

Estimation en temps fini de systèmes non linéaires et à retards avec application aux systèmes en réseau

Kokou Anani Agbessi Langueh

► **To cite this version:**

Kokou Anani Agbessi Langueh. Estimation en temps fini de systèmes non linéaires et à retards avec application aux systèmes en réseau. Automatique / Robotique. Ecole Centrale de Lille, 2018. Français. NNT : 2018ECLI0012 . tel-02115262

HAL Id: tel-02115262

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02115262>

Submitted on 30 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : | 3 | 6 | 6 |

Année : 2018

CENTRALE LILLE

THESE

Présentée en vue
D'obtenir le grade de

DOCTEUR

En

**Spécialité : Automatique, Génie Informatique,
Traitement de Signal et de l'Image**

Par

Kokou Anani Agbessi LANGUEH

DOCTORAT DELIVRE PAR CENTRALE LILLE

Titre de la thèse :

**ESTIMATION EN TEMPS FINI DE SYSTEMES NON LINEAIRES ET A RETARDS
AVEC APPLICATION AUX SYSTEMES EN RESEAU**

Soutenue le 06 Décembre 2018 devant le jury d'examen :

Président :	Driss BOUTAT	Professeur, INSA Centre Val de Loire
Rapporteur 1 :	Claude MOOG	Directeur de Recherche CNRS, LS2N-Centrale Nantes
Rapporteur 2 :	Qinghua ZHANG	Directeur de Recherche INRIA, INRIA Rennes
Membre :	Woihida AGGOUNE	Maitre de Conférences, Lab QUARTZ-ENSEA Cergy
Directeur de thèse :	Thierry FLOQUET	Directeur de Recherche CNRS, Laboratoire CRISAL
Co-Directeur de thèse :	Gang ZHENG	Chargé de Recherche INRIA, HDR, INRIA Lille

Thèse préparée dans le Laboratoire **CRISAL**

Ecole Doctorale **SPI 072**

Cette thèse a été préparée dans les laboratoires suivants avec un contrat de recherche doctorale pourvu par Centrale Lille:

CRIStAL UMR 9189 CNRS

Université Lille 1
Bâtiment M3 extension
Avenue Carl Gauss
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France

☎ +33(0)3 28 77 85 41

Site <https://www.cristal.univ-lille.fr/>



Centrale Lille

Cité Scientifique – CS 20048 59651 Villeneuve d'Ascq
Cedex - France

☎ +33 (0) 3 20 33 54 87

Site <https://www.centralelille.fr/>



Inria Lille - Nord Europe

Parc scientifique de la Haute-Borne 40, avenue Halley -
Bât A - Park Plaza 59650 Villeneuve d'Ascq - France

☎ +33(0)3 59 57 78 00

Site <https://www.inria.fr/centre/lille>



À la mémoire de mes parents Séraphine et Christophe

À mes frères et sœurs

À toute ma famille

Et à tous ceux qui le méritent

Remerciements

Ces derniers instants de travail font naître en moi un sentiment de satisfaction, d'accomplissement et de soulagement et en même temps des pensées sincères allant vers tout ceux qui m'entourent, m'ont supporté et m'ont soutenu le plus possible durant cette thèse aussi difficile que passionnante. Je ressens en moi le besoin intense de remercier toutes ces personnes volontaires de bonne foi, qui directement, indirectement, amicalement, amoureuxment et en d'autres manières, ont contribué à la formation de ma personnalité. Les amis de bureau à Inria Lille, Francisco, Maxime, Haik, Yue, Tatiana, Gabriele, Yassine, Siyuan, Nadhynee, Nelson, Youness et aussi les amis du bureau à Centrale Lille, Jijju, Abbas, Mert, Zohra, Faten. Les amis de tous les jours, Medede, Hervé, Placide, Martial, Bilquis, Mamadou, Dzidula, Hervé et Mariama. Les personnes qui ont joué un grand rôle dans ma vie, David et Clotilde, Sarah et ma petite nièce Maelys. Ma famille, mes frères Amavi et Pacôme, et mes sœurs Gloria, Akpene, Lawoè et Akouvi, merci pour tout.

Il est aussi très important pour moi de saluer les efforts de ceux qui m'ont encadré durant ces trois années de thèse et de remercier vivement mon Directeur de thèse en la personne du Dr Thierry FLOQUET, et de mon co-encadrant le Dr Gang ZHENG. Mon caractère n'a certainement pas facilité cet encadrement mais avec le recul, j'ai pu adopté une stratégie plus ou moins meilleure pour mener à bien cette thèse. Merci pour votre patience et pour votre disponibilité.

Mes remerciements vont aussi à mes deux rapporteurs, le Dr Claude MOOG et le Dr Qinghua ZHANG qui ont consacré leur temps à l'étude de ce mémoire et qui m'ont permis d'améliorer ce document par leurs remarques pertinentes et leurs suggestions. Je remercie aussi les autres membres du Jury, le Professeur Driss BOUTAT et la Dr Woihida AGGOUNE d'avoir accepté d'examiner cette thèse.

Je salue aussi les efforts des directeurs de Centrale Lille, de CRISAL et de Inria Lille pour leur accueil au sein de leurs instituts.

J'ai partagé ma vie de thésard entre Inria et Centrale Lille. L'ambiance diffère de chaque côté. Je tiens à remercier toute l'équipe administratif et technique de Inria Lille, particulièrement le professeur Jean-Pierre Richard de m'avoir accueilli dans son équipe, Madame Corinne Jamroz pour sa réactivité et son efficacité et tous les autres membres de l'équipe Non-A et Non-A post de Inria Lille-Nord-Europe, Denis, Andrey, Rosane, Wilfrid, Alban, Stanislav, Nicolas, Lucien et Tonametl. Je tiens aussi à remercier le personnel de Centrale Lille et les membres de l'équipe SyNer (CRISAL), le professeur Lotfi Belkoura et le Dr Laurentiu Hetel pour leurs conseils, sans oublier Christophe, Nicolai, Mihaly et Ying. Mes remerciements vont aussi au Professeur Jean-Pierre Barbot qui m'avait encadré lors de mon stage de Master 2, Mme Brigitte Foncez, Mme Vanessa Fleury et tous les autres qui d'une manière ou d'une autre ont interagi sur ma vie durant cette thèse.

Enfin je remercie le Dieu tout puissant sans qui rien ne serait possible.

Table des matières

Remerciements	vii
Table des matières	ix
Liste des Figures	xiii
Notations	xv
Introduction générale	3
Structure de la thèse	5
1 État de l'art	7
1.1 Systèmes linéaires	7
1.1.1 Observabilité des systèmes linéaires	8
1.1.2 Observateur pour les systèmes linéaires à temps invariant	10
1.2 Systèmes non linéaires	10
1.3 Observabilité des systèmes non linéaires	11
1.3.1 Définitions	11
1.3.2 Condition d'observabilité d'un système non linéaire	13
1.4 Observateurs pour les systèmes dynamiques	14
1.5 Systèmes dynamiques à retard (TDS : Time-delay systems)	15
1.5.1 Quelques types de retards	17
1.6 Observation des systèmes à retard	18
1.6.1 Quelques définitions	18
1.6.2 Aperçu de quelques travaux existants sur l'observabilité des TDS	20
1.7 Systèmes complexes	21
1.8 Conclusion	23
2 Estimation pour les systèmes linéaires	27
2.1 Introduction	27
2.2 Formulation du problème	27
2.3 Estimateur en temps fini	30
2.4 Exemple illustratif	39
2.5 Conclusion	43
3 Estimation pour les TDS linéaires	45
3.1 Introduction	45
3.2 Formulation du problème	46
3.3 Définitions	47

3.4	Systèmes linéaires à retard	48
3.4.1	Observateur en temps fini	48
3.4.2	Exemple illustratif	52
3.5	Systèmes linéaires à retard avec paramètres inconnus	56
3.5.1	Estimateur en temps fini	56
3.5.2	Exemple illustratif	62
3.6	Conclusion	67
4	Observation pour les TDS linéaires à entrées inconnues	69
4.1	Introduction	69
4.2	Formulation du problème	69
4.3	Sorties indépendantes des entrées inconnues	70
4.3.1	Définitions et résultats préliminaires	71
4.3.2	Observateur en temps fini	72
4.3.3	Exemple illustratif	78
4.4	Généralisation des résultats	81
4.4.1	Observateur en temps fini généralisé	81
4.4.2	Exemple illustratif	87
4.5	Conclusion	93
5	Observation pour les systèmes non linéaires avec estimation des paramètres	97
5.1	Introduction	97
5.2	Formulation du problème	98
5.3	Observabilité et identifiabilité	99
5.4	Estimateur en temps fini	103
5.5	Exemple illustratif	105
5.6	Conclusion	111
6	Estimation pour les systèmes non linéaires à entrées inconnues	113
6.1	Introduction	113
6.2	Formulation du problème	113
6.3	Observabilité et Identifiabilité	115
6.4	Exemple illustratif	117
6.5	Conclusion	122
7	Estimation pour les TDS non linéaires	123
7.1	Introduction	123
7.2	Formulation du problème	124
7.3	Étude du cas sans les entrées inconnues	125
7.4	Étude du cas avec des entrées inconnues	128
7.5	Estimateur par modes glissants d'ordre supérieur	129
7.6	Exemple illustratif	131
7.7	Conclusion	135
	Conclusion générale	139
	Perspectives	140
	Bibliographie	141
	Annexe	151

A Publications	153
A.1 Articles de conférences	153
A.2 Article de journal	154

Liste des Figures

1	Topologie d'un réseau formé par 3 systèmes dynamiques	4
2.1	Exemple de topologie d'un réseau de systèmes dynamiques	28
2.2	Réseau formé par 2 systèmes dynamiques linéaires	39
2.3	L'état x_1 et son état estimé \hat{x}_1	41
2.4	L'état x_2 et son état estimé \hat{x}_2	41
2.5	L'état x_3 et son état estimé \hat{x}_3	41
2.6	L'état x_4 et son état estimé \hat{x}_4	42
2.7	Paramètre θ_1 et son estimation $\hat{\theta}_1$	42
2.8	Paramètre θ_2 et son estimation $\hat{\theta}_2$	42
3.1	L'état x_1 et son estimation \hat{x}_1 pour $\sigma = 0.3s$	54
3.2	L'état x_2 et son estimation \hat{x}_2 pour $\sigma = 0.3s$	54
3.3	L'état x_3 et son estimation \hat{x}_3 pour $\sigma = 0.3s$	54
3.4	L'état x_1 et son estimation \hat{x}_1 pour $\sigma = 0.5s$	55
3.5	L'état x_2 et son estimation \hat{x}_2 pour $\sigma = 0.5s$	55
3.6	L'état x_3 et son estimation \hat{x}_3 pour $\sigma = 0.5s$	55
3.7	Réseau formé par 2 systèmes linéaires à retards	62
3.8	L'état x_1 et son estimation \hat{x}_1	64
3.9	L'état x_2 et son estimation \hat{x}_2	65
3.10	L'état x_3 et son estimation \hat{x}_3	65
3.11	L'état x_4 et son estimation \hat{x}_4	65
3.12	Paramètre θ_1 et son estimation $\hat{\theta}_1$	66
3.13	Paramètre θ_2 et son estimation $\hat{\theta}_2$	66
4.1	L'état x_1 et son estimation \hat{x}_1	80
4.2	L'état x_2 et son estimation \hat{x}_2	80
4.3	L'état x_3 et son estimation \hat{x}_3	80
4.4	L'état x_1 et son estimation \hat{x}_1	92
4.5	L'état x_2 et son estimation \hat{x}_2	92
4.6	L'état x_3 et son estimation \hat{x}_3	92
4.7	L'état x_4 et son estimation \hat{x}_4	93
5.1	Réseau formé par 3 systèmes dynamiques	105
5.2	L'état x_2 et son estimation \hat{x}_2	110
5.3	Paramètre θ_1 et son estimation $\hat{\theta}_1$	110
5.4	Paramètre θ_3 et son estimation $\hat{\theta}_3$	110
5.5	Paramètre θ_5 et son estimation $\hat{\theta}_5$	111

6.1	Réseau formé par 3 systèmes avec des entrées inconnues	117
6.2	L'état x_2 et son estimation \hat{x}_2	121
6.3	Paramètre θ_1 et son estimation $\hat{\theta}_1$	121
6.4	Paramètre θ_4 et son estimation $\hat{\theta}_4$	122
7.1	Réseau formé par 2 systèmes dynamiques à retards	131
7.2	Paramètre θ_1 et son estimation $\hat{\theta}_1$	134
7.3	Paramètre θ_2 et son estimation $\hat{\theta}_2$	134

Notations

\mathbb{R} Ensemble des nombres réels.

\mathbb{R}^+ Ensemble des nombres réels positifs.

\mathbb{R}^n Espace euclidien des vecteurs de dimension n .

$\mathbb{R}^{n \times m}$ Ensemble des matrices réelles à n lignes et m colonnes.

\mathbb{N} Ensemble des entiers naturels.

\mathbb{N}^* Ensemble des entiers naturels supérieurs à 0.

$\lambda\{N\}$ Valeurs propres de la matrices N .

I_n Matrice identité à n lignes et n colonnes.

$O_{n,m}$ Matrice nulle à n lignes et m colonnes.

τ Retard commensurable.

δ Opérateur de retard.

∇ Opérateur d'avance.

$\mathbb{R}(\delta)$ Anneau commutatif de polynôme δ .

$\mathbb{R}(\delta)^{n \times m}$ Ensemble des matrices polynômiales à n lignes et m colonnes.

$\mathcal{K}(\delta)$ Anneau non commutatif de polynômes δ .

$\mathcal{K}(\delta, \nabla)$ Anneau non commutatif de polynômes δ, ∇ .

$M(\delta)$ Matrice polynômiale définie sur $\mathbb{R}(\delta)$.

$[M(\delta)]_L^{-1}$ Inverse à gauche de la matrice polynômiale $M(\delta)$.

$[M(\delta)]_R^{-1}$ Inverse à droite de la matrice polynômiale $M(\delta)$.

$deg_\delta M(\delta)$ Degré maximal de δ dans tous les polynômes de $M(\delta)$.

$rang_{\mathbb{R}[\delta]} M(\delta)$ Rang de la matrice polynômiale $M(\delta)$ sur $\mathbb{R}(\delta)$.

$Inv_S M(\delta)$ Ensemble des facteurs invariants de la forme de Smith de $M(\delta)$.

Introduction générale

Introduction générale

Depuis quelques années, la communauté scientifique porte beaucoup d'intérêt à l'étude des systèmes dynamiques de plus en plus complexes (non linéaires, hybrides et à structure variable, aux équations à dérivées partielles, ...). La complexité des systèmes diffère selon les domaines et les configurations. La recherche scientifique en générale et plus précisément en automatique s'est le plus souvent orientée vers les domaines de l'ingénierie qui sont souvent d'un aspect pratique et technique au sens large du terme. Ceci suscite des études impliquant des analyses plus poussées des systèmes de plus en plus complexes. Entre autres, on peut citer par exemple, les interconnexions entre plusieurs systèmes dynamiques, les collaborations interactives entre plusieurs systèmes et l'homme. Les échanges d'informations entre plusieurs systèmes font appels à la télécommunication et donc à des retards de transmissions de données. Pour se rapprocher le plus possible du réel, on peut introduire des retards internes dans chaque système et sur les capteurs de mesures. Bien que l'intérêt pour les systèmes à retard est récent (environ un demi-siècle) beaucoup de pistes ont déjà été explorées en détails. De nouvelles pistes bien que moindres apparaissent et demandent beaucoup plus de spécialisations.

L'étude des systèmes connectés est en plein essor depuis le début du 21ème siècle. La connexion entre plusieurs systèmes dynamiques peut être de type physique ou sans fil (Ethernet, Internet, Bluetooth, ...). La connexion peut aussi être une interaction entre eux (force gravitationnelle, ...) ou encore biologique (des réseaux bio-moléculaires naturellement évolués et souvent multiples)[PRESCOTT et al., 2015]. Il est souvent nécessaire de connaître la topologie d'un réseau de systèmes dynamiques afin de pouvoir le contrôler. Ceci nous amène à un problème de l'identification de la topologie sur la base des données de mesure obtenues à partir du réseau considéré. De manière générale, la topologie d'un réseau de systèmes dynamiques peut avoir différents types d'interconnexions. Les interconnexions peuvent être représentées par des coefficients (paramètres) de type booléens, constants ou variables pouvant dépendre des retards qui peuvent apparaître dans les états des systèmes ou encore dans les mesures. Dans [LEE et al., 1988; WU, 2002], les auteurs supposent que la connexion entre les sous-systèmes est assurée par des signaux retardés, tandis que dans [SCHÖLLIG et al., 2007], les auteurs ont considéré un réseau de systèmes linéaires invariants avec des constantes de retards identiques dans la communication. La figure 1 nous présente un exemple de réseau de systèmes dynamiques.

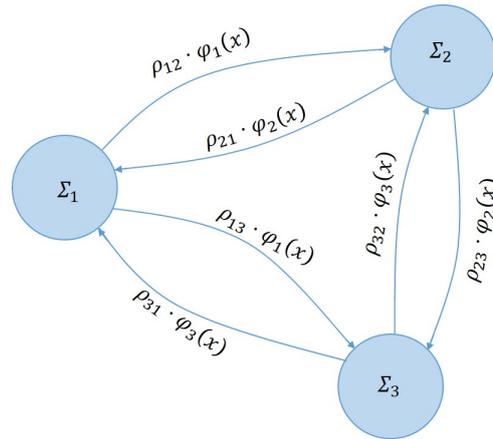


FIGURE 1 – Topologie d'un réseau formé par 3 systèmes dynamiques

Considérons le problème d'identification de la topologie comme un problème d'identification de paramètres inconnus. Cela nous amène à étudier le problème de l'identifiabilité des paramètres pour les réseaux de systèmes dynamiques, et ce sujet a déjà été largement étudié dans la littérature. Dans [ZHANG, 2002], l'auteur a conçu un observateur adaptatif non linéaire avec une convergence globale pour estimer conjointement les états et les paramètres constants inconnus. Cette méthode a été élargie dans [FARZA et al., 2009], où l'auteur a proposé un observateur adaptatif pour une classe de systèmes non linéaires avec paramétrisation générale non linéaire. Les états et les paramètres inconnus des systèmes considérés sont supposés être bornés. Dans [RAO et al., 2005], les auteurs traitent le problème de l'identification des paramètres du système dynamique linéaire en utilisant des réseaux neuronaux multicouches.

Marino et al ont proposé dans [MARINO et al., 1995a] un observateur adaptatif qui garantit une convergence exponentielle rapide et arbitraire à la fois pour les états et les paramètres inconnus lorsque les conditions d'excitation persistante sont satisfaites. Quelques résultats généraux sur les systèmes non linéaires ont été publiés dans [BESANÇON, 2000; CHO et al., 1997; RAJAMANI et al., 1995]. D'autres types d'observateurs, tels que l'observateur à grand gain, sont également rapportés dans la littérature [GAUTHIER et al., 1992; XU et al., 2002].

Jusqu'à présent, la plupart des résultats robustes existants, tels que l'observateur adaptatif et le filtre adaptatif [XIA, 2003], ne sont qu'asymptotiques, c'est-à-dire que l'erreur d'estimation tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cependant, il est souhaitable de disposer d'une convergence non asymptotique si la connexion de topologie doit être reconstruite rapidement. Motivé par ce fait, nous proposerons dans ce mémoire des estimateurs capables de réaliser simultanément l'observation des états et l'identification des paramètres dans un délai prescrit. Selon les réseaux considérés, plusieurs classes de sous systèmes peuvent être envisagés à savoir :

- les systèmes dynamiques linéaires ;
- les systèmes dynamiques linéaires à retard ;
- les systèmes dynamiques non linéaires ;
- et les systèmes dynamiques non linéaires à retard.

Ces classes de systèmes dynamiques feront l'objet d'un rappel dans l'état de l'art. La combinaison de ces classes de systèmes dynamiques génère des réseaux de systèmes dynamiques très complexes. La complexité augmente encore si l'on prend en considération d'éventuelles entrées inconnues. Ce manuscrit est organisé selon la structure suivante.

Structure de la thèse

Après un bref état de l'art sur les systèmes dynamiques, **le Chapitre 2** est consacré à l'estimation des systèmes linéaires. En effet, le problème de l'identification topologique d'un réseau de systèmes dynamiques linéaires est ramené à un problème d'observation des états et d'identification des paramètres inconnus.

Ensuite, dans le **Chapitre 3**, nous avons étudié l'observabilité des systèmes linéaires à retards commensurables. Des conditions suffisantes sont également données pour construire un observateur en temps fini de cette classe de systèmes dynamiques. Une partie des résultats obtenus portant sur l'observation en temps fini des systèmes à retard a fait l'objet de la publication [LANGUEH et al., 2016a]. La deuxième partie des résultats obtenus portent sur l'estimation en temps fini des paramètres d'interconnexion des systèmes à retard en réseau.

Dans **le Chapitre 4**, notre étude s'est portée sur l'observation des systèmes linéaires à retard (TDS) avec des entrées inconnues. Nous avons traité dans un premier temps le cas où les entrées inconnues n'ont pas d'effets directs sur les sorties, et ensuite nous avons généralisé les résultats obtenus au cas où les entrées inconnues apparaissent dans les sorties. Les résultats obtenus ont fait l'objet de nos articles [LANGUEH et al., 2017a, 2018; LANGUEH et al., 2016b]. Notons que dans ce chapitre nous avons utilisé des résultats obtenus dans le Chapitre 3.

Les Chapitres 2, 3 et 4 ont été regroupés en une grande partie intitulé "**Observation et identification des systèmes complexes linéaires**". La deuxième grande partie de ce manuscrit comprend trois chapitres et concerne les systèmes non linéaires.

Dans le **Chapitre 5**, il est question de l'estimation des états et des paramètres d'un réseau de systèmes dynamiques non linéaires. Un algorithme a été proposé pour faciliter l'observabilité partielle ou totale des états et l'identifiabilité partielle ou globale des paramètres inconnus du réseau considéré. Un exemple ainsi que des simulations ont été proposés pour illustrer les résultats obtenus. Ces derniers ont fait l'objet de l'article [LANGUEH et al., 2017b]

Puis, dans le **Chapitre 6**, une extension des résultats obtenus dans le Chapitre 5 aux mêmes classes de systèmes, mais avec des entrées inconnues, a été effectuée. En effet, les résultats obtenus dans le Chapitre 5 y ont été utilisés et de nouvelles conditions ont été déduites pour garantir l'observabilité partielle ou globale des états simultanément avec l'identifiabilité partielle ou globale des paramètres inconnus.

Enfin dans le **Chapitre 7**, des retards supposés commensurables ont été pris en considération dans les réseaux de systèmes dynamiques non linéaires. Une combinaison de tous les résultats précédemment obtenus a été nécessaire. De même, des conditions suffisantes ont été déterminées et un algorithme a été proposé pour l'estimation des paramètres d'un réseau de systèmes non

linéaires avec retards.

Une synthèse des travaux effectués est présentée dans une Conclusion générale. Des perspectives relatives à d'autres problèmes y sont soulignées.

État de l'art

Sommaire

1.1	Systèmes linéaires	7
1.2	Systèmes non linéaires	10
1.3	Observabilité des systèmes non linéaires	11
1.4	Observateurs pour les systèmes dynamiques	14
1.5	Systèmes dynamiques à retard (TDS : Time-delay systems)	15
1.6	Observation des systèmes à retard	18
1.7	Systèmes complexes	21
1.8	Conclusion	23

Dans ce chapitre, un petit rappel sur les systèmes dynamiques complexes est présenté. Notons qu'un système complexe est généralement une combinaison de plusieurs classes de systèmes dynamiques.

1.1 Systèmes linéaires

Un système linéaire, au sens de l'automatique, est un processus physique pouvant être décrit par des équations linéaires différentielles, respectant le principe de superposition, c'est-à-dire que la combinaison linéaire des variables de ce système donne une autre variable appartenant à ce même système. Les systèmes linéaires se caractérisent par deux propriétés principales : la proportionnalité et l'additivité.

Les systèmes linéaires ont été longtemps étudiés dans le cas stationnaire. Grâce aux travaux de [BELLMAN, 1957; PONTRYAGIN et al., 1962] et surtout de [KALMAN, 1959, 1963] dans les années 1960, les automaticiens ont depuis privilégié la représentation d'état. Ainsi, tout système dynamique linéaire continu (ou discret) régi par un ensemble d'équations différentielles peut être représenté par les équations matricielles suivantes :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

où $x(t)$ représente le vecteur des états, $y(t)$ la sortie et $u(t)$ la commande.

Cette classe de systèmes dynamiques semble a priori très restreinte mais permet d'étudier un grand nombre de systèmes que l'on peut rencontrer dans la vie courante. Elle permet d'obtenir un compromis entre la complexité de modélisation et la simplicité des études. Des techniques de linéarisation permettent d'obtenir des modèles linéaires simplifiés qui donnent des résultats plutôt satisfaisants localement. Mais, pour des raisons de performances et de robustesses, il est souvent souhaitable de travailler sur des systèmes non linéaires et ceci malgré leur complexité.

1.1.1 Observabilité des systèmes linéaires

Pour un système donné, et pour des raisons techniques ou économiques (construction, positionnement et coût des capteurs), il n'est pas possible en général d'accéder à la totalité des composantes du vecteur d'état par des dispositifs de mesure. Or, dans beaucoup de cas, la commande d'un système nécessite de s'assurer de la connaissance à chaque instant de ce vecteur d'état. La solution consiste alors en la synthèse d'un observateur, grâce auquel, si le système est observable, il est possible d'estimer tout ou une partie de l'état par l'intermédiaire des grandeurs connues du système.

Pour stabiliser les systèmes linéaires, on considère souvent des bouclages de la forme :

$$u(t) = Fx(t) \tag{1.1}$$

Ce type de bouclage nécessite donc la connaissance de tout l'état (c'est-à-dire, la mesure de tout l'état). On est alors conduit à chercher les conditions qui permettent de calculer le vecteur d'état $x(t)$ pour $t \in [0, T]$ à partir des données «mesurables» du système, c'est-à-dire les matrices A, B, C , l'entrée $u(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$ et la réponse fournie par la sortie $y(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$. Une façon possible de formaliser tout cela est de procéder comme suit.

Considérons la classe de systèmes linéaires suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.2}$$

où $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$.

Définition 1.1. *Le système (1.2) est observable si pour tout $T > 0$, il existe une fonctionnelle Ω telle que*

$$\Omega(T, u_{[0,T]}, y_{[0,T]}) = x(T), T > 0. \tag{1.3}$$

où $u_{[0,T]}$ et $y_{[0,T]}$ désignent respectivement l'ensemble des valeurs de u et y sur l'intervalle $[0, T]$.

Comme $x(t)$ est une fonction continue, on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = x_0$. Ainsi, un système observable permet de retrouver un voisinage de l'état initial à partir de la connaissance des entrées et des sorties sur un intervalle de temps quelconque.

Supposons que le système (1.2) soit initialisé en $x(0) = x_1$ puis en $x(0) = x_2$ en lui appliquant une entrée identique dans les deux cas. A l'état initial x_1 (resp. x_2) va correspondre une trajectoire de la sortie $y_1(t)$ (resp. $y_2(t)$).

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C \left[e^{At} x_1 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right], \\ y_2(t) &= C \left[e^{At} x_2 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ainsi, on obtient

$$y_1(t) - y_2(t) = C e^{At} [x_1 - x_2] \quad (1.5)$$

Par conséquent, la différence entre l'évolution des sorties du système, auquel on applique la même entrée, ne dépend que des conditions initiales du système.

Définition 1.2. Deux états initiaux $x(0) = x_1$ et $x(0) = x_2$, sont dits indistinguables si pour tout $t > 0$, les sorties correspondantes $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont identiques quelle que soit l'entrée u du système.

La proposition suivante nous donne le lien entre les états indistinguables et l'observabilité :

Proposition 1.1. Si le système (1.2) a deux états initiaux indistinguables alors il n'est pas observable.

Pour ces systèmes linéaires, l'observabilité ne dépend pas de l'entrée, mais seulement du couple (C, A) et dispose de la caractérisation suivante.

Lemme 1.1. Soient x_1 et x_2 deux états indistinguables du système linéaire (1.2), alors

$$x_1 - x_2 \in \bigcap_{t \geq 0} \text{Ker} [C e^{At}] \quad (1.6)$$

Lemme 1.2. On a l'égalité

$$\bigcap_{t \geq 0} \text{Ker} [C e^{At}] = \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Ker} C A^k \quad (1.7)$$

Lemme 1.3. Si deux états initiaux x_1 et x_2 vérifient

$$x_1 - x_2 \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Ker} C A^k \quad (1.8)$$

alors ils sont indistinguables pour le système (1.2) et le système n'est pas observable.

Théorème 1.1. [KALMAN, 1960] Une condition nécessaire et suffisante d'observabilité pour (1.2) est :

$$\text{rang}[C^T, (CA)^T, \dots, (CA^{n-1})^T]^T = n. \quad (1.9)$$



1.1.2 Observateur pour les systèmes linéaires à temps invariant

Un observateur d'état a été introduit dans les années soixante par [LUENBERGER, 1966] pour les systèmes linéaires continus. Dans [KALMAN, 1960], l'auteur a formulé un observateur en considérant un système linéaire déterministe ou stochastique. Avec l'observateur de Luenberger ou de Kalman, il suffit de choisir un gain L telle que la matrice $(A - LC)$ soit une matrice dont les valeurs propres sont toutes à parties réelles strictement négatives dans le cas continu ou possèdent un module strictement inférieur à 1 dans le cas discret (matrice de Hurwitz). Les deux observateurs diffèrent par la façon de calculer le gain de retour L :

- on utilise la technique de placement de pôles pour l'observateur de Luenberger ;
- pour le filtre de Kalman, on résout une équation de Riccati en minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation et de perturbation.

Théorème 1.2. [LUENBERGER, 1971](*Observateur de Luenberger*) Si le système (1.2) est observable, alors pour tout ensemble de valeurs propres $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, il existe une matrice de gain L telle que l'ensemble des valeurs propres de la matrice $A - LC$ soit l'ensemble Λ . Si tous les éléments de Λ sont choisis à partie réelle strictement négative, alors le système suivant

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

est un observateur asymptotique pour (1.2). Soit $e = x - \hat{x}$ l'erreur entre la valeur réelle et la valeur estimée du système. Alors :

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

et la vitesse de convergence asymptotique peut être choisie en plaçant judicieusement les valeurs propres de $(A - LC)$.

1.2 Systèmes non linéaires

La définition la plus simple d'un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire qui ne respecte pas les propriétés d'un système linéaire. Les conditions de proportionnalité et d'additivité ne s'appliquent plus aux systèmes non linéaires. Cette définition explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s'y appliquent. Il n'existe pas une théorie générale pour ces types de systèmes, mais on peut trouver plusieurs méthodes qui sont adaptées à certaines classes de systèmes non linéaires. La forme la plus utilisée pour la représentation des systèmes non linéaires est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \quad \forall t \geq 0 \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (1.10)$$

où le vecteur d'état $x(t) \in \mathbb{R}^n$, le vecteur de commande $u(t) \in \mathbb{R}^m$, le vecteur des sorties $y(t) \in \mathbb{R}^p$ et le réel positif t représente le temps. La fonction $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non linéaire. Une solution $x(t)$ au système (1.10) correspond également à une courbe de l'espace d'état, quand t varie de 0 à ∞ , et est appelé une trajectoire d'état [LABIT, 2002].

1.3 Observabilité des systèmes non linéaires

1.3.1 Définitions

Dans ce chapitre, les systèmes considérés sont de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y = h(x) \end{cases}, \quad (1.11)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}$ représente le vecteur état, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{U}$ le vecteur entrée, \mathcal{U} (ensemble des entrées admissibles) $\subset \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathcal{Y}$, le vecteur sortie, $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$. \mathcal{X} est une variété différentiable ou un ouvert de \mathbb{R}^n .

f, g_1, \dots, g_m et h sont des fonctions supposées suffisamment continues et dérivables sur \mathcal{X} (par exemple analytiques ou C^∞).

Définition 1.3. Deux états x_1 et x_2 sont dits **non distinguables** (noté $x_1 \mathcal{I} x_2$) si pour tout instant $t \geq 0$ et pour toute entrée admissible $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{U}$:

$$y(t, 0, x_1, u) = y(t, 0, x_2, u), \quad (1.12)$$

où $y(t, 0, x_i, u) = h(x(t, 0, x_i, u))$ est la sortie de (1.11) pour l'entrée u et l'état initial x_i .

Définition 1.4. Le système est dit **observable** si :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}, x_1 \neq x_2, \quad x_1 \mathcal{I} x_2 \Rightarrow x_1 = x_2, \quad (1.13)$$

i.e il existe une entrée admissible $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{U}$ et un instant $t_1 \geq 0$ tels que

$$y(t_1, 0, x_1, u) \neq y(t_1, 0, x_2, u). \quad (1.14)$$

x_1 et x_2 sont dits **distinguables**.

Définition 1.5. (observabilité locale)

Le système (1.11) est **localement observable** en x_1 s'il existe un voisinage $\mathcal{V}(x_1)$ de x_1 tel que pour tout x_2 de $\mathcal{V}(x_1)$, x_1 et x_2 sont distinguables.

Le système est **localement observable** s'il est localement observable en tout $x_1 \in \mathcal{X}$.

L'observabilité d'un système peut également se définir en utilisant la notion d'indices d'observabilité, dont nous aurons besoin par la suite

Définition 1.6. [KRENER et al., 1983] Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases}, \quad (1.15)$$

dit localement observable au point x_0 s'il existe un voisinage \mathcal{U} de x_0 et un p -uplet d'entiers (μ_1, \dots, μ_p) tels que

i-) $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_p \geq 0$ et $\sum_{i=1}^p \mu_i = n$.

ii-) Après un réordonnement des fonctions h_i en chaque point $x \in \mathcal{U}$, les n vecteurs

$\{L_f^{j-1}(dh_i) : i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, \mu_i\}$ sont linéairement indépendants.

iii-) S'il existe d'autres entiers naturels l_1, \dots, l_p satisfaisant (i) et tels qu'après un éventuel réordonnement des h_i , les n vecteurs $\{L_f^{j-1}(dh_i) : i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, l_i\}$ sont linéairement indépendants alors $(l_1, \dots, l_p) \geq (\mu_1, \dots, \mu_p)$ (dans l'ordre lexicographique, c'est-à-dire $[(l_1 > \mu_1)$ ou $(l_1 = \mu_1$ and $l_2 > \mu_2)$ ou... ou $(l_1 = \mu_1, \dots, l_p = \mu_p)]$). Les entiers (μ_1, \dots, μ_p) sont appelés indices d'observabilité au point x_0 .

Remarque 1.1. Contrairement au cas linéaire, la commande joue un rôle important : en général, on pourra trouver des commandes pour lesquelles des états ne seront pas distinguables. Toutefois le système pourra être observable s'il existe d'autres commandes qui les distinguent.

Considérons, par exemple, le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 u \\ \dot{x}_2 = 0 \\ y = x_1 \end{cases}. \quad (1.16)$$

Ce système est bien observable pour toute commande $u \neq 0$. En particulier pour l'entrée $u(t) \equiv 1$, on obtient un système linéaire observable. Cependant, on peut remarquer que l'entrée nulle ne distingue pas les états x et \bar{x} tels que $x_1 = \bar{x}_1$ et $x_2 \neq \bar{x}_2$.

Cette remarque nous amène au fait important que l'observabilité d'un système non linéaire n'est pas suffisante pour la synthèse d'un observateur mais qu'il faut également prendre en compte le problème des entrées. L'étude de leurs propriétés s'avère donc primordiale et une classe d'entrées intéressantes est celle pour lesquelles il n'existe pas de paire indistinguishable.

