal of Educational Research, journal en ligne, *MENON: Journal Of Educational Research*, (ISSN: 1792-8494) Full article: ISSUE 2a, 2013 (p. 99-114).

Tempier, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*, Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot.

ANNEXE : UNE NOUVELLE FAÇON D'ÉCRIRE LES ENTIERS NATURELS – UNE NOUVELLE NUMÉRATION DE POSITION

- ***TOUS*** *les nombres de cette fiche sont écrits dans ce nouveau système.*
- ***TOUTES*** *les réponses de cette fiche sont à écrire dans ce nouveau système.*
- *Des exemples sont proposés, vous pouvez en ajouter d'autres si vous le désirez.*

A) La suite des écritures chiffrées

Continuer la suite des nombres de ce tableau (lecture de gauche à droite et de haut en bas).

1	2	3	4	5	6	10	11	12	13
14	15	16	20	21	22	23	24	25	26
30	31								
									etc.

Comment faire pour trouver l'écriture chiffrée du successeur d'un nombre dans ce système ?

Comparer les nombres suivants (avec > et < selon le cas) :
12 … 4   35 … 42   100 … 64   3240 … 44   200 … 300   241 … 256

Comment faire pour comparer deux nombres dans ce système ?

B) Dénombrement d'une collection

Combien y a-t-il de « o » dans ces deux cadres ? Donner le nombre dans le nouveau système.

oooooo ooo oo o ooo oo o oo o o o ooooooooo oo o o	oo o o ooo o o o o oo o o o o o o oo ooooo o o o ooo o

Comment faire pour dénombrer une collection avec ce système d'écriture des nombres ?

C) On définit les unités relatives à chaque rang de la manière suivante :

u_0=1 ; u_1=10 ; u_2=100 ; u_3=1000 ; u_4=10000 ; etc.

Écrire les unités relatives aux rangs 5, 6, 10, 11 et 12.
Comment s'écrit l'unité de rang k, notée u_k ?
Trouver l'écriture chiffrée des nombres suivants :

- 1 u_2 et 4 u_1 et 3 u_0
- 4 u_3 et 5 u_2 et 2 u_0
- 5 u_1 et 2 u_2 et 1 u_0 et 4 u_3
- 4 u_2 et 1 u_3 et 5 u_1

Comment faire pour trouver l'écriture chiffrée d'un nombre donné avec les unités de rang ?

D) On ajoute deux nombres donnés avec les unités de rang.

Trouver les écritures chiffrées.

- 1 u_2 et 2 u_1 et 3 u_0 avec   3 u_2 et 2 u_0

- 4 u_2 et 3 u_1 et 1 u_0 avec 5 u_1 et 2 u_0
- 4 u_1 et 5 u_0 avec 5 u_1 et 1 u_0
- 1 u_3 et 4 u_2 et 5 u_1 avec 3 u_3 et 2 u_2 et 4 u_1 et 3 u_0

Comment faire pour ajouter deux nombres dans ce système ?

E) On veut commander des paquets de « o » (penser à ce que vous voulez, des timbres, des billes, des yaourts,…). Les « o » sont vendus par paquets de u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, etc.

On veut commander 24100 « o ». Comment peut-on faire la commande ?

On veut commander 24100 « o », mais le magasin ne dispose que de paquets de taille u_1, u_2 et u_3. Comment peut-on faire la commande ?

On veut commander 1410 « o », mais le magasin ne dispose que de paquets de taille u_1 et u_3. Comment peut-on faire la commande ?

F) SYNTHÈSE GÉNÉRALE

Expliquer comment fonctionne ce système de numération

Comment l'analogie intervient-elle dans les activités de formalisation en mathématiques ? Peut-on l'utiliser didactiquement dans ces activités, en classe ou à l'université ?

Marc ROGALSKI

Université Pierre et Marie Curie

marc.rogalski@imj-prg.fr

Résumé

On étudie comment les activités de formalisation en mathématiques peuvent utiliser l'analogie, y compris sur le plan didactique. On rappelle, pour ce faire, trois types d'actions de formalisations développées dans un papier antérieur, et on regarde ce qu'il en est de l'usage de l'analogie dans chacune d'elles. On se risque à quelques hypothèses sur formalisation et analogie en physique.

Introduction

Réfléchissant sur l'usage de l'analogie en mathématiques (et secondairement en physique, malgré notre faible compétence dans cette discipline), il nous semble indispensable de confronter cet usage éventuel aux activités de formalisation, moteur essentiel de l'histoire des mathématiques comme du travail mathématique quotidien (et cela nous semble être aussi le cas en physique, voir le livre édité par Durand-Richard 2008).
Nous nous appuierons donc pour ces réflexions sur les thèses avancées dans Rogalski (2012), ainsi que dans le texte plus ancien Rogalski (1997), et nous résumerons brièvement ces thèses. Disons déjà que nous distinguons trois types d'activités de formalisation dans la pratique (passée ou présente) des mathématiciens :

- les formalisations permettant de résoudre de grands problèmes mal formulés, car concernant des notions intuitives ou naturelles mal définies ;
- l'unification formelle de domaines différents, par axiomatisation et créations de « structures » ;
- la résolution de problèmes par simplification, dénomination et axiomatisation locale.

Nous ne nous intéresserons pas au mouvement formaliste en mathématiques, dans la mesure où son but a été, essentiellement, *d'élucider la notion de vérité* en mathématiques, et non de résoudre des problèmes de mathématiques (même si cela a pu être parfois le cas ultérieurement).