Définition 1.7. Une entrée u est dite universelle sur $[0, t]$ si pour tout couple d'états initiaux distincts $x_1 \neq x_2$, il existe un temps t_1 tel que

$$y(t_1, 0, x_1, u) \neq y(t_1, 0, x_2, u). \quad (1.17)$$

Si u est universelle sur \mathbb{R}^+ , elle est dite universelle.

Une entrée non universelle est appelée *entrée singulière*. On peut trouver dans la littérature [BORNARD et al., 1988] la définition d'entrées régulièrement persistantes, qui sont des entrées "suffisamment" universelles pour la synthèse d'observateur.

Définition 1.8. Le système (1.11) est dit **uniformément observable** si : $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}, x_1 \neq x_2$, et

$\forall u \in U$

$$y(t, 0, x_1, u) \neq y(t, 0, x_2, u). \quad (1.18)$$

Ceci signifie que toute entrée de ce système est universelle.

Le système (1.11) est uniformément observable, localement en x_0 , si (1.11) restreint à un voisinage $\mathcal{V}(x_0)$ de x_0 est uniformément observable.

Le résultat fondamental suivant, prouvé dans [GAUTHIER et al., 1981] et [GAUTHIER et al., 1991], caractérise ces systèmes dans le cas monosortie, affine en l'entrée. On considère donc un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, & x \in \mathcal{X}, u \in \mathbb{R} \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R} \end{cases}. \quad (1.19)$$

Théorème 1.3. (i) Si le système (1.19) est uniformément localement observable alors sur un ouvert dense (i.e. presque partout) \mathcal{X}' de \mathcal{X} , il existe un système de coordonnées tel qu'il s'écrive sous la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \tilde{g}_1(x_1)u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \tilde{g}_2(x_1, x_2)u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \tilde{g}_{n-1}(x_1, \dots, x_n)u \\ \dot{x}_n = f(x_1, \dots, x_n) + \tilde{g}_n(x_1, \dots, x_n)u \\ y = x_1 \end{cases}, \quad (1.20)$$

(ii) Si (1.19) admet, localement en x_0 , après difféomorphisme, la forme (1.20), alors il est uniformément localement observable en x_0 . \diamond

Remarque 1.2. Le difféomorphisme permettant de transformer (1.19) en (1.20) est

$$\phi(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x))^T, \quad (1.21)$$

avec $h_1(x) = h(x)$ et $h_i(x) = L_f^{i-1}h(x)$, $i = 1, \dots, n$.

Remarque 1.3. Ce résultat a été étendu au cas multi-sorties dans [BORNARD et al., 1991a] et au cas non-affine mono-sortie dans [GAUTHIER et al., 1994].

1.3.2 Condition d'observabilité d'un système non linéaire

L'objectif est de donner ici pour les systèmes non linéaires, un résultat analogue à celui énoncé par Kalman pour les systèmes linéaires décrits au (1.2).

Définition 1.9. La *dérivation de Lie*, notée $L_f h$, d'une fonction h le long d'un champ de vecteurs f est donnée par :

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) f_i(x). \quad (1.22)$$

Définition 1.10. On appelle *espace d'observation* du système (1.11), noté O , le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par h_1, h_2, \dots, h_p et toutes les dérivations de Lie successives

$$L_{X_1} L_{X_2} \dots L_{X_k} h_j, \quad j \in [1, \dots, p], k = 1, 2, \dots,$$

avec $X_i, i \in [1, k]$ à prendre dans $\{f, g_1, g_2, \dots, g_m\}$.

L'espace d'observation O définit la codistribution d'observabilité dO

$$dO(x) = \text{Vect} \{dH(x)/H \in O\}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

La codistribution dO est involutive car elle est engendrée par des formes linéaires exactes.

Le principal théorème concernant l'observabilité locale est le suivant :

Théorème 1.4. [HERMANN et al., 1977] Soit dO la codistribution d'observabilité associée au système (1.11). Si

$$\dim(dO(x)) = n,$$

le système est localement observable au point x . ◇

Définition 1.11. On dit que le système est localement observable si cette condition est vérifiée pour tout x appartenant à \mathcal{X} .

Exemple 1.1. Reprenons le système (1.16). On a : $O = \text{Vect}\{x_1, x_2\}$ et $\dim(dO(x)) = 2$ pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $u \in \mathbb{R}^*$. Le système est donc observable pour tout $u \neq 0$.

Le théorème précédent donne une condition suffisante d'observabilité locale. Le corollaire suivant donne une condition nécessaire.

Corollaire 1.1. [HERMANN et al., 1977] Si (1.11) est localement observable, $\dim(dO(x)) = n$ pour x appartenant à un ouvert dense de \mathcal{X} , i.e presque partout. □

Il existe d'autres techniques d'observation des systèmes non linéaires dans la littérature. On pourra citer, par exemple, la linéarisation par injection de la sortie [GARCÍA-RAMÍREZ et al., 2016] qui transforme le système dynamique localement observable en sa forme normale d'observabilité [TAMI et al., 2013; TAMI et al., 2016; ZHENG et al., 2007; ZHENG et al., 2005, 2009].

1.4 Observateurs pour les systèmes dynamiques

Plusieurs types d'observateurs ont été proposés dans la littérature pour estimer les états des systèmes dynamiques.

- **Observateur basé sur l'approche de Lyapunov :** L'idée est d'appuyer la synthèse de l'observateur sur une fonction de Lyapunov associée à la dynamique de l'erreur. Ce type d'observateur de forme quadratique est basé sur la théorie de la stabilité de Lyapunov [BANKS, 1981; THAU, 1973].

- **Observateur grand gain** : Ce type d'observateur utilise un gain suffisamment grand dans la fonction de correction pour éliminer les non linéarités et accélérer plus ou moins la convergence de l'observateur [BORNARD et al., 1991b; NICOSIA et al., 1989; OH et al., 1997].
- **Observateur numérique** : Introduit dans [DIOF et al., 1994], ce type d'observateur propose une dérivation numérique des sorties en les approchant par des polynômes qui ensuite reconstruit tous les états du système.
- **Approche de la platitude** : Ces observateurs introduits dans [FLIESS et al., 1995], utilisent la propriété de platitude du système pour la reconstruction des états.
- **Observateur par modes glissants** : [UTKIN, 1978] L'idée de ce type d'observateur est de stabiliser la dynamique de l'erreur d'estimation sur une surface correspondant à une erreur nulle. Le terme de la correction est la fonction *sign*, qui peut être assimilée à l'utilisation d'un gain infini permettant d'écraser la non linéarité sur la dynamique de l'erreur et d'établir en même temps la convergence de l'erreur d'observation en temps fini [BARBOT et al., 1996; LEVANT, 2001; UTKIN, 1992].
- **Approche par optimisation** : Plusieurs observateurs ont été obtenus par la minimisation de critère en formulant le problème d'observateur comme un problème d'optimisation [GRIZZLE et al., 1990; ZIMMER, 1994].
- **Observateurs adaptatifs** : Ce sont des algorithmes récursifs pour l'estimation conjointe de l'état et des paramètres d'un système dynamique. Cet observateur a été proposé dans [ZHANG et al., 2001] où la mise à jour des paramètres s'inspire de l'algorithme des moindres carrés avec un facteur d'oubli. Il a été aussi utilisé dans [ZHANG, 2002] pour les systèmes multi-entrées/multi-sorties avec une adaptation des paramètres de type gradient.

1.5 Systèmes dynamiques à retard (TDS : Time-delay systems)

Le retard selon [XIA et al., 2009] est la propriété d'un système physique pour lequel la réponse à une action impliquée est retardée dans son effet. Les systèmes à retard sont aussi appelés des systèmes héréditaires ou encore des systèmes décrits par des équations différentielles aux différences, et représentent une classe de systèmes de dimension infinie largement rencontrée lors de la modélisation de phénomènes de transport et de propagation de matière, d'énergie ou d'information [CHIASSON et al., 2007; FARKH, 2011]. Même si parfois le procédé même ne contient pas de retards, les capteurs, les actionneurs et aussi les temps de calcul peuvent engendrer des retards non négligeables [MAHMOUD, 2000; NICULESCU, 2001]. La dynamique des systèmes à retards dépend non seulement des valeurs actuelles de ses états mais aussi des valeurs passées des états et/ou des commandes sur un certain horizon temporel. On peut donc considérer que les états du système sont des fonctions définies sur un intervalle de temps égal au retard. Ce type de système peut alors être modélisé dans un espace fonctionnel de dimension infinie [NICULESCU, 2001].

Il existe principalement trois façons de représenter les systèmes à retard [KOLMANOVSKII et al., 1999a] :

1. **Systèmes de dimension infinie** : la classe de système à retard est considérée comme faisant partie d'une classe de systèmes plus large. Cette classe de système de dimension infinie est décrite par des équations différentielles. Cependant, cette approche nécessite la généralisation de certaines propriétés de dimension finie à des cas de dimension infinie, tels que les concepts de commandabilité, de stabilisabilité, d'observabilité et de détectabilité [CURTAIN et al., 1978; KOLMANOVSKII et al., 1999c].
2. **Equations différentielles sur les espaces fonctionnels (EDF)** : le système à retard peut être considéré comme évoluant dans un espace à dimension finie ou dans un espace de fonctions. Le premier utilise la finitude de l'espace vectoriel pour analyser le comportement du système, tandis que le second reflète le caractère de dimension infinie du système [HALE et al., 1993]. Bien que la méthode de traitement des problèmes de dimension infinie à l'aide d'outils de dimension finie ait son avantage, les résultats obtenus sont conservateurs.
3. **Equations différentielles sur des anneaux d'opérateurs** : l'EDF associée est exprimée sous la forme d'une équation différentielle vectorielle définie sur un anneau d'opérateurs. Bien que cette méthode ait été appliquée avec succès pour résoudre certains problèmes intéressants de commandes tels que le découplage, le rejet de perturbations [SENAME, 2001], moins de contributions ont été consacrées aux problèmes d'observation. Néanmoins, certains résultats importants ont été fournis pour le problème de conception d'observateur [LEE et al., 1981a; POURBOGHRAT et al., 1986]. Considérons un système à temps continu avec des retards :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^N A_i x(t - i\tau) \quad (1.23)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur des états, la matrice A_i est une matrice réelle de dimension appropriée, $\tau \in \mathbb{R}^+$ représente le retard et N représente le retard maximal dans des états. Le système (1.23) peut aussi être représenté par l'équation différentielle linéaire suivante avec des coefficients sur un module :

$$\dot{x}(t) = A(\delta)x(t) \quad (1.24)$$

où δ est l'opérateur de retard défini pour toute fonction continue $f(t)$ par

$$\delta f(t) = f(t - \tau)$$

et A est une matrice polynômiale d'élément δ et donnée par $\sum_{i=0}^N \delta^i A_i$.

Chaque méthode a ses propres avantages et inconvénients en fonction du problème à traiter. Dans cette thèse, nous allons utiliser la troisième méthode pour traiter notre problème.

Un bref aperçu de certaines propriétés de base des systèmes à retard est présenté dans ce qui suit.

1.5.1 Quelques types de retards

La façon de traiter les systèmes à retard diffère selon le type de retard. Il est donc important de présenter les différentes catégories de retards que l'on peut rencontrer dans la littérature :

- **Discret ou ponctuel** : De toute évidence, les systèmes à retard unique ne suffisent pas toujours pour décrire les systèmes réels et la représentation des systèmes peut impliquer de nombreux retards. Nous présentons ci-après une forme de système à retards discrets qui a été largement utilisé :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^n A_i x(t - \tau_i)$$

Différentes conditions de stabilité et de stabilisabilité pour les systèmes à retards ponctuels ont été développées au fil des ans, telles que [DAROUACH et al., 1999; HE et al., 2011; KOLMANOVSKII et al., 1999b; MICHIELS et al., 2005]. Sur la base de la relation entre les retards, on peut distinguer deux types de retards discrets ou ponctuels : les retards commensurables (proportionnels) et les retards incommensurables.

- Commensurable : $\tau_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ sont commensurables si τ_i/τ_j est rationnel, ce qui correspond à trouver un retard minimal τ tel que $\tau_i = i\tau$, alors avec une réorganisation appropriée des indices, le système devient comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^n A_i x(t - i\tau)$$

Cette classe est considérée comme très conservatrice. Le problème de stabilité de cette classe peut être traité de la même manière que dans le cas d'un retard unique, car l'équation caractéristique associée au système aura les mêmes propriétés algébriques [Nic01a]. Différents résultats liés à ce type de retard ont été présentés dans [ДАТКО, 1998; LOUISELL, 1995]. Une méthode permettant de calculer un intervalle de temps tel que le système considéré soit stable pour tous les retards de cet intervalle calculé a été présentée dans [CHEN et al., 2012].

- Incommensurable : les retards τ_i , $i \in \mathbb{N}$ sont des paramètres indépendants. Différentes idées ont été proposées pour traiter ce type de retard, par exemple un changement de coordonnées tel que tous les termes de délai, dans les nouvelles coordonnées, dans la description du système soient associés à la sortie uniquement [Hou et al., 2002]. Une corrélation dynamique causale pour résoudre le problème de la stabilisation d'une classe de systèmes à retards différentiels neutres avec plusieurs retards ponctuels fixes et non proportionnels a été discutée dans [EMRE et al., 1984]. La condition de transformation du modèle de descripteur a été exploitée pour traiter les systèmes ayant deux retards dans [FRIDMAN et al., 2002], puis une condition améliorée qui accepte les retards avec des limites inférieures différentes de zéro a été présentée dans [HE et al., 2006].

- **Retard variable dans le temps** : pouvant appartenir à différentes catégories :
 - Retard borné : $0 < \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2$. Ce type de retard est fréquemment traité dans la littérature et implique des critères indépendants du retard [BASKER et al., 1999; BOUKAS, 2007; CHEN et al., 2006; KASZKUREWICZ et al., 1993; SEURET et al., 2007; XUE et al., 2004].
 - Retards bornés dérivés : $\dot{\tau}(t) \leq \mu < 1$. Cette condition signifie que $f(t) = t - \tau(t)$ est monotone. Généralement, ce type de retard est associé au précédent pour obtenir un retard dépendant [CAO et al., 1998; LIEN, 2007; PENG et al., 2009; SOUZA et al., 1999]
 - Retards variables arbitraires : dans ce cas, le retard τ et sa dérivée $\dot{\tau}$ ne sont pas liés.
- **Retard distribué** : $\int_{t-\tau}^t x(s)ds$. Ce type de retards a été traité dans de nombreux documents, par exemple, la conception d'observateur pour les systèmes non linéaires [GERMANI et al., 2005], la stabilité des systèmes neutres linéaires [HAN, 2003], la stabilisation robuste pour les systèmes neutres incertains [CHEN et al., 2007] et le contrôle robuste [FRIDMAN et al., 2009; ZHENG et al., 2002].
- **Retard dépendant de l'état** : le retard est présenté comme une fonction de l'état du système [BRIAT et al., 2010; MURPHY, 2001].

1.6 Observation des systèmes à retard

À la différence des systèmes différentielles ordinaires (EDO), le problème de l'observabilité des systèmes à retard (TDS :Time-Delay Systems) dépend principalement de la nature du système considéré, ce qui a motivé de nombreuses définitions (approximative, spectrale, faible, forte, point à point et absolue). Selon [CHEN, 1984], l'observabilité pour les systèmes EDO linéaires est équivalente à l'assignabilité arbitraire des valeurs propres de l'observateur. Cependant, la généralisation de cette propriété n'est pas nécessaire pour les équations différentielles à retard (EDR). La relation entre l'affectation de valeurs propres et l'observabilité reste une question en suspens malgré les nombreuses activités de recherche consacrées à ce problème.

1.6.1 Quelques définitions

Contrairement aux équations différentielles ordinaires, il faut prendre en considération une infinité de points appartenant à l'intervalle $[-\tau, 0]$ pour les EDR, c'est-à-dire qu'il est nécessaire de spécifier une condition initiale de la forme $x(t) = \varpi(t)$ pour tout $t \in [-\tau, 0]$, où $\varpi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Soit l'équation fonctionnelle suivante [YEGANEFAR, 2006]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x_t), t \geq t_0 \\ x_{t_0} &= \varpi_0 \in \mathcal{C} \end{cases} \quad (1.25)$$

où x est une fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n , \dot{x} est la dérivée de x par rapport au temps t , x_t et ϖ_0 sont des fonctions de l'ensemble \mathcal{C} défini dans \mathbb{R}^n et f est une "fonction de fonction" dite

fonctionnelle comme il est précisé dans [YEGANEFAR, 2006]. On définit $x_{t_0} = \omega_0$ comme étant les fonctions initiales à l'instant t_0 . Considérons l'espace $\mathcal{L}^2(-\tau, 0]; \mathbb{R}^n$ de tous les plans $\mathcal{I}(-\tau, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui sont intégrables au carré dans $\mathcal{I}(-\tau, 0)$ doté de la semi-norme :

$$\|y\|_{\mathcal{M}^2} = \left[|y(0)|_{\mathbb{R}^n}^2 + \int_{-\tau}^0 |y(\alpha)|_{\mathbb{R}^n}^2 d\alpha \right]^{\frac{1}{2}}$$

L'espace quotient de $\mathcal{L}^2(-\tau, 0]; \mathbb{R}^n$ par le sous-espace linéaire de tout y tel que $\|y\|_{\mathcal{M}^2} = 0$ est un espace de Hilbert isométriquement isomorphe à l'espace produit $\mathbb{R}^n \times \mathcal{L}^2(-\tau, 0]; \mathbb{R}^n$. Il sera désigné par $\mathcal{M}^2(-\tau, 0]; \mathbb{R}^n$ et sa norme par $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^2}$.

$$\begin{aligned} \kappa : \mathcal{M}^2([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}^2(-\tau, 0]; \mathbb{R}^n); \\ \kappa(h) &= (h^0 = x(0), h^1 = x(\alpha)) \end{aligned}$$

Soit Y un espace de Hilbert que l'on pourrait qualifier d'espace d'observation. Nous pouvons observer le plan $x(\cdot; h; u)$ avec un observateur $Z \in \mathcal{L}^\infty([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y))$; l'observation à l'instant t est définie par

$$z(t; h; u) = Z(t)x(t; h; u)$$

On peut aussi observer le plan $\tilde{x}(t; h, u) = x(t+\alpha; h, u)$ avec \mathcal{M}^2 -observateur $\tilde{Z} \in \mathcal{L}^\infty([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{M}^2, Y))$

$$\tilde{z}(t; h, u) = \tilde{Z}(t)\tilde{x}(t; h, u)$$

Les définitions non triviales suivantes sont les plus importantes de l'observabilité des systèmes à retards. De toute évidence, chaque définition conduit à différentes caractéristiques de l'observation des états :

Définition 1.12. (*Observabilité*) [DELFOUR et al., 1972] Le système (1.25) est observable sur $[0, T]$ si pour tout $h \in \mathcal{M}^2(-\tau, 0]$ et $u \in \mathcal{L}^2(0, T]; \mathbb{R}^m$, le point $h^0 \in \mathbb{R}^n$ peut être déterminé de manière unique à partir de la connaissance de u , h^1 et du plan d'observation $z(\cdot; h; u)$.

Définition 1.13. (*Observabilité forte*) [DELFOUR et al., 1972] Le système (1.25) est fortement observable sur $[0, T]$ si pour tout $h \in \mathcal{M}^2(-\tau, 0]$ et $u \in \mathcal{L}^2(0, t]; \mathbb{R}^m$, l'état h peut être déterminé de manière unique à partir de la connaissance de u et du plan d'observation $z(\cdot; h; u)$.

Définition 1.14. (*\mathcal{M}^2 -observabilité*) [DELFOUR et al., 1972] Le système (1.25) est \mathcal{M}^2 -observable sur $[0, T]$ si pour tout $h \in \mathcal{M}^2(-\tau, 0]$ et $u \in \mathcal{L}^2(0, t]; \mathbb{R}^m$, l'état h peut être déterminé de manière unique à partir de la connaissance de u et du plan d'observation $\tilde{z}(\cdot; h; u)$.

Remarque 1.4. *Observabilité forte* \Rightarrow \mathcal{M}^2 observabilité et observabilité

Définition 1.15. (*F-observabilité*) [OLBROT, 1981] Soit F une classe de fonctions initiales pour le système (1.25). Le système (1.25) est F -observable sur $[0, T]$ (respectivement F -observable) si et seulement si

$x_0(\cdot) \in F$ et la sortie $y(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$ (respectivement, pour tout $t \geq 0$) implique que $x(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 1.16. (*F-observabilité finale*) [OLBROT, 1981] Le système (1.25) est finalement *F-observable* si et seulement si pour toute fonction initiale continue $x_0(\cdot) \in F$ et $y(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$ implique $x(T) = 0$.

Notons que *F-observabilité* sur $[0, T]$ implique une *F-observabilité finale* sur $[0, T]$.

Définition 1.17. (*Observabilité en temps infini*) [OLBROT, 1981] Le système (1.25) est considéré comme étant observable en temps infini si et seulement si pour toute fonction initiale continue $x_0(\cdot)$, la condition $x(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ implique que pour un certain $t_1 \geq 0$ l'identité $x(t) = 0$ pour tout $t \geq t_1$ est valable.

Définition 1.18. (*Observabilité ponctuelle*) [DELFOUR et al., 1972] Le système (1.25) est observable point par point (ou, de manière équivalente, sur $[0, T]$) si le point initial x_0 peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des entrées $u(t)$, $\phi(t)$ et de la sortie $y(t)$.

1.6.2 Aperçu de quelques travaux existants sur l'observabilité des TDS

L'analyse de l'observation pour les systèmes à retard (TDS) remonte approximativement aux années 1980 [LEE et al., 1981b; OLBROT, 1981; RABAH, 1995; SALAMON, 1980]. La principale difficulté de l'analyse de l'observabilité d'un TDS vient du fait que son état est de dimension infinie, ce qui est en fait une collection d'informations qui contient l'historique du système. Cette caractéristique peut expliquer pourquoi la condition initiale d'un TDS est normalement une fonction. Pour les systèmes dynamiques sans retard, l'observabilité peut se caractériser par l'estimation de la condition initiale, ce qui est en fait équivalent à la reconstructibilité de l'état. De même, on peut aussi caractériser l'observabilité pour les TDS linéaires par cette propriété et, l'observabilité initiale a été proposé dans [OLBROT, 1977]. Cette définition est utile lorsque l'objectif principal est d'estimer la valeur initiale (passée) de l'état. Si la condition initiale $x(t)$ pour $t < 0$ est nulle ou est égale à une fonction connue et que $x(0) \in \mathbb{R}^n$ est arbitrairement inconnue, l'observabilité initiale devient \mathbb{R}^n -observabilité [GABASOV et al., 1972]. Cette notion est utile si l'objectif est d'estimer la perturbation instantanée. Dans la littérature, pour les systèmes linéaires avec retard, la notion d'observabilité pour la condition initiale n'est pas équivalente à la reconstructibilité de la trajectoire du système [LEE et al., 1981b]. Plus précisément, pour les systèmes sans retard, la connaissance de la condition initiale est équivalente à connaître l'état final. Cependant, pour les TDS, la connaissance des conditions initiales est seulement suffisante, mais pas nécessaire pour estimer la trajectoire finale de l'état. Bien que l'extension de l'observabilité aux systèmes linéaires à retard à partir des systèmes linéaires sans retard est aussi équivalente à l'estimation de la condition initiale, il n'est en fait pas très utile car, dans la pratique, l'objet le plus important est d'estimer la trajectoire de l'état à tout moment et non la condition initiale. De ce fait, d'autres concepts d'observabilité liés à la reconstructibilité de la trajectoire des états ont été introduits. Sachant que la reconstruction des états peut être en temps fini ou en temps infini (asymptotique, lorsque le temps tend vers l'infini), deux définitions différentes sur l'observabilité sont proposées dans [OLBROT, 1981] : observable

en temps fini et observable en temps infini (asymptotique, comme la détectabilité). En outre, il existe également deux concepts d'observabilité définis en utilisant la méthode d'un algorithme algébrique formel, appelés observabilité faible et observabilité forte [SENAME, 2001]. En effet, le système étudié est fortement observable (c'est-à-dire observable sur l'anneau polynômial) si la matrice d'observabilité avec l'opérateur de retard est inversible à gauche sur l'anneau polynômial. On dit qu'il est faiblement observable (c'est-à-dire observable sur l'ensemble des réels) si sa matrice d'observabilité est inversible à gauche sur \mathbb{R} . Ces quatre dernières définitions d'observabilité servent uniquement à estimer la trajectoire des états. Par souci de simplicité et de commodité (cohérence pour l'observabilité pour d'autres types de systèmes), nous utiliserons le mot «état» lors du traitement des systèmes à retard dans ce manuscrit, ce qui désignera la trajectoire finale de l'état de dimension infinie du système étudié. Pour les TDS linéaires, divers aspects du problème d'observabilité ont été abordés dans la littérature. Différentes méthodes ont donc été utilisées telles que l'approche analytique fonctionnelle [BHAT et al., 1976] ou l'approche algébrique (anneau polynômial, forme de Smith, forme de Hermite ...) [BREWER et al., 1986; FLIESS et al., 1998; SONTAG, 1976]. En utilisant l'algèbre abstraite avec anneau polynômial pour un système à retard, les matrices ne sont plus constantes, mais sont formées par des polynômes d'opérateur de retard. En raison de la similitude, nous pouvons toujours suivre les mêmes idées pour que le LTI (algorithme de Molinari, condition de type Hautus) pour en déduire des conditions d'observabilité nécessaires et suffisantes pour les systèmes à retard. Pour les systèmes non linéaires à retard, la théorie des anneaux non commutatifs a été proposée pour la première fois dans [MOOG et al., 2000] pour résoudre le problème de découplage des perturbations. Ensuite, le problème d'observabilité a été étudié dans [XIA et al., 2002] pour les systèmes non linéaires à retard avec des entrées connues. Le système non linéaire à retard avec des entrées inconnues a été étudié dans [ZHENG et al., 2011a] en utilisant la même approche. Des observateurs associés pour certaines classes de systèmes à retards peuvent être trouvés dans [CONTE et al., 2003; DAROUACH, 2006; FATTOUH et al., 1999; FU et al., 2004; SENNAME, 2001] et les références qui y figurent. D'autres résultats récents obtenus sur l'observation des systèmes à retard sont présentés dans [BEJARANO et al., 2017a,b; CALIFANO et al., 2011; KADER et al., 2018].

1.7 Systèmes complexes

L'analyse et la maîtrise de comportements complexes en réseaux, constitué d'un grand nombre de systèmes dynamiques, fait l'objet de beaucoup d'attention de la part de nombreux chercheurs et dans différents domaines : Voir [NEWMAN, 2006] pour un aperçu du travail dans le domaine des problèmes de complexité générale liés à la dynamique des réseaux, [WU, 2007] pour des contributions en synchronisation des réseaux complexes et les travaux de [KUMAR et al., 2005; REN et al., 2007] pour leurs contributions en commande coopérative. Un autre domaine de recherche connexe est le contrôle de systèmes spatialement invariants, où les systèmes fonctionnant sur un réseau spécifique sont traités comme des systèmes de dimension infinie. D'autres résultats concernant des travaux sur les systèmes en réseau sont présentés dans [BAMIEH et al., 2002;

D'ANDREA et al., 2003; LANGBORT et al., 2004; VOULGARIS et al., 2003]. La principale caractéristique des réseaux de systèmes dynamiques est leur complexité, la structure topologique et les forces de couplage variables dans le temps. La théorie des graphes algébriques a été largement utilisée dans une variété de travaux de recherche traitant de tels systèmes [FAX et al., 2004; JI et al., 2007; KUMAR et al., 2005; SILM et al., 2017; WANG et al., 2003; WU et al., 2007], où les interconnexions sont représentées sous forme de graphique.

La représentation des systèmes dynamiques en réseau mérite le titre de réseaux complexes pour les raisons suivantes :

- il existe des propriétés qui résultent de l'organisation topologique globale du système ;
- leurs structures topologiques ne peuvent être décrites trivialement comme dans le cas de graphiques aléatoires ou réguliers.

Les réseaux complexes peuvent être classés en fonction de la nature des interactions parmi les entités formant les nœuds du réseau. Voici quelques exemples de ces classes :

- Liaison physique : des paires de nœuds sont physiquement connectées par un lien tangible, tel qu'un câble, une route, une veine, etc. Les exemples sont : Internet, réseaux de routes ou rues urbaines, réseaux vasculaires, etc.
- Interactions physiques : les liens entre les paires de nœuds représentent les interactions qui sont déterminés par une force physique. Exemples : réseaux de résidus de protéines, réseaux d'interaction protéine-protéine, etc.
- Proximité géographique : les nœuds représentent les régions d'une surface et leurs connexions sont déterminés par leur proximité géographique. Les exemples sont : pays sur une carte, réseaux de paysage, etc.
- Échange de masse / énergie : les liens reliant des paires de nœuds indiquent que l'énergie ou la masse a été transférée d'un nœud à un autre. Les exemples sont : réseaux de réaction, réseaux métaboliques, réseaux alimentaires, réseaux commerciaux, etc.
- Liens sociaux : les liens représentent tout type de relation sociale entre nœuds. Les exemples sont : amitié, collaboration, etc.
- Liens conceptuels : les liens indiquent les relations conceptuelles entre des paires de nœuds. Exemples : dictionnaires, réseaux de citation, etc.

Dans le cadre de notre étude, le problème de l'identification de la topologie des réseaux de systèmes dynamiques est envisagé de sorte à être similaire aux problèmes de l'identification des paramètres [ZHANG et al., 2015]. Dans la littérature, des résultats sur l'identification des paramètres existent pour certaines classes de systèmes dynamique [BOUTAT et al., 2006; WANG et al., 2009; XIA et al., 2002; ZHENG et al., 2011b, 2013]. Notons que, dans la suite, par l'expression "**Estimation**", on entend l'observation simultanée des états avec l'identification des paramètres inconnus du système.

En prenant en compte les entrées inconnues, les réseaux de systèmes dynamiques deviennent beaucoup plus complexes à étudier. Les entrées inconnues peuvent être des bruits, des perturbations, ou des phénomènes extérieurs qui peuvent subvenir et dont on ignore les dynamiques.

La problématique des entrées inconnues s'avère très importante en pratique. En effet elle apparaît dans de nombreuses applications. Parmi elle, on peut citer :

- les applications en robustesse où les entrées inconnues représentent les perturbations [FLOQUET et al., 2006a; FRIDMAN et al., 2007];
- les applications en cryptographie où l'entrée inconnue représente le message [FEKI, 2003];
- les applications en sécurité des systèmes pour la détection de défauts [CHEN et al., 2008; FLOQUET et al., 2004].

Dans la littérature et de part leur importance, on peut trouver de nombreux autres résultats sur les systèmes à entrées inconnues [BARBOT et al., 2007; BEJARANO et al., 2013; FLOQUET et al., 2006b, 2007, 2013].

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, quelques définitions et principes importants concernant les systèmes dynamiques en général ont été présentés et certaines méthodes existantes concernant l'observabilité ont été résumées. En outre, quelques rappels et définitions de l'observabilité dans le cas des systèmes non linéaires et à retards ont été aussi présentés.

Partie I

Observation et identification des systèmes complexes linéaires

Estimation pour les systèmes linéaires

Sommaire

2.1	Introduction	27
2.2	Formulation du problème	27
2.3	Estimateur en temps fini	30
2.4	Exemple illustratif	39
2.5	Conclusion	43

2.1 Introduction

Les systèmes linéaires sont largement étudiés dans la littérature. Ils représentent une modélisation mathématique simplifiée des systèmes réels et permettent d’obtenir des résultats plus ou moins satisfaisants en matière de performance et de robustesse. Ces systèmes a priori simples si on les étudie séparément deviennent beaucoup plus complexes si on les met en réseau tout en supposant que chaque système linéaire a une interaction avec les autres systèmes présents dans son environnement.

L’objectif principal du travail présenté dans ce chapitre étant d’identifier la topologie d’un réseau de systèmes dynamiques linéaires, il consiste donc à estimer les paramètres inconnus des interconnexions du réseau considéré. Un réseau de systèmes dynamiques peut être modélisé de différentes manières. Dans notre cas, les considérations faites sont présentées dans la section suivante.

2.2 Formulation du problème

Pour atteindre notre objectif, considérons un réseau de k systèmes dynamiques linéaires ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$). Supposons que les interconnexions entre les systèmes dynamiques sont réalisées par des coefficients paramétriques constants mais inconnus, comme le montre la figure 2.1.

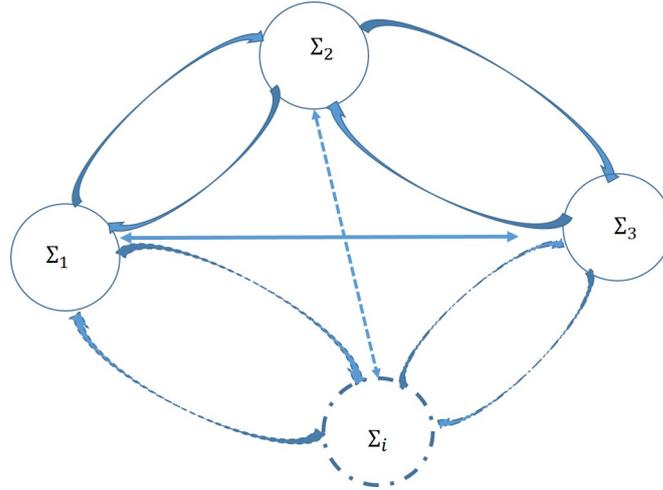


FIGURE 2.1 – Exemple de topologie d'un réseau de systèmes dynamiques

On suppose que chaque système dynamique linéaire Σ_i pour $1 \leq i \leq k$ impliqué dans le réseau est de la forme suivante :

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{q_i} \varphi_{i,j}(y_j(t)) \theta_{i,j} \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

où le vecteur $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ représente l'état du système Σ_i , le vecteur $u_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ représente les entrées et le vecteur $y_i(t) \in \mathbb{R}^{p_i}$ représente les sorties mesurables. Le vecteur des paramètres inconnus $\theta_i = (\theta_{i,1}, \dots, \theta_{i,q_i})^T$ représente le vecteur des coefficients **constants mais inconnus** des interconnexions entre les systèmes dynamiques du réseau considéré.

Le vecteur des fonctions $\varphi_{i,j}(y_j(t)) = (\varphi_{i,j}^1(y_j(t)), \dots, \varphi_{i,j}^{n_i}(y_j(t)))^T \in \mathbb{R}^{n_i}$ représente les informations qu'un sous système Σ_j injecte dans le sous système Σ_i via la connexion réalisé par θ_i . Donc, la matrice des fonctions $\varphi_i(y(t)) = (\varphi_{i,1}^T(y_1(t)), \dots, \varphi_{i,q_i}^T(y_{q_i}(t)))^T \in \mathbb{R}^{n_i \times q_i}$ représente l'ensemble des informations injectées par le réseau dans le sous système Σ_i . Pour simplifier notre étude, définissons $n = \sum_{i=1}^k n_i$, $m = \sum_{i=1}^k m_i$, $p = \sum_{i=1}^k p_i$ et $q = \sum_{i=1}^k q_i$ tels que

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1^T(t), \dots, x_k^T(t))^T \in \mathbb{R}^n \\ u(t) &= (u_1^T(t), \dots, u_k^T(t))^T \in \mathbb{R}^m \\ y(t) &= (y_1^T(t), \dots, y_k^T(t))^T \in \mathbb{R}^p \\ \theta &= (\theta_1^T, \dots, \theta_k^T)^T \in \mathbb{R}^q \end{aligned}$$

Nous pouvons réécrire la dynamique globale du réseau sous la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \varphi(y(t))\theta \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

où les matrices A , B , C et $\varphi(y(t))$ ont la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & B_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

$$\text{et } C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & C_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad \text{et } \varphi(y(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(y(t)) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_2(y(t)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_k(y(t)) \end{pmatrix}.$$

$\varphi(y(t))$ est une matrice de fonctions et est de dimension appropriée.

Notons que si toutes les connexions sont réalisées et que tous les éléments de θ sont non nuls, alors la dimension de θ est obtenue comme suit : $q = k(k-1)$. Dans le cadre de notre étude, l'identification topologique s'apparente à l'identification des paramètres θ du réseau.

Dans nos travaux, on suppose que la connexion entre les systèmes dynamiques d'un même réseau prend le sens suivant :

- On suppose que les coefficients de connexions entre les systèmes sont constants par morceaux ;
- Si $\theta_{i,j} = 0$, cela signifie qu'il n'existe pas de connexion entre les deux systèmes concernés Σ_i et Σ_j . Dans le cas contraire, $\theta_{i,j} \neq 0$.
- Si $\theta_{i,j}$ change soudainement d'une constante non nulle à zéro, cela signifie que la connexion entre les deux systèmes connectés est perdue ;
- Si $\theta_{i,j}$ change brusquement de zéro à une constante non nulle, cela signifie que la connexion est rétablie ;
- Si $\theta_{i,j}$ change soudainement d'une constante non nulle à une autre non nulle, cela signifie que le poids de la connexion a été modifié.

On suppose que l'ensemble du réseau est observable, c'est-à-dire que le couple (A, C) est observable. De manière équivalente, il existe un gain matriciel K tel que $A - KC$ soit stable. Cela n'implique pas que pour chaque sous système dynamique du réseau Σ_i , il existe un gain matriciel L_i tel que $A_i - L_i C_i$ soit stable ;

Nous supposons également que la topologie du réseau est identifiable, et cette condition peut être garantie par l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2.1. Pour $\varphi(y(t)) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ défini dans (2.2), on suppose que pour tout $t > 0$,

$$q \leq n \text{ et rang } \varphi(y(t)) = q.$$

En se basant sur l'Hypothèse 2.1 ci-dessus, l'objectif de cette investigation est de concevoir un observateur capable d'estimer en temps fini les états x et les paramètres θ du système (2.2). Ceci sera détaillé dans la section suivante.

2.3 Estimateur en temps fini

Dans cette section, nous allons présenter une nouvelle approche pour concevoir un observateur impulsif (convergeant en un temps fini donné en faisant un saut pour atteindre la valeur exacte) pour l'estimation simultanée et en temps fini des états et des paramètres du système (2.2). Cette approche est basée sur la technique proposée dans [ENGEL et al., 2002] et ensuite utilisée dans [RAFF et al., 2007]. Pour cela, considérons le changement de coordonnées suivant :

$$z(t) = x(t) - \Gamma(t)\theta \quad (2.3)$$

où $z(t)$ représente le nouveau vecteur d'état dans le nouveau repère et $\Gamma(t)$ est une matrice variable dans le temps qui sera définie ci-après. Pour le système (2.2), choisissons une matrice K telle que $(A - KC)$ du réseau (2.2) soit stable, alors en dérivant l'équation (2.3) nous avons

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\Gamma}(t)\theta = Ax(t) + Bu(t) + \varphi(y(t))\theta - \dot{\Gamma}(t)\theta$$

Ensuite, en introduisant le gain matriciel K dans la relation précédente, on obtient l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \varphi(y(t))\theta - \dot{\Gamma}(t)\theta - KCx(t) + Ky(t) \\ &= (A - KC)x(t) + Bu(t) + \varphi(y(t))\theta - \dot{\Gamma}(t)\theta + Ky(t) \end{aligned}$$

Maintenant, en remplaçant $x(t)$ par $z(t) + \Gamma(t)\theta$, on a

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (A - KC)(z(t) + \Gamma(t)\theta) + Bu(t) + \varphi(y(t))\theta - \dot{\Gamma}(t)\theta + Ky(t) \\ &= (A - KC)z(t) + Bu(t) + Ky(t) - \dot{\Gamma}(t)\theta + [(A - KC)\Gamma(t) + \varphi(y(t))]\theta \end{aligned}$$

En définissant $\dot{\Gamma}(t)$ comme étant la solution de l'équation différentielle suivante

$$\dot{\Gamma}(t) = (A - KC)\Gamma(t) + \varphi(y(t)) \quad (2.4)$$

avec $\Gamma(0) = 0$, puis en remplaçant $\dot{\Gamma}(t)$ dans $\dot{z}(t)$, on obtient

$$\dot{z}(t) = (A - KC)z(t) + Bu(t) + Ky(t) \quad (2.5)$$

Notons que le système déduit (2.5) ne dépend que de la commande $u(t)$ et de la sortie $y(t)$, avec une matrice linéaire stable $(A - KC)$. Cela signifie que l'état $z(t)$ de (2.5) est détectable. Nous pouvons donc facilement concevoir un observateur pour estimer asymptotiquement $z(t)$.

Dans ce qui suit, on se propose de concevoir un ensemble de tels observateurs asymptotiques

pour obtenir une estimation impulsive en temps fini des états et des paramètres inconnus. Pour y parvenir, considérons encore le système (2.2), pour toute connexion topologique possible $q \in \mathbb{N}$ avec $q \leq n(n-1)$, et choisissons aussi un entier naturel $v \in \mathbb{N}$ tel que $v \geq \frac{q}{n} + 2$ (dans notre cas, $v \geq 3$ puisque $q \leq n$).

Remarque 2.1. L'entier naturel v est choisi de sorte à obtenir rang $\Omega(t, h) = 2n + q$ où $\Omega(t, h)$ est défini dans (2.8).

Avec un tel entier v , nous allons concevoir v -fois l'observateur asymptotique de type (2.5) avec différents gains matriciels K_i pour $1 \leq i \leq v$ (les matrices K_i sont choisies telles que les $A - K_i C$ soient stable), ce qui conduit à v changements de coordonnées suivants :

$$\begin{cases} z_1(t) = x(t) - \Gamma_1(t)\theta \\ z_2(t) = x(t) - \Gamma_2(t)\theta \\ \vdots = \vdots \\ z_v(t) = x(t) - \Gamma_v(t)\theta \end{cases} \quad (2.6)$$

où $z_i(t) \in \mathbb{R}^n$ et $\Gamma_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ (pour $1 \leq i \leq v$) sont déterminés comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\Gamma}_1(t) = (A - K_1 C)\Gamma_1(t) + \varphi(y(t)) \\ \dot{\Gamma}_2(t) = (A - K_2 C)\Gamma_2(t) + \varphi(y(t)) \\ \vdots = \vdots \\ \dot{\Gamma}_v(t) = (A - K_v C)\Gamma_v(t) + \varphi(y(t)) \end{cases} \quad (2.7)$$

Les gains K_i sont choisis de sorte que $(A - K_i C)$ soient des matrices de Hurwitz. Ces paramètres génèrent v systèmes transformés de la forme (2.5), c'est à dire

$$\dot{z}_i(t) = (A - K_i C)z_i(t) + Bu(t) + K_i y(t), \text{ pour } i = 1, \dots, v$$

Pour chaque système de la forme ci-dessus, nous pouvons concevoir les observateurs asymptotiques suivants

$$\dot{\hat{z}}_i(t) = (A - K_i C)\hat{z}_i(t) + Bu(t) + K_i y(t)$$

Pour plus de simplicité, notons $F_i = A - K_i C$ pour $1 \leq i \leq v$, et définissons la matrice $\Omega(t, h) \in \mathbb{R}^{vn \times (2n+q)}$ comme suit :

$$\Omega(t, h) = \begin{bmatrix} -I & \int_{t-h}^t e^{F_1(t-h)} \varphi(y(s)) ds & e^{F_1 h} \\ -I & \int_{t-h}^t e^{F_2(t-h)} \varphi(y(s)) ds & e^{F_2 h} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -I & \int_{t-h}^t e^{F_v(t-h)} \varphi(y(s)) ds & e^{F_v h} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

où h représente un retard constant (décalage de durée constante) et positif qui peut être librement choisi.

Dans la suite, nous allons montrer grâce aux 3 lemmes suivants que $\text{rang } \Omega(t, h) = 2n + q$. Pour cela, notons $\Delta F_{i,j} = F_i - F_j$ et $\lambda_k\{\Delta F_{i,j}\}$, $k = 1, \dots, n$ comme étant les valeurs propres de $\Delta F_{i,j}$. Soit V la matrice des vecteurs propres associés aux valeurs propres de $\Delta F_{i,j}$.

Lemme 2.1. *On peut toujours trouver des matrices K_i et K_j , $i, j \in \{1, \dots, v\}$, $i \neq j$ telles que F_i, F_j soient stables, que les valeurs propres de F_i, F_j ne soient pas multiples et que $\text{rang}(e^{F_i h} - e^{F_j h}) = n$.*

Preuve. Soit K_i un gain matriciel choisi tel que $F_i = (A - K_i C)$ soit stable (toutes les valeurs propres sont à partie réelle négative) et que les valeurs propres de F_i ne soient pas multiples. Il existe donc une matrice \mathcal{P} des vecteurs propres de F_i correspondant aux valeurs propres de F_i telle que

$$\mathcal{P}^{-1}(A - K_i C)\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}F_i\mathcal{P} = \text{diag}(\lambda_1\{F_i\}, \dots, \lambda_n\{F_i\}) = \Lambda_i$$

Soit K_j une matrice telle que $F_j = A - K_j C = F_i - \alpha_{i,j}I$ avec $\alpha_{i,j} \in \mathbb{N}^*$. Notons que $\alpha_{i,j}$ peut être choisi de façon arbitraire, ainsi on peut obtenir différentes matrices diagonales. On a :

$$\mathcal{P}^{-1}F_j\mathcal{P} = \mathcal{P}F_i\mathcal{P} - \alpha_{i,j}I = \text{diag}\{\lambda_1\{F_i\} - \alpha_{i,j}, \dots, \lambda_n\{F_i\} - \alpha_{i,j}\} = \Lambda_j \quad (2.9)$$

Ensuite, on obtient

$$e^{F_j h} - e^{F_i h} = \mathcal{P}^{-1}(e^{\Lambda_j h} - e^{\Lambda_i h})\mathcal{P}.$$

Les matrices Λ_i et Λ_j étant des matrices diagonales (donc commutative), on a :

$$\begin{aligned} \text{rang}(e^{F_j h} - e^{F_i h}) &= \text{rang}(\mathcal{P}^{-1}(e^{\Lambda_j h} - e^{\Lambda_i h})\mathcal{P}) \\ &= \text{rang}(\mathcal{P}^{-1}[(I - e^{\Lambda_i h - \Lambda_j h})e^{\Lambda_j h}]\mathcal{P}) \\ &= \text{rang}(\mathcal{P}^{-1}(I - e^{\Lambda_i h - \Lambda_j h})\mathcal{P}) \\ \text{rang}(e^{F_j h} - e^{F_i h}) &= \text{rang}(I - e^{\Lambda_{i,j} h}) \text{ avec } \Lambda_{i,j} = \Lambda_i - \Lambda_j \end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{aligned} \Lambda_{i,j} &= \Lambda_i - \Lambda_j \\ &= \text{diag}\{\lambda_1\{F_i\}, \dots, \lambda_n\{F_i\}\} - \text{diag}\{\lambda_1\{F_i\} - \alpha_{i,j}, \dots, \lambda_n\{F_i\} - \alpha_{i,j}\} \\ &= \text{diag}\{\alpha_{i,j}, \dots, \alpha_{i,j}\} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\alpha_{i,j} \in \mathbb{N}^+$, $\text{rang}(e^{F_j h} - e^{F_i h}) = n$. ■

Soient $\lambda\{F_i\}$, $\lambda\{F_j\}$ et $\lambda\{F_l\}$ les valeurs propres respectives de F_i , F_j et F_l . On a :

$$\begin{aligned}\lambda\{F_i\} &= \text{diag}\{\lambda_1\{F_i\}, \dots, \lambda_n\{F_i\}\} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \\ \lambda\{F_j\} &= \text{diag}\{\lambda_1 - \alpha_{i,j}, \dots, \lambda_n - \alpha_{i,j}\} \text{ et} \\ \lambda\{F_l\} &= \text{diag}\{\lambda_1 - \alpha_{i,l}, \dots, \lambda_n - \alpha_{i,l}\} \text{ où } \alpha_{i,l} = 2\alpha_{i,j}.\end{aligned}$$

Soient $\Delta\lambda_k\{\Delta F_{i,j}\} = \lambda_k\{F_j\} - \lambda_k\{F_i\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$ et $\Delta\lambda_k\{\Delta F_{j,l}\} = \lambda_k\{F_l\} - \lambda_k\{F_j\}$. On peut choisir F_i , F_j et F_l telles que $\Delta\lambda_k\{\Delta F_{i,j}\} = \Delta\lambda_k\{\Delta F_{j,l}\} = \alpha_{i,j}$. Le lemme suivant sera nécessaire dans suite de la démonstration.

Lemme 2.2. *Pour tout $t \geq h$, si l'Hypothèse 2.1 est satisfaite, alors*

$$\text{rang} \int_{t-h}^t \zeta(t,s) \varphi(y(s)) ds = q$$

avec $\zeta(t,s) = e^{\mathcal{F}(t,\lambda,h,s)}$ où les valeurs propres de \mathcal{F} sont données par :

$$\lambda\{\mathcal{F}\} = \text{diag} \left\{ \dots, \frac{e^{\lambda_r(h+t-s)}(e^{-(t-s)} - e^{-h})(e^{-(t-s)} - 1)}{e^{(2\lambda_r-1)h}(e^{-h} - 1)}, \dots \right\}$$

et λ_r représente la r -ième valeur propre de F_i . La procédure d'obtention de $\zeta(t,s)$ (et donc de \mathcal{F}) est donnée ci après dans la preuve du Lemme 2.3.

Notons que $\zeta(t,s)$ est une matrice inversible sur \mathbb{R} pour tout $t \neq s$ et $t \neq h+s$.

Preuve. Considérons $\varphi(y(t)) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ défini dans (2.2) avec $q < n$. Si l'Hypothèse 2.1 est satisfaite, alors toutes les colonnes de $\varphi(y(t))$ sont indépendantes. On ne peut donc pas trouver un vecteur non nul $H = [h_1, \dots, h_q]^T$ tel que

$$\varphi(y(t))H = 0.$$

Cela équivaut à dire que pour tout $\zeta(t,s) \neq 0$, $\nexists H \neq 0$ tel que $\zeta(t,s)\varphi(y(s))H = 0$, ce qui implique que $\nexists H \neq 0$ tel que

$$\int_{t-h}^t \zeta(s)\varphi(y(s))H ds = 0.$$

Or,

$$\zeta(t,s) = e^{\mathcal{F}(t,\lambda,h,s)} = \mathcal{P}^{-1} \text{diag} \left\{ \dots, \frac{e^{\lambda_r(h+t-s)}(e^{-(t-s)} - e^{-h})(e^{-(t-s)} - 1)}{e^{(2\lambda_r-1)h}(e^{-h} - 1)}, \dots \right\} \mathcal{P}.$$

Donc $\zeta(t,s)$ est inversible si son déterminant est non nul, c'est-à-dire si $t \neq s$ et $t \neq h+s$.

Pour tout $t \neq h$,

$$\begin{aligned} \int_{t-h}^t \zeta(t,s)\varphi(y(s))Hds &= \int_{t-h}^{(t-h)^+} \zeta(t,s)\varphi(y(s))Hds + \int_{(t-h)^+}^{t^-} \zeta(t,s)\varphi(y(s))Hds + \int_{t^-}^t \zeta(t,s)\varphi(y(s))Hds \\ &= \int_{(t-h)^+}^{t^-} \zeta(t,s)\varphi(y(s))Hds. \end{aligned}$$

Cette décomposition de l'intégrale est nécessaire pour éliminer les extrémités où $\zeta(t,s)$ est nul. Les matrices F_i , F_j et F_l peuvent donc être choisies de telle sorte que pour tout $\zeta(t,s)$,

$$\int_{t-h}^t \zeta(t,s)\varphi(y(s))Hds = \int_{t-h}^t \zeta(t,s)\varphi(y(s))dsH = \int_{(t-h)^+}^{t^-} \zeta(t,s)\varphi(y(s))dsH.$$

Alors $\nexists H \neq 0$ tel que $\int_{t-h}^t \zeta(t,s)\varphi(y(s))dsH = 0$. D'où,

$$\text{rang} \int_{t-h}^t \zeta(t,s)\varphi(y(s))ds = q$$

pour tout $t \geq h$. ■

Le lemme suivant peut alors être déduit du Lemme 2.1 et du Lemme 2.2.

Lemme 2.3. *Si l'Hypothèse 2.1 est satisfaite, alors $\text{rang} \Omega(t,h) = 2n + q$ pour tout $t \geq h$.*

Preuve. Pour la matrice $\Omega(t,h)$ définie dans (2.8), choisissons les lignes $i, j, l \in \{1, \dots, v\}$ telles que $\alpha_{i,l} = 2\alpha_{i,j}$. Par des opérations sur les lignes i, j et l de la matrice $\Omega(t,h)$, on peut écrire

$$\text{rang} \Omega(t,h) = \text{rang} \begin{bmatrix} -I & e^{F_i h} & \int_{t-h}^t e^{F_i(t-s)} \varphi(y(s)) ds \\ 0 & e^{F_j h} - e^{F_i h} & P_{i,j} \\ 0 & e^{F_l h} - e^{F_j h} & P_{j,l} \\ -I & e^{F_{\alpha_1} h} & \int_{t-h}^t e^{F_{\alpha_1}(t-s)} \varphi(y(s)) ds \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -I & e^{F_{\alpha_r} h} & \int_{t-h}^t e^{F_{\alpha_r}(t-s)} \varphi(y(s)) ds \end{bmatrix},$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_r \neq \{i, j, l\}$ avec $P_{i,j} = \int_{t-h}^t [e^{F_j(t-s)} - e^{F_i(t-s)}] \varphi(y(s)) ds$ et $P_{j,l} = \int_{t-h}^t [e^{F_l(t-s)} - e^{F_j(t-s)}] \varphi(y(s)) ds$. En se référant au Lemme 2.1, on a :

$$\text{rang} \Omega(t,h) = \text{rang} \begin{bmatrix} -I & e^{F_i h} & \int_{t-h}^t e^{F_i(t-s)} \varphi(y(s)) ds \\ 0 & I & [e^{F_j h} - e^{F_i h}]^{-1} P_{i,j} \\ 0 & I & [e^{F_l h} - e^{F_j h}]^{-1} P_{j,l} \\ -I & e^{F_{\alpha_1} h} & \int_{t-h}^t e^{F_{\alpha_1}(t-s)} \varphi(y(s)) ds \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -I & e^{F_{\alpha_r} h} & \int_{t-h}^t e^{F_{\alpha_r}(t-s)} \varphi(y(s)) ds \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}\Omega(t, h) = \text{rang} \begin{bmatrix} -I & e^{F_i h} & \int_{t-h}^t e^{F_i(t-s)} \varphi(y(s)) ds \\ 0 & I & [e^{F_j h} - e^{F_i h}]^{-1} P_{i,j} \\ 0 & 0 & Q \\ -I & e^{F_{\alpha_1} h} & \int_{t-h}^t e^{F_{\alpha_1}(t-s)} \varphi(y(s)) ds \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -I & e^{F_{\alpha_r} h} & \int_{t-h}^t e^{F_{\alpha_r}(t-s)} \varphi(y(s)) ds \end{bmatrix}$$

avec $Q = [e^{F_i h} - e^{F_j h}]^{-1} P_{j,i} - [e^{F_j h} - e^{F_i h}]^{-1} P_{i,j}$. La matrice $\Omega(t, h)$ est donc de rang plein dans le sens des colonnes pour tout $t \geq h$ si et seulement si $\text{rang } Q = q$. On a :

$$Q = [e^{F_i h} - e^{F_j h}]^{-1} \int_{t-h}^t [e^{F_i(t-s)} - e^{F_j(t-s)}] \varphi(y(s)) ds - [e^{F_j h} - e^{F_i h}]^{-1} \int_{t-h}^t [e^{F_j(t-s)} - e^{F_i(t-s)}] \varphi(y(s)) ds.$$

Soit $Q = Q_1 - Q_2$ avec :

$$Q_1 = [e^{F_i h} - e^{F_j h}]^{-1} \int_{t-h}^t [e^{F_i(t-s)} - e^{F_j(t-s)}] \varphi(y(s)) ds \text{ et } Q_2 = [e^{F_j h} - e^{F_i h}]^{-1} \int_{t-h}^t [e^{F_j(t-s)} - e^{F_i(t-s)}] \varphi(y(s)) ds.$$

En se basant sur la preuve du Lemme 2.1, on a :

$$\begin{aligned} Q_2 &= \mathcal{P}^{-1} [e^{\Lambda_j h} - e^{\Lambda_i h}]^{-1} \mathcal{P} \int_{t-h}^t \mathcal{P}^{-1} [e^{\Lambda_j(t-s)} - e^{\Lambda_i(t-s)}] \mathcal{P} \varphi(y(s)) ds \\ &= \int_{t-h}^t \mathcal{P}^{-1} [e^{\Lambda_j h} - e^{\Lambda_i h}]^{-1} [e^{\Lambda_j(t-s)} - e^{\Lambda_i(t-s)}] \mathcal{P} \varphi(y(s)) ds \\ Q_2 &= \int_{t-h}^t \mathcal{P}^{-1} \text{diag} \left\{ \dots, \frac{e^{(\lambda_r - \alpha_{i,j})(t-s)} - e^{\lambda_r(t-s)}}{e^{(\lambda_r - \alpha_{i,j})h} - e^{\lambda_r h}}, \dots \right\} \mathcal{P} \varphi(y(s)) ds \end{aligned}$$

Par analogie, on a :

$$Q_1 = \int_{t-h}^t \mathcal{P}^{-1} \text{diag} \left\{ \dots, \frac{e^{(\lambda_r - 2\alpha_{i,j})(t-s)} - e^{(\lambda_r - \alpha_{i,j})(t-s)}}{e^{(\lambda_r - 2\alpha_{i,j})h} - e^{(\lambda_r - \alpha_{i,j})h}}, \dots \right\} \mathcal{P} \varphi(y(s)) ds$$

Donc,

$$Q = \int_{t-h}^t \mathcal{P}^{-1} \text{diag} \left\{ \dots, \frac{e^{(\lambda_r - 2\alpha_{i,j})(t-s)} - e^{(\lambda_r - \alpha_{i,j})(t-s)}}{e^{(\lambda_r - 2\alpha_{i,j})h} - e^{(\lambda_r - \alpha_{i,j})h}} - \frac{e^{(\lambda_r - \alpha_{i,j})(t-s)} - e^{\lambda_r(t-s)}}{e^{(\lambda_r - \alpha_{i,j})h} - e^{\lambda_r h}}, \dots \right\} \mathcal{P} \varphi(y(s)) ds$$

En choisissant par exemple $\alpha_{i,j} = 1$, on a :

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t-h}^t \mathcal{P}^{-1} \text{diag} \left\{ \dots, \frac{e^{\lambda_r(h+t-s)}(e^{-(t-s)} - e^{-h})(e^{-(t-s)} - 1)}{e^{(2\lambda_r - 1)h}(e^{-h} - 1)}, \dots \right\} \mathcal{P} \varphi(y(s)) ds \\ &= \int_{t-h}^t \zeta(t, s) \varphi(y(t)) ds \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\text{rang } Q = \text{rang} \int_{t-h}^t \zeta(t,s) \varphi(y(t)) ds$$

En se basant sur les Lemmes 2.1 et 2.2, si l'Hypothèse 2.1 est satisfaite, alors $\text{rang } Q = q$. Donc, $\text{rang } \Omega(t,h) = 2n + q$ pour tout $t \geq h$. ■

Étant donné qu'ici, nous supposons que les paramètres sont constants par intervalle, un mécanisme de détection de l'instant de commutation doit être introduit. Inspiré par la technique de détection résiduelle des fautes, nous introduisons un résidu similaire à l'erreur d'estimation de la sortie $R(t,T)$ qui est calculée sur un intervalle $T > h$ comme suit :

$$R(t,T) = \begin{cases} 0, \forall t < T \\ \int_{t-T}^t (y(s) - C\hat{x}(s))^T (y(s) - C\hat{x}(s)) ds, \forall t \geq T \end{cases} \quad (2.10)$$

où $y(t)$ représente le vecteur des sorties du système (2.2) et $\hat{x}(t)$ représente l'estimation du vecteur d'état $x(t)$ et qui sera défini ci-après dans (2.12).

Le résidu ci-dessus nous permet maintenant de définir la variable T_θ suivante :

$$T_\theta = \begin{cases} 0 & \forall t < T \\ t & \forall t \geq T \text{ si } R = 0 \\ T_{\theta_i} & \forall t \geq T \text{ si } R > 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

où T_{θ_i} est l' i -ème instant de changement de topologie.

La variable définie T_θ peut être interprétée comme suit. Premièrement, on l'initialise à 0 à $t = 0$. Ensuite elle est égale à t si le résidu $R(t,T) = 0$, c'est à dire si l'estimation est exacte. Dans d'autres cas, T_θ sera fixé comme une constante non nulle lorsque l'estimation n'est pas correcte (en raison de la commutation de la topologie). Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Supposons que l'Hypothèse 2.1 est satisfaite, alors le système décrit par les dynamiques suivantes :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_i(t) = F_i \hat{z}_i(t) + Bu(t) + K_i y(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x} + Bu(t) + \varphi(y)\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}}(t) = 0 \end{cases} \quad \text{pour } t \neq T_\theta + h, \quad (2.12)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\theta} \\ \hat{x}(t-h) \end{bmatrix} = [\Omega(t,h)]_L^{-1} \hat{Z}(t,h) \text{ si } t = T_\theta + h$$

où $[\Omega(t,h)]_L^{-1}$ est l'inverse à gauche de $\Omega(t,h)$ défini dans (2.8), T_θ est défini dans (2.11), et

$$\hat{Z}(t, h) = \begin{bmatrix} e^{F_1 h} \hat{z}_1(t-h) - \hat{z}_1 \\ e^{F_2 h} \hat{z}_2(t-h) - \hat{z}_2 \\ \vdots \\ e^{F_v h} \hat{z}_v(t-h) - \hat{z}_v \end{bmatrix},$$

est un observateur en temps fini pour le système (2.2). \diamond

Preuve. Après l'introduction de v changements de coordonnées $z_i = x_i - \Gamma_i \theta$, le système (2.2) peut être mis sous la forme suivante

$$\dot{z}_i(t) = F_i z_i(t) + Bu + K_i y, \text{ pour } 1 \leq i \leq v$$

pour lequel l'on peut concevoir les v observateurs asymptotiques suivants

$$\dot{\hat{z}}_i(t) = F_i \hat{z}_i(t) + Bu + K_i y, \text{ for } 1 \leq i \leq v$$

où $F_i = (A - K_i C)$ pour $i = 1, \dots, v$ sont stables. Les erreurs d'estimation de z_i sont données par $\varepsilon_{z_i} = \hat{z}_i(t) - z_i(t) = \hat{z}_i(t) - x_i(t) + \Gamma_i \theta$ telles que

$$\dot{\varepsilon}_{z_i} = F_i \varepsilon_{z_i} \quad (2.13)$$

qui converge cependant vers zéro pour $t \rightarrow \infty$, c'est-à-dire de manière asymptotique.

Pour obtenir une convergence en temps fini, un retard constant h est introduit avec lequel nous obtenons l'égalité suivante à partir de (2.13) :

$$\hat{z}_i(t) - x(t) + \Gamma_i(t)\theta = e^{F_i h} [\hat{z}_i(t-h) - x(t-h) + \Gamma_i(t-h)\theta] \quad (2.14)$$

De plus, à partir de la dynamique de Γ_i définie dans (2.7) et des dynamiques de l'observateur (2.12), on a :

$$\begin{aligned} \hat{z}_i(t) &= e^{F_i h} z_i(t-h) + \int_{t-h}^t e^{F_i(t-s)} [Bu(s) + K_i y(s)] ds; \\ \hat{x}(t) &= e^{F_i h} \hat{x}(t-h) + \int_{t-h}^t e^{F_i(t-s)} [Bu(s) + \varphi(y(s))\theta] ds; \\ \Gamma_i(t) &= e^{F_i h} \Gamma_i(t-h) + \int_{t-h}^t e^{F_i(t-s)} \varphi(y(s)) ds. \end{aligned}$$

En substituant les équations précédentes dans (2.14), on obtient

$$\hat{Z}(t, h) = \Omega(t, h) \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta \\ x(t-h) \end{bmatrix},$$

où

$$\hat{Z}(t, h) = \begin{bmatrix} e^{F_1 h} \hat{z}_1(t-h) - \hat{z}_1(t) \\ e^{F_2 h} \hat{z}_2(t-h) - \hat{z}_2(t) \\ \vdots \\ e^{F_v h} \hat{z}_v(t-h) - \hat{z}_v(t) \end{bmatrix} \text{ et } \Omega(t, h) = \begin{bmatrix} -I & \Gamma_1(t) - e^{F_1 h} \Gamma_1(t-h) & e^{F_1 h} \\ -I & \Gamma_2(t) - e^{F_2 h} \Gamma_2(t-h) & e^{F_2 h} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -I & \Gamma_v(t) - e^{F_v h} \Gamma_v(t-h) & e^{F_v h} \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, on peut conclure que l'estimation exacte peut être obtenue comme suit :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \theta \\ x(t-h) \end{bmatrix} = [\Omega(t, h)]_L^{-1} \hat{Z}(t, h) \quad (2.15)$$

à condition que $\Omega(t, h)$ soit de rang plein par colonne.

Le mécanisme d'impulsion introduit dans (2.12) a pour but de déterminer quand une telle estimation exacte (2.15) peut être effectuée en prenant en compte le fait que les paramètres sont constants par intervalles et donc changent dans le temps.

Initialement, nous avons $R(t, T) = 0$ pour $t < T$ où T avec $T > h$ est l'intervalle de temps pour calculer l'erreur d'estimation résiduelle $R(t, T)$ défini dans (2.10). Ainsi, selon la définition de la variable de commutation T_θ définie dans (2.11), nous obtenons $T_\theta = 0$. Cela signifie que l'observateur (2.12) est initialisé car il existe une topologie inconnue (paramètres) à identifier. Par conséquent, en raison de l'Hypothèse 2.1, lorsque $t = T_\theta + h$, nous pouvons obtenir l'estimation exacte via (2.15).

Après le comportement impulsif à $t = T_\theta + h$, nous avons $\hat{x} = x$ et $\hat{\theta} = \theta$. Selon la dynamique de l'observateur (2.12), nous pouvons conclure que $\hat{\theta}$ sera égal à la valeur exacte de θ et que \hat{x} sera égale à la valeur exacte de x (puisque \hat{x} et x ont maintenant la même structure dynamique avec exactement la même valeur à $t = T_\theta + h$). En conséquence, le résidu $R(t, T) = 0$ jusqu'à ce que la topologie soit modifiée. Dans ce cas, $T_\theta = t$ selon (2.11), et le mécanisme d'impulsion ne sera pas activé (puisque il nécessite $t = T_\theta + h = t + h$ qui n'est pas réalisable) si aucune commutation de topologie ne se produit.

Lorsqu'il se produit un changement soudain de la topologie, la valeur de θ sera modifiée, et donc $\hat{\theta}$ n'est plus égal à la nouvelle valeur de θ , ce qui fait que \hat{x} diverge par rapport à la valeur réelle de x , produisant un résidu $R(t, T) > 0$. Cette valeur coïncide avec l'instant de commutation de la topologie et sera stockée sous la forme d'une valeur constante T_θ selon la relation (2.11). Ensuite, le mécanisme impulsif sera réactivé lorsque $t = T_\theta + h$, ce qui donnera à nouveau l'estimation exacte de x et de θ en temps fini.

Par conséquent, nous pouvons conclure que le système (2.12) est un observateur qui nous permet d'obtenir une estimation simultanée en temps fini de l'état x et des paramètres inconnus θ qui sont constants par intervalles dans le réseau considéré (2.2). ■

Remarque 2.2. Soit T_{θ_i} , $i = 1, \dots, q$ la durée minimale des intervalles sur lesquelles le paramètre θ_i est constante. Le retard h doit être choisi de sorte que $h < \min\{T_{\theta_1}, \dots, T_{\theta_q}\}$.