Nous décrirons donc sommairement ces trois activités de formalisation dans les chapitres I, II et III, et nous évoquerons chaque fois que c'est possible le rôle que peut ou a pu y jouer l'analogie, ainsi que les problèmes d'une prise en compte éventuelle dans l'enseignement de ces activités de formalisation (en général aux niveaux du lycée et de l'université). Cela nous amènera à renvoyer le lecteur à certains exemples donnés dans le texte Rogalski (2015) de la présente brochure.

Enfin, nous nous risquerons aussi, dans le chapitre IV, à quelques réflexions sur certains aspects de la formalisation en physique. Nous n'évoquerons guère que des activités de modélisations ponctuelles, et aussi la nécessaire symbolisation (un aspect de la formalisation), sans laquelle il est impossible de mathématiser la physique… c'est-à-dire, le plus souvent, de faire de la physique !

I. LES FORMALISATIONS POUR RÉSOUDRE DE GRANDS PROBLÈMES MAL FORMULÉS, CAR CONCERNANT DES NOTIONS INTUITIVES OU NATURELLES MAL DÉFINIES

A plusieurs reprises dans l'histoire des mathématiques on constate que l'absence d'une définition suffisamment formelle, générale d'une notion "commune", comprise de façon intuitive par tout le monde, entraîne des *imprécisions* dans les preuves, des *désaccords* sur leur validité, des *réfutations* ou des *controverses*. Ces phénomènes apparaissent lors des essais de résolution de ce qui apparaît souvent a posteriori comme un grand problème concernant cette notion, et peuvent durer longtemps.
La *formalisation* de la notion imprécise permet alors, grâce à l'accord qu'elle entraîne chez tous sur un sens précis, de résoudre les problèmes en suspens.

Quelques exemples historiques

- La découverte de l'incommensurabilité du côté et de la diagonale du carré remet en cause la notion même de rapport de grandeurs, et cause un trouble qui ne sera levé que par la théorie d'Eudoxe qui réussit à définir le rapport de deux grandeurs même non commensurables (pour l'essentiel, sa solution, dans le cadre moderne, revient à l'invention des coupures). Voir Arsac 1987.
- Les controverses sur les « preuves » de la formule d'Euler pour les polyèdres et leurs insuffisances (voir Lakatos 1976) reposaient sur l'imprécision de la notion « naturelle » de polyèdre. Sa définition formelle a permis de clarifier la classe des polyèdres vérifiant la formule d'Euler.
- La controverse sur les logarithmes des nombres négatifs a pris fin quand Euler a réussi à parfaitement définir les logarithmes d'un nombre complexe, en montrant qu'il y en a une infinité (voir Verley 1986).
- Les courbes et surfaces ont été longtemps utilisées et étudiées de façon « naïve », avant que leur formalisation en géométrie algébrique permette de prouver clairement des résultats plus ou moins « admis - prouvés ».
- L'aire de surfaces gauches a vu plusieurs tentatives de définitions contrées par divers contre-exemples, voir à ce propos Lebesgue 1915.
- Etc.

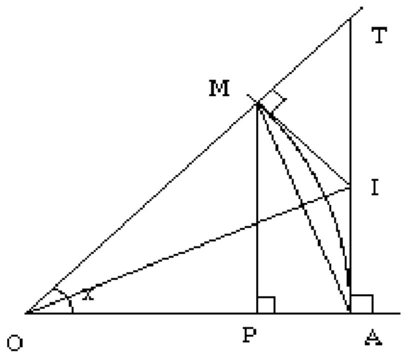
Et dans l'enseignement ?

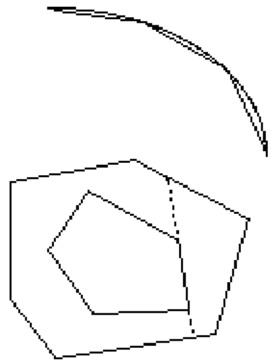
Il s'agit de problèmes difficiles, qui ont eu souvent une longue durée historique, il est donc difficile de pratiquer ce type de formalisation dans l'enseignement. De plus, il reste de l'épisode des « maths modernes » une réticence à parler, au lycée et à l'université, de concepts qu'on a du mal à définir clairement. Or, pour faire vivre dans l'enseignement ce type de formalisation, on ne pourra tout définir, il faudra rester à un niveau intermédiaire, toute la

formalisation ne sera pas faite.
Néanmoins, plusieurs occasions peuvent se présenter *de faire toucher du doigt par les élèves l'insuffisance de certaines notions communes, pourtant apparemment claires car reposant sur des images mentales fortes, pour résoudre des problèmes d'énoncés simples*, et de faire vivre en classe une démarche de formalisation raisonnable. Il me semble qu'il y a un grand intérêt didactique et éducatif à ce que les élèves rencontrent ces *moments formalisateurs*.

Un exemple en première ou terminale S

La dérivée des fonctions trigonométriques repose entièrement sur la relation $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$. Elle est admise, mais elle repose sur les inégalités $\boxed{\sin x \le x \le \tan x}$, pour $x \ge 0$ petit. Comment prouver ces inégalités ? Celle de gauche est « claire », car MP ≤ AM ≤ arc(AM) : la première est l'inégalité entre perpendiculaire et oblique, la deuxième provient de l'idée « intuitive » que le segment de droite est le plus court chemin entre deux points (ici A et M). L'inégalité de droite $x \le \tan x$ pose problème, car il faut comparer arc(AM) et AT. Il suffirait de montrer que arc(AM) ≤ AI + IM, voir le dessin, où OA = 1.