2.4 Exemple illustratif

Pour illustrer les résultats de l'observateur proposé, considérons le réseau de systèmes dynamiques interconnectés comme le montre la figure suivante :

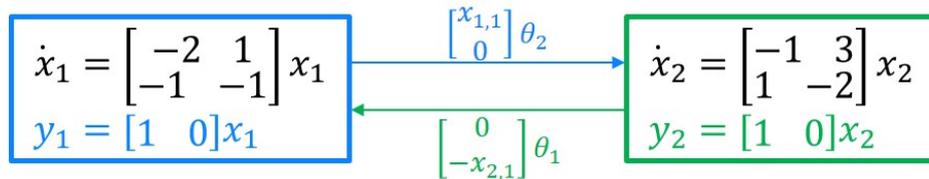


FIGURE 2.2 – Réseau formé par 2 systèmes dynamiques linéaires

Le modèle de l'ensemble du réseau est décrit par la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(y)\theta \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.16)$$

où $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$ et $\varphi(y) = \begin{bmatrix} \varphi_1(y) & 0 \\ 0 & \varphi_2(y) \end{bmatrix}$ avec $A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\varphi_1(y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_{2,1} \end{bmatrix}$ et $\varphi_2(y) = \begin{bmatrix} y_{1,1} \\ 0 \end{bmatrix}$. La topologie du réseau dans le temps est donnée par les paramètres comme suit

$$\theta = \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^T & \text{pour } t \leq 5s \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^T & \text{pour } t > 5s \end{cases}$$

Alors, pour le réseau global, on a :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -y_{2,1} & 0 \\ 0 & y_{1,1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour la suite, choisissons $v = 5$ qui satisfait la relation $q \leq n(v - 2)$. Ensuite, en choisissant les pôles suivants qui satisfont les conditions données sur les F_i dans les Lemmes 2.1, 2.2 et 2.3 :

$$\begin{aligned} p1 &= [-3, -4, -5, -6], & p2 &= [-6, -8 - 10, -12], \\ p3 &= [-9 - 12 - 15, -18], & p4 &= [-12, -16, -20, -24], \\ p5 &= [-15, -20, -25, -30], \end{aligned}$$

on obtient les gains matriciels

$$K_1 = \begin{bmatrix} 5.0657 & -0.3156 \\ 7.2201 & -1.0358 \\ -0.4094 & 6.9343 \\ -0.3492 & 3.6159 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 16.6928 & -1.1299 \\ 73.5395 & -9.0523 \\ -1.0040 & 13.3072 \\ -2.3417 & 12.3844 \end{bmatrix}, K_3 = \begin{bmatrix} 25.7693 & -2.5730 \\ 170.6510 & -32.2386 \\ -2.2816 & 22.2307 \\ -8.7082 & 36.0398 \end{bmatrix},$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 34.6028 & -3.8729 \\ 303.3851 & -66.0186 \\ -3.4686 & 31.3972 \\ -18.4081 & 73.7401 \end{bmatrix}, \text{ et } K_5 = \begin{bmatrix} 43.4724 & -5.0280 \\ 474.4554 & -108.4241 \\ -4.5417 & 40.5276 \\ -30.8796 & 124.6735 \end{bmatrix}$$

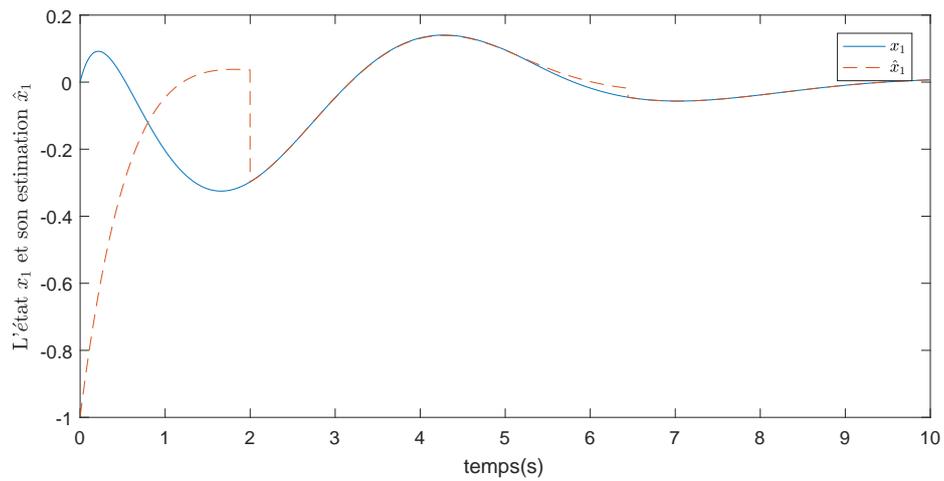
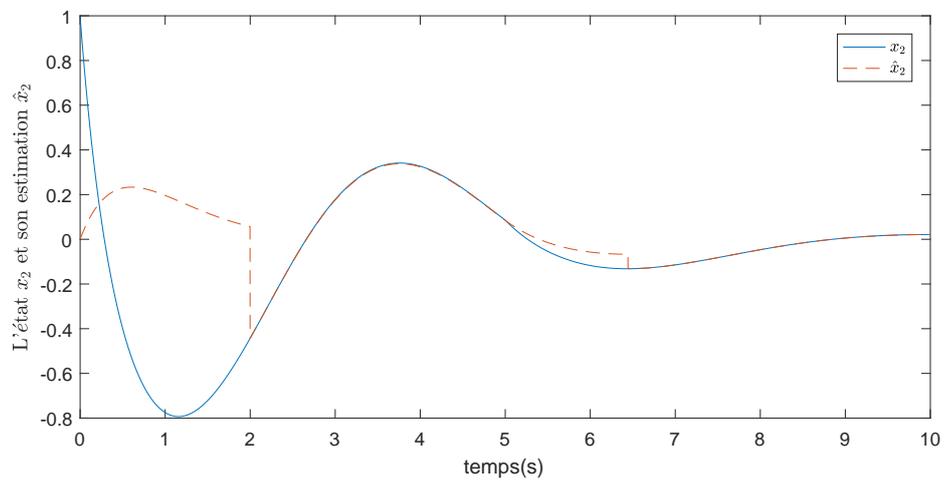
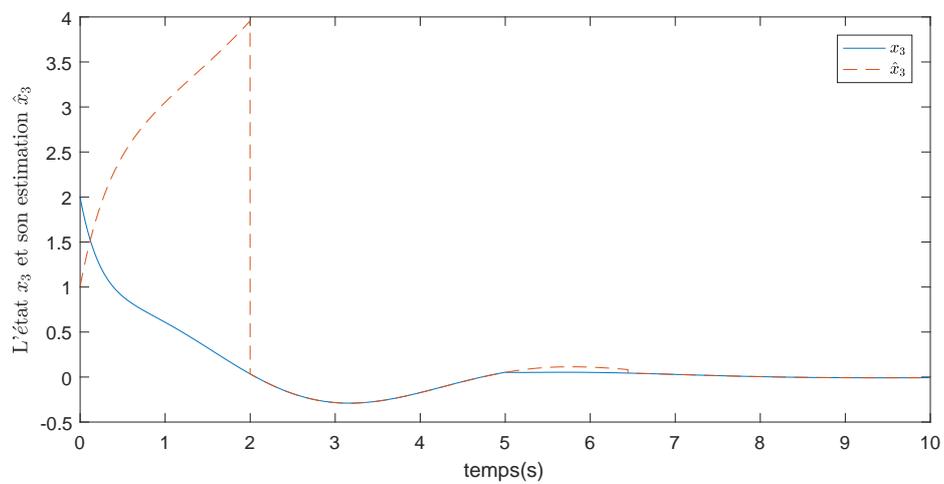
tels que $F_i = A - K_i C$ pour $1 \leq i \leq 5$ soient stables. Ce qui nous donne par la suite

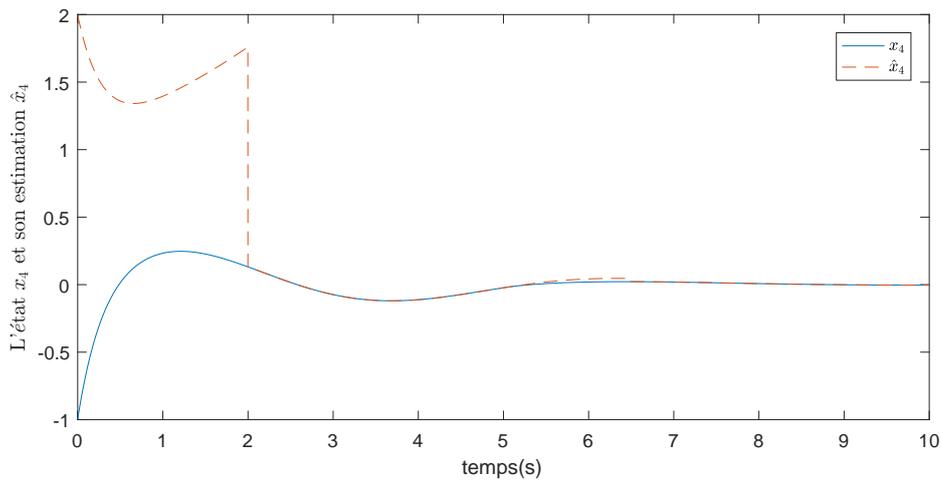
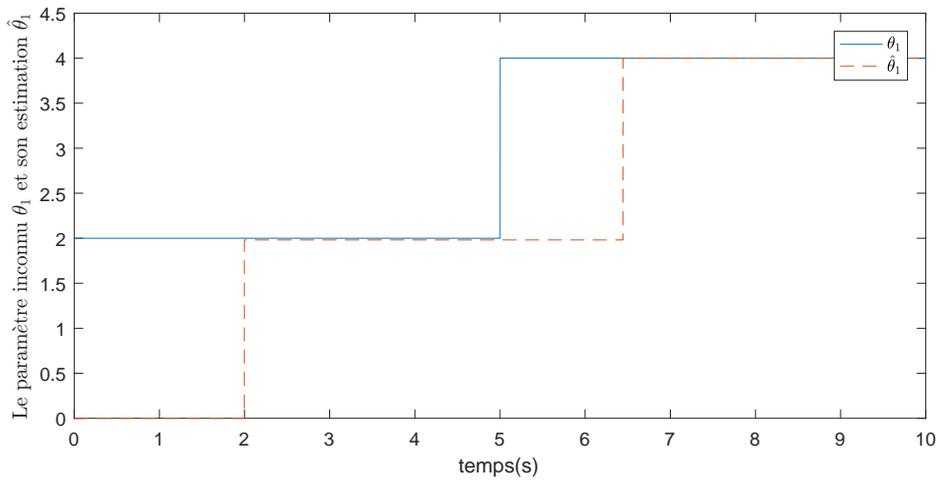
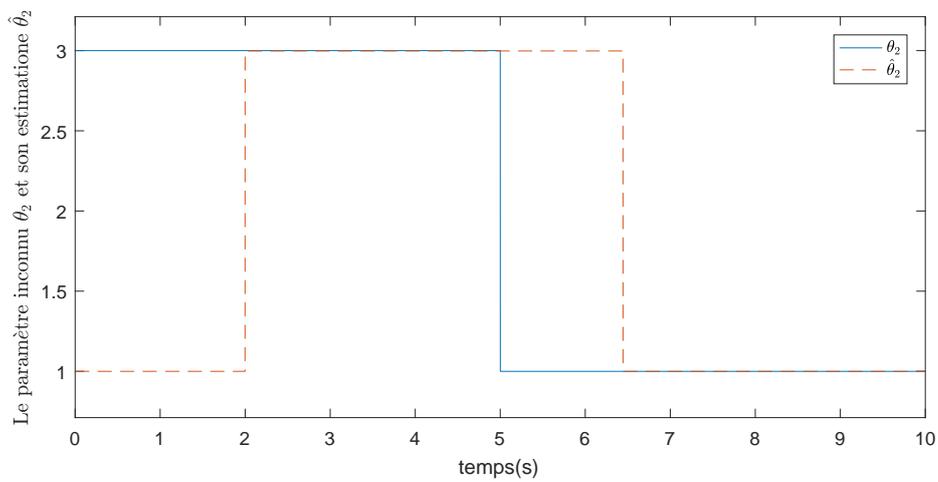
$$F_1 = \begin{bmatrix} -7.0657 & 1 & 0.3156 & 0 \\ -8.2201 & -1 & 1.0358 & 0 \\ 0.4094 & 0 & -7.9343 & 3 \\ 0.3492 & 0 & -2.6159 & -2 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} -18.6928 & 1 & 1.1299 & 0 \\ -74.5395 & -1 & 9.0523 & 0 \\ 1.0040 & 0 & -14.3072 & 3 \\ 2.3417 & 0 & -11.3844 & -2 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} -27.7693 & 1 & 2.5730 & 0 \\ -171.6510 & -1 & 32.2386 & 0 \\ 2.2816 & 0 & -23.2307 & 3 \\ 8.7082 & 0 & -35.0398 & -2 \end{bmatrix}, F_4 = \begin{bmatrix} 36.6028 & 1 & 3.8729 & 0 \\ -304.3851 & -1 & 66.0186 & 0 \\ 3.4686 & 0 & -32.3972 & 3 \\ 18.4081 & 0 & -72.7401 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\text{et } F_5 = \begin{bmatrix} -45.4724 & 1 & 5.0280 & 0 \\ -475.4554 & -1 & 108.4241 & 0 \\ 4.5417 & 0 & -41.5276 & 3 \\ 30.8796 & 0 & -123.6735 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pour la simulation, on choisit $h = 1s < 5s$. On a vérifié que la matrice $\Omega(t, h) \in \mathbb{R}^{20 \times 10}$ est de rang plein. Les Figures 2.3, 2.4, 2.5 et 2.6 montrent les états du système (2.16) et leurs estimations. Les résultats des estimations des paramètres inconnus sont présentés dans les Figures 2.7 et 2.8. On peut donc noter que les estimations convergent en temps fini pour tous les états et les paramètres inconnus du système considéré. A l'instant $t = 5s$ où la topologie du réseau a changé, on remarque un décrochage des estimations des états qui divergent. Ce qui active le mécanisme d'impulsion qui fait converger à nouveau les états estimés en un temps fini.

FIGURE 2.3 – L'état x_1 et son état estimé \hat{x}_1 .FIGURE 2.4 – L'état x_2 et son état estimé \hat{x}_2 .FIGURE 2.5 – L'état x_3 et son état estimé \hat{x}_3 .

FIGURE 2.6 – L'état x_4 et son état estimé \hat{x}_4 .FIGURE 2.7 – Paramètre θ_1 et son estimation $\hat{\theta}_1$.FIGURE 2.8 – Paramètre θ_2 et son estimation $\hat{\theta}_2$.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode pour concevoir un observateur à temps fini pour l'estimation simultanée des états et des paramètres est proposée. La technique proposée consiste à superposer plusieurs observateurs asymptotiques de même type mais avec différentes vitesses de convergence. Des conditions suffisantes sont données pour garantir la convergence en temps fini de l'observateur proposé. Un exemple numérique a été donné pour illustrer l'efficacité de la méthode proposée. Ces résultats ont été obtenus pour un réseau de systèmes linéaires avec des paramètres d'interconnexion inconnus mais constants par intervalle. Dans la suite de nos travaux de recherche, nous allons exploiter les résultats obtenus dans ce chapitre afin de les adapter aux réseaux de systèmes linéaires avec retard puis avec des entrées inconnues et un peu plus tard aux réseaux de systèmes non linéaires à retards aussi et avec des entrées inconnues.

Estimation pour les TDS linéaires

Sommaire

3.1 Introduction	45
3.2 Formulation du problème	46
3.3 Définitions	47
3.4 Systèmes linéaires à retard	48
3.5 Systèmes linéaires à retard avec paramètres inconnus	56
3.6 Conclusion	67

3.1 Introduction

Ayant obtenu des résultats satisfaisants pour l’observation des réseaux de systèmes linéaires sans retard avec des paramètres inconnus, nous pouvons maintenant traiter les classes de réseaux de systèmes à retard (TDS) linéaires. Cette étude utilise les résultats obtenus dans le chapitre 2. La motivation est toujours la même, c’est-à-dire, l’intention de connaître l’influence d’un système dynamique sur un autre afin de pouvoir optimiser les performances de tout le réseau.

Les notations suivantes seront utilisées dans la suite de ce manuscrit pour les systèmes à retard. \mathbb{R} est le corps des nombres réels. L’ensemble des entiers non négatifs est noté \mathbb{N}^* . \mathbf{I}_r signifie la matrice d’identité de dimension $r \times r$. $\mathbb{R}[\delta]$ est l’anneau polynômial défini sur \mathbb{R} . $\mathbb{R}^n[\delta]$ est le $\mathbb{R}[\delta]$ -module dont les éléments sont des vecteurs de dimension n et dont les entrées sont polynômiales. Par $\mathbb{R}^{q \times s}[\delta]$ on désigne l’ensemble des matrices de dimension $q \times s$, dont les entrées sont dans $\mathbb{R}[\delta]$. Pour une matrice $M(\delta)$, $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} M(\delta)$ signifie le rang de la matrice $M(\delta)$ définie sur $\mathbb{R}[\delta]$ et $\text{deg}_\delta M(\delta)$ signifie le degré maximal de δ pour tous les polynômes de la matrice $M(\delta)$. On note $\text{Inv}_S[M(\delta)] = \{\psi_i(\delta)\}_{1 \leq i \leq r}$ comme l’ensemble de facteurs invariants de la forme de Smith de $M(\delta)$. Pour deux matrices $M(\delta)$ et $N(\delta)$, $M(\delta) \sim N(\delta)$ signifie la similarité entre deux matrices polynomiales $M(\delta)$ et $N(\delta)$ sur $\mathbb{R}[\delta]$, c’est-à-dire qu’il existe deux matrices unimodulaires¹ $U_1(\delta)$ et $U_2(\delta)$ sur $\mathbb{R}[\delta]$ tel que $M(\delta) = U_1(\delta)N(\delta)U_2(\delta)$.

1. reportez-vous à la définition 3.2 pour le concept unimodulaire matrice sur $\mathbb{R}[\delta]$.

3.2 Formulation du problème

Considérons ici un réseau de k TDS linéaires ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$) avec des coefficients paramétriques de connexions θ_i inconnus mais constants par intervalles de temps. On suppose que chaque sous système Π_i pour $1 \leq i \leq k$ impliqué dans le réseau est de la forme suivante :

$$\Pi_i : \begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{s=0}^{k_a} A_{i,s} x_i(t - s\tau) + \sum_{j=1}^{q_i} \varphi_{i,j}(y_j(t)) \theta_{i,j} \\ y_i(t) = \sum_{s=0}^{k_c} C_{i,s} x_i(t - s\tau) \\ x_i(t) = \omega_i(t), t \in [-s_i\tau, 0] \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ représente ses états à l'instant t , $y_i(t) \in \mathbb{R}^{p_i}$ le vecteur des sorties à l'instant t et τ représente la base des retards commensurables et connus. $A_{i,s}$ et $C_{i,s}$ sont des matrices de dimensions appropriées.

La fonction initiale $\omega_i(t)$ est une fonction continue par morceaux $\omega_i(t) : [-s_i\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ ($s_i = \max\{k_a, k_c\}$); ainsi $x_i(t) = \omega_i(t)$ on $[-s_i\tau, 0]$. $x_i(t; \omega_i)$ représente la solution du TDS (3.2) avec une condition initiale égale à $\omega_i(t)$. De la même manière, on définit $y_i(t; \omega_i) = C_i(\delta)x_i(t; \omega_i)$, comme étant la sortie du système (3.1) quand $x_i(t) = x_i(t; \omega_i)$.

Pour simplifier les analyses, introduisons un opérateur de retard δ tel que $x_i(t - s\tau) = \delta^s x_i(t)$, $s \in \mathbb{N}$. Soit $\mathbb{R}[\delta]$ l'anneau polynômial de l'élément δ défini sur \mathbb{R} . Le système (3.1) peut alors être réécrit comme suit :

$$\Pi_i : \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i(\delta)x_i(t) + \varphi_i(y_j(t))\theta_i \\ y_i(t) = C_i(\delta)x_i(t) \\ x_i(t) = \omega_i(t), t \in [-s_i\tau, 0] \end{cases} \quad (3.2)$$

où $A_i(\delta) = \sum_{s=0}^{k_a} A_{i,s}\delta^s$ et $C_i(\delta) = \sum_{s=0}^{k_c} C_{i,s}\delta^s$.

Notons maintenant $n = \sum_{i=1}^k n_i$, $p = \sum_{i=1}^k p_i$ et $q = \sum_{i=1}^k q_i$ puis définissons

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(x_1^T(t), \dots, x_k^T(t) \right)^T \in \mathbb{R}^n, \\ y(t) &= \left(y_1^T(t), \dots, y_k^T(t) \right)^T \in \mathbb{R}^p \\ \theta &= \left(\theta_1^T, \dots, \theta_k^T \right)^T = (\theta_{1,1}, \dots, \theta_{1,q_1}, \dots, \theta_{k,1}, \dots, \theta_{k,q_k})^T \in \mathbb{R}^q \text{ et} \\ \omega &= \left(\omega_1^T, \dots, \omega_k^T \right)^T \in \mathbb{R}^n; \\ \varphi_{i,j}(y_j(t)) &= \left(\varphi_{i,j}^1(y_j(t)), \dots, \varphi_{i,j}^{n_i}(y_j(t)) \right)^T \in \mathbb{R}^{n_i}; \\ \varphi_i(y) &= \left(\varphi_{i,1}^T(y_1(t)), \dots, \varphi_{i,q_i}^T(y_{q_i}(t)) \right)^T \in \mathbb{R}^{n_i \times q_i}. \end{aligned}$$

Alors, la dynamique de l'ensemble du réseau de systèmes prend la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\delta)x(t) + \varphi(y(t))\theta \\ y(t) = C(\delta)x(t) \\ x(t) = \omega(t), t \in [-S\tau, 0] \end{cases} \quad (3.3)$$

où $S = \max(s_i, i = 1, \dots, k)$ et les matrices $A(\delta)$, $C(\delta)$ et $\varphi(y(t))$ ont la forme suivante :

$$A(\delta) = \begin{pmatrix} A_1(\delta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2(\delta) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A_k(\delta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}[\delta]$$

$$C(\delta) = \begin{pmatrix} C_1(\delta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2(\delta) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & C_k(\delta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n}[\delta]$$

et

$$\varphi(y(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(y(t)) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_2(y(t)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_k(y(t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times q}$$

On suppose que seules les informations de mesures actuelles et passées sont utilisées pour estimer les états et les paramètres inconnus. Pour cela, rappelons dans la section suivante quelques définitions importantes pour notre analyse.

3.3 Définitions

Afin de proposer un observateur au système considéré, rappelons la définition de l'observabilité retardée énoncée dans [BEJARANO et al., 2014].

Définition 3.1. *Le système (3.3) est dit observable retardé sur $[t_1, t_2]$ si et seulement si pour chaque $\tau \in [t_1, t_2]$, il existe $t'_1 < t'_2 \leq \tau$ tels que pour toute condition initiale ω , $y(t, \omega) = 0$ pour tout $t \in [t'_1, t'_2]$ implique $x(\tau, \omega) = 0$.*

Considérons le système (3.3) qui est décrit par les matrices polynômiales sur $\mathbb{R}[\delta]$, nous allons donc donner quelques définitions utiles de l'unimodularité et du changement de coordonnées sur $\mathbb{R}[\delta]$.

Définition 3.2. *Une matrice polynômiale donnée $M(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times q}[\delta]$, est considérée comme étant unimodulaire à gauche (à droite) sur $\mathbb{R}[\delta]$ s'il existe une matrice $M_L^{-1}(\delta) \in \mathbb{R}^{q \times n}[\delta]$ avec $n \geq q$ (ou $M_R^{-1}(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times q}[\delta]$ avec $n \leq q$), telle que $M_L^{-1}(\delta)M(\delta) = I_q$ (ou $M(\delta)M_R^{-1}(\delta) = I_n$). La matrice carrée $M(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\delta]$ est considérée comme étant unimodulaire sur $\mathbb{R}[\delta]$ si $M_L^{-1}(\delta) = M_R^{-1}(\delta)$.*

Rappelons aussi que pour toute matrice polynômiale $M(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times m}[\delta]$ avec $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} M(\delta) = k \leq \min\{p, m\}$, on dit que $M(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times m}[\delta]$ est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$ si et seulement si le $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} M(\delta) = m \leq p$ et que $\text{Inv}_S[M(\delta)] \subset \mathbb{R}$. [Hou et al., 2002].

Vu la complexité de la classe de système considéré, nous allons séparer notre étude en deux parties. Ainsi nous allons traiter dans un premier temps le cas où le vecteur des paramètres $\theta = 0$, ce qui est équivalent à l'étude d'un sous système du réseau. Ensuite dans un deuxième temps, nous allons généraliser les résultats obtenus.

3.4 Systèmes linéaires à retard

Dans ce cas de figure où les paramètres sont soit tous nuls ou tous connus, le système (3.3) peut être réécrit sous la forme suivante.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\delta)x(t) \\ y(t) = C(\delta)x(t) \\ x(t) = \omega(t), t \in [-S\tau, 0] \end{cases} \quad (3.4)$$

L'hypothèse suivante est nécessaire pour la conception d'un observateur à cette classe de systèmes dynamiques.

Hypothèse 3.1. On suppose que le couple $(A(\delta), C(\delta))$ est observable pour tout $t \geq 0$.

Nous pouvons alors proposer un observateur en temps fini au système (3.4) comme présenté dans ce qui suit.

3.4.1 Observateur en temps fini

La méthode proposée consiste à concevoir un observateur à temps fini basé sur deux observateurs de type Luenberger mais de gains différents. Mais avant de détailler cette méthode, définissons sur $\mathbb{R}[\delta]$ la matrice polynômiale d'observabilité suivante :

$$\mathcal{O}_l(\delta) = \begin{bmatrix} C(\delta) \\ C(\delta)A(\delta) \\ \vdots \\ C(\delta)A(\delta)^{l-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pl \times n} \quad (3.5)$$

où $l \in \mathbb{N}^*$, et rappelons un résultat utile présenté dans [Hou et al., 2002].

Théorème 3.1. [Hou et al., 2002] Il existe un changement généralisé de coordonnées $z = T(\delta)x$ qui transforme le système (3.4) à la forme normale de l'observateur suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + F(\delta)y \\ y = C_0 z \end{cases} \quad (3.6)$$

où les matrices $F(\delta) = [F_1^T(\delta), \dots, F_{l^*}^T(\delta)]$ et

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pl^* \times pl^*} \text{ et } C_0 = [I_p \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \in \mathbb{R}^{p \times pl^*} \quad (3.7)$$

si et seulement si il existe au moins un nombre entier naturel $l^* \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$. \diamond

De plus, le changement de coordonnées généralisé $z = T(\delta)x$ avec $T(\delta) = \text{col}\{T_1(\delta), \dots, T_{l^*}(\delta)\}$ est défini comme suit :

$$\begin{cases} T_1(\delta) = C(\delta) \\ T_{i+1}(\delta) = T_i(\delta)A(\delta) - F_i(\delta)C(\delta), \text{ pour } 1 \leq i \leq l^* - 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

avec les $F_i(\delta)$ étant déterminées à partir des équations suivantes :

$$[F_{l^*}(\delta), \dots, F_1(\delta)] = C(\delta)A^{l^*}(\delta)[\mathcal{O}_{l^*}(\delta)]_L^{-1}. \quad (3.9)$$

Lemme 3.1. Si l'Hypothèse 3.1 est satisfaite pour le couple $(A(\delta), C(\delta))$ dans (3.4), alors il existe un plus petit entier naturel $l^* \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathcal{O}_{l^*}(\delta) = \begin{bmatrix} C(\delta) \\ C(\delta)A(\delta) \\ \vdots \\ C(\delta)A(\delta)^{l^*-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pl^* \times n}[\delta] \quad (3.10)$$

soit unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$.

Preuve. Si le couple $(A(\delta), C(\delta))$ est observable, cela signifie qu'on peut trouver un entier naturel $l^* > 0$ tel que $pl^* \geq n$ et que toutes les colonnes de $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ soient indépendantes.

Donc $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$ \blacksquare

Pour la forme normale du système obtenu (3.6), nous pouvons maintenant présenter la synthèse d'observateur suivante sous forme d'un théorème.

Théorème 3.2. Si l'Hypothèse 3.1 est satisfaite pour le système (3.4), alors la dynamique suivante

$$\begin{cases} \dot{\xi} = L_0\xi + P(\delta)y \\ \dot{z} = \xi \\ \hat{x} = T_L^{-1}(\delta)z \end{cases} \quad (3.11)$$

est un observateur asymptotique pour le système (3.4), avec $T_L^{-1}(\delta)$ défini dans (3.8). $L_0 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $P(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times p}[\delta]$ seront déterminées ci-après. \diamond

La dynamique de l'erreur d'estimation $\varepsilon_z = z - \hat{z}$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_z &= \dot{z} - \dot{\hat{z}} \\
&= A_0 z + F(\delta)y - \dot{\xi} \\
&= A_0 z + F(\delta)C_0 z - [L_0 \xi + P(\delta)C_0 z] \\
&= [A_0 + F(\delta)C_0 - P(\delta)C_0]z - L_0 \xi \\
&= [A_0 + F(\delta)C_0 - P(\delta)C_0]z - L_0 \hat{z}
\end{aligned}$$

Étant donné que (A_0, C_0) est observable, il existe donc une matrice constante G_0 telle que $[A_0 - G_0 C_0]$ soit une matrice de Hurwitz.

Posons alors $L_0 = A_0 - G_0 C_0$ et $P(\delta) = G_0 + F(\delta)$. Nous obtenons

$$\dot{\varepsilon}_z = [A_0 - G_0 C_0] \varepsilon_z \quad (3.12)$$

Sachant que $z = T(\delta)x$, ce qui implique que $\varepsilon_z = T(\delta)\varepsilon_x$, nous avons

$$\dot{\varepsilon}_x = T_L^{-1}(\delta)[A_0 - G_0 C_0]T(\delta)\varepsilon_x \quad (3.13)$$

Maintenant, en couplant deux observateurs simples de type (3.11), nous pouvons concevoir un observateur en temps fini pour le système (3.4). Pour cela, choisissons deux différentes matrices constantes G_{0_i} telles que les deux matrices $[A_0 - G_{0_i} C_0]$ soient des matrices de Hurwitz pour $i = 1, 2$. Alors, notons

$$L_{0_i} = A_0 - G_{0_i} C_0 \quad (3.14)$$

et

$$P_i(\delta) = G_{0_i} + F(\delta) \quad (3.15)$$

pour $i = 1, 2$.

Définissons $d_{max} = \max\{\deg_\delta L_{0_i}(\delta), \deg_\delta P_i(\delta)\}$, avec ces matrices, pour une constante positive prédéfinie $\sigma = \tau d_{max}$, nous pouvons alors concevoir l'observateur en temps fini suivant à partir de deux observateurs couplés :

$$\begin{cases}
\dot{\xi}_i = L_{0_i} \xi + P_i(\delta)y, \\
z_i = \xi_i, \\
\hat{z} = \Gamma(\delta, t) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \\
\xi_1(t) = \xi_2(t) \text{ pour } \tau d_{max} \leq t \leq 0, \\
\hat{x} = T_L^{-1}(\delta)\hat{z}.
\end{cases} \quad (3.16)$$

où

$$\Gamma(\delta, t) = \begin{cases} [I_{pl^*} \ I_{pl^*}], & \text{si } t < \sigma \\ (I_{pl^*} - e^{L_{0_2}t} e^{-L_{0_1}t})^{-1} [-e^{L_{0_2}t} e^{-L_{0_1}t}, I_{pl^*}], & \text{si } t \geq \sigma \end{cases} \quad (3.17)$$

Théorème 3.3. *Supposons que l'Hypothèse 3.1 est satisfaite pour le système (3.4). Pour tout constante $\sigma \geq \tau d_{\max}$, la dynamique (3.16) est un observateur en temps fini pour (3.4) avec l'instant de la stabilisation de l'estimation prédéfini σ .* \diamond

Preuve. Supposons que l'Hypothèse 3.1 est satisfaite pour le système (3.4), alors on peut toujours trouver deux matrices constantes G_{0_1} et G_{0_2} telles que $[A_0 - G_{0_1}]$ et $[A_0 - G_{0_2}]$ soient des matrices de Hurwitz. Notons que $\varepsilon_{x_1} = x - \hat{x}_1$, $\varepsilon_{x_2} = x - \hat{x}_2$, $\varepsilon_{z_1} = T(\delta)\varepsilon_{x_1}$, $\varepsilon_{z_2} = T(\delta)\varepsilon_{x_2}$, alors d'après (3.12) nous obtenons

$$\dot{\varepsilon}_{z_1} = [A_0 - G_{0_1}]\varepsilon_{z_1} = L_{0_1}\varepsilon_{z_1} \quad (3.18)$$

et

$$\dot{\varepsilon}_{z_2} = [A_0 - G_{0_2}]\varepsilon_{z_2} = L_{0_2}\varepsilon_{z_2} \quad (3.19)$$

En résolvant les équations (3.18) et (3.19), nous avons

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z_1}(t) &= [z(t) - \hat{z}_1(t)] = e^{L_{0_1}t} \varepsilon_{z_1}(0) \\ \varepsilon_{z_2}(t) &= [z(t) - \hat{z}_2(t)] = e^{L_{0_2}t} \varepsilon_{z_2}(0) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Et puisque les conditions initiales pour ξ_i sont les mêmes, c'est-à-dire $\xi_1(0) = \xi_2(0)$, nous avons

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z_1}(0) &= T(\delta)\varepsilon_{x_1}(0) \\ &= T(\delta)[x(0) - \hat{x}_1(0)] = T(\delta)[x(0) - \xi_1(0)] \\ &= T(\delta)[x(0) - \xi_2(0)] = T(\delta)[x(0) - \hat{x}_2(0)] \\ &= T(\delta)\varepsilon_{x_2}(0) = \varepsilon_{z_2}(0) \end{aligned}$$

Par conséquent, en éliminant $\varepsilon_{z_1}(0)$ et $\varepsilon_{z_2}(0)$ dans (3.20), nous obtenons

$$e^{L_{0_2}t}[z(t) - \hat{z}_1(t)] = e^{L_{0_1}t}[z(t) - \hat{z}_2(t)] \quad (3.21)$$

Ensuite, en manipulant (3.21) nous obtenons

$$z(t) = (I_{pl^*} - e^{L_{0_2}t} e^{-L_{0_1}t})^{-1} \begin{bmatrix} -e^{L_{0_2}t} e^{-L_{0_1}t} & I_{pl^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_1(t)^T & \hat{z}_2(t)^T \end{bmatrix}^T$$

Quand $t = \sigma$, l'équation ci-dessus est égale à

$$z(\sigma) = \Gamma(\delta, \sigma) \begin{bmatrix} \hat{z}_1(\sigma) \\ \hat{z}_2(\sigma) \end{bmatrix}.$$

Selon le comportement impulsif défini dans (3.18), nous avons $\hat{z}_1(\sigma) = \hat{z}_2(\sigma) = z(\sigma)$ et $x(\sigma) = T_L^{-1}(\delta)z(\sigma)$ ce qui implique que la valeur exacte de l'état $x(t)$ a été obtenu à l'instant σ . Enfin, nous

avons toujours $\|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0$ pour $i = 1, 2$ quand $t \geq \sigma$, par conséquent (3.18) est un observateur en temps fini pour (3.4) avec le temps de convergence prédéfini σ . ■

Si l'Hypothèse 3.1 pour un certain $l^* \in \mathbb{N}^*$ est satisfaite pour le système (3.4), la procédure suivante présente une manière constructive de concevoir l'observateur proposé :

1. Calculer $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ défini dans (3.10) et son inverse à gauche $[\mathcal{O}_{l^*}(\delta)]_L^{-1}$.
2. Transformer le système (3.4) en (3.6) puis déduire A_0 et C_0 définies dans (3.7);
3. Après cela, déduire $F(\delta)$ définie dans (3.9) et $T(\delta)$ définie dans (3.8);
4. Choisir les matrices constantes G_{0_1} et G_{0_2} telles que L_{0_1} et L_{0_2} définis dans (3.14) soient stables (matrices de Hurwitz), puis calculer $P_i(\delta)$ définie dans (3.15).
5. Enfin obtenir $\Gamma(\delta, t)$ d'après (3.17) pour l'instant prédéfini σ .

3.4.2 Exemple illustratif

Pour illustrer les résultats obtenus dans la section précédente, considérons l'exemple suivant :

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} \delta^2 & 1 & \delta \\ \delta & \delta & 1 + \delta \\ 1 & \delta & \delta^2 \end{bmatrix} \text{ et } C(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

On peut vérifier qu'il existe $l^* = 2$ tel $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ soit unimodulaire à gauche. L'Hypothèse 3.1 est donc satisfaite et le système étudié est observable. Afin de concevoir l'observateur proposé, nous pouvons suivre la procédure proposée pour concevoir un observateur en temps fini.

Étape 1 : En se référant à l'équation (3.10), on calcule

$$\mathcal{O}_{l^*}(\delta) = \begin{bmatrix} C(\delta) \\ C(\delta)A(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 1 \\ \delta^2 & 1 & \delta \\ \delta^3 + 1 & 2\delta & 2\delta^2 \end{bmatrix}$$

et son inverse à gauche nous donne

$$[\mathcal{O}_{l^*}(\delta)]_L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & 1 & 0 \\ -\delta & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Étape 2 : En se référant au Théorème 3.1, on obtient

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Étape 3 : A partir de l'équation (3.9), on peut déduire la matrice polynômiale $F(\delta)$. On a alors :

$$F(\delta) = \begin{bmatrix} 2\delta^2 + \delta & 0 \\ 3\delta^3 + 2\delta^2 + 1 & 0 \\ -\delta^4 - \delta^2 + \delta & -\delta^2 + \delta + 1 \\ -2\delta^2(\delta^3 + \delta - 1) & 2\delta(-\delta^2 + \delta + 1) \end{bmatrix}$$

qui nous donne, en se basant sur la relation (3.8), la matrice polynômiale $T(\delta)$ suivante :

$$T(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 1 \\ -\delta^2 - \delta & 1 & \delta \\ -2\delta^3 - 2\delta^2 & 2\delta & \delta^2 \end{bmatrix}$$

et son inverse à gauche

$$T(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\delta^2 + \delta & -\delta & 1 & 0 \\ -\delta & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Étape 4 : Ensuite, on peut choisir librement G_{0_1} et G_{0_2} telles que L_{0_1} et L_{0_2} soient stables.

Dans cet exemple, on prend $G_{0_1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12.5 \\ 8 & 0 \\ 0 & 37.5 \end{bmatrix}$ et $G_{0_2} = \begin{bmatrix} 2.4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 1.28 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ qui fixent respectivement les valeurs propres de L_{0_1} à $[-7.5, -5, -4, -2]$ et celles de L_{0_2} à $[-3, -2, -1.6, -0.8]$.

Étape 5 : Et enfin, on a

$$P_1(\delta) = \begin{bmatrix} 2\delta^2 + \delta + 6 & 0 \\ 3\delta^3 + 2\delta^2 + 1 & 12.5 \\ -\delta^4 - \delta^2 + \delta + 8 & -\delta^2 + \delta + 1 \\ -2\delta^2(\delta^3 + \delta - 1) & 2\delta(-\delta^2 + \delta + 1) + 37.5 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$P_2(\delta) = \begin{bmatrix} 2\delta^2 + \delta + 2.4 & 0 \\ 3\delta^3 + 2\delta^2 + 1 & 5 \\ -\delta^4 - \delta^2 + \delta + 1.28 & -\delta^2 + \delta + 1 \\ -2\delta^2(\delta^3 + \delta - 1) & 2\delta(-\delta^2 + \delta + 1) + 6 \end{bmatrix}.$$

Avec une constante positive prédéfinie $\sigma > 3\tau$, nous pouvons facilement concevoir un observateur en temps fini de type (3.11) pour obtenir une estimation de $x(t)$ en temps fini. Pour la simulation, le pas d'échantillonnage est fixé à $0,0005s$ et le retard de base $\tau = 0,001s$. Les états estimés du système (3.4) sont montrés sur les figures 3.1, 3.2 et 3.3 lorsque $\sigma = 0.3s$ et sur les figures 3.4, 3.5 et 3.6 lorsque $\sigma = 0.5s$.

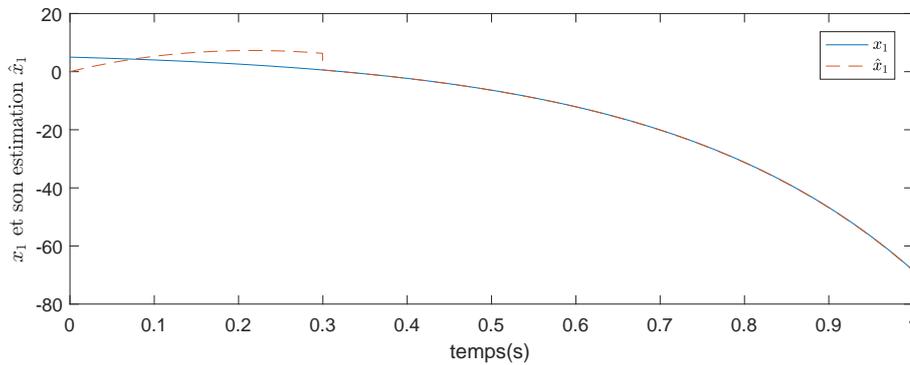


FIGURE 3.1 – L'état x_1 et son estimation \hat{x}_1 pour $\sigma = 0.3s$

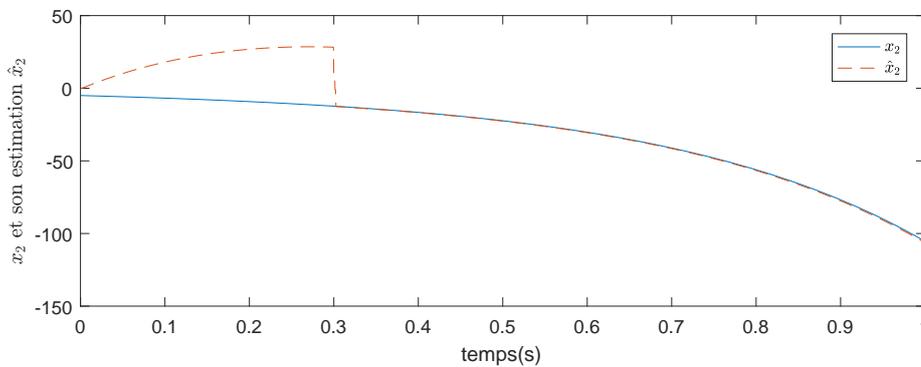


FIGURE 3.2 – L'état x_2 et son estimation \hat{x}_2 pour $\sigma = 0.3s$

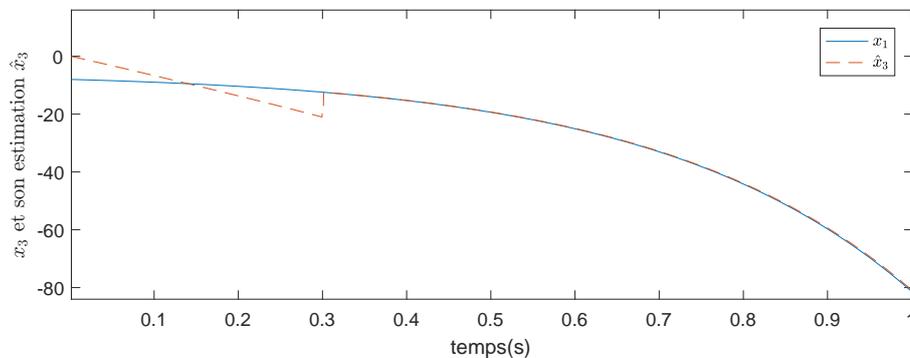
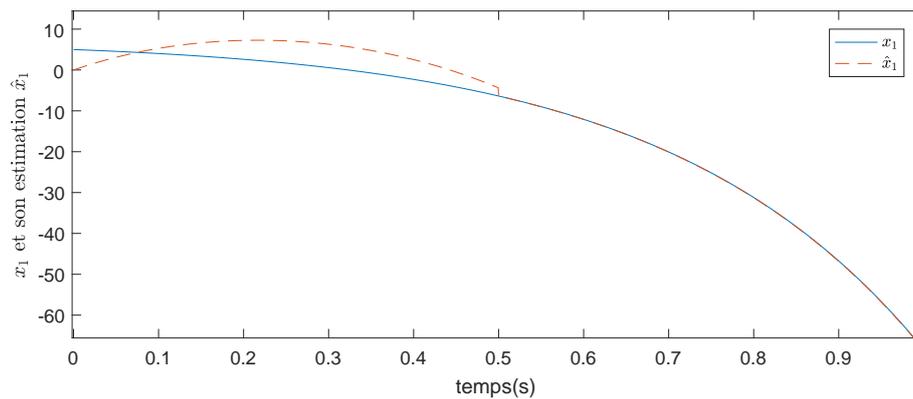
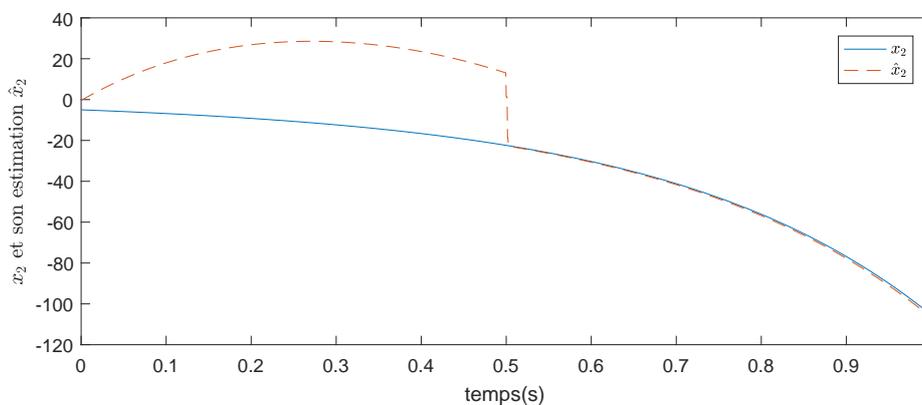
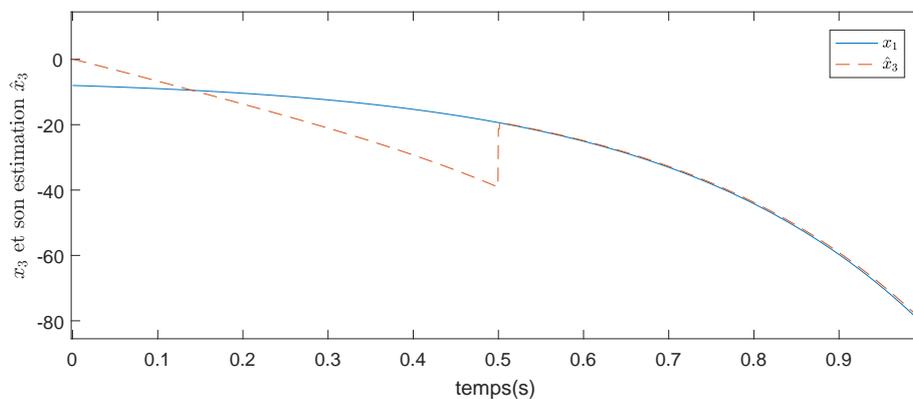


FIGURE 3.3 – L'état x_3 et son estimation \hat{x}_3 pour $\sigma = 0.3s$

FIGURE 3.4 – L'état x_1 et son estimation \hat{x}_1 pour $\sigma = 0.5s$ FIGURE 3.5 – L'état x_2 et son estimation \hat{x}_2 pour $\sigma = 0.5s$ FIGURE 3.6 – L'état x_3 et son estimation \hat{x}_3 pour $\sigma = 0.5s$

Les Figures 3.1, 3.2, et 3.3 montrent les trajectoires des états du système (3.4) ainsi que les trajectoires des états estimés avec l'observateur proposé. On remarque bien que les états estimés convergent en temps fini exactement à l'instant prédéterminé $\sigma = 0.3s$. De même, les Figures 3.4, 3.5 et 3.6 montrent les trajectoires des mêmes états du système (3.4) ainsi que leurs estimations qui convergent à l'instant prédéterminé $\sigma = 0.5s$.

3.5 Systèmes linéaires à retard avec paramètres inconnus

Pour les réseaux de systèmes linéaires en général avec des retards commensurables pouvant apparaître dans les états et aussi dans les sorties, nous nous focalisons sur la conception d'un observateur en temps fini pour estimer à la fois les états $x(t)$ et les paramètres inconnus θ en utilisant uniquement les valeurs actuelles et passées des mesures. Pour cela, l'Hypothèse 3.1 est encore nécessaire. Ainsi, considérons le système dynamique initial défini dans (3.3).

En supposant que l'Hypothèse 3.1 est satisfaite pour le système (3.3), nous pouvons alors proposer comme précédemment un estimateur en temps fini pour le système considéré. Rappelons que par l'expression "**estimation**", nous entendons "**observabilité simultanée des états et des paramètres inconnus**".

3.5.1 Estimateur en temps fini

Dans cette section, un observateur impulsif en temps fini sera proposé pour estimer à la fois les états et les paramètres inconnus du réseau considéré. Cette approche repose sur la combinaison d'un ensemble d'observateurs de type Luenberger. On utilisera donc les résultats obtenus dans la première partie de ce chapitre combinés avec les résultats obtenus dans le chapitre 2. Pour se faire, toujours en se basant sur les travaux de [Hou et al., 2002], on propose le théorème suivant :

Théorème 3.4. *Si l'Hypothèse 3.1 est satisfaite, alors il existe un changement de coordonnées $z = T(\delta)x$ tel que (3.3) peut être mise sous la forme suivante*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A_0 z(t) + F(\delta)y(t) + T(\delta)\varphi(y(t))\theta \\ y = C_0 z(t) \end{cases} \quad (3.23)$$

où $F(\delta) = [F_1^T(\delta), \dots, F_l^T(\delta)]^T$ est définie au (3.9), A_0 et C_0 sont définis au (3.7) et $T(\delta)$ définie dans (3.8).

◇

Introduisons maintenant la matrice de gain variable dans le temps $\Gamma(t)$ puis définissons le changement de coordonnées suivant

$$\xi(t) = z(t) - \Gamma(t)\theta \quad (3.24)$$

où $z(t)$ représente l'état du système transformé (3.23), $\xi(t)$ l'état du système dans le nouveau repère et $\Gamma(t)$ sera défini par la suite.

On a

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \dot{z}(t) - \dot{\Gamma}(t)\theta \\ &= A_0 z(t) + F(\delta)y(t) + T(\delta)\varphi(y(t))\theta - \dot{\Gamma}(t)\theta \end{aligned}$$

Puisque la paire (A_0, C_0) est observable, on peut choisir une matrice K_0 telle que $A_0 - K_0 C_0$ soient

stable. On obtient

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= A_0 z(t) + F(\delta)y(t) + T(\delta)\varphi(y(t))\theta - \dot{\Gamma}(t)\theta - K_0 C_0 z(t) + K_0 y(t) \\ &= (A_0 - K_0 C_0)z(t) + T(\delta)\varphi(y(t))\theta - \dot{\Gamma}(t)\theta + F(\delta)y(t) + K_0 y(t)\end{aligned}$$

Ensuite, en remplaçant $z(t) = \xi(t) + \Gamma(t)\theta$ dans l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= (A_0 - K_0 C_0)(\xi(t) + \Gamma(t)\theta) + T(\delta)\varphi(y(t))\theta - \dot{\Gamma}(t)\theta + F(\delta)y(t) + K_0 y(t) \\ &= (A_0 - K_0 C_0)\xi(t) + F(\delta)y(t) + K_0 y(t) - \dot{\Gamma}(t)\theta + [(A_0 - K_0 C_0)\Gamma(t) + T(\delta)\varphi(y(t))]\theta\end{aligned}\quad (3.25)$$

Soit $\Gamma(t)$ la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\Gamma}(t) = (A_0 - K_0 C_0)\Gamma(t) + T(\delta)\varphi(y(t))\quad (3.26)$$

En remplaçant $\dot{\Gamma}(t)$ dans l'équation (3.25), on obtient

$$\dot{\xi}(t) = (A_0 - K_0 C_0)\xi(t) + F(\delta)y(t) + K_0 y(t)\quad (3.27)$$

Notons $\bar{\varphi}(t, \tau) = T(\delta)\varphi(y(t))$, l'hypothèse suivante est nécessaire.

Hypothèse 3.2. On suppose que pour le système (3.23), $\text{rang } \bar{\varphi}(t, \tau) = q$.

En considérant le système (3.23), pour tout entier $q \in \mathbb{N}^*$, on peut toujours trouver un autre entier naturel $v \in \mathbb{N}^*$ tel que $vpl^* \geq 2pl^* + q$. On peut alors concevoir à v -reprises un observateur de la forme (3.27) mais avec de différents gains matriciels. Pour cela, nous devons introduire les v changements de coordonnées suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1(t) = z(t) - \Gamma_1(t)\theta, \\ \xi_2(t) = z(t) - \Gamma_2(t)\theta, \\ \vdots = \quad \quad \quad \vdots \\ \xi_v(t) = z(t) - \Gamma_v(t)\theta; \end{array} \right. \quad (3.28)$$

où $\xi_i(t) \in \mathbb{R}^{pl^*}$ et $\Gamma_i(t) \in \mathbb{R}^{pl^* \times q}$ pour $1 \leq i \leq v$. La dynamique des $\Gamma_i(t)$ est définie selon celle $\Gamma(t)$, donc on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Gamma}_1(t) = (A_0 - K_{0_1} C_0)\Gamma_1(t) + \bar{\varphi}(t, \tau), \\ \dot{\Gamma}_2(t) = (A_0 - K_{0_2} C_0)\Gamma_2(t) + \bar{\varphi}(t, \tau), \\ \vdots = \quad \quad \quad \vdots \\ \dot{\Gamma}_v(t) = (A_0 - K_{0_v} C_0)\Gamma_v(t) + \bar{\varphi}(t, \tau). \end{array} \right. \quad (3.29)$$

où les gains matriciels K_{0_i} sont choisies tels que chaque matrice $(A_0 - K_{0_i} C_0)$ soit stable. Par conséquent, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1(t) = (A_0 - K_{0_1}C_0)\xi_1(t) + (F(\delta) + K_{0_1})y(t) \\ \dot{\xi}_2(t) = (A_0 - K_{0_2}C_0)\xi_2(t) + (F(\delta) + K_{0_2})y(t) \\ \vdots = \vdots \\ \dot{\xi}_v(t) = (A_0 - K_{0_v}C_0)\xi_v(t) + (F(\delta) + K_{0_v})y(t) \end{cases} \quad (3.30)$$

Afin de concevoir un observateur en temps fini, on introduit un retard constant h qui peut être librement choisi. On peut donc définir la matrice $\Omega(t, \tau) \in \mathbb{R}^{(vp^l^*) \times (2p^l^* + q)}$ comme suit :

$$\Omega(t, \tau) = \begin{bmatrix} -I & e^{G_1 h} & \int_{t-h}^t e^{G_1(t-s)} \bar{\varphi}(s, \tau) ds \\ -I & e^{G_2 h} & \int_{t-h}^t e^{G_2(t-s)} \bar{\varphi}(s, \tau) ds \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -I & e^{G_v h} & \int_{t-h}^t e^{G_v(t-s)} \bar{\varphi}(s, \tau) ds \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

où $G_i = A_0 - K_{0_i}C_0$, pour $i = 1, \dots, v$. Notons que la matrice $\Omega(t, \tau)$ est obtenue en résolvant le système (3.30) tel que

$$\begin{bmatrix} e^{G_1 h} \xi_1(t-h) - \xi_1(t) \\ e^{G_2 h} \xi_2(t-h) - \xi_2(t) \\ \vdots \\ e^{G_v h} \xi_v(t-h) - \xi_v(t) \end{bmatrix} = \Omega(t, \tau) \begin{bmatrix} z(t) \\ z(t-h) \\ \theta \end{bmatrix}.$$

Dans ce qui va suivre, nous allons montrer à l'aide des lemmes 3.2, 3.3 et 3.4 que la matrice $\Omega(t, \tau)$ est inversible à gauche si l'Hypothèse 3.2 est satisfaite.

Lemme 3.2. *Il existe toujours des matrices K_{0_i} et K_{0_j} , $i, j \in \{1, \dots, v\}$, $i \neq j$ telles que les matrices G_i et G_j soient stables, que les valeurs propres de G_i , G_j ne soient pas multiples et que $\text{rang}(e^{G_j h} - e^{G_i h}) = p^l^*$.*

Preuve. La preuve est similaire à la preuve du Lemme 2.1. ■

Maintenant, définissons $\lambda\{G_i\}$, $\lambda\{G_j\}$ et $\lambda\{G_l\}$ comme étant respectivement les valeurs propres des matrices G_i , G_j et G_l telles que

$$\begin{aligned} \lambda\{G_i\} &= \text{diag}(\lambda_1\{G_i\}, \dots, \lambda_{p^l^*}\{G_i\}) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{p^l^*}), \\ \lambda\{G_j\} &= \text{diag}(\lambda_1 - \alpha_{i,j}, \dots, \lambda_{p^l^*} - \alpha_{i,j}), \text{ et} \\ \lambda\{G_l\} &= \text{diag}(\lambda_1 - \alpha_{j,l}, \dots, \lambda_{p^l^*} - \alpha_{j,l}) \text{ avec } \alpha_{j,l} = 2\alpha_{i,j}. \end{aligned}$$

Soient $\Delta\lambda_k\{\Delta G_{i,j}\} = \lambda_k\{G_j\} - \lambda_k\{G_i\}$, $k \in \{1, \dots, p^l^*\}$ et $\Delta\lambda_k\{\Delta G_{j,l}\} = \lambda_k\{G_l\} - \lambda_k\{G_j\}$. On peut choisir les gains matriciels K_{0_i} , K_{0_j} et K_{0_l} tels que les matrices G_i , G_j et G_l soient stables et que $\Delta\lambda_k\{\Delta G_{i,j}\} = \Delta\lambda_k\{\Delta G_{j,l}\} = \alpha_{i,j}$.

Lemme 3.3. *Il existe des matrices G_i , G_j et G_l pour tout $t \geq h$ telles que si l'Hypothèse 3.2 est satisfaite, alors*

$$\text{rang} \int_{t-h}^t \zeta(t,s) \bar{\varphi}(s, \tau) ds = q.$$

avec $\zeta(t,s) = e^{\mathcal{F}(t,\lambda,h,s)}$ où comme dans le Lemme 2.2, les valeurs propres de \mathcal{F} sont données par :

$$\lambda\{\mathcal{F}\} = \text{diag} \left\{ \dots, \frac{e^{\lambda_r(h+t-s)}(e^{-(t-s)} - e^{-h})(e^{-(t-s)} - 1)}{e^{(2\lambda_r-1)h}(e^{-h} - 1)}, \dots \right\}$$

Preuve. Pour $\bar{\varphi}(t, \tau) \in \mathbb{R}^{pl^* \times q}$, $q \leq pl^*$, si l'Hypothèse 3.2 est satisfaite, alors toutes les colonnes de $\bar{\varphi}(t, \tau)$ sont indépendantes. Il n'existe donc pas de vecteur non nul $H = [h_1, \dots, h_q]^T \neq 0$ tel que

$$\bar{\varphi}(t, \tau)H = 0.$$

Cela signifie que, pour tout $\zeta(t,s) \neq 0$, $\nexists H \neq 0$ tel que $\zeta(t,s)\bar{\varphi}(t, \tau)H = 0$, ce qui équivaut à dire que $\nexists H \neq 0$ tel que

$$\int_{t-h}^t \zeta(t,s) \bar{\varphi}(s, \tau) H ds = 0.$$

Il a été montré dans la preuve du Lemme 2.2 que l'on peut choisir les matrices G_i , G_j et G_r telles que $\zeta(t,s) \neq 0$ pour tout t . De même, puisque H est un vecteur constant, on

$$\int_{t-h}^t \zeta(t,s) \bar{\varphi}(s, \tau) H ds = \int_{t-h}^t \zeta(t,s) \bar{\varphi}(s, \tau) ds H$$

Donc, $\nexists H \neq 0$ tel que $\int_{t-h}^t \zeta(t,s) \bar{\varphi}(s, \tau) ds H = 0$. D'où,

$$\text{rang} \int_{t-h}^t \zeta(t,s) \bar{\varphi}(s, \tau) ds = q$$

pour tout $t \geq h$. ■

À partir des Lemmes 3.2 et 3.3, on peut en déduire le lemme suivant :

Lemme 3.4. *Si l'Hypothèse 3.2 est satisfaite, alors*

$$\text{rang} \Omega(t, \tau) = 2pl^* + q$$

pour tout $t \geq h$.

Preuve. La preuve est similaire à celle du Lemme 2.3. ■

Notons que si l'Hypothèse 3.2 est vérifiée, alors $\Omega(t, \tau)$ est inversible à gauche pour tout $t \geq h$. Alors, nous pouvons présenter le résultat suivant

Théorème 3.5. *Si l'Hypothèse 3.2 est satisfaite, alors les dynamiques suivantes représentent un observateur impulsif en temps fini pour le système (3.3).*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{\xi}}_i(t) = G_i \hat{\xi}_i(t) + [F(\delta) + K_{0_i}]y(t) \\ \dot{\hat{z}}(t) = A_0 \hat{z}(t) + F(\delta)y(t) + \hat{\varphi}(\delta, t)\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}}(t) = 0 \\ \left[\begin{array}{c} \hat{z}(t) \\ \hat{z}(t-h) \\ \hat{\theta} \end{array} \right] = [\Omega(t, \tau)]_L^{-1} \hat{\Xi}(t, h) \text{ si } t = T_\theta + h, \\ \hat{x}(t) = T_L^{-1}(\delta)\hat{z}(t) \forall t; \end{array} \right. \quad \text{pour } t \neq T_\theta + h; \quad (3.32)$$

où T_θ est obtenu comme suit (T_{θ_i} est la i -ème instant de changement de topologie) :

$$T_\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq T_s, \\ t & \text{si } R = 0 \forall t > T_s, \\ T_{\theta_i} & \text{si } R > 0 \forall t > T_s; \end{cases} \quad (3.33)$$

avec $T_s \geq h$, et $R(t, T_s)$ est le résidu de l'erreur d'estimation de la sortie

$$R(t, T_s) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq T_s \\ \int_{t-T_s}^t (y(r) - C_0 \hat{z}(r))^T (y(r) - C_0 \hat{z}(r)) dr & \text{si } t > T_s \end{cases} \quad (3.34)$$

et

$$\hat{\Xi}(t, h) = \begin{bmatrix} e^{G_1 h} \hat{\xi}_1(t-h) - \hat{\xi}_1 \\ e^{G_2 h} \hat{\xi}_2(t-h) - \hat{\xi}_2 \\ \vdots \\ e^{G_v h} \hat{\xi}_v(t-h) - \hat{\xi}_v \end{bmatrix}$$

◇

Preuve. En utilisant v -fois les changements de coordonnées $\xi_i(t) = z(t) - \Gamma_i(t)\theta$ au système (3.23) avec différents gains G_i (pour $i = 1, \dots, v$), on obtient (de façon similaire à la relation (3.30))

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1(t) = G_1 \xi_1(t) + [F(\delta) + K_{0_1}]y(t) \\ \dot{\xi}_2(t) = G_2 \xi_2(t) + [F(\delta) + K_{0_2}]y(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_v(t) = G_v \xi_v(t) + [F(\delta) + K_{0_v}]y(t) \end{array} \right.$$

pour lesquels le jeu d'observateurs asymptotiques suivant peut être conçu :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}}_1(t) = G_1 \hat{\xi}_1(t) + [F(\delta) + K_{0_1}]y(t) \\ \dot{\hat{\xi}}_2(t) = G_2 \hat{\xi}_2(t) + [F(\delta) + K_{0_2}]y(t) \\ \vdots \\ \dot{\hat{\xi}}_v(t) = G_v \hat{\xi}_v(t) + [F(\delta) + K_{0_v}]y(t) \end{cases}$$

où $G_i = (A_0 - K_{0_i}C_0)$ pour $1 \leq i \leq v$ sont stables.

Notons $\varepsilon_{\xi_i} = \xi_i(t) - \hat{\xi}_i(t)$ comme étant l'erreur d'estimation de ξ_i , on a alors

$$\dot{\varepsilon}_{\xi_i} = G_i \varepsilon_{\xi_i} \quad (3.35)$$

qui converge asymptotiquement vers zéro. Avec un retard donné h , la solution de (3.35) est donnée par

$$\hat{\xi}_i(t) - \xi_i(t) = e^{G_i h} (\hat{\xi}_i(t-h) - \xi_i(t-h))$$

ou de manière équivalente $\hat{\xi}_i(t) - z(t) + \Gamma_i(t)\theta = e^{G_i h} (\hat{\xi}_i(t-h) - z(t-h) + \Gamma_i(t-h)\theta)$.

Puisque

$$\hat{\Xi}(t) = \begin{bmatrix} e^{G_1 h} \hat{\xi}_1(t-h) - \hat{\xi}_1(t) \\ e^{G_2 h} \hat{\xi}_2(t-h) - \hat{\xi}_2(t) \\ \vdots \\ e^{G_v h} \hat{\xi}_v(t-h) - \hat{\xi}_v(t) \end{bmatrix} \text{ et } \Omega(t, \tau) = \begin{bmatrix} -I & e^{G_1 h} & \int_{t-h}^t e^{G_1(t-s)} \bar{\varphi}(s, \tau) ds \\ -I & e^{G_2 h} & \int_{t-h}^t e^{G_2(t-s)} \bar{\varphi}(s, \tau) ds \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -I & e^{G_v h} & \int_{t-h}^t e^{G_v(t-s)} \bar{\varphi}(s, \tau) ds \end{bmatrix},$$

on obtient

$$\hat{\Xi}(t) = \Omega(t, \tau) \begin{bmatrix} z(t) \\ z(t-h) \\ \theta \end{bmatrix}.$$

Selon la dynamique définie de l'observateur (3.32), $R(t, T_s)$ est le résidu d'estimation des mesures qui est utilisé pour déterminer l'instant de changement de topologie T_θ . Initialement, pour $t < T_s$, nous avons $T_\theta = 0$ et $R(t, T_s) = 0$, une commutation (virtuelle) est détectée et un comportement impulsif

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ z(t-h) \\ \theta \end{bmatrix} = [\Omega(t, \tau)]_L^{-1} \hat{\Xi}(t)$$

est effectué quand $t = T_\theta + h$, et cela donne :

$$\begin{cases} \hat{z}(t) & = z(t) \\ \hat{\theta}(t) & = \theta \\ R(t, T_s) & = 0 \end{cases}$$

ce qui est toujours vrai jusqu'à ce que la topologie (paramètre θ) change. La procédure sera itérée chaque fois que θ changera (changement de topologie) à un nouvel instant T_θ pour $t > T_s$, et l'estimation exacte de z et de θ peut toujours être obtenue après $t = T_\theta + h$. Étant donné que $z = T(\delta)x$, alors, nous pouvons obtenir l'estimation de $x(t)$ via :

$$\hat{x}(t) = T_L^{-1}(\delta) \left([\mathbf{I}_{pl^*}, \mathbf{O}] [\Omega(t, \tau)]_L^{-1} \hat{\Xi}(t) \right)$$

où $\mathbf{I}_{pl^*} \in \mathbb{R}^{pl^* \times pl^*}$ est la matrice identité de dimension pl^* et $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{pl^* \times (pl^* + q)}$ est une matrice nulle de dimension $pl^* \times (pl^* + q)$. ■

3.5.2 Exemple illustratif

Considérons le réseau de TDS linéaires suivant (Figure 3.7) :

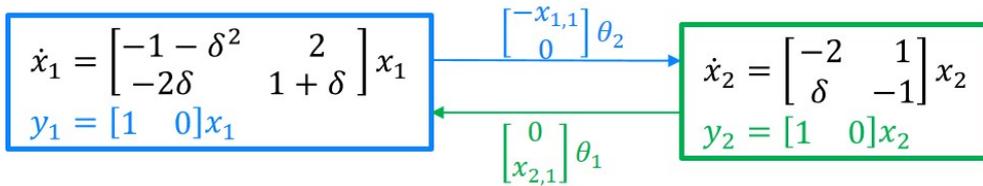


FIGURE 3.7 – Réseau formé par 2 systèmes linéaires à retards

Le modèle de l'ensemble du réseau est décrit par la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\delta)x + \varphi(y)\theta \\ y = C(\delta)x \end{cases} \quad (3.36)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} A_1(\delta) & 0 \\ 0 & A_2(\delta) \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} C_1(\delta) & 0 \\ 0 & C_2(\delta) \end{bmatrix}$$

avec

$$A_1(\delta) = \begin{bmatrix} -\delta^2 - 1 & 2 \\ -2\delta & 1 + \delta \end{bmatrix}, \quad A_2(\delta) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \delta & -1 \end{bmatrix}, \quad C_1(\delta) = C_2(\delta) = [1 \ 0] \text{ et}$$

$$\theta = \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T & \text{si } t \leq 7.5s \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^T & \text{si } t > 7.5s \end{cases}$$

On a donc

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} -\delta^2 - 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2\delta & 1 + \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \delta & -1 \end{bmatrix}, \quad C(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \varphi(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_2 \\ -y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il existe donc $l^* = 2$ tel que la matrice polynômiale d'observabilité (définie au (3.5))

$$\mathcal{O}_l(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\delta^2 - 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

est inversible à gauche. En se référant au Théorème 3.4, on $z(t) = T(\delta)x(t)$, la dynamique de $z(t)$ est définie comme suit

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + F(\delta)y + T(\delta)\varphi(y)\theta \\ y = C_0 z \end{cases} \quad (3.37)$$

et on obtient une matrice unimodulaire à gauche

$$T(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1+\delta}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec

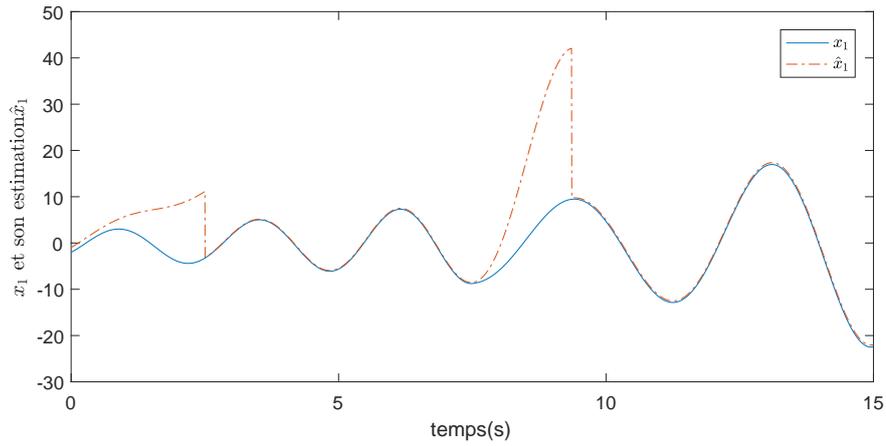
$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } F(\delta) = \begin{bmatrix} -\delta^2 + \delta & 0 \\ 0 & -3 \\ \delta^3 + \delta^2 - 3\delta + 1 & 0 \\ 0 & \delta - 1 \end{bmatrix}$$

Pour concevoir un ensemble d'observateur asymptotique pour (3.37), on choisit $v = 3$ et les pôles suivants (pour satisfaire les conditions des lemmes 3.2, 3.3 et 3.4).

$$p_1 = [-1, -2, -3, -4], \quad p_2 = [-2, -4, -6, -8], \quad \text{et } p_3 = [-3, -6, -9, -10],$$

et on obtient les gains matriciels suivants

$$K_{0_1} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \\ 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad K_{0_2} = \begin{bmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 9 \\ 108 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}, \quad K_{0_3} = \begin{bmatrix} 28 & 0 \\ 0 & 12 \\ 192 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}$$

FIGURE 3.8 – L'état x_1 et son estimation \hat{x}_1

tels que $G_i = A_0 - K_{0_i}C_0$ pour $1 \leq i \leq 3$ soient stables. Alors on obtient

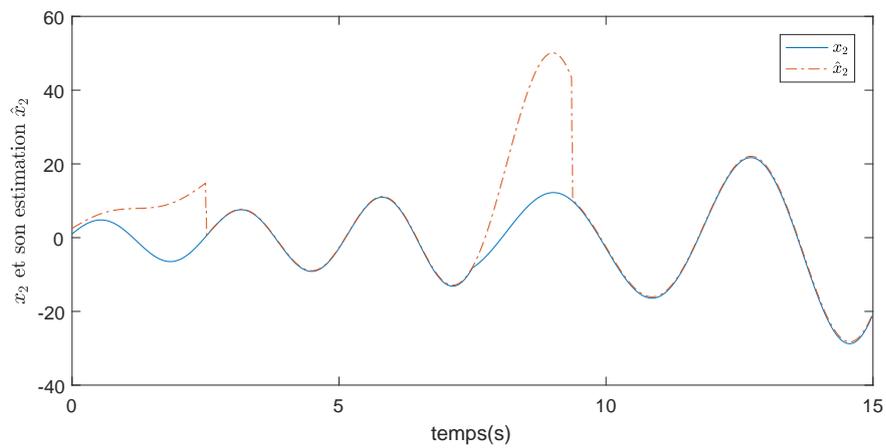
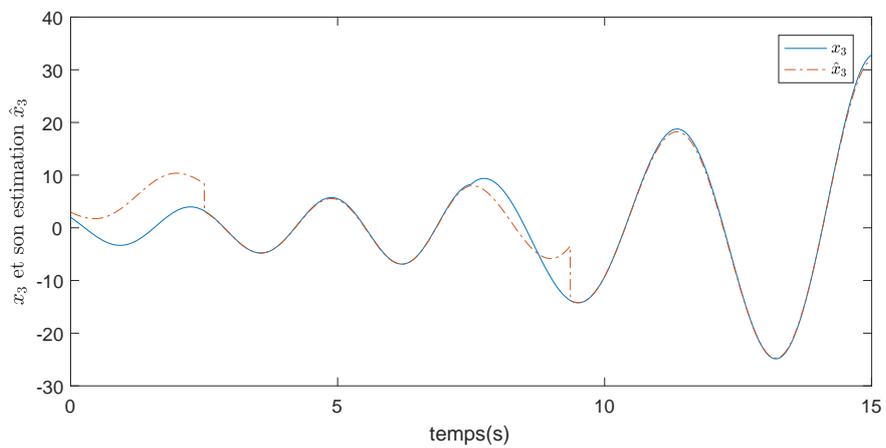
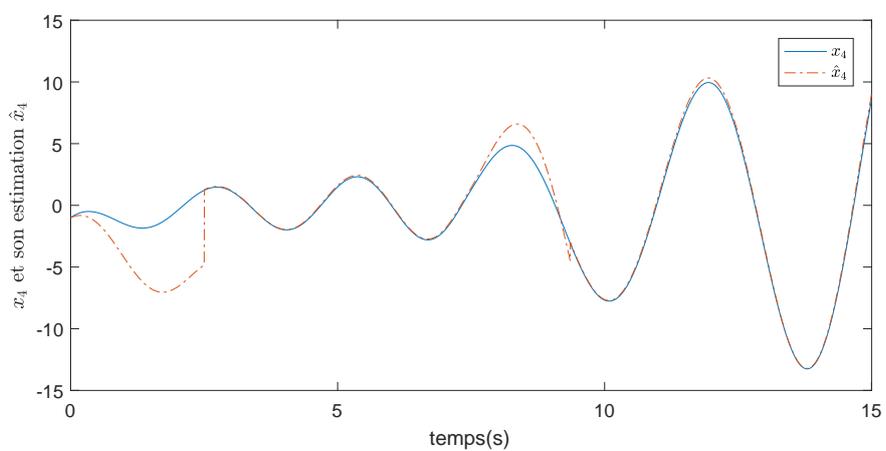
$$G_1 = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} -21 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 1 \\ -108 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_3 = \begin{bmatrix} -28 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 1 \\ -192 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -32 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

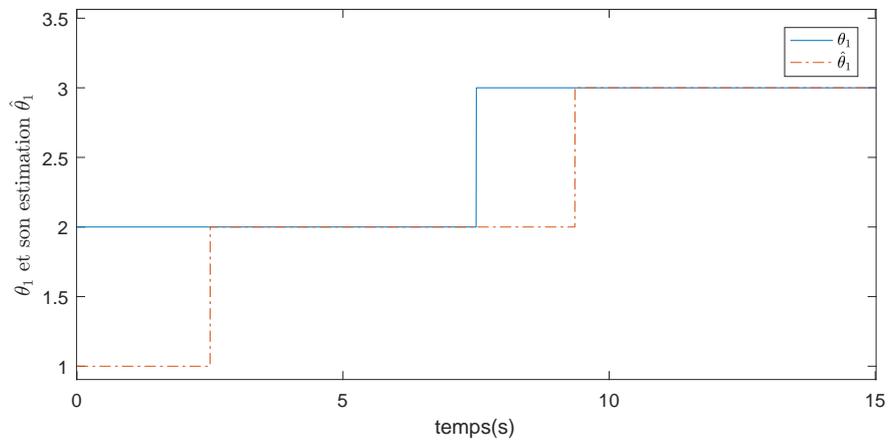
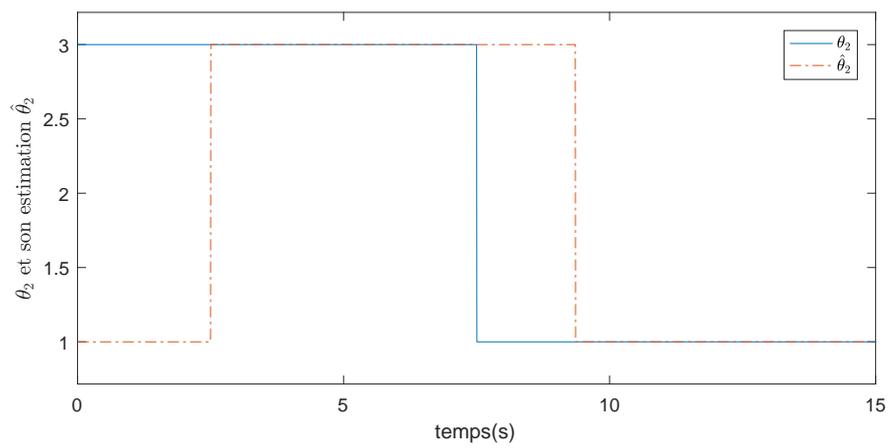
La matrice $\Omega(t, h) \in \mathbb{R}^{12 \times 10}$ est donnée par

$$\Omega(t, \tau) = \begin{bmatrix} -I_4 & e^{G_1 h} & \int_{t-h}^t e^{G_1(t-s)} \bar{\varphi}(s, \tau) ds \\ -I_4 & e^{G_2 h} & \int_{t-h}^t e^{G_2(t-s)} \bar{\varphi}(s, \tau) ds \\ -I_4 & e^{G_3 h} & \int_{t-h}^t e^{G_3(t-s)} \bar{\varphi}(s, \tau) ds \end{bmatrix}.$$

et est de rang plein. Donc son inverse à gauche $[\Omega(t, h)]_L^{-1}$ existe.