Pour continuer, on voit *qu'il faut en fait définir ce qu'est* arc(AM), ce qui n'a jamais été fait. On pourrait alors faire comprendre qu'un effort pour définir plus clairement la « longueur de l'arc du cercle » (longueur « maximale » qu'on peut approcher par des arcs polygonaux inscrits – mais sans nécessairement prononcer le nom de borne supérieure, c.à.d. *en ne formalisant pas jusqu'au bout*) permet de faire facilement la comparaison demandée, dès lors qu'on prouve l'inégalité entre les périmètres de deux polygones *convexes* inclus l'un dans l'autre (ce qui est géométriquement très facile avec l'inégalité triangulaire). Voir à ce sujet le chapitre sur le nombre π dans Rogalski et al. 2001a.

D'autres exemples ?

La demande de *calculer* $(1{,}7777\ldots)^2$ met des étudiants de première année universitaire devant un problème du même genre : ils n'y arrivent pas, faute d'avoir une définition claire du « nombre » qu'on veut élever au carré. Cette interrogation est l'une des nombreuses difficultés auxquelles confronter les étudiants pour leur montrer la nécessité d'une formalisation des nombres réels…
Un autre exemple peut concerner la notion d'aire, en particulier le fait que les aires enfermées dans des courbes non polygonales n'ont jamais été définies jusqu'en terminale (voir Lebesgue 1915 et le « tarababoum » du disque) : la notion d'intégrale est l'occasion d'aborder ce problème…

Et le rôle de l’analogie ?

Il me semble que *ce type de formalisation laisse peu de place (voir pas du tout) à la pratique et à l’usage de l’analogie* : elle n’apparaît pas dans les exemples précédents, et si on regarde les exemples historiques, on ne voit pas comment elle aurait pû jouer directement un rôle. Par exemple, dans le texte de Lakatos 1976, une démarche analogique *explicite* n’apparaît jamais. Peut-on imaginer que dans la dialectique exemples/contre-exemples des analogies puissent jouer un rôle ? Cela demanderait des études, en particulier historiques, supplémentaires…

II. L’UNIFICATION FORMELLE DE DOMAINES DIFFÉRENTS, PAR AXIOMATISATION ET CRÉATIONS DE « STRUCTURES »

Ce processus de formalisation n’est pas du même type que le précédent. Il a lieu lorsque sont rassemblés sous un même concept ou une même théorie des problèmes et des démarches qui « se ressemblent », ont quelque chose en commun, alors même qu'ils se situent dans des domaines différents. Ce processus d'unification formelle fonctionne pendant toute la deuxième moitié du XIXème siècle et le XXème siècle. Il s'agit souvent d'une *démarche réflexive, consciente,* et qui demande, de la part de ses auteurs, mais aussi des contemporains (et cela n'a pas toujours été le cas**)** *une « foi» en la puissance créatrice de la pensée unificatrice.* Les concepts crées dans ce type de démarche sont souvent des concepts formalisateurs, unificateurs, généralisateurs, simplificateurs (FUGS), tels qu’évoqués à propos de l’algèbre linéaire dans (Dorier 1997).

Des exemples historiques

En fait, ils sont très nombreux, et très caractéristiques des mathématiques des XIXème et XXème siècles. Il s’écoule parfois un temps long entre la création d’une axiomatique et son utilisation ; par exemples, les axiomes de Peano sur l’algèbre linéaire (1885) n’ont été « acceptés » et utilisés pleinement que vers les années 1930 quand il a fallu utiliser des espaces de dimensions infinis avec le développement de l’analyse fonctionnelle. Autres exemples : la topologie générale (voir Bridoux 2011), la théorie des groupes (voir Hausberger 2012), l’axiomatisation des espaces de Hilbert par Von Neumann vers 1930 (elle, tout de suite utilisée), et bien sûr toute l’œuvre de Bourbaki.

Rôle de l’analogie

Il semble bien que *l’analogie joue un grand rôle dans ce type de formalisation*. Mais c’est plutôt un rôle « **terminal** » qu’un rôle de découverte : on s’aperçoit que problèmes, méthodes, calculs sont du *même type*, et peuvent être *unifiés avec des règles communes* à l’aide d’un *nouveau formalisme*, plus abstrait. La démarche est **volontariste**, *on veut unifier* parce qu’on sait que *c’est efficace* en mathématiques : on obtient des *relations nouvelles* entre les domaines unifiés, de *nouveaux registres* symboliques, adaptés à tous les cas à la fois, permettant des *transferts producteurs* qui peuvent être guidés par **des analogies permises par le cadre plus formel commun** (voir l’exemple 5 du chapitre III de Rogalski 2015, ou penser à la représentation mentale illustrée par la suite d’égalités $(x \mid y) = \sum x_i\, y_i = \langle X^*, Y\rangle = y(x) = \int x(t)\ y(t)\ dt$ dans le cadre du formalisme des espaces de Hilbert). Il s’agit de fait d’une *réorganisation profonde du savoir*, portée par un usage très spécial de l’analogie.