Pour la simulation, on a choisi les retards $h = 2, 5$ et $\tau = 0, 01$. Les figures 3.8, 3.9, 3.10 et 3.11 montrent les trajectoires de x et ses estimations. Les paramètres inconnus et leurs estimations sont présentés dans les figures 3.12 et 3.13. On peut noter que les estimations convergent en temps fini pour x et θ . On remarque bien sur les figures, le décrochage des états estimés à l'instant $t = 7, 5s$ quand la topologie du réseau a brusquement changé. Mais avec l'activation du mécanisme d'impulsion, la convergence en temps fini a été obtenue quelques instants après.

FIGURE 3.9 – L'état x_2 et son estimation \hat{x}_2 FIGURE 3.10 – L'état x_3 et son estimation \hat{x}_3 FIGURE 3.11 – L'état x_4 et son estimation \hat{x}_4

FIGURE 3.12 – Paramètre θ_1 et son estimation $\hat{\theta}_1$ FIGURE 3.13 – Paramètre θ_2 et son estimation $\hat{\theta}_2$

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, un observateur impulsif en temps fini a été proposé pour un réseau de systèmes linéaires à retard. Les résultats dans ce chapitre ont été obtenus à partir des résultats du chapitre 2. Des conditions suffisantes ont été obtenues pour garantir la convergence en temps fini de l'observateur proposé. Un exemple a été aussi proposé pour illustrer la méthode proposée. Ces résultats ont été obtenus pour un réseau de systèmes linéaires à retard et seront étendus au réseau de systèmes non linéaires à retard dans les chapitres qui vont suivre.

Observation pour les TDS linéaires à entrées inconnues

Sommaire

4.1 Introduction	69
4.2 Formulation du problème	69
4.3 Sorties indépendantes des entrées inconnues	70
4.4 Généralisation des résultats	81
4.5 Conclusion	93

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'observation des systèmes linéaires à retards commensurables et connus avec des entrées inconnues. Étant donné que l'étude pour les systèmes à retard sans entrées inconnues est déjà complexe, prendre en compte des entrées inconnues est encore beaucoup plus complexe. Peu de résultats existent dans la littérature pour ces classes de systèmes, et pourtant les systèmes à retard sont plus proches des systèmes réels que les systèmes sans retard. Supposons qu'en réalité, tous les signaux se propageant dans le temps sont retardés par rapport à un instant donné, nous allons considérer, dans ce chapitre, que même les entrées inconnues peuvent être retardées. Alors, pour simplifier notre étude, nous allons tout d'abord nous intéresser aux classes de systèmes à retard dont les entrées inconnues n'ont pas d'effets directs sur les sorties mesurées. Par la suite, nous généraliserons les résultats obtenus au cas où les entrées inconnues apparaissent aussi dans les sorties.

4.2 Formulation du problème

Dans ce chapitre nous allons utiliser certains résultats obtenus dans le Chapitre 3 que nous allons adapter, suivant de nouvelles conditions, aux systèmes linéaires retardés à entrées inconnues.

Pour ce faire, considérons la classe de systèmes linéaires à retards commensurables définie de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^{k_a} A_i x(t - i\tau) + \sum_{i=0}^{k_b} B_i u(t - i\tau) \\ y(t) &= \sum_{i=0}^{k_c} C_i x(t - i\tau) + \sum_{i=0}^{k_d} D_i u(t - i\tau)\end{aligned}\quad (4.1)$$

où à l'instant t , $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système considéré, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ sa sortie, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des entrées inconnues. La constante positive τ représente la base des retards commensurables. La fonction initiale $\omega(t)$ est une fonction continue par intervalle définie par $\omega(t) : [-k\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($k = \max\{k_a, k_b, k_c, k_d\}$); ainsi $x(t) = \omega(t)$ sur $[-k\tau, 0]$. A_i , B_i , C_i et D_i sont des matrices de dimensions appropriées.

Comme dans le chapitre 3, on introduit l'opérateur de retard δ tel que $\delta^k x(t) = x(t - k\tau)$, $k \in \mathbb{N}$. Soit $\mathbb{R}[\delta]$ l'anneau de polynôme de δ défini sur \mathbb{R} . Le système (4.1) peut alors être réécrit sous la forme compacte suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\delta)x(t) + B(\delta)u(t) \\ y(t) &= C(\delta)x(t) + D(\delta)u(t)\end{aligned}\quad (4.2)$$

où $A(\delta) = \sum_{i=0}^{k_a} A_i \delta^i$, $B(\delta) = \sum_{i=0}^{k_b} B_i \delta^i$, $C(\delta) = \sum_{i=0}^{k_c} C_i \delta^i$ et $D(\delta) = \sum_{i=0}^{k_d} D_i \delta^i$.

Pour ce qui est de $x(t; \varphi, u)$, nous entendons la solution du système retardé (4.2) avec la condition initiale égale à $\varphi(t)$ et l'entrée $u(t)$. De la même manière, nous définissons $y(t; \varphi, u) = C(\delta)x(t; \varphi, u)$ comme la sortie du système (4.2) quand $x(t) = x(t; \varphi, u)$. Les informations issues de mesures réelles et passées seront utilisées pour concevoir l'observateur et estimer les états du système retardé à entrées inconnues. Cette classe de systèmes dynamiques étant complexe, nous nous proposons d'étudier d'abord le cas le plus simple, c'est-à-dire le cas où les entrées inconnues n'ont pas d'effets directs sur la sortie du système considéré.

4.3 Sorties indépendantes des entrées inconnues

Dans ce premier cas de figure, nous assumons que la matrice $D(\delta)$ du système (4.2) est toujours nulle. Ainsi, nous obtenons un système de la forme suivante

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\delta)x(t) + B(\delta)u(t) \\ y(t) &= C(\delta)x(t)\end{aligned}\quad (4.3)$$

où $A(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\delta]$, $B(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times m}[\delta]$ et $C(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times n}[\delta]$ sont des matrices définies sur l'anneau polynômial $\mathbb{R}[\delta]$.

Pour le système (4.3) sans entrée, c'est-à-dire pour $B(\delta) = 0$, Hou a proposé dans [Hou et al., 2002], un simple observateur de Luenberger et des conditions suffisantes ont été déduites pour calculer les gains de l'observateur proposé. Cette méthode peut être aussi adaptée pour construire le même type d'observateur pour le système (4.3) avec les entrées connues, mais ne peut pas être appliquée aux classes de systèmes dont les entrées $u(t)$ sont inconnues, comme par exemple le système étudié dans cette partie. Dans [SENAME, 1997], le problème de la construction

d'un observateur pour le système (4.3) avec entrées inconnues a été étudié en utilisant les mêmes approches algébriques et polynômiales que dans [Hou et al., 2002]. Toutefois, dans cet article, seules les conditions nécessaires ont été données pour garantir l'existence de l'observateur proposé et cela rend la procédure de conception non constructive. En extension aux résultats des travaux récents présentés dans [BEJARANO et al., 2014], la principale contribution de cette partie est d'étendre la méthode proposée dans [Hou et al., 2002] pour traiter le système (4.3) avec des entrées inconnues, et en déduire les conditions suffisantes qui nous permettent de présenter une procédure simple et constructive pour concevoir un observateur en temps fini.

4.3.1 Définitions et résultats préliminaires

Les Définitions 3.1 et 3.2 du Chapitre 3 concernant l'unimodularité et les matrices polynômiales sont aussi applicables aux systèmes (4.1) et (4.2) de ce chapitre.

Dans le but de découpler les entrées inconnues du système (4.3), nous allons utiliser les méthodes présentées dans [SILVERMAN, 1969] et dans [MOLINARI, 1976]. Ainsi, nous pouvons définir une matrice $N_k(\delta)$ générées par l'algorithme suivant :

Algorithme 4.1. [MOLINARI, 1976]

- *Initialisation* : $\Delta_1 \triangleq 0$, $E_1 \triangleq 0$, $J_1(\delta) \triangleq C(\delta)$, $N_1(\delta) \triangleq \Delta_1$;
- *Itération* : Pour $l \geq 1$, calculer la matrice unimodulaire $P_l(\delta)$ sur $\mathbb{R}[\delta]$ telle qu'elle transforme $\Delta_l(\delta)B(\delta)$ en sa forme de Hermite

$$P_l(\delta)\Delta_l(\delta)B(\delta) = \begin{bmatrix} E_{l+1}(\delta) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Alors on obtient

$$\begin{bmatrix} E_{l+1}(\delta) & J_{l+1}(\delta) \\ 0 & \Delta_{l+1}(\delta) \end{bmatrix} = P_l(\delta) \begin{bmatrix} \Delta_l(\delta)B(\delta) & \Delta_l(\delta)A(\delta) \\ E_l(\delta) & J_l(\delta) \end{bmatrix}.$$

$$\text{— On note } N_{l+1}(\delta) \triangleq \begin{bmatrix} N_l(\delta) \\ \Delta_{l+1}(\delta) \end{bmatrix}.$$

En appliquant l'algorithme 4.1 au système (4.3), il a été prouvé dans [BEJARANO et al., 2014] qu'il existe toujours un plus petit entier naturel l^* , indépendant du choix de $P_l(\delta)$, tel que $\text{Inv}_S N_{l^*+1}(\delta) = \text{Inv}_S N_{l^*}(\delta)$. De plus, il a été prouvé que le système (4.3) est Observable Retardé à Entrées Inconnues (OREI) si $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} N_{l^*}(\delta) = n$ et que $\text{Inv}_S N_{l^*}(\delta) \subset \mathbb{R}$. En se basant sur ce résultat, considérons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 4.1. Pour le système (4.3), il existe un plus petit entier naturel l^* tel que $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} N_{l^*}(\delta) = n$ et $\text{Inv}_S N_{l^*}(\delta) \subset \mathbb{R}$. Ainsi le système (4.3) est observable.

Sous cette hypothèse, un observateur peut être conçu pour estimer les états du système (4.3).

4.3.2 Observateur en temps fini

Dans cette section, un observateur en temps fini basé sur deux observateurs de type Luenberger est conçu. Mais avant de le présenter, définissons la matrice polynômial d'observabilité suivante sur $\mathbb{R}[\delta]$:

$$\mathcal{O}_{l^*}(\delta) = \begin{bmatrix} C(\delta) \\ C(\delta)Q(\delta)A(\delta) \\ \vdots \\ C(\delta)[Q(\delta)A(\delta)]^{l^*-1} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

où la matrice $Q(\delta)$ sera définie dans le Lemme 4.2. Le résultat suivant est alors déduit pour le système (4.3).

Lemme 4.1. *Si l'Hypothèse 4.1 est satisfaite pour le système (4.3), alors il existe plus petit entier naturel $l^* \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ définie dans (4.4) est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$.*

Preuve. Si l'Hypothèse 4.1 est satisfaite pour le système (4.3), alors en appliquant l'algorithme 4.1 au système (4.3), nous pouvons trouver un plus petit entier naturel $l^* \in \mathbb{N}$ tel qu'après l^* itérations, on obtient $\text{rang } N_{l^*}(\delta) = n$ et $\text{Inv}_S N_{l^*}(\delta) \subset \mathbb{R}$.

En considérant la première itération lors de l'application de l'algorithme précédent au système (4.3), on obtient l'égalité

$$P_1(\delta) \begin{bmatrix} \Delta_1(\delta)B(\delta) & \Delta_1(\delta)A(\delta) \\ E_1(\delta) & J_1(\delta) \end{bmatrix} = P_1(\delta) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2(\delta) & J_2(\delta) \\ 0 & \Delta_2(\delta) \end{bmatrix}$$

à partir de laquelle nous pouvons affirmer qu'il existe des matrices $W_1(\delta)$, $S_1(\delta)$ et $R_1(\delta)$ telles que

$$E_2(\delta) = W_1(\delta)B(\delta) = 0$$

avec

$$W_1(\delta) = 0, \Delta_2(\delta) = S_1(\delta)C(\delta) \text{ et } J_2(\delta) = R_1(\delta)C(\delta) = W_1(\delta)K(\delta)C(\delta)A(\delta) + R_1(\delta)\mathcal{O}_1(\delta),$$

$\mathcal{O}_1(\delta)$ étant défini dans (4.4).

Dans ce qui suit, il sera prouvé par induction que, après chaque itération $l \geq 1$, il existe des matrices $W_l(\delta)$, $S_l(\delta)$ et $R_l(\delta)$ telles que

$$E_l(\delta) = W_l(\delta)B(\delta), J_l(\delta) = W_l(\delta)K(\delta)C(\delta)A(\delta) + R_l(\delta)\mathcal{O}_l(\delta) \text{ et } \Delta_l(\delta) = S_l(\delta)\mathcal{O}_l(\delta).$$

Pour cela, supposons que pour $1 \leq l < l^*$, on a $E_l(\delta) = W_l(\delta)B(\delta)$, $J_l(\delta) = W_l(\delta)K(\delta)C(\delta)A(\delta) + R_l(\delta)\mathcal{O}_l(\delta)$ et $\Delta_l(\delta) = S_l(\delta)\mathcal{O}_l(\delta)$, alors l'itération suivante $l + 1$ donne :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{l+1}(\delta) & J_{l+1}(\delta) \\ 0 & \Delta_{l+1}(\delta) \end{bmatrix} &= P_l(\delta) \begin{bmatrix} \Delta_l(\delta)B(\delta) & \Delta_l(\delta)A(\delta) \\ E_l(\delta) & J_l(\delta) \end{bmatrix} \\ &= P_l(\delta) \begin{bmatrix} \Delta_l(\delta)B(\delta) & \Delta_l(\delta)A(\delta) \\ W_l(\delta)B(\delta) & R_l(\delta)\mathcal{O}_l(\delta) \end{bmatrix} + P_l(\delta) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_l(\delta)K(\delta)C(\delta)A(\delta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où $P_k(\delta) = \begin{bmatrix} P_{k,1}(\delta) & P_{k,2}(\delta) \\ P_{k,3}(\delta) & P_{k,4}(\delta) \end{bmatrix}$. Le fait que $[P_{l,3}(\delta)\Delta_l(\delta) + P_{l,4}(\delta)W_l(\delta)]B(\delta) = 0$ implique que

$$[P_{l,3}(\delta)\Delta_l(\delta) + P_{l,4}(\delta)W_l(\delta)]K(\delta) = 0$$

Par conséquent, il existe les matrices suivantes

$$\begin{aligned} W_{k+1}(\delta) &= P_{k,1}(\delta)\Delta_k(\delta) + P_{k,2}(\delta)W_k(\delta) \\ R_{k+1}(\delta) &= \begin{bmatrix} P_{k,2}(\delta)R_k(\delta), & P_{k,1}(\delta)S_k(\delta) \end{bmatrix} \\ S_{k+1}(\delta) &= \begin{bmatrix} P_{k,4}(\delta)R_k(\delta), & P_{k,3}(\delta)S_k(\delta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

telles qu'après l'itération $l + 1$, on obtienne

$$\begin{aligned} E_{k+1}(\delta) &= P_{k,1}(\delta)\Delta_k(\delta)B(\delta) + P_{k,2}(\delta)W_k(\delta)B(\delta) = W_{k+1}(\delta)B(\delta) \\ J_{k+1}(\delta) &= P_{k,1}(\delta)\Delta_k(\delta)A(\delta) + P_{k,2}(\delta)[R_k(\delta)\mathcal{O}_k(\delta) + W_{k+1}(\delta)K(\delta)C(\delta)A(\delta)] \\ \Delta_{k+1}(\delta) &= P_{k,3}(\delta)\Delta_k(\delta)A(\delta) + P_{k,4}(\delta)[R_k(\delta)\mathcal{O}_k(\delta) + W_{k+1}(\delta)K(\delta)C(\delta)A(\delta)] \end{aligned}$$

à partir desquelles nous pouvons conclure qu'après chaque itération $l \geq 1$, il existe toujours une matrice polynômiale $S_l(\delta)$ telle que $\Delta_l(\delta) = S_l(\delta)\mathcal{O}_l(\delta)$.

Donc, après l^* itération, on a $\Delta_{l^*}(\delta) = S_{l^*}(\delta)\mathcal{O}_{l^*}$, ce qui implique qu'il existe une matrice $S(\delta)$ dépendant de S_l telle que $N_{l^*}(\delta) = S(\delta)\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$. Ainsi, si l'hypothèse 4.1 est satisfaite pour le système (4.4), alors $N_{l^*}(\delta)$ est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$, et cela signifie que $N_{l^*}(\delta)$ admet une matrice inverse gauche $[N_{l^*}(\delta)]_L^{-1}$ telle que

$$I_n = [N_{l^*}(\delta)]_L^{-1} N_{l^*}(\delta) = [N_{l^*}(\delta)]_L^{-1} S(\delta)\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$$

Cela implique que $[N_{l^*}(\delta)]_L^{-1} S(\delta)$ est l'inverse à gauche de $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$. Par conséquent $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ est aussi unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$. ■

Considérons maintenant les dynamiques suivantes pour l'observateur du système (4.3).

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= L(\delta)\xi + P(\delta)y \\ \hat{x} &= \xi + K(\delta)y \end{aligned} \tag{4.5}$$

où les matrices $L(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\delta]$, $P(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times p}[\delta]$ et $K(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times p}[\delta]$ seront déterminées ci-après. Dé-

signons maintenant par $\varepsilon = x - \hat{x} = [I_n - K(\delta)C(\delta)]x - \xi$ l'erreur d'observation de x et notons $Q(\delta) = I_n - K(\delta)C(\delta)$. On a

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= Q(\delta)A(\delta)x + Q(\delta)B(\delta)u - L(\delta)\xi - P(\delta)C(\delta)x \\ &= Q(\delta)A(\delta)x + Q(\delta)B(\delta)u - L(\delta)\hat{x} + L(\delta)K(\delta)C(\delta)x - P(\delta)C(\delta)x \\ &= [Q(\delta)A(\delta) + L(\delta)K(\delta)C(\delta) - P(\delta)C(\delta)]x - L(\delta)\hat{x} + Q(\delta)B(\delta)u\end{aligned}\quad (4.6)$$

Dans la dynamique de l'erreur d'observation ci-dessus, puisque u est supposée être inconnue, nous devons chercher une matrice polynomiale $Q(\delta)$ afin d'annihiler $B(\delta)u$. L'existence d'une telle matrice $Q(\delta)$ est garantie par le lemme suivant.

Lemme 4.2. *Pour des matrices polynomiales $B(\delta)$ et $C(\delta)$ définies dans le système (4.3), il existe une matrice polynomiale $Q(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\delta]$ telle que $Q(\delta)B(\delta) = 0$, si et seulement si*

$$\text{Inv}_S \begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) \\ B(\delta) \end{bmatrix} = \text{Inv}_S [C(\delta)B(\delta)] \quad (4.7)$$

Preuve. Suivant le Théorème S2.1 dans [GOHBERG et al., 2009], il existe une matrice polynomiale $K(\delta)$ telle que $K(\delta)C(\delta)B(\delta) = B(\delta)$ si et seulement si la condition (4.7) est satisfaite. Par conséquent, on peut conclure qu'il existe une matrice polynomiale $Q(\delta) = I_n - K(\delta)C(\delta)$ telle que $Q(\delta)B(\delta) = 0$ si et seulement si la condition (4.7) est satisfaite. ■

Puisque $Q(\delta)B(\delta) = 0$, la dynamique (4.6) peut alors être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= [Q(\delta)A(\delta) + L(\delta)K(\delta)C(\delta) - P(\delta)C(\delta)]x - L(\delta)\hat{x} \\ &= [Q(\delta)A(\delta) + (L(\delta)K(\delta) - P(\delta))C(\delta)]x - L(\delta)\hat{x}\end{aligned}$$

En notant $G(\delta) = P(\delta) - L(\delta)K(\delta)$ et en choisissant $L(\delta) = Q(\delta)A(\delta) - G(\delta)C(\delta)$, on obtient

$$\dot{\varepsilon} = [Q(\delta)A(\delta) - G(\delta)C(\delta)]\varepsilon. \quad (4.8)$$

Dans [Hou et al., 2002], il a été prouvé que si $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$, alors il existe un changement de coordonnées $z = T(\delta)x$ qui transforme le système (4.5) en sa forme normale d'observateur (3.6) où la matrice polynomiale $T(\delta) \in \mathbb{R}^{p^{l^*} \times n}[\delta]$ est une matrice unimodulaire à gauche, $F(\delta) = [F_1^T(\delta), \dots, F_{l^*}^T(\delta)]^T$ et les matrices A_0 et C_0 sont définies au (3.7). De plus, la matrice polynomiale $T(\delta) = \text{col}(T_1(\delta), \dots, T_{l^*}(\delta))$ est donnée par :

$$\begin{cases} T_1(\delta) = C(\delta) \\ T_{i+1}(\delta) = T_i(\delta)Q(\delta)A(\delta) - F_i(\delta)C(\delta) \end{cases} \quad (4.9)$$

pour $1 \leq i \leq l^* - 1$, où les $F_i(\delta)$ sont obtenues par l'équation suivante :

$$[F_{l^*}(\delta), \dots, F_1(\delta)] = C(\delta)[Q(\delta)A(\delta)]^{l^*} [\mathcal{O}_{l^*}(\delta)]_L^{-1} \quad (4.10)$$

Tant que $\mathcal{O}_l^*(\delta)$ définie au (4.4) est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$, et si l'Hypothèse 4.1 est satisfaite, alors il existe la matrice polynomiale $T(\delta)$ telle que $z = T(\delta)x$. En notant la dynamique des erreurs $\varepsilon_z = z - \hat{z}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_z &= \dot{z} - \dot{\hat{z}} \\
&= A_0 z + F(\delta)y - T(\delta)\dot{\hat{x}} \\
&= A_0 z + F(\delta)C_0 z - T(\delta)[L(\delta)\xi + P(\delta)y] \\
&= A_0 z + F(\delta)C_0 z - T(\delta)[L(\delta)\xi + P(\delta)C_0 z] \\
&= [A_0 + F(\delta)C_0 - T(\delta)P(\delta)C_0]z - T(\delta)L(\delta)[\hat{x} - K(\delta)C_0 z] \\
&= [A_0 + F(\delta)C_0 - T(\delta)[P(\delta) - L(\delta)K(\delta)]C_0]z - T(\delta)L(\delta)\hat{x} \\
&= [A_0 + F(\delta)C_0 - T(\delta)[P(\delta) - L(\delta)K(\delta)]C_0]z - L(\delta)\hat{z}
\end{aligned}$$

Notons $G(\delta) = P(\delta) - L(\delta)K(\delta)$ et $G_0(\delta) = T(\delta)G(\delta) - F(\delta)$, puis choisissons $L(\delta) = A_0 - G_0(\delta)C_0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_z &= [A_0 + F(\delta)C_0 - T(\delta)G(\delta)C_0]z - L(\delta)\hat{z} \\
&= [A_0 - G_0(\delta)C_0]z - L(\delta)\hat{z} \\
\dot{\varepsilon}_z &= [A_0 - G_0(\delta)C_0]\varepsilon_z
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Notons aussi $\varepsilon_z = T(\delta)\varepsilon$, alors on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon} &= [Q(\delta)A(\delta) - G(\delta)C(\delta)]\varepsilon \\
&= T_L^{-1}(\delta)\dot{\varepsilon}_z \\
&= T_L^{-1}(\delta)[A_0 - G_0(\delta)C_0]\varepsilon_z \\
&= T_L^{-1}(\delta)[A_0 - G_0(\delta)C_0]T(\delta)\varepsilon
\end{aligned}$$

donc la dynamique (4.8) devient

$$\dot{\varepsilon} = T_L^{-1}(\delta)[A_0 - G_0(\delta)C_0]T(\delta)\varepsilon \tag{4.12}$$

Puisque le couple (A_0, C_0) est observable, il existe une matrice constante $G_0(\delta)$ telle que $[A_0 - G_0(\delta)C_0]$ soit stable.

Dans la suite, deux observateurs du type (4.5) seront utilisés pour concevoir un observateur en temps fini à entrées inconnues pour le système (4.3). Pour cela, gardons les mêmes $Q(\delta)$ et $K(\delta)$ comme ci-dessus et choisissons deux différentes matrices constantes $\hat{G}_0(\delta)$ et $\tilde{G}_0(\delta)$ telles que $\Lambda_1 = [A_0 - \hat{G}_0(\delta)C_0]$ et $\Lambda_2 = [A_0 - \tilde{G}_0(\delta)C_0]$ soient stables. Ensuite, on peut définir les deux matrices suivantes :

$$\begin{cases} G_1(\delta) = T_L^{-1}(\delta)[F(\delta) + \hat{G}_0(\delta)] \\ G_2(\delta) = T_L^{-1}(\delta)[F(\delta) + \tilde{G}_0(\delta)] \end{cases} \tag{4.13}$$

Notons aussi

$$L_i(\delta) = Q(\delta)A(\delta) - G_i(\delta)C(\delta) \quad (4.14)$$

et

$$P_i(\delta) = L_i(\delta)K(\delta) + G_i(\delta) \quad (4.15)$$

pour $i = 1, 2$. Définissons $d_{\max} = \max\{\deg_{\delta}L_i(\delta), \deg_{\delta}P_i(\delta), \deg_{\delta}K(\delta)\}$, avec ces matrices, définissons une constante positive prédéterminée $h > \tau d_{\max}$. Ensuite, l'observateur suivant peut être conçu à partir du couplage de deux observateurs :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = L_i(\delta)\xi + P_i(\delta)y, & i=1,2 \\ \hat{x}_i = \xi_i + K(\delta)y, \\ \hat{x} = \Gamma(\delta, t) \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \\ \xi_1(t) = \xi_2(t), & \text{pour } -hd_{\max} \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

où

$$\Gamma(\delta, t) = \begin{cases} [I_{pl^*} \ I_{pl^*}], & \text{si } t < h \\ (I_{pl^*} - e^{\Lambda_2 t} e^{-\Lambda_1 t})^{-1} \begin{bmatrix} e^{\Lambda_2 t} e^{-\Lambda_1 t} & I_{pl^*} \end{bmatrix}, & \text{si } t = h \\ [I_{pl^*} \ 0_{pl^*}], & \text{si } t > h \end{cases} \quad (4.17)$$

Théorème 4.1. *Supposons que l'Hypothèse 4.1 est satisfaite pour le système (4.3). Pour une constante positive prédéterminée $h > \tau d_{\max}$, les dynamiques (4.16) représentent un observateur en temps fini pour le système (4.3) avec l'estimation du temps de stabilisation prédéterminé σ si la condition (4.7) est satisfaite.*

◇

Preuve. Il a été montré que si l'Hypothèse 4.1 et la condition (4.7) sont satisfaites pour le système (4.3), alors on peut toujours trouver deux matrices constantes $\hat{G}_0(\delta)$ et $\tilde{G}_0(\delta)$ telles que $[A_0 - \hat{G}_0(\delta)C_0]$ et $[A_0 - \tilde{G}_0(\delta)C_0]$ soient stables. Notons $\hat{\varepsilon} = x - \hat{x}$, $\tilde{\varepsilon} = x - \tilde{x}$, $\hat{\varepsilon}_{T(\delta)} = T(\delta)\hat{\varepsilon}$ et $\tilde{\varepsilon}_{T(\delta)} = T(\delta)\tilde{\varepsilon}$. Alors, en tenant compte de (4.11), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\varepsilon}}_z &= \Lambda_1 \hat{\varepsilon}_z \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_z &= \Lambda_2 \tilde{\varepsilon}_z \end{aligned} \quad (4.18)$$

où

$$\Lambda_1 = A_0 - \hat{G}_0(\delta)C_0 \text{ et } \Lambda_2 = A_0 - \tilde{G}_0(\delta)C_0. \quad (4.19)$$

En résolvant le système d'équation (4.18), on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_z(t) &= T(\delta)[x(t) - \hat{x}(t)] = e^{\Lambda_1 t} \hat{\varepsilon}_z(0) \\ \tilde{\varepsilon}_z(t) &= T(\delta)[x(t) - \tilde{x}(t)] = e^{\Lambda_2 t} \tilde{\varepsilon}_z(0) \end{aligned} \quad (4.20)$$

En raison du fait que les conditions initiales pour ξ_i sont les mêmes que dans (4.16), ceci implique

que $\xi_1(0) = \xi_2(0)$ et on a :

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{T(\delta)}(0) &= T(\delta)\hat{\varepsilon}(0) = T(\delta)[x(0) - \hat{x}(0)] \\ &= T(\delta)[x(0) - \xi_1(0) - K(\delta)y(0)] \\ &= T(\delta)[x(0) - \xi_2(0) - K(\delta)y(0)] \\ &= T(\delta)[x(0) - \tilde{x}(0)] = T(\delta)\tilde{\varepsilon}(0) \\ &= \tilde{\varepsilon}_z(0)\end{aligned}$$

donc, en éliminant $\hat{\varepsilon}_z(0)$ et $\tilde{\varepsilon}_z(0)$ dans (4.20), pour $t < h$ on obtient

$$e^{\Lambda_2 t} T(\delta)[x(t) - \hat{x}(t)] = e^{\Lambda_1 t} T(\delta)[x(t) - \tilde{x}(t)]$$

Après de simple manipulations, pour tout $t \geq 0$ on obtient

$$x(t) = T_L^{-1}(\delta)(I_{pl^*} - e^{\Lambda_2 t} e^{-\Lambda_1 t})^{-1} \begin{bmatrix} -e^{\Lambda_2 t} e^{-\Lambda_1 t} T(\delta) & T(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}$$

Quand $t = h$, l'équation ci-dessus devient $x(h) = \Gamma(\delta, h) \begin{bmatrix} \hat{x}(h) \\ \tilde{x}(h) \end{bmatrix}$ et selon le comportement impulsif défini dans (4.16), on obtient $\hat{x}_1(h) = \hat{x}_2(h) = x(h)$. Cela implique que la valeur exacte de l'état $x(t)$ a été obtenue à l'instant h . Enfin, on a toujours $\|x(t) - \hat{x}_i(t)\| = 0$ pour $i = 1, 2$ quand $t \geq h$. Par conséquent (4.16) est un observateur en temps fini pour le système (4.3) et qui converge à un instant fixe prédéterminé h . ■

S'il existe un certain $l^* \in \mathbb{N}$ tel que l'Hypothèse 4.1 et la condition (4.7) sont satisfaites pour le système (4.3), alors la procédure suivante présente une manière constructive de concevoir l'observateur en temps fini.

1. Pour les matrices polynômiales $B(\delta)$ et $C(\delta)$ données, calculer $K(\delta)$ telle que $K(\delta)C(\delta)B(\delta) = B(\delta)$;
2. Calculer $Q(\delta) = I_n - K(\delta)C(\delta)$, et $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ définies dans (4.4);
3. Calculer $F(\delta)$ suivant l'équation (4.10) et ensuite $T(\delta)$ en se basant sur (4.9) ce qui conduit à obtenir deux matrices constantes A_0 et C_0 en suivant (3.7);
4. Choisir deux matrices constantes $\hat{G}_0(\delta)$ et $\tilde{G}_0(\delta)$ telle que Λ_1 et Λ_2 définies dans (4.19) soient stables puis calculer $\Gamma(\delta, \sigma)$ selon (4.18) pour σ prédéterminé et $G_i(\delta)$ pour $i = 1, 2$ d'après (4.13);
5. Finalement, calculer $L_i(\delta)$ et $P_i(\delta)$ définies respectivement dans (4.14) et dans (4.15).