Problèmes didactiques

On rencontre évidemment beaucoup de situations d'enseignement où ce type de formalisation a lieu dans les enseignements universitaires. La prise en compte en didactique de ce deuxième processus de formalisation est sans doute moins malaisée que pour le précédent. Mais elle comporte des risques qu'on a vus lors de l'enseignement des « math modernes », en particulier celui de donner lieu à un effet Jourdain généralisé qui rende illusoire l'appropriation de la démarche par les élèves (« voici 10 objets : les entiers relatifs, les symétries du carré, celles de l'hexagone, etc ; je vous dis : ce sont des groupes »).

Elle comporte aussi des difficultés didactiques très particulières, qui peuvent rendre inopérantes les techniques usuelles de la didactique classique : il n'y a pas toujours de bons problèmes d'introduction (pas toujours de situation fondamentale, difficulté à faire jouer la dialectique outil objet), ce qu'on doit dévoluer aux élèves est alors « l'envie d'unifier » pour forger des savoirs généraux dont l'utilité est nécessairement, pour un temps, différée, bien plus que « l'envie de résoudre un problème précis ». On se situe donc à un autre niveau, *les leviers à trouver ne vont plus relever nécessairement d'un processus d'accommodation à un milieu ; les enjeux culturels et réflexifs (méta) vont y être plus importants* (Rogalski 1995).
Il va donc falloir utiliser avec les étudiants *un discours et des activités mettant en avant l'approche « méta »*, en développant et illustrant à travers des situations « concrètes » :

- *les avantages du détour théorique unifiant et son réinvestissement efficace* dans des domaines particuliers (par exemple en algèbre linéaire : comment le « calcul linéaire » permet d'aborder les questions d'existence en interpolation) ;
- *l'importance des changements de points de vue* (exemple en algèbre linéaire encore, avec l'interprétation d'équations linéaires comme des vecteurs de IR^n - passer de Euler à Frobenius ! – ou bien pour comparer les rangs des lignes et des colonnes d'un tableau) ;
- *la création de problématiques* : il s'agit de confronter les étudiants à un ensemble de problèmes qu'ils ne peuvent résoudre, mais qui ont du sens et motivent l'introduction des notions qui vont permettre de les résoudre, *celles-ci étant néanmoins présentées comme objets qui se révèlent ensuite comme les outils dont on avait bes*oin (par exemple, le rang et l'indépendance linéaire comme outil pour résoudre des problèmes sur les équations linéaires, voir Dorier 1997).

Usages didactiques de l'analogie dans l'enseignement de ces structures formelles

On renvoie encore à l'exemple 5 du chapitre III de Rogalski 2015 pour l'usage de l'analogie dans les modes d'utilisation de cadres unifiants, et à l'exemple 2 du même chapitre pour l'introduction à la notion d'espace vectoriel. On peut aussi l'utiliser *pour passer d'une application d'un formalisme général à une autre* : par exemple, de l'efficacité du recours à l'algèbre linéaire pour l'existence de l'interpolation de Lagrange d'une fonction (bien que non nécessaire, car le problème est simple), on peut faire déduire par les étudiants, *par analogie*, les théorèmes d'existence pour des interpolations plus compliquées (interpolation d'Hermite, ou par des fonctions splines, ou interpolation de Gregory-Newton…).

III. La formalisation pour la résolution de problèmes par simplification : abandon d'informations, dénomination et axiomatisation locale, dialectique particulier/général

Ce type de formalisation apparaît couramment dans *l'activité mathématique quotidienne,* quand il s'agit de *résoudre des problèmes* un peu complexes, trop touffus pour qu'une piste de solution apparaisse d'emblée. Ce que fait souvent le mathématicien devant un tel problème, c'est *d'abandonner volontairement de l'information*, celle dont une analyse montre qu'elle est inutile, voire nuisible car cachant une plus grande simplicité sous-jacente. Cela se fait *en donnant un nom* (et en la notant par un symbole) à une partie des données du problème. Ce faisant, on passe à un problème plus général, dont *la structure est plus claire*, et on peut même chercher la généralité maximale. Des *cas particuliers plus simples* que le problème initial peuvent alors donner une idée de la solution du cas général.
Cette pratique assez répandue pourrait s'appeler « *l'axiomatisation locale* ». Certaines idées générales dirigent le mathématicien dans cette méthode :

- un problème n'est jamais isolé, il fait partie d'une classe de problèmes ;
- il y a intérêt à concentrer une trop grande multiplicité de paramètres ;
- il est nécessaire d'alléger les représentations mentales des techniques ;
- il est plus efficace de raisonner ou de calculer sur des symboles que sur des objets « concrets » (voir par exemple la « révolution symbolique » en mathématique, dans Serfati 2006 et 2009).

Rôle de l'analogie ?

D'abord, la démarche décrite ci-dessus s'apparente parfois à une sorte de « modélisation intramathématique », qui peut s'articuler avec le procédé de formalisation vu en II, qui permet d'utiliser des analogies entre théories par leur unification dans une axiomatique plus générale (voir à nouveau l'exemple 5 du chapitre III de Rogalski 2015). Puis l'idée de considérer le problème à résoudre comme faisant partie d'une classe de problèmes demande parfois de déterminer plusieurs éléments de cette classe par analogie, avant de généraliser le problème (voir encore l'exemple 2 du chapitre III du même texte).

Un exemple emblématique

On se propose d'étudier la suite définie par

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \sqrt{[(n+\ln n)/(n+\cos n) + u_n]}.$$

L'analyse fait deviner que seul le comportement pour n grand du terme $(n+\ln n)/(n+\cos n)$ va compter, en même temps qu'elle fait prendre conscience que la forme compliquée de ce terme est un obstacle à la résolution du problème … qui n'en est plus un dès qu'on imagine que le problème aurait la même structure si on y remplaçait ce terme par une suite quelconque ayant même comportement pour n grand.

Tout cela amène à *dénommer* le terme compliqué, à poser $a_n = (n+\ln n)/(n+\cos n)$, et à *étudier un problème plus général*, la suite récurrente $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{[a_n + u_n]}$, avec l'hypothèse que a_n tend vers 1, ou même vers $a > 0$, quand n tend vers l'infini. *L'étude du cas particulier* bien classique $a_n = a$ pour tout n (suite convergente vers $(1/2)(1+\sqrt{[1+4a]})$) donne l'idée de s'y ramener à partir d'un certain rang N, celui à partir duquel on a $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$. On peut alors introduire les suites minorantes et majorantes

$$v_N = u_N,\ v_{n+1} = \sqrt{[a+\varepsilon+ v_n]},\quad \text{et}\quad w_N = u_N,\ w_{n+1} = \sqrt{[a-\varepsilon+ w_n]},\ n \geq N,$$

et étudier les deux suites particulières v_n et w_n, etc. On peut même *généraliser* encore plus le problème en étudiant les suites de la forme $u_{n+1} = f(a_n, u_n)$, en précisant, au fur et à mesure des études de cas particuliers, les propriétés de la fonction f à supposer. On peut encore généraliser avec l'étude des suites de la forme $u_{n+1} = f_n(u_n)$…

Dans cet exemple, particularisations et généralisations peuvent être suggérées par des analogies…

Commentaires didactiques

Faire passer auprès des élèves et étudiants cette méthode de formalisation simplificatrice est indispensable, d'une part pour les rendre capables de résoudre des problèmes, de l'autre pour qu'ils acquièrent une idée raisonnable de ce que sont vraiment les pratiques en mathématiques. Nous partageons le point de vue de Patras dans (Patras 2001) lorsqu'il écrit

> « Pour que les mathématiques vivent, il faut qu'elles puissent être facilement communiquées aux novices […]. En d'autre termes, le savoir mathématique est aussi pour beaucoup un savoir faire dont les règles sont celles d'une technique tout autant que d'une connaissance formelle. Les manuels conçus selon les règles de la méthode d'exposition structuraliste laissent souvent un sentiment d'incomplétude : le lecteur a bien compris les ressorts de la méthode, mais serait bien incapable de la faire fonctionner dans l'étude de situations concrètes ».

Il y a là un enjeu « méta » dans l'enseignement, qui tourne autour de l'enseignement de méthodes et l'utilisation de problèmes suffisamment riches, donc difficiles, pour apprendre quelque chose aux élèves. Des idées générales de résolution existent dans *les pratiques expertes des mathématiciens,* il est certainement nécessaire d'en faire passer un peu aux élèves si on veut qu'ils soient en mesure d'aborder des problèmes intéressants. La question de *l'enseignement de méthodes de résolution* a donc un rapport étroit avec ce troisième processus de formalisation. Pour les problèmes soulevés par l'enseignement de méthodes, je renvoie à (Robert, Rogalski & Samurcay 1987), au chapitre correspondant de (CI2U 1990), et à (Schoenfeld 1980).

De même, les démarches générales de changement de cadres, de registres, de points de vue, développées par R. Douady, R. Duval et présentées dans (Rogalski 2001b) sont au cœur des activités de formalisations locales dans la résolution de problèmes.

Trop souvent, le didactique présent dans les énoncés d'exercices ou problèmes, où l'enjeu est apparemment simplement de résoudre, *est caché* aux élèves et aux étudiants, qui ne se rendent pas compte que dans tout exercice il y a quelque chose à apprendre : il y a une réflexion *a posteriori* à faire sur les difficultés rencontrées et les méthodes de résolution qui ont marché. Comment organiser cette réflexion des élèves, identifier les raisons pour lesquelles ils ne la font pas spontanément, savoir pourquoi les maîtres la mettent rarement en scène, sont de vrais problèmes didactiques.