4.3.3 Exemple illustratif

Considérons l'exemple suivant de système dynamique à retard

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} \delta^2 & 1 & \delta \\ \delta & \delta & 1 + \delta \\ 1 & \delta & \delta^2 \end{bmatrix}, \quad B(\delta) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \delta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut vérifier qu'il existe un entier $l^* = 2$ tel que $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} N_2(\delta) = 3$ et $\text{Inv}_S N_2(\delta) = \{1, 1, 1\} \subset \mathbb{R}$.

Par conséquent, l'Hypothèse 4.1 est satisfaite, et le système à entrées inconnues étudié est observable. Afin de concevoir l'estimateur en temps fini, on doit vérifier si la condition (4.7) est satisfaite. Tant que $C(\delta)B(\delta) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \delta \end{bmatrix}$ et

$$\text{Inv}_S \begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) \\ B(\delta) \end{bmatrix} = \text{Inv}_S \begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) \end{bmatrix} = \{1, 1, 1\}$$

toutes les conditions du Théorème 4.1 sont satisfaites, et la procédure proposée pour concevoir un estimateur convergeant en temps fini peut être utilisée.

Étape 1 et 2 :

D'après le Lemme 4.2, on obtient

$$K(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \delta & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q(\delta) = I - K(\delta)C(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

telles que $Q(\delta)B(\delta) = 0$. Alors on a

$$\mathcal{O}_{l^*}(\delta) = \begin{bmatrix} C(\delta) \\ C(\delta)Q(\delta)A(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta - \delta^2 & \delta - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

qui est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$ tant que $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} \mathcal{O}_{l^*}(\delta) = 3$ et $\text{Inv}_S [\mathcal{O}_{l^*}(\delta)] = \{1, 1, 1\} \subset \mathbb{R}$.

Étape 3 :

A partir de (4.10), on a

$$F(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta - 1 \\ 0 & 0 \\ 1 - \delta^3 & 0 \end{bmatrix}$$

laquelle, en se basant sur (4.9), donne la matrice

$$T(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\delta - 2\delta^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et dont l'inverse à gauche est donnée par

$$T_L^{-1}(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta & 1 & 0 & 0 \\ 2\delta^2 - 2\delta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

D'après (3.7), on a $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, et $C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Étape 4 et 5 :

On peut alors choisir librement les matrices $\hat{G}_0(\delta)$ et $\tilde{G}_0(\delta)$ telles que Λ_1 et Λ_2 soient stables. Ici,

on choisit $\hat{G}_0 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12.5 \\ 8 & 0 \\ 0 & 37.5 \end{bmatrix}$ et $\tilde{G}_0 = \begin{bmatrix} 2.4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 1.28 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ qui fixent les valeurs propres de Λ_1 à $(-7.5, -5, -4, -2)$,

et celles de Λ_2 à $(-3, -2, -1.6, -0.8)$. Finalement on obtient :

$$G_1(\delta) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -6\delta & 11.5 + \delta \\ -\delta^3 + 12\delta^2 - 12\delta + 1 & 37.5 \end{bmatrix} \text{ et } G_2(\delta) = \begin{bmatrix} 2.4 & 0 \\ -2.4\delta & 4 + \delta \\ -\delta^3 + 4.8\delta^2 - 4.8\delta + 1 & 6 \end{bmatrix};$$

$$L_1(\delta) = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -4.5\delta - 2\delta^2 & -12.5 & 1 \\ -25.5\delta - 12\delta^2 & -37.5 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } L_2(\delta) = \begin{bmatrix} -2.4 & 0 & 0 \\ -0.6\delta - 2\delta^2 & -5 & 1 \\ -1.2\delta - 4.8\delta^2 & -6 & 0 \end{bmatrix};$$

$$P_1(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\delta^2 - 9.5\delta - 12.5 & \delta + 11.5 \\ -\delta^3 - 37.5\delta - 36.5 & 37.5 \end{bmatrix} \text{ et } P_2(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\delta^2 - 2\delta - 5 & \delta + 4 \\ -\delta^3 - 6\delta - 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Avec l'instant de convergence prédéfini $h > 3\tau$, on peut concevoir facilement un observateur à entrées inconnues de type (4.16) pour obtenir l'estimation en temps fini de $x(t)$.

Pour la simulation, le retard de base est $\tau = 0.01s$. Les conditions initiales sont $\hat{x}_1(0) = 0$, $\hat{x}_2(0) = 5$ et $\hat{x}_3(0) = 2$.

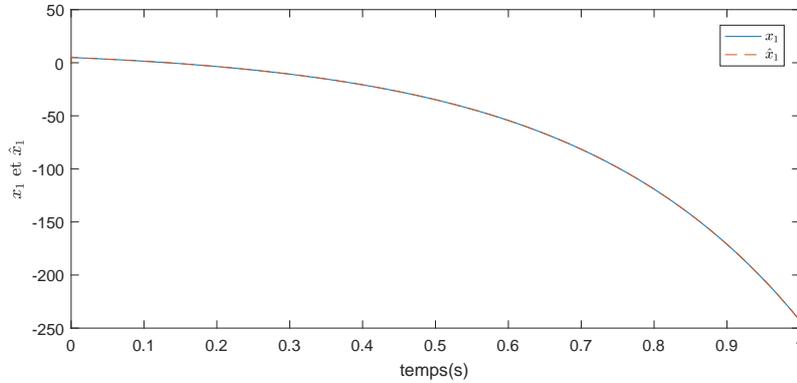


FIGURE 4.1 – L'état x_1 et son estimation \hat{x}_1

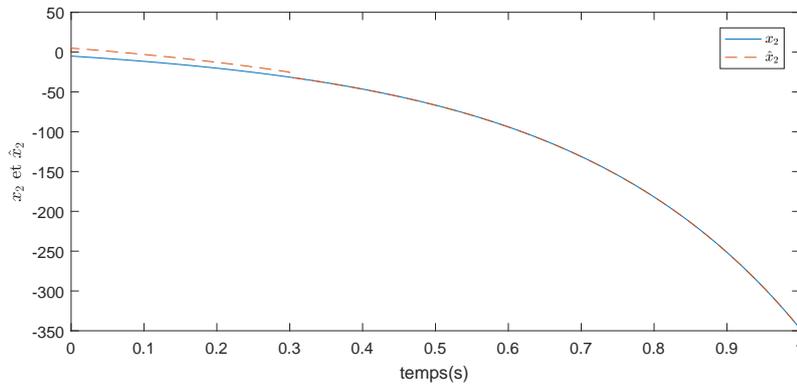


FIGURE 4.2 – L'état x_2 et son estimation \hat{x}_2

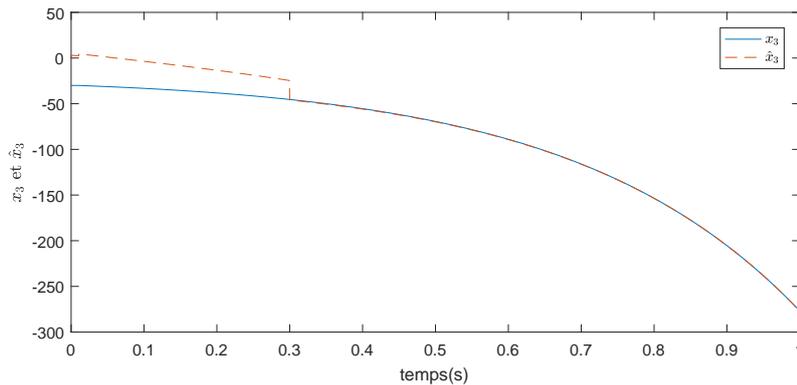


FIGURE 4.3 – L'état x_3 et son estimation \hat{x}_3

Les Figures 4.1, 4.2 et 4.3 montrent que les trajectoires des états estimés convergent exactement vers les états réels en un temps fini prédéterminé $\sigma = 0.3s$. Les états du système sont en bleu et leurs estimations sont en rouge.

4.4 Généralisation des résultats

Dans cette section, nous allons généraliser les résultats précédemment obtenus à toutes les classes de systèmes dynamiques linéaires à retards commensurables, c'est-à-dire aux cas où les entrées inconnues apparaissent aussi dans les sorties. Pour cela, considérons le système dynamique linéaire avec des retards commensurables (4.2) :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\delta)x(t) + B(\delta)u(t) \\ y(t) &= C(\delta)x(t) + D(\delta)u(t)\end{aligned}$$

Pour toute matrice polynômiale $D(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times m}[\delta]$ avec $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} D(\delta) = k \leq \min\{p, m\}$, il a été montré dans [Hou et al., 2002] que $D(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times m}[\delta]$ est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$ si et seulement si $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} D(\delta) = m \leq p$ et $\text{Inv}_S[D(\delta)] \subset \mathbb{R}$.

Hypothèse 4.2. *Considérons les matrices polynômiales $B(\delta)$, $C(\delta)$ et $D(\delta)$ du système (4.2). On suppose que*

$$\text{Inv}_S \begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) & D(\delta) \\ D(\delta) & 0 \\ B(\delta) & 0 \end{bmatrix} = \text{Inv}_S \begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) & D(\delta) \\ D(\delta) & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Toujours en suivant la procédure de [MOLINARI, 1976] et [SILVERMAN, 1969], on définit $N_{l^*}(\delta)$ la matrice générée par l'algorithme 4.1.

L'Hypothèse 4.2 garantit alors que le système étudié est observable et qu'un observateur en temps fini peut alors être conçu pour estimer ses états.

4.4.1 Observateur en temps fini généralisé

L'observateur proposé avec convergence en temps fini est réalisé toujours en couplant deux observateurs de type Luenberger.

D'après [ZHENG et al., 2015], le système (4.2) peut être réécrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}(\delta)x + K_1(\delta)\dot{y} + K_2(\delta)y \\ y = \tilde{C}(\delta)x + \Gamma_1(\delta)\dot{y} + \Gamma_2(\delta)y \end{cases} \quad (4.22)$$

où $K(\delta) = [K_1(\delta), K_2(\delta)]$ et $\Gamma(\delta) = [\Gamma_1(\delta), \Gamma_2(\delta)]$ sont des matrices de dimension appropriée données dans [ZHENG et al., 2015]. Les matrices $\bar{A}(\delta)$ et $\tilde{C}(\delta)$ sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{A}(\delta) &= A(\delta) - K(\delta) \begin{bmatrix} C(\delta)A(\delta) \\ C(\delta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}[\delta] \\ \tilde{C}(\delta) &= C(\delta) - \Gamma(\delta) \begin{bmatrix} C(\delta)A(\delta) \\ C(\delta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n}[\delta]\end{aligned}$$

Supposons que $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} \tilde{C}(\delta) = r \leq p$, alors il existe une matrice unimodulaire $\Lambda(\delta)$ définie sur $\mathbb{R}[\delta]$ telle que

$$\Lambda(\delta)\tilde{C}(\delta) = \begin{bmatrix} \bar{C}(\delta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec $\bar{C}(\delta) \in \mathbb{R}[\delta]$ soit de rang (ligne) plein sur $\mathbb{R}[\delta]$. En notant $\bar{y} = \Lambda(\delta)y$, le système (4.22) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}(\delta)x + K_1(\delta)\Lambda^{-1}(\delta)\dot{\bar{y}} + K_2(\delta)\Lambda^{-1}(\delta)\bar{y} \\ \bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{C}(\delta) \\ 0 \end{bmatrix} x + \bar{\Gamma}_1(\delta)\dot{\bar{y}} + \bar{\Gamma}_2(\delta)\bar{y} \end{cases} \quad (4.23)$$

où

$$\begin{cases} \bar{\Gamma}_1(\delta) = \Lambda(\delta)\Gamma_1(\delta)\Lambda^{-1}(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times p}(\delta) \\ \bar{\Gamma}_2(\delta) = \Lambda(\delta)\Gamma_2(\delta)\Lambda^{-1}(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times p}(\delta) \end{cases} \quad (4.24)$$

Lemme 4.3. Si l'Hypothèse 4.2 est satisfaite pour le quadruplet $(A(\delta), B(\delta), C(\delta), D(\delta))$ défini dans (4.2), alors pour le système (4.22) il existe un plus petit entier naturel $l^* \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathcal{O}_{l^*}(\delta) = \begin{bmatrix} \tilde{C}(\delta) \\ \tilde{C}(\delta)\bar{A}(\delta) \\ \vdots \\ \tilde{C}(\delta)\bar{A}(\delta)^{l^*-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pl^* \times n}[\delta] \quad (4.25)$$

soit unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$.

Preuve. En appliquant l'algorithme 4.1 décrit dans la section précédente au système (4.2), la satisfaction de l'Hypothèse 4.2 implique qu'il existe un plus petit entier naturel $l^* \in \mathbb{N}$ tel qu'après l^* itérations, nous avons $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} N_{l^*}(\delta) = n$ et $\text{Inv}_S N_{l^*}(\delta) \subset \mathbb{R}$.

Considérons maintenant la première itération lors de l'application de l'algorithme 4.1 au système (4.2), nous avons :

$$P_1(\delta) \begin{bmatrix} \Delta_1(\delta)B(\delta) & \Delta_1(\delta)A(\delta) \\ F_1(\delta) & J_1(\delta) \end{bmatrix} = P_1(\delta) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2(\delta) & J_2(\delta) \\ 0 & \Delta_2(\delta) \end{bmatrix}$$

à partir de laquelle nous pouvons voir qu'il existe des matrices $W_1(\delta)$, $S_1(\delta)$ et $R_1(\delta)$ telles que

$$F_2(\delta) = W_1(\delta)B(\delta) = 0$$

avec $W_1(\delta) = 0$, $\Delta_2(\delta) = S_1(\delta)C(\delta)$, et $J_2(\delta) = R_1(\delta)C(\delta) = W_1(\delta)K(\delta)C(\delta)A(\delta) + R_1(\delta)\mathcal{O}_1(\delta)$. La matrice $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ étant définie au (4.25).

Dans [ZHENG et al., 2015], il a été prouvé que à la l -ème itération, $1 \leq l < l^*$, il existe des matrices

S_l et R_l définies sur $\mathbb{R}[\delta]$ telles que

$$\Delta_{l+1}(\delta) = S_l(\delta) \begin{bmatrix} C(\delta) \\ \vdots \\ C(\delta)A^l(\delta) \end{bmatrix}$$

et

$$J_{l+1}(\delta) = R_l(\delta) \begin{bmatrix} C(\delta) \\ \vdots \\ C(\delta)A^l(\delta) \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, la matrice $N_l(\delta)$ peut s'exprimer comme $N_l(\delta) = S(\delta)\mathcal{O}_l(\delta)$ où $S(\delta)$ dépend de $S_l(\delta)$ et de $\mathcal{O}_l(\delta)$.

Ainsi, si l'Hypothèse 4.2 est satisfaite pour le système (4.2), alors $N_{l^*}(\delta)$ est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$, et cela signifie que $N_{l^*}(\delta)$ admet une matrice inverse à gauche $[N_{l^*}(\delta)]_L^{-1}$ telle que $I_n = [N_{l^*}(\delta)]_L^{-1}N_{l^*}(\delta) = [N_{l^*}(\delta)]_L^{-1}S(\delta)\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$. Ceci implique que $[N_{l^*}(\delta)]_L^{-1}S(\delta)$ est l'inverse à gauche de $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$. Par conséquent $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$. ■

Théorème 4.2. [ZHENG et al., 2015] Si l'hypothèse 4.2 est satisfaite pour le système (4.2), alors pour le système obtenu (4.23), il existe un plus petit entier naturel $l^* \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ définie dans (3.5) est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$. Alors, il existe un changement de coordonnées généralisé $z = T(\delta)x$ tel que (4.23) peut être transformé en la forme normale d'observateur suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + [F(\delta), 0]\bar{y} + \bar{K}_1(\delta)\dot{\bar{y}} + \bar{K}_2(\delta)\bar{y} \\ \bar{y} = \begin{bmatrix} C_0 \\ 0 \end{bmatrix} z + \bar{\Gamma}_1(\delta)\dot{\bar{y}} + \bar{\Gamma}_2(\delta)\bar{y} \end{cases} \quad (4.26)$$

où $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2$ sont définis dans (4.24), $F(\delta) = [F_1^T(\delta), \dots, F_{l^*}^T(\delta)]^T$,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_r & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r l^* \times r l^*}, \quad (4.27)$$

$$C_0 = [I_r, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^{r \times r l^*}, \quad (4.28)$$

et où $T(\delta)$ est définie dans (3.8). $F(\delta)$ est définie dans (3.9) et

$$\begin{cases} \bar{K}_1(\delta) = T(\delta)K_1(\delta)\Lambda^{-1}(\delta) \in \mathbb{R}^{r l^* \times p}[\delta] \\ \bar{K}_2(\delta) = T(\delta)K_2(\delta)\Lambda^{-1}(\delta) \in \mathbb{R}^{r l^* \times p}[\delta] \end{cases} \quad (4.29)$$

◇

Un observateur convergeant en temps fini peut alors être conçu en utilisant la forme normale du système (4.26). Tout d'abord, un observateur asymptotique, sur lequel sera basé l'observateur en temps fini, est présenté dans le théorème suivant :

Théorème 4.3. *Si l'Hypothèse 4.2 est satisfaite pour le système (4.2), alors le système dynamique suivant :*

$$\begin{cases} \dot{\xi} = L_0\xi + G(\delta)\Lambda(\delta)y \\ \dot{\hat{z}} = \xi + H(\delta)\Lambda(\delta)y \\ \hat{x} = T^{-1}(\delta)\hat{z} \end{cases} \quad (4.30)$$

avec

$$\begin{aligned} L_0 &= A_0 - G_0C_0 \\ H(\delta) &= \bar{K}_1(\delta) - [G_0, 0]\bar{\Gamma}_1(\delta) \\ G(\delta) &= [F(\delta), 0] + \bar{K}_2(\delta) + L_0H(\delta) - [G_0, 0]\bar{\Gamma}_2(\delta) + [G_0, 0] \end{aligned} \quad (4.31)$$

où G_0 est choisie telle que $(A_0 - G_0C_0)$ soit stable, est un observateur à entrée inconnue pour le système (4.2). \diamond

Preuve. Soient les erreurs d'estimation $\varepsilon_z = z - \hat{z}$, $\varepsilon_x = x - \hat{x}$ et notons aussi $\bar{G}_0 = [G_0, 0]$, $\bar{F}(\delta) = [F(\delta), 0]$. Puisque $\bar{y} = \Lambda(\delta)y$, on obtient :

$$\dot{\varepsilon}_z = A_0z + L_0\hat{z} + [\bar{F}(\delta) + \bar{K}_2(\delta) + L_0H(\delta) - G(\delta)]\bar{y} + [\bar{K}_1(\delta) - H(\delta)]\dot{\bar{y}}$$

Le couple (A_0, C_0) étant observable, il existe une matrice constante G_0 telle que $[A_0 - G_0C_0]$ soit stable. En choisissant le gain G_0 , les matrices L_0 , $H(\delta)$, et $G(\delta)$ définies dans (4.31) peuvent être déduites. On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_z &= A_0z + L_0\hat{z} + [\bar{G}_0\bar{\Gamma}_2(\delta) - \bar{G}_0]\bar{y} + \bar{G}_0\bar{\Gamma}_1(\delta)\dot{\bar{y}} \\ &= [A_0 - G_0C_0]\varepsilon_z. \end{aligned}$$

Dès lors que $x = T^{-1}(\delta)z$, on a

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= x - \hat{x} \\ &= T_L^{-1}(\delta)\varepsilon_z \\ &= T_L^{-1}(\delta)[A_0 - G_0C_0]T_L(\delta)\varepsilon_x. \end{aligned}$$

Donc le système (4.31) est un observateur asymptotique à entrées inconnues pour le système (4.2). \blacksquare

Dans la suite, deux observateurs du même type que (4.30) sont utilisés pour concevoir un observateur en temps fini pour le système (4.2). Pour cela, choisissons deux matrices constantes G_{0i} telles que $[A_0 - G_{0i}C_0]$ soient stables pour $i = 1, 2$. Ensuite, notons

$$\begin{cases} L_{0i} &= A_0 - G_{0i}C_0 \\ H_i(\delta) &= \bar{K}_1(\delta) - [G_{0i}, 0]\bar{\Gamma}_1(\delta) \\ G_i(\delta) &= [F(\delta), 0] + \bar{K}_2(\delta) + L_{0i}H_i(\delta) - [G_{0i}, 0]\bar{\Gamma}_2(\delta) + [G_{0i}, 0] \end{cases} \quad (4.32)$$

Définissons $d_{max} = \max\{\deg_\delta G_i(\delta)\Lambda(\delta), \deg_\delta H_i(\delta)\Lambda(\delta)\}$. Pour une constante positive prédéterminée $h \geq \tau d_{max}$, l'observateur en temps fini suivant peut alors être conçu :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = L_{0i}\xi + G_i(\delta)\Lambda(\delta)y, \\ z_i = \xi_i + H_i(\delta)\Lambda(\delta)y, \\ \dot{z} = \Psi(\delta, t) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \\ \xi_1(t) = \xi_2(t) \text{ pour } -\tau d_{max} \leq t \leq 0, \\ \hat{x} = T^{-1}(\delta)\dot{z}. \end{cases} \quad (4.33)$$

où

$$\Psi(\delta, t) = \begin{cases} [I_{pl^*} \ I_{pl^*}], & \text{si } t < h \\ (I_{pl^*} - e^{L_2 t} e^{-L_{01} t})^{-1} [-e^{L_{02} t} e^{-L_1 t}, \ I_{pl^*}], & \text{si } t \geq h \end{cases} \quad (4.34)$$

Théorème 4.4. *Supposons que l'Hypothèse 4.2 est satisfaite pour le système (4.2). Pour une constante prédéterminée $h \geq \tau d_{max}$, le système dynamique (4.33) est un observateur en temps fini pour (4.2) avec l'instant de convergence σ prédéterminé.* \diamond

Preuve. Il a été montré que si l'Hypothèse 4.2 est satisfaite pour le système (4.2), alors on peut toujours trouver deux matrices constantes G_{01} et G_{02} telles que $[A_0 - G_{01}C_0]$ et $[A_0 - G_{02}C_0]$ soient stables. Notons $\varepsilon_{x_1} = x - \hat{x}_1$, $\varepsilon_{x_2} = x - \hat{x}_2$, $\varepsilon_{z_1} = T(\delta)\varepsilon_{x_1}$, $\varepsilon_{z_2} = T(\delta)\varepsilon_{x_2}$, alors on obtient

$$\dot{\varepsilon}_{z_1} = [A_0 - G_{01}C_0]\varepsilon_{z_1} = L_{01}\varepsilon_{z_1} \quad (4.35)$$

et

$$\dot{\varepsilon}_{z_2} = [A_0 - G_{02}C_0]\varepsilon_{z_2} = L_{02}\varepsilon_{z_2}. \quad (4.36)$$

En résolvant les équations (4.35) et (4.36), on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z_1}(t) &= [z(t) - \hat{z}_1(t)] = e^{L_{01}t} \varepsilon_{z_1}(0) \\ \varepsilon_{z_2}(t) &= [z(t) - \hat{z}_2(t)] = e^{L_{02}t} \varepsilon_{z_2}(0) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Puisque les conditions initiales pour ξ_i sont les mêmes, c'est à dire $\xi_1(0) = \xi_2(0)$, alors on a

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z_1}(0) &= T(\delta)\varepsilon_{x_1}(0) = T(\delta)[x(0) - \hat{x}_1(0)] \\ &= T(\delta)[x(0) - \xi_1(0)] = T(\delta)[x(0) - \xi_2(0)] \\ &= T(\delta)[x(0) - \hat{x}_2(0)] = T(\delta)\varepsilon_{x_2}(0) \\ &= \varepsilon_{z_2}(0) \end{aligned}$$

Par conséquent, en éliminant $\varepsilon_{z_1}(0)$ et $\varepsilon_{z_2}(0)$ dans (4.37), on obtient

$$e^{L_{02}t}[z(t) - \hat{z}_1(t)] = e^{L_{01}t}[z(t) - \hat{z}_2(t)]$$

La résolution de l'équation précédente donne :

$$z(t) = \left(I_{pl^*} - e^{L_{02}t} e^{-L_{01}t} \right)^{-1} \left[-e^{L_{02}t} e^{-L_{01}t}, I_{pl^*} \right] \begin{bmatrix} \hat{z}_1(t) \\ \hat{z}_2(t) \end{bmatrix}$$

Quand $t = h$, l'équation précédente est équivalente à

$$z(h) = \Psi(\delta, h) \begin{bmatrix} \hat{z}_1(h) \\ \hat{z}_2(h) \end{bmatrix}.$$

Selon le comportement impulsif défini dans (4.33), nous avons

$$\hat{z}_1(h) = \hat{z}_2(h) = z(h) \text{ et } x(h) = T_L^{-1}(\delta)z(h)$$

ce qui implique que la valeur exacte de $x(t)$ a été obtenue à l'instant h . Enfin, nous avons toujours

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0, \forall t \geq h$$

Donc, la dynamique (4.30) est un observateur en temps fini pour le système (4.2) avec un instant de convergence h prédéterminé. ■

Ainsi, la procédure suivante présente une méthodologie constructive pour concevoir l'observateur en temps fini proposé :

1. Comme présenté dans [ZHENG et al., 2015], calculer $W(\delta)$ telle que

$$W(\delta) = [\bar{V}(\delta), 0]U(\delta)$$

où $U(\delta)$ est une matrice unimodulaire sur $\mathbb{R}[\delta]$, $V(\delta)$ est de rang plein sur $\mathbb{R}[\delta]$,

$$U(\delta) \begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) & D(\delta) \\ D(\delta) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(\delta) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \bar{V}(\delta)V(\delta) = \begin{bmatrix} \bar{C}(\delta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. La matrice $W(\delta)$ peut être décomposée comme suit

$$W(\delta) = \begin{pmatrix} K(\delta) \\ \Gamma(\delta) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_1(\delta) & K_2(\delta) \\ \Gamma_1(\delta) & \Gamma_2(\delta) \end{bmatrix}$$

Ensuite, transformer le système (4.2) en (4.23) avec

$$\bar{A}(\delta) = A(\delta) - K(\delta) \begin{bmatrix} C(\delta)A(\delta) \\ C(\delta) \end{bmatrix}, \text{ et } \tilde{C}(\delta) = C(\delta) - \Gamma(\delta) \begin{bmatrix} C(\delta)A(\delta) \\ C(\delta) \end{bmatrix}$$

puis calculer la matrice unimodulaire $\Lambda(\delta)$ sur $\mathbb{R}[\delta]$ telle que $\Lambda(\delta)\tilde{C}(\delta) = \begin{bmatrix} \bar{C}(\delta) \\ 0 \end{bmatrix}$;

3. Déterminer $T(\delta)$ définie dans (3.8) et $F(\delta)$ définie dans (3.9);
4. Déterminer A_0 définie dans (4.27), C_0 définie dans (4.28), $\bar{\Gamma}_1(\delta)$, $\bar{\Gamma}_2(\delta)$ définie dans (4.24) puis $\bar{K}_1(\delta)$, $\bar{K}_2(\delta)$ définie dans (4.29);
5. Choisir les matrices constantes G_{01} et G_{02} telles que L_{01} et L_{02} définies dans (4.32) soient stables. Ensuite calculer $H_1(\delta)$ et $H_2(\delta)$ puis $G_1(\delta)$ et $G_2(\delta)$ définies dans (4.32);
6. $\Psi(\delta, t)$ est obtenu selon (4.34) pour l'instant de convergence σ donné;
7. Enfin, concevoir l'observateur (4.33).

4.4.2 Exemple illustratif

Considérons l'exemple de système à retard suivant :

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & \delta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \delta & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & \delta \end{bmatrix},$$

$$C(\delta) = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{et } D(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 0 \\ 1 & \delta \end{bmatrix};$$

On peut vérifier que l'on a $l^* = 3$ tant que $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} N_3(\delta) = I_4$. De plus, les facteurs invariants sont

$$\text{Inv}_S \begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) & D(\delta) \\ D(\delta) & 0 \\ B(\delta) & 0 \end{bmatrix} = \text{Inv}_S \begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) & D(\delta) \\ D(\delta) & 0 \end{bmatrix} = \{1, 1, 1\},$$

Par conséquent, l'hypothèse 4.2 est satisfaite et le système étudié est observable à entrées inconnues. Afin de concevoir un observateur à temps fini, nous pouvons suivre la procédure donnée précédemment.

Étape 1 : On peut trouver des matrices $U(\delta)$ et $V(\delta)$ dans le but de transformer la matrice

$\begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) & D(\delta) \\ D(\delta) & 0 \end{bmatrix}$ en sa forme de Hermite. On a donc

$$U(\delta) = \begin{bmatrix} \delta & 0 & -\delta & 1 & 0 & \delta \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } V(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \delta \end{bmatrix}.$$

Il existe donc la matrice

$$\bar{V}(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \delta & \delta & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

telle que

$$\bar{V}(\delta)V(\delta) = \begin{bmatrix} B(\delta) & 0 \\ D(\delta) & 0 \end{bmatrix}.$$

Ensuite on détermine

$$W(\delta) = \begin{bmatrix} K_1(\delta) & | & K_2(\delta) \\ \hline \Gamma_1(\delta) & | & \Gamma_2(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \delta-1 & 0 & \delta-1 & | & 1 & 0 & \delta-1 \\ -\delta & 0 & \delta & | & 0 & 0 & -\delta \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Étape 2 : Suite à la procédure de conception, on obtient

$$\bar{A}(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & \delta & 0 & 0 \\ \delta^2 - \delta & \delta^2 - 1 & -\delta^2 + 2\delta & 2 - 2\delta \\ -\delta^2 & -\delta^2 - \delta + 1 & \delta^2 - \delta + 1 & 2\delta - 1 \end{bmatrix}, \text{ et } \tilde{C}(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice unimodulaire $\Lambda(\delta)$ définie sur $\mathbb{R}[\delta]$ peut être choisie comme suit $\Lambda(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ce

qui permet d'obtenir la matrice $\bar{C}(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Étape 3 : A partir des résultats $\bar{A}(\delta)$ et $\bar{C}(\delta)$, on peut vérifier qu'il existe au moins un entier naturel $l^* = 3$ tel que

$$\bar{O}_3(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \delta & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 & 1 \\ -\delta & \delta^2 + 1 & -1 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$, avec

$$[\bar{O}_3(\delta)]_L^{-1} = \begin{bmatrix} \delta & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \delta & 0 & -1 & 0 \\ \delta^2 - 1 & 1 & -2\delta & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui nous permet d'obtenir $[F_3(\delta), F_2(\delta), F_1(\delta)] = \bar{C}(\delta)\bar{A}^3(\delta)[\bar{O}_3(\delta)]_L^{-1}$.

$$F(\delta) = \begin{bmatrix} F_1(\delta) \\ F_2(\delta) \\ F_3(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta^2 + 5\delta - 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline \delta^3 - 5\delta^2 + 3\delta + 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline \delta^3 - \delta^2 - 4\delta + 3 & 2\delta - 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Ensuite, on détermine

$$T(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \delta^2 - 4\delta + 2 & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 & 1 \\ -\delta^2 + 4\delta - 2 & \delta^2 - \delta & -1 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et son inverse à gauche

$$[T(\delta)]^{-1} = \begin{bmatrix} \delta^2 - 4\delta + 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta^4 + 8\delta^3 - 19\delta^2 + 15\delta - 4 & 0 & \delta^2 - 4\delta + 2 & 0 & -1 & 0 \\ \delta^4 - 7\delta^3 + 15\delta^2 - 13\delta + 4 & 1 & -\delta^2 + 3\delta - 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Étape 4 : A partir des équations (4.27), (4.28), (4.31), et (4.24), on obtient

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\bar{K}_1(\delta), \bar{K}_2(\delta)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \delta - 1 & 1 - \delta & | & 0 & 1 - \delta & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[\bar{\Gamma}_1(\delta), \bar{\Gamma}_2(\delta)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Étape 5 : Les matrices G_{01} et G_{02} sont choisies telles que L_{01} et L_{02} soient stables. Dans cet exemple, choisissons

$$G_{01} = \begin{bmatrix} 85 & 0 \\ 0 & 85 \\ 2000 & 0 \\ 0 & 2000 \\ 12500 & 0 \\ 0 & 12500 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_{02} = \begin{bmatrix} 85 & 0 \\ 0 & 85 \\ 2250 & 0 \\ 0 & 2250 \\ 18000 & 0 \\ 0 & 18000 \end{bmatrix}$$

afin que les valeurs propres de L_{01} soient $[-10, -10, -25, -25, -50, -50]$ et celles de L_{02} soient $[15, -15, -30, -30, -40, -40]$. On a donc :

$$L_{01} = \begin{bmatrix} -85 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -85 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2000 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2000 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12500 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12500 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ et } L_{02} = \begin{bmatrix} -85 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -85 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2250 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2250 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -18000 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18000 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

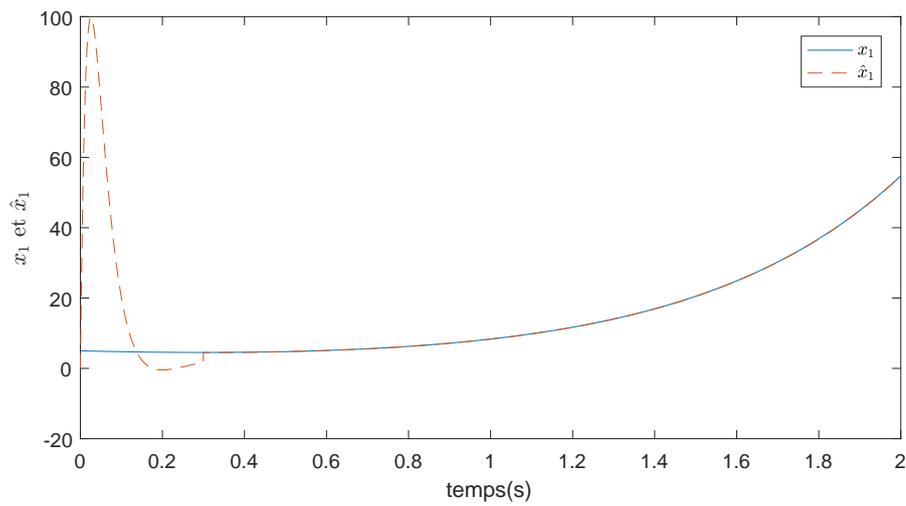
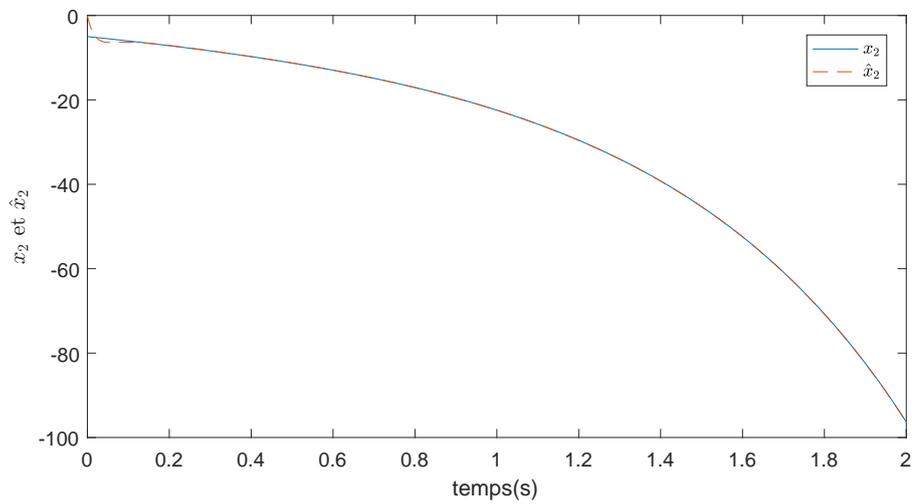
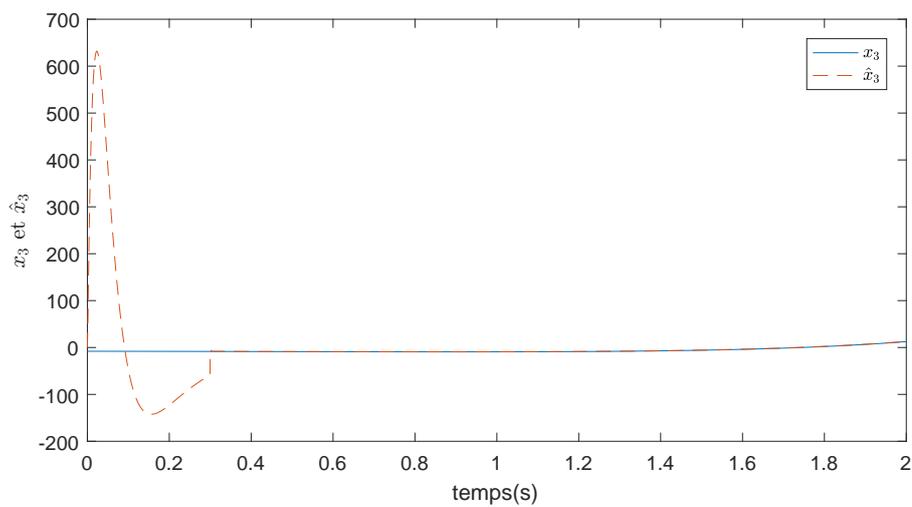
$$H_1(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \delta-1 & 1-\delta \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, H_2(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \delta-1 & 1-\delta \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

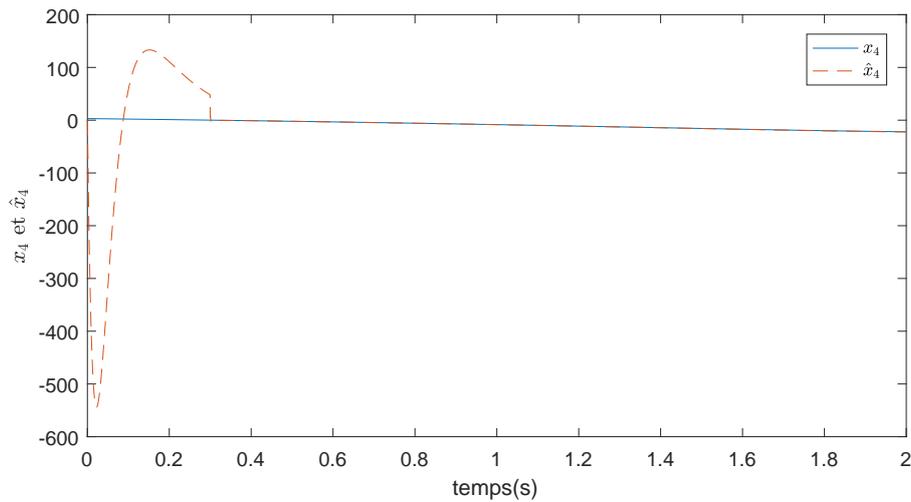
$$G_1(\delta) = \begin{bmatrix} -\delta^2 + 5\delta + 83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta^3 - 5\delta^2 + 3\delta + 2001 & \delta-1 & 1-\delta \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta^3 - \delta^2 - 4\delta + 12503 & \delta-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } G_2(\delta) = \begin{bmatrix} -\delta^2 + 5\delta + 83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta^3 - 5\delta^2 + 3\delta + 2251 & \delta-1 & 1-\delta \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta^3 - \delta^2 - 4\delta + 18003 & \delta-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Étape 6 : Finalement, à partir de l'équation (4.34), on obtient $\Psi(\delta)$ et avec une constante positive prédéterminé $h > 3\tau$, un observateur en temps fini de type (4.33) peut être conçu pour obtenir une estimation en temps fini de $x(t)$. Par exemple, pour un instant de convergence fixé à $h = 0.3s$, on a

$$\Psi(\delta, h) = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 950 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & -950 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 950 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & -950 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 16709 & 0 & -179 & 0 & -3 & 0 & -16709 & 0 & 179 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 16709 & 0 & -179 & 0 & -3 & 0 & -16709 & 0 & 179 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pour la simulation, le retard de base est $\tau = 0,001s$ et l'instant de convergence prédéterminé a été fixé à $h = 0,3s$. Les figures 4.4, 4.5, 4.6 et 4.7 montrent les trajectoires du système (4.2) et les trajectoires de l'observateur proposé. On peut remarquer que la convergence en temps fini est atteinte en temps fini préfixé $ha = 0.3s$.