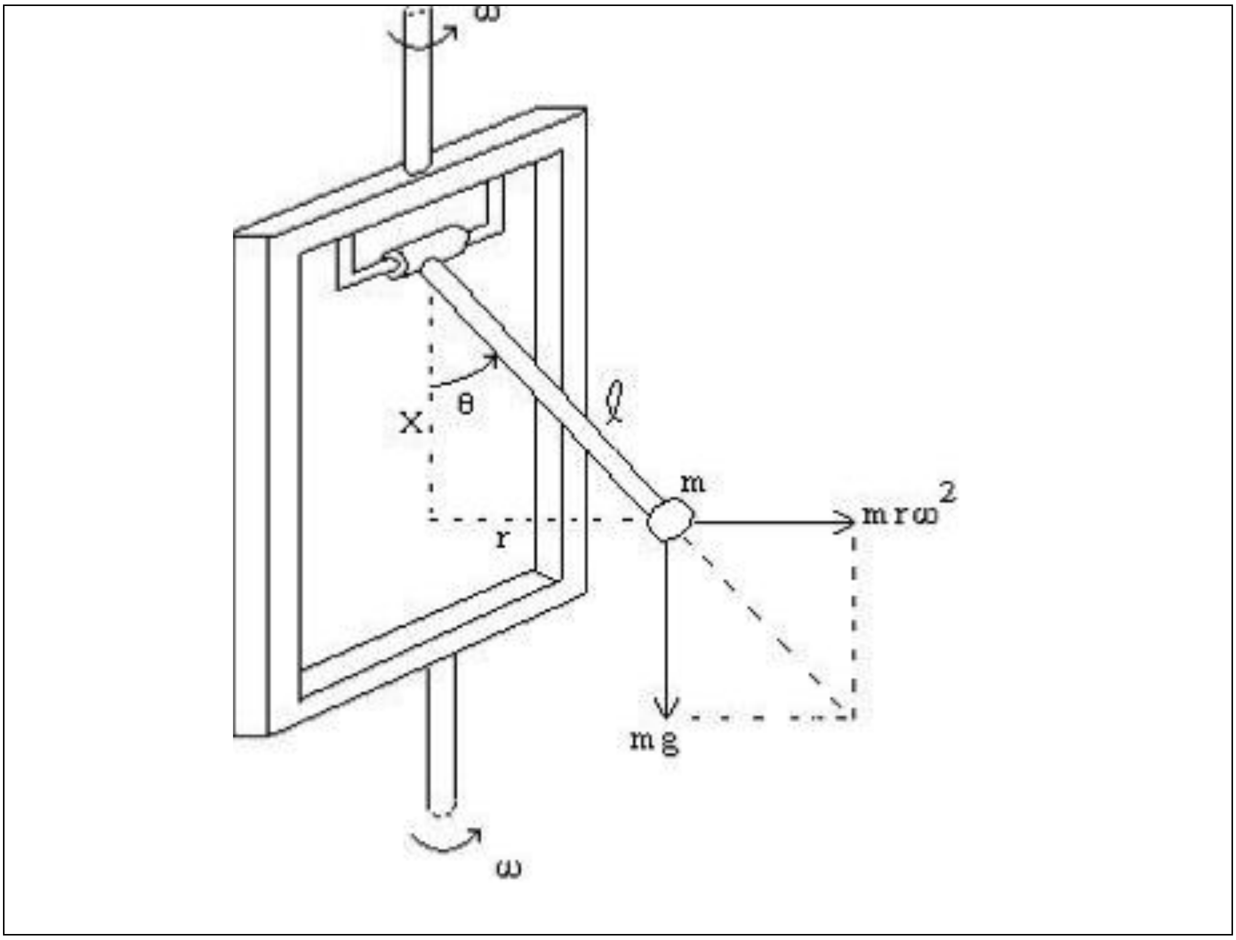
On trouvera dans (Mac Aleese et al. 2009) un essai d'aborder ces problèmes à travers la formation des moniteurs de mathématiques : formation à l'enseignement des mathématiques à l'université pour des étudiants en thèse qui ont 64 heures de travaux dirigés à assurer. On met en évidence avec eux, à travers des réflexions sur divers exercices, l'importance qu'il y a à faire passer auprès des étudiants (et quel discours tenir, quels types d'exercices choisir, pour ce faire – et aussi quelle gestion, mais c'est un autre problème) certaines idées générales sur l'activité de résolution de problèmes, dont certaines s'appuient sur ce thème des formalisations locales : donner des noms ; changer de cadre ; changer de niveau de conceptualisation, reconnaître des structures générales, des analogies, effectuer des transferts ; traduire des propriétés ; dégager des méthodes ; etc.

IV. Formalisation et analogies en physique : quelques remarques

Un premier aspect de la formalisation en physique résulte de *la nécessité de sortir de la description qualitative des phénomènes* : on ne peut établir des *lois physiques* à propos des phénomènes que par une *formalisation* : identification des grandeurs, symboles utilisés pour les noter, moyens pour les mesurer, *relations mathématiques* entre ces mesures. Cette activité formalisatrice est un excellent *moyen de lutter contre les connaissances spontanées erronées* des élèves et étudiants, souvent issues de leurs activités quotidiennes (parfois par analogies !), même si la formalisation ne suffit pas à régler tous les problèmes (voir Viennot 1996). Mais l'analogie est aussi parfois un moyen de trouver les relations pertinentes entre grandeurs. Voir à ce propos les passages de la présente brochure consacrés à la physique, et évidemment le livre Durand-Richard 2008.
Ainsi, très souvent, en physique, *formaliser se fait en établissant des formules*. Dans le cas de la *modélisation* de phénomènes et situations élémentaires, il s'agit de *formalisation locale*.

Un exemple : la modélisation du pendule tournant

Voici un exemple de modélisation où l'on voit bien comment une formalisation (locale) va aller à l'encontre de l'impression qualitative issue du sens commun, et doit mobiliser des mathématiques pas toujours élémentaires.
On considère un pendule constitué d'une masse ponctuelle et d'une tige rigide de masse négligeable, qui ne peut se déplacer que dans le plan médiateur d'un bâti où il est fixé. On suppose qu'on fait tourner le bâti avec une certaine vitesse de rotation. Que fait le pendule ? Il s'agit évidemment d'une situation théorique épurée.
L'approche naïve, s'appuyant sur le sens quotidien de la force centrifuge (analogie avec un manège, par exemple), nous fait répondre que *le pendule s'écarte de sa position d'équilibre verticale* (dans le repère tournant). Et bien *ce n'est pas vrai !*



Pour le voir, il faut d'abord *nommer* les grandeurs en présence : masse *m*, longueur *l*, vitesse de rotation ω, angle θ d'écart à la verticale, accélération g de la pesanteur. Puis il faut égaler les moments du poids et de la force centrifuge par rapport au point de suspension (ils agissent en sens contraire et la nullité de leur somme algébrique garantit l'équilibre dans le repère tournant), ce qui donne une *formule* donnant une *relation* entre θ et ω :

$$\omega^2 = (g/l)(1/\cos\theta).$$

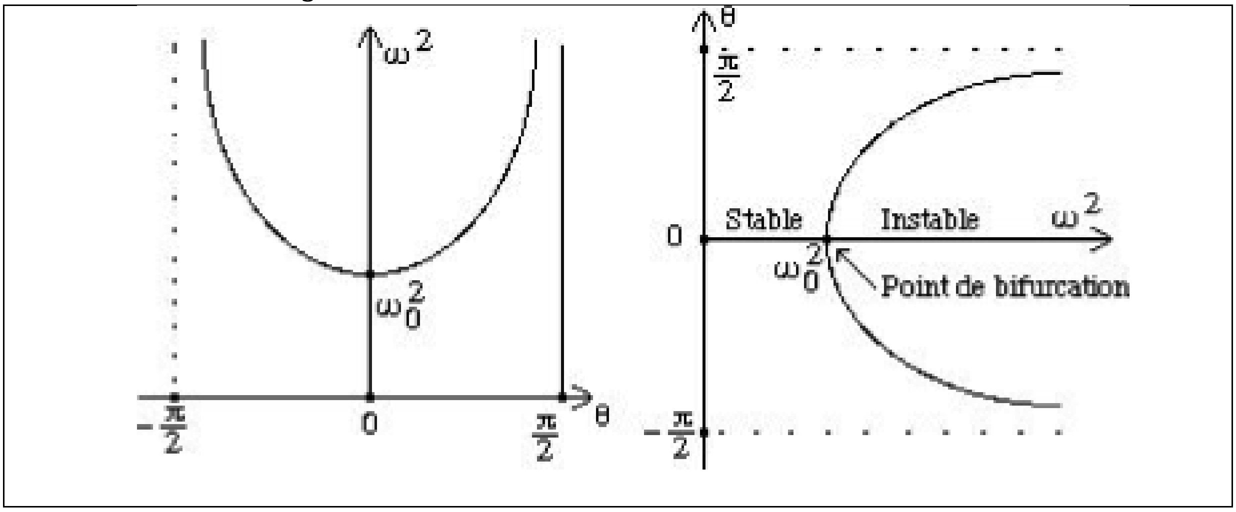
Cette formule ne fournit aucune valeur pour θ tant que $\omega < \omega_0 := \sqrt{(g/l)}$ (car un cosinus doit être plus petit que 1 en valeur absolue !). On présume donc que dans ce cas le pendule reste vertical, mais que dès que $\omega > \omega_0$ il s'écarte de sa position d'équilibre d'un angle donné par la formule précédente.

Sans formalisation ni formule, impossible de se rendre compte de ce phénomène peu intuitif. On peut l'interpréter en montrant que l'équilibre $\theta = 0$ est *stable* pour $\omega < \omega_0$, et *instable* pour $\omega > \omega_0$. En $\omega = \omega_0$ il y a *un « point de «bifurcation » ou « brisure de symétrie* » : le pendule peut s'écarter aléatoirement d'un côté ou de l'autre du bâti.

Remarquons que les courbes ω^2 fonction de θ et θ fonction de ω^2 ont les allures de la figure, ce qui se montre par utilisation des fonctions réciproques et de leurs dérivées. Il faut bien savoir la symétrie des graphes, interpréter les dérivées. Et connaître les variations de la fonction arccosinus…

c'est-à-dire utiliser beaucoup de savoirs mathématique. Et il en faut même plus pour montrer les stabilité et instabilité citées : on regarde *l'équation différentielle* vérifié par θ(t) quand on écarte un peu le pendule de la position verticale, avec vitesse initiale nulle. On obtient, par la relation fondamentale entre moment d'inertie, accélération de rotation et moment total des forces, l'équation

$l\theta'' = \omega^2 l \sin\theta \cos\theta - g \sin\theta.$



Comme θ est petit, on peut *linéariser l'équation*, et on obtient $\theta'' = (\omega^2 - g/l)\,\theta$, ce qui donne la stabilité et l'instabilité annoncées (par le théorème de Liapounov).
Ainsi une modélisation d'un petit phénomène élémentaire, nécessaire pour dépasser le sens commun, va demander une formalisation assez développée, utilisant plusieurs outillages théoriques des mathématiques…

Les grands concepts unificateurs de la physique

Il s'agit souvent de concepts regroupant des notions établies chacune dans son domaine. Par exemple, le concept d'énergie s'obtient, à partir de la notion de travail mécanique, par l'unification de diverses sortes d'énergie définie chacune de son côté : énergie cinétique, énergie potentielle, énergie électrique, chaleur, etc.
Reste à savoir précisément quels rôles ont joué, dans cette unification, les analogies et l'idée d'invariance. Seuls des études historiques et épistémologique de physiciens pourraient nous éclairer sur ce point…

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Arsac G. (1987) L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 8 (3).

Bridoux S. (2011) *Enseignement des premières notions de topologie à l'université – Une étude de cas*. Thèse de l'Université Paris – Diderot.

CI2U (1990) *Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année*. Brochure de la Commission Inter-IREM Université, IREMs de Lyon et de Pari 7 Diderot.

Dorier J.-L. Ed. (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Durand-Richard, Marie-José (éd), (2008) *L'analogie dans la démarche scientifique*. L'Harmattan, Paris.

Hausberger, Thomas, (2012) *Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique*. Actes de emf 2012, GT3, http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Lakatos, Imre, (1976) *Preuves et réfutations*. Paris : Hermann.

Lebesgue, Henri, (1915) *La mesure des grandeurs*. (Nouvelle édition 1975). Paris : Albert Blanchard.

Mac Aleese Jacqueline, Pian Jean, Robert Aline, Rogalski, Marc, et Viennot, Laurence, (2009) *Propositions pour une formation des moniteurs en mathématiques. Indications sur la formation des moniteurs de physique*. Document pour la formation des enseignants, Paris : Irem de l'Université Paris-Diderot.

Patras, Frédéric, (2001) *La pensée mathématique contemporaine*. Coll. Science, histoire et société, PUF.

Robert, Aline, Rogalski, Janine, et Samurcay, Renan, (1987) Enseigner des méthodes. *Cahiers de didactique des mathématiques 38*. IREM de l'université Paris – Diderot.

Rogalski, Marc, (1995) Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel, que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher, et qu'il n'y ait apparemment pas de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire. *Séminaire Didatech* 169, pp 127-162. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Rogalski, Marc, (1997) Les processus de formalisation en mathématiques, problèmes didactiques. *La Lettre de la Preuve*, www.lettredelapreuve.it .

Rogalski, Marc et al., (2001a) *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*. Ellipses, Paris.

Rogalski, Marc, (2001b) Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady, *Actes de la journée en hommage à Régine Douady* (juin 2001), Publication de l'IREM de Paris 7, 2002.

Rogalski, Marc, (2012) *Approches épistémologique et didactique de l'activité de formalisation en mathématiques*. Actes de emf 2012, GT3, http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012.

Rogalski, Marc, (2015) *Analogie entre théorie des nombres et théorie des fonctions*. *Quelques commentaires sur l'analogie en mathématiques, dans l'histoire des mathématiques et en didactique des mathématiques*, dans la présente brochure.

Schoenfeld, Alan, (1980) *Teaching Problem-Solving Skills*, American Mathematical Monthly 87 (10), p. 794-805.

Serfati, Michel, (2006) La constitution de l'écriture symbolique mathématique. Symbolique et invention, *Gazette des Mathématiciens* 108 (avril 2006), Publ. Soc. Math. Fr., 101-118.

Serfati, Michel, (2009) La constitution de la pensée symbolique mathématique. Une étude épistémologique, *Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone* 2009.

Verley, Jean-Luc, (1986) La controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires. *Fragments d'histoire des mathématiques, tome 1*. Paris : Publication de l'APMEP 041.

Viennot, Laurence, (1996) *Raisonner en physique, la part du sens commun*. Bruxelles, De Boeck.

TITRE :

L'ANALOGIE : Études sur son usage en didactique en Chimie, en Mathématiques, en Physique

COORDINATION

Jacques Douaire et Laurent Vivier

AUTEURS ET COLLABORATEURS:

Richard Cabassut, Patricia Crépin, Anne-Amandine Decroix, Bernadette Denys, Jacques Douaire, Marie-Pierre Galisson, Katalyn Gosztonyi, Wanda Kaminski, Rita Khanfour-Armale, Alain Kuzniak, Ana Mesquita, Joris Mithalal, Cécile Ouvrier-Buffet, Bernard Parzysz, Marc Rogalski et Laurent Vivier

RESUME :

Le recours à l'analogie est une réalité, tant dans des dispositifs d'enseignement en chimie, mathématiques et physique, que, de fait, dans les pratiques des enseignants. Si certaines des fonctions heuristiques de l'analogie ou de formalisation jouent un rôle dans les sciences contemporaines, le recours à l'analogie peut parfois relever d'une pratique empirique dont les risques à plus long terme sur la compréhension des concepts scientifiques, voire la constitution d'obstacles didactiques, ne sont pas toujours envisagés.

Cette publication du groupe « Mathématiques et réalité » du LDAR analyse dans une première partie des ouvrages sur les modèles contemporains de l'analogie. Dans une seconde partie l'étude de textes d'historiens des sciences conduit à s'interroger sur le fonctionnement de l'analogie en sciences. Dans une troisième partie des synthèses et des expérimentations didactiques apportent un éclairage sur son usage actuel dans les processus d'apprentissage ou d'enseignement.

MOTS- CLES :

Apprentissages, Analogie, Didactique, Chimie, Electrocinétique, Enseignement, Ethnomathématique, Histoire des Sciences, Mathématiques, Métaphores, Numération, Physique

Éditeur: IREM de Paris
Responsable de la publication: F. Vandebrouck
IREM de Paris 7 – Case 7018
Université Paris Diderot
75205 Paris cedex 13
irem_de_paris@univ-paris-diderot.fr
http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/

Dépôt légal : 2015
ISBN : 978-2-86612-371-0