FIGURE 4.4 – L'état x_1 et son estimation \hat{x}_1 FIGURE 4.5 – L'état x_2 et son estimation \hat{x}_2 FIGURE 4.6 – L'état x_3 et son estimation \hat{x}_3

FIGURE 4.7 – L'état x_4 et son estimation \hat{x}_4

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un observateur impulsif avec un temps de convergence fini prédéterminé pour un système linéaire à retard commensurable avec des entrées inconnues. Il a été montré que l'observateur converge en temps fini préfixé σ et que l'instant de convergence peut être choisi de manière presque arbitraire. De plus, nous avons pris en compte des retards commensurables pouvant apparaître dans les sorties mesurées. Nous avons utilisé la condition d'observabilité requise dans Hou et al (2002) pour la conception des observateurs proposés. Notons que les résultats obtenus peuvent être utilisés pour l'identification topologique des réseaux de TDS linéaires à entrées inconnues en les associant avec les résultats obtenus dans le chapitre 3. Dans ce qui va suivre, nous allons traiter le problème de l'identification topologique pour des réseaux de systèmes dynamiques non linéaires. Dans cette étude, nous serons amenés à utiliser les résultats obtenus pour les réseaux de systèmes complexes linéaires.

Partie II

Observation et identification des systèmes complexes non linéaires

Observation pour les systèmes non linéaires avec estimation des paramètres

Sommaire

5.1	Introduction	97
5.2	Formulation du problème	98
5.3	Observabilité et identifiabilité	99
5.4	Estimateur en temps fini	103
5.5	Exemple illustratif	105
5.6	Conclusion	111

5.1 Introduction

On ne peut pas parler de la non linéarité sans comprendre ce que l'on attend par la linéarité. En effet, dans les chapitres précédents, nous avons présenté des résultats obtenus pour des systèmes dynamiques linéaires. On définit la linéarité par deux propriétés fondamentales et coexistantes qui sont la proportionnalité et l'additivité. Selon les mathématiciens, par exemple un polynôme est dit linéaire s'il est strictement de degré 1. Mais qu'il y ait des formules mathématiques caractérisant un processus ou non, s'il l'on peut lui appliquer à la fois la proportionnalité et l'additivité entre les causes et leurs effets, alors on peut dire que l'on est dans un domaine linéaire.

En revanche, il existe plusieurs exemples de systèmes dynamiques qui échappent à cette propriété de proportionnalité entre les causes et leurs effets. Si l'on prend par exemple l'énergie libérée lors d'un choc entre deux véhicules, les dégâts qui s'en suivent sont énormes et ne sont pas proportionnels à la vitesse des deux véhicules mais au carré de ces vitesses. D'autres exemples d'une forte non linéarité sont les effets de seuil. Un système est donc considéré comme étant non linéaire s'il ne possède pas les propriétés d'un système linéaire, c'est-à-dire les propriétés de proportionnalité et d'additivité.

Les systèmes non linéaires peuvent être regroupés en plusieurs classes (systèmes non linéaires affines, systèmes dynamiques incertains, systèmes chaotiques, ...). Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux réseaux de systèmes dynamiques non linéaires et plus précisément aux réseaux de systèmes dynamiques avec des paramètres inconnus.

5.2 Formulation du problème

Dans cette partie, nous considérons un réseau de k sous-systèmes dynamiques, ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$) avec des paramètres d'interconnexions constants mais inconnus. On suppose que chaque sous-système Σ_i pour $1 \leq i \leq k$ impliqué dans le réseau est de la forme suivante :

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_i = \bar{f}_i(x_i) + \sum_{j=1}^{q_i} \varphi_{i,j}(x_j) \theta_{i,j} \\ \dot{\theta}_i = 0 \\ y_i = \bar{h}_i(x_i) \end{cases} \quad (5.1)$$

où $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i})^T \in \mathbb{R}^{n_i}$ représente l'état du sous système Σ_i et $y_i = (y_{i,1}, \dots, y_{i,p_i})^T \in \mathbb{R}^{p_i}$ sa sortie. Le vecteur des paramètres $\theta_i = (\theta_{i,1}, \dots, \theta_{i,q_i})^T \in \mathbb{R}^{q_i}$ représente les coefficients d'interconnexion **constants mais inconnus** réalisant l'interconnexion topologique entre différents sous systèmes du réseau. Le vecteur des fonctions $\varphi_{i,j}(x_j) = (\varphi_{i,j}^1(x_j), \dots, \varphi_{i,j}^{n_i}(x_j))^T \in \mathbb{R}^{n_i}$ représente les informations qu'un sous système Σ_j injecte dans le sous système Σ_i via la connexion réalisée par θ_i . Donc, la matrice des fonctions $\varphi_i(x) = (\varphi_{i,1}^T(x_1), \dots, \varphi_{i,q_i}^T(x_{q_i}))^T \in \mathbb{R}^{n_i \times q_i}$ représente l'ensemble des informations injectées par le réseau dans le sous système Σ_i .

Pour plus de simplicité, notons $n = \sum_{i=1}^k n_i$, $p = \sum_{i=1}^k p_i$ et $q = \sum_{i=1}^k q_i$. Définissons $x = (x_1^T, \dots, x_k^T)^T \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1^T, \dots, y_k^T)^T \in \mathbb{R}^p$ et $\theta = (\theta_1^T, \dots, \theta_k^T)^T \in \mathbb{R}^q$. Nous pouvons alors écrire le modèle du réseau entier sous la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{f}(x) + \varphi(x)\theta \\ \dot{\theta} = 0 \\ y = \bar{h}(x) \end{cases} \quad (5.2)$$

où $\bar{f}(x) = \begin{pmatrix} \bar{f}_1(x_1) \\ \vdots \\ \bar{f}_k(x_k) \end{pmatrix}$, $\bar{h}(x) = \begin{pmatrix} \bar{h}_1(x_1) \\ \vdots \\ \bar{h}_k(x_k) \end{pmatrix}$, et $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varphi_k(x) \end{pmatrix}$. Tant que les paramètres d'interconnexion dans le réseau étudié sont constants, le paramètre inconnu mais constant θ peut être traité comme une variable d'état additionnelle. Pour cela, notons $\xi = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$. Le système (5.2) peut donc être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) \\ y = h(\xi) \\ z = P\xi \end{cases} \quad (5.3)$$

où $\xi \in \mathbb{R}^{n+q}$, $f(\xi) = \tilde{f}(x) + \varphi(x)\theta$, $h(\xi) = \tilde{h}(x)$. Le vecteur $z \in \mathbb{R}^{\gamma}$ représente les variables à identifier et $P \in \mathbb{R}^{\gamma \times (n+q)}$ est une matrice constante introduite pour simplifier la présentation de l'observabilité des états et l'identifiabilité paramétrique ci-après.

Selon les différents choix de la valeur de la matrice P , l'estimation de z peut être interprété des manières suivantes :

- L'estimation de z est équivalente à l'estimation de x dans (5.2). Dans ce cas, nous avons $P = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times q} \end{bmatrix}$.
- L'estimation de z est équivalente à l'identification du paramètre θ dans (5.2). Dans ce cas, on fixe $P = \begin{bmatrix} 0_{q \times n} & I_q \end{bmatrix}$.
- L'estimation de z est équivalente à l'estimation simultanée de x et de θ dans (5.2). Dans ce cas, il est nécessaire que $P = I_{n+q}$.

A partir de l'explication précédente, en introduisant la variable z , l'estimation de l'état x et/ou du paramètre inconnu θ dans (5.2) peut être représentée par l'observabilité (totale ou partielle) de z dans (5.3). De plus, en définissant différentes valeurs de P , nous pouvons avoir une observabilité partielle de x ou une identifiabilité partielle de θ (dans l'exemple illustratif de cette partie, l'identifiabilité paramétrique est partielle).

L'objectif principal de notre investigation est d'étudier l'identifiabilité des paramètres inconnus d'interconnexion afin de déterminer la topologie du réseau de systèmes dynamiques. Cela revient à identifier des paramètres inconnus du système (5.2).

5.3 Observabilité et identifiabilité

Étant donné que les paramètres constants peuvent être considérés comme des variables d'état supplémentaires avec une dynamique nulle, cela implique que l'identifiabilité des paramètres est en quelque sorte liée à l'observabilité des états. Par conséquent, nous rappelons ci-après les définitions bien connues sur l'observabilité algébrique (pour l'état x dans (5.2)) et sur l'identifiabilité algébrique (pour les paramètres θ dans (5.2)).

Définition 5.1. (*Observabilité et identifiabilité*) [FLIESS et al., 1998; XIA et al., 2003]. Pour le système (5.2), l'état x est considéré comme étant algébriquement observable s'il existe un entier positif k et une fonction méromorphe η tels que $x = \eta(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})$ où $y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}$ sont des dérivées de la sortie correspondante y .

Pour le même système (5.3), θ est considéré comme étant algébriquement identifiable s'il existe un instant $T > 0$, un entier naturel k et une fonction méromorphe Φ telle que

$$\Phi(\theta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}) = 0 \quad (5.4)$$

et

$$\text{rang} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = q \quad (5.5)$$

est continue sur $[0, T]$, pour tout $(\theta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})$.

Remarque 5.1. On peut constater que si les relations (5.4) et (5.5) sont satisfaites, alors d'après le théorème des fonctions implicites, il existe (localement) une fonction $\bar{\Phi}$ telle que

$$\theta = \bar{\Phi}(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})$$

qui est similaire à la définition de l'observabilité algébrique donnée dans la Définition 5.1.

Avec la forme compacte déduite (5.3), la section suivante traitera des conditions qui garantissent la possibilité d'identifier les paramètres constants inconnus. Dans la littérature, on peut trouver des résultats obtenus par Xia et al dans [XIA et al., 2003] pour les mêmes classes de systèmes dynamiques (5.3). Pour rappeler quelques points essentiels de ces résultats, notons $\mathcal{Y} = \text{span}\{dy, d\dot{y}, \dots, dy^{(l)}\}$, $l \in \mathbb{N}$, $\mathcal{X} = \text{span}\{dx\}$ et $\Theta = \text{span}\{d\theta\}$. Le théorème suivant est vérifié.

Théorème 5.1. [XIA et al., 2003] Le système (5.2) est algébriquement identifiable si et seulement si $\Theta \subset \mathcal{Y}$. \diamond

Pour ce faire, on définit pour (5.3) ce qu'on nomme les "indices d'observabilité". Définissons

$$\mathcal{F}_l = \mathcal{X} \cap \text{span}\{dy, d\dot{y}, \dots, dy^{(l-1)}\}$$

pour $l \in \mathbb{N}$. Il a été montré dans [KRENER et al., 1985] que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n$. Définissons alors $d_1 = \text{rank} \mathcal{F}_1$ et $d_l = \text{rank} \mathcal{F}_l - \text{rank} \mathcal{F}_{l-1}$ pour $l = 1, \dots, n$. Nous avons la définition suivante des indices d'observabilité.

Définition 5.2. (Indices d'observabilité)[KRENER et al., 1985] La liste des entiers naturels (v_1, \dots, v_p) appelé indices d'observabilité pour le système (5.3) est définie telle que

$$v_i = \max\{d_l \geq i, 1 \leq i \leq l\}.$$

Si nécessaire, il faut réordonner les composants des sorties de telle façon que :

$$\text{rang} \frac{\partial (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T}{\partial x} = v_1 + v_2 + \dots + v_p. \quad (5.6)$$

Avec la définition des indices d'observabilité, on peut alors définir pour le système (5.3), la matrice $d\Omega$ comme suit :

$$d\Omega = \frac{\partial [h_1, L_f h_1, \dots, L_f^{v_1-1} h_1, \dots, h_p, \dots, L_f^{v_p-1} h_p]^T}{\partial \xi} \quad (5.7)$$

Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 5.2. *Le vecteur des paramètres θ du système (5.2) est identifiable (ou de manière équivalente z du système (5.3) est observable) si $\text{rang } d\Omega = n + q$. \diamond*

Le théorème ci-dessus est assez simple et énonce une condition très forte sur l'identification des paramètres, qui exige que tous les états soient également observables. Il convient de noter qu'en général, l'identifiabilité des paramètres ne dépend pas de l'observabilité de l'état. En d'autres termes, certains paramètres peuvent être identifiables même si tous les états du système ne sont pas observables. Un exemple simple est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \theta \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (5.8)$$

Il semble évident que θ dans l'exemple précédent est localement identifiable (dépendant seulement de l'état x_1 , ce qui donne $\dot{y} = y\theta$), alors que l'état x_2 n'est pas observable. Ce petit exemple montre également que l'identifiabilité des paramètres ne dépend que de l'état **partiellement observable** impliqué dans l'équation paramétrique finalement déduite.

Une méthode d'identification proposée dans [XIA et al., 2003] consiste à éliminer premièrement les états x à travers les propriétés d'observabilité du système.

Cette méthode fonctionne mais nécessite de calculer par avance, les dérivées d'ordre supérieur des sorties qui peuvent ne pas être utilisées ultérieurement. Cela peut rapidement devenir difficile voire très compliqué surtout si le système étudié a des paramètres non identifiables.

Dans le but d'optimiser les résultats obtenus dans [XIA et al., 2003], nous allons proposer dans ce qui suit, un nouvel algorithme, qui sera plus efficace et facile à appliquer. Contrairement à la méthode proposée dans [XIA et al., 2003], dans ce nouvel algorithme, il ne sera pas nécessaire de calculer à l'avance les dérivées d'ordre supérieur des sorties mais nous procéderons par itération.

Pour tout entier b_j , $j = 1, \dots, p$,

$$\omega = \{h_1, \dots, L_f^{b_1} h_1, \dots, h_p, \dots, L_f^{b_p} h_p\}.$$

Notons $\Xi = \{\mathcal{X} + \Theta\}$ et

$$\mathcal{F} = \Xi \cap \text{span}_\omega \{d\omega\}$$

alors l'algorithme suivant est proposé pour assouplir la condition relativement forte énoncée dans le Théorème 5.2.

Algorithme 5.1.

1. *Initialisation :*

- $b_j = 0$, $j = 1, \dots, p$;
- $\omega_0 = \{\omega_{1,0}, \dots, \omega_{p,0}\}$ avec $\omega_{j,0} = \{h_j\}$;
- $\mathcal{F}_0 = \{\mathcal{F}_{1,0}, \dots, \mathcal{F}_{p,0}\} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_0} \{d\omega_0\}$ avec $\mathcal{F}_{j,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,0}} \{d\omega_{j,0}\}$;
- $i = 1$.

2. Itération i : Calculer $\mathcal{L}_i = \text{span}_{\omega_{i-1}}\{d\omega_{i-1}\}$
3. Calculer $\partial\Omega_i = \frac{\partial\omega_{i-1}^T}{\partial\xi}$ et pour la matrice P donnée, déterminer la matrice $\mathcal{K}_i(\xi)$ telle que $P = \mathcal{K}_i(\xi)\partial\Omega_i$. Alors, notons $\mathcal{K}_i^j(\xi)$, la j ème ligne de la matrice $\mathcal{K}_i(\xi)$;
4. Vérifier :
 - si tous les $\mathcal{K}_i^j(\xi) \notin \mathcal{L}_i$, alors aller à l'étape 5;
 - Autrement, aller à l'étape 8;
5. Calculer :
 - $\omega_i = \{\omega_{1,i}, \dots, \omega_{p,i}\}$ avec $\omega_{j,i} = \{h_j, \dots, h_j^{(b_j+1)}\}$;
 - $\mathcal{F}_i = \{\mathcal{F}_{1,i}, \dots, \mathcal{F}_{p,i}\} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_i}\{d\omega_i\}$ avec $\mathcal{F}_{j,i} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,i}}\{d\omega_{j,i}\}$;
6. Si $\mathcal{F}_{j,i} \not\subset \{\mathcal{F}_{i-1} \cup \{\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{j,i}\}\}$, alors $b_j = b_j + 1$;
7. Vérifier :
 - si $\mathcal{F}_{i-1} \subset \mathcal{F}_i$, alors faire $i = i + 1$ puis retourner à l'étape 2 pour l'itération suivante;
 - dans le cas contraire, aller à l'étape 8;
8. Fin de l'algorithme.

Alors on note $\partial\Omega = \partial\Omega_i$, $\omega = \omega_{i-1}$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_i$, et $\mathcal{K}(\xi) = \mathcal{K}_i(\xi)$.

A la fin de l'algorithme, si $\mathcal{K}(\xi) \notin \mathcal{L}$ alors z n'est pas observable.

Théorème 5.3. *S'il existe une matrice $\mathcal{K}(\xi)$ telle que $P = \mathcal{K}(\xi)\partial\Omega$ et que les composants des éléments de toutes les lignes de $\mathcal{K}(\xi)$ satisfont $\mathcal{K}^j(\xi) \in \mathcal{L}$ alors z est observable.* \diamond

Preuve. Par définition, \mathcal{L}_i est l'espace observable du système (5.3) à chaque itération i . Après avoir appliqué l'algorithme 5.1, si $\mathcal{K}^j(\xi) \in \mathcal{L}$, alors tous les éléments dans $\mathcal{K}(\xi)$ sont engendrés par \mathcal{L} . Donc, cela implique que $z = P\xi$ est observable. \blacksquare

Remarque 5.2. *La matrice $\partial\Omega \in \mathbb{R}^{r \times (n+q)}$ étant de rang plein par ligne, il existe son inverse à droite $[\partial\Omega]_R^{-1}$ telle que $\partial\Omega[\partial\Omega]_R^{-1} = I_r$. La matrice $\mathcal{K}(\xi)$ peut alors être obtenue comme suit :*

$$\mathcal{K}(\xi) = P[\partial\Omega]_R^{-1}. \quad (5.9)$$

Supposons que la matrice P est choisie de telle sorte que $\mathcal{K}(\xi) \in \mathcal{L}$.

Proposition 5.1. *Il existe une fonction $F(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$ telle que*

$$z = F(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}). \quad (5.10)$$

avec $l \in \mathbb{N}$.

Preuve. A partir de $z = P\xi$, on obtient $dz = d(P\xi) = Pd\xi$. Considérant $P = \mathcal{K}(\xi)\partial\Omega$ puis en remplaçant la matrice P dans l'équation précédente, on obtient $dz = \mathcal{K}(\xi)d\Omega$ avec $d\Omega = \partial\Omega d\xi$.

Notons que dz est une 1-forme fermée, ce qui implique que $\mathcal{K}(\xi)d\Omega$ est aussi une 1-forme fermée [PANDHARIPANDE et al., 2014]. Alors, nous avons $d(F(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})) = dz$, ce qui implique :

$$z = F(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) = \begin{pmatrix} F_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) \\ \vdots \\ F_\gamma(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^\gamma.$$

■

Après avoir déduit une condition suffisante moins restrictive sur l'observabilité de z , nous allons concevoir des observateurs appropriés pour son estimation.

Très souvent, F est une fonction rationnelle composée de deux fonctions $g(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$ et $\bar{g}(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$ telles que

$$F(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) = \frac{\bar{g}(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})}{g(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})} \quad (5.11)$$

$$\text{où } g(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) = \begin{pmatrix} g_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) \\ \vdots \\ g_\gamma(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) \end{pmatrix} \text{ et } \bar{g}(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) = \begin{pmatrix} \bar{g}_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) \\ \vdots \\ \bar{g}_\gamma(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) \end{pmatrix}.$$

Si nous prenons, par exemple le système (5.8), nous aurons :

$$\theta = F(y, \dot{y}) = \frac{\dot{y}}{y}$$

Ceci montre que des singularités peuvent apparaître (ici pour $y = 0$). Le problème de singularité sera donc discuté dans la section suivante.

5.4 Estimateur en temps fini

En se basant sur les résultats des investigations menées dans la section précédente, différents observateurs peuvent être réalisés pour l'estimation de z . Notons aussi que l'estimation de z peut être garantie non seulement si l'Algorithme 5.1 se termine avec succès mais aussi si les fonctions g_i définie dans (5.11) sont non nulles.

Supposons que le Théorème 5.3 est satisfait pour le système (5.3). En se basant sur la Définition 5.1, il est alors possible de calculer algébriquement θ comme une fonction de la sortie y du système considéré et d'un certain nombre de ses dérivées $\dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(l)}$.

Selon la Proposition 5.1 et la relation (5.11), il est clair qu'un problème de la singularité peut apparaître dans (5.10) si $g(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$ passe par zéro à un instant t donné (perte d'observabilité locale).

Plusieurs chercheurs ont proposé différentes techniques pour surmonter ce problème de singularité. Dans [LANGUEH et al., 2015], la méthode de l'immersion a été proposée et consiste à

augmenter la dimension de la matrice d'observabilité avec un état virtuel dont la dynamique est nulle. Une autre méthode permettant de surmonter ce problème est l'imposition de la condition d'une excitation persistante.

Définition 5.3. (*Excitation persistante*) [SHIMKIN et al., 1987]. Pour l'équation (5.10), le vecteur des fonctions $g(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$ est considéré comme étant une excitation persistante si et seulement si il existe des constantes positives ϵ_1 et T telles que pour tout $t \geq 0$,

$$\int_{t-T}^t g(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) g^T(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) ds > \epsilon_1 I_\gamma$$

où T représente la période d'excitation de $g(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$.

Il est bien connu que différentes approches peuvent être utilisées pour estimer les paramètres si la condition d'excitation persistante est satisfaite. L'une de ces méthodes qui paraît la plus simple est la méthode dite des moindres carrés [XIA, 2003]. Une autre façon d'estimer les paramètres inconnus consiste à utiliser l'algorithme adaptatif [MARINO et al., 1995a] ou encore l'algorithme du gradient normalisé [XIA, 2003]. Ces méthodes ne peuvent fournir qu'une convergence **asymptotique**. Dans cette section, nous proposons une nouvelle approche basée sur les modes glissants pour estimer les paramètres en temps fini (convergence non asymptotique). Pour cela, définissons une fonction Q_i comme suit :

$$Q_i(t) = \int_{t-T}^t [\bar{g}_i(s) - \hat{z}_i(s) g_i(s)]^2 ds \quad (5.12)$$

avec $i = 1, \dots, \gamma$ et \hat{z}_i représente l'estimation de z_i . L'objectif est de minimiser cette fonction Q_i .

En calculant sa dérivée par rapport à \hat{z}_i , on a :

$$\frac{\partial Q_i(t)}{\partial \hat{z}_i} = -2 \int_{t-T}^t g_i(s) [\bar{g}_i(s) - \hat{z}_i(s) g_i(s)] ds$$

Définissons maintenant S_i comme suit :

$$S_i(t) = \int_{t-T}^t g_i(s) [\bar{g}_i(s) - \hat{z}_i(s) g_i(s)] ds \quad (5.13)$$

Le théorème suivant peut alors nous permettre d'estimer z tout en surmontant le problème de la singularité.

Théorème 5.4. *La dynamique suivante*

$$\dot{\hat{z}}_i(t) = \left[\frac{\partial S_i(t)}{\partial \hat{z}_i} \right]_L^{-1} \left[-k_1 [S_i]^\alpha - k_2 [S_i]^\beta - \frac{\partial S_i(t)}{\partial t} \right] \quad (5.14)$$

avec $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 1$, converge en temps fini vers z_i , c'est-à-dire qu'il existe un instant positif T_f indépendant de toute condition initiale tel que $\|z_i(t) - \hat{z}_i(t)\| = 0$, $\forall t \geq T_f$. \diamond

Preuve. L'erreur Q_i atteint sa valeur minimale (zéro) si et seulement si sa dérivée par rapport à \hat{z}_i

est nulle, c'est à dire $\frac{\partial Q_i}{\partial \hat{z}_i} = 0$, ce qui implique que $S_i = 0$. Puisque

$$\begin{aligned} S_i(t) &= \int_{t-T}^t g_i(s)[\bar{g}_i(s) - \hat{z}_i(\tau)g_i(\tau)]ds \\ &= \int_{t-T}^t g_i(s)[z_i(s)g_i(s) - \hat{z}_i(s)g_i(s)]ds \\ &= \int_{t-T}^t g_i^2(s)[z_i(s) - \hat{z}_i(s)]ds \end{aligned}$$

alors $\|z_i - \hat{z}_i\| = 0$ si et seulement si $S_i = 0$. Par conséquent, il est équivalent à prouver que S_i convergera vers zéro dans un temps fini. Considérons alors la dynamique de S_i suivante que nous allons dériver par rapport au temps. Nous avons :

$$\dot{S}_i = \frac{dS_i(t)}{dt} = \frac{\partial S_i(t)}{\partial t} + \frac{\partial S_i(t)}{\partial \hat{z}_i} \dot{\hat{z}}_i$$

En insérant l'observateur proposé (5.14) dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$\dot{S}_i = -k_1[S_i]^\alpha - k_2[S_i]^\beta. \quad (5.15)$$

Du fait que $k_1 > 0, k_2 > 0, 0 < \alpha < 1$ et $\beta > 1$, il a été prouvé dans [POLYAKOV, 2012] que S_i convergera en temps fini vers zéro, indépendamment de la condition initiale $S_i(0)$. Par conséquent, nous avons prouvé que l'observateur proposé (5.14) peut estimer z_i dans un temps fini, c'est-à-dire qu'il existe un instant T_f positif indépendant de la condition initiale tel que $\|z_i(t) - \hat{z}_i(t)\| = 0, \forall t \geq T_f$. ■

Contrairement à la méthode adaptative classique qui converge asymptotiquement, cette nouvelle méthode converge de manière non asymptotique. Dans la section suivante, un exemple illustratif est donné afin de mettre en évidence l'efficacité de l'observateur proposé.

5.5 Exemple illustratif

Le système considéré dans cet exemple est un réseau de trois systèmes dynamiques interconnectés comme le montre la Figure 5.1. La topologie du réseau est représentée par les paramètres inconnus mais constants des interconnexions $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_6)^T$.

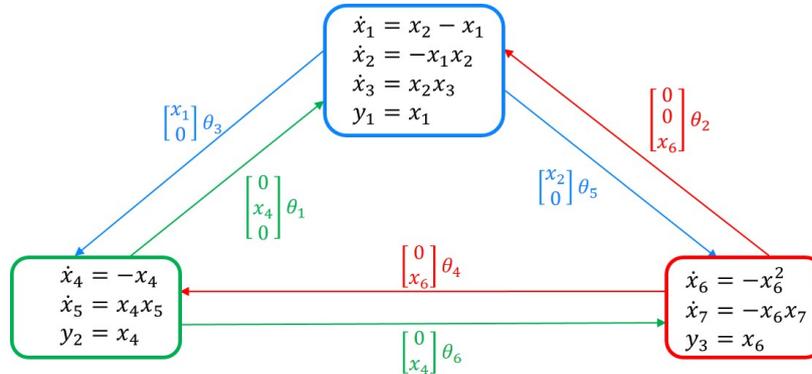


FIGURE 5.1 – Réseau formé par 3 systèmes dynamiques

Le modèle de l'ensemble des systèmes du réseau est décrit par la forme groupée suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 + \theta_1 x_4 \\ \dot{x}_3 = x_2 x_3 - \theta_2 x_6 \\ \dot{x}_4 = -x_4 + \theta_3 x_1 \\ \dot{x}_5 = x_4 x_5 + \theta_4 x_6 \\ \dot{x}_6 = -x_6^2 + \theta_5 x_2 \\ \dot{x}_7 = -x_7 + \theta_6 x_4 \\ y = (x_1, x_4, x_6)^T \end{cases} \quad (5.16)$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_7)^T$ représente les états du réseau considéré et $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ représente les sorties mesurées.

Le système (5.16) peut être réécrit sous la forme du système (5.3) comme suit :

$$\begin{cases} \xi = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \\ \dot{\xi} = f(\xi) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) \\ y = (y_1, y_2, y_3)^T \end{cases}$$

où $\xi = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)^T$.

Supposons que nous souhaitons estimer le vecteur suivant : $z = (x_2, \theta_1, \theta_3, \theta_5)^T$. Alors nous avons

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Appliquons l'Algorithme 5.1 proposé afin de tester l'observabilité de l'état x_2 et l'identifiabilité des paramètres inconnus θ_1 , θ_3 et θ_5 , nous obtenons :

1. Initialisation :

- $\omega_0 = \{\omega_{1,0}, \omega_{2,0}, \omega_{3,0}\}$, avec $\omega_{1,0} = \{y_1\}$, $\omega_{2,0} = \{y_2\}$ et $\omega_{3,0} = \{y_3\}$;
- $\mathcal{F}_0 = \{\mathcal{F}_{1,0}, \mathcal{F}_{2,0}, \mathcal{F}_{3,0}\}$ avec $\mathcal{F}_{1,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{1,0}}\{d\omega_{1,0}\}$, $\mathcal{F}_{2,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{2,0}}\{d\omega_{2,0}\}$, $\mathcal{F}_{3,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{3,0}}\{d\omega_{3,0}\}$;
- $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

2. Itération 1 ($i=1$). On a :

- $\mathcal{L}_1 = \text{span}_{\omega_0}\{d\omega_0\} = \text{span}_{\omega_0}\{d\xi_1, d\xi_4, d\xi_6\}$;

$$\begin{aligned} & \text{— } \partial\Omega_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ & \text{— et } \mathcal{K}_1(\xi) = P[\partial\Omega_0]_R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On remarque que $\mathcal{K}_1^j(\xi) \notin \mathcal{L}_1$. Alors, on calcule

- $\omega_1 = \{\omega_{1,1}, \omega_{2,1}, \omega_{3,1}\}$ avec $\omega_{1,1} = \{y_1, \dot{y}_1\}$, $\omega_{2,1} = \{y_2, \dot{y}_2\}$ et $\omega_{3,1} = \{y_3, \dot{y}_3\}$;
- $\mathcal{F}_1 = \{\mathcal{F}_{1,1}, \mathcal{F}_{2,1}, \mathcal{F}_{3,1}\}$ avec $\mathcal{F}_{j,1} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,1}}\{d\omega_{j,1}\}$;

On peut donc vérifier que $\mathcal{F}_{j,1} \not\subset \{\mathcal{F}_0 \cap \{\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_{j,1}\}\}$ pour $j = 1, 2, 3$, alors on incrémente b_j qui donne $b_1 = b_2 = b_3 = 1$;

Notons que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$. On procède donc à la deuxième itération.

3. Itération 2 (i=2). Nous avons :

- $\mathcal{L}_2 = \text{span}_{\omega_1}\{d\omega_1\} = \text{span}_{\omega_1}\{d\xi_1, d\xi_2, d\xi_4, d\xi_6, d\xi_{10}, d\xi_{12}\}$;

$$\begin{aligned} & \text{— } \partial\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{10} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{12} & 0 & 0 & 0 & -2\xi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 \end{pmatrix}; \\ & \text{— } \mathcal{K}_2(\xi) = P[\partial\Omega_1]_R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\xi_{10}}{\xi_1} & 0 & \frac{1}{\xi_1} & \frac{1}{\xi_1} & 0 & 0 \\ \frac{-\xi_{12}}{\xi_2} & \frac{-\xi_{12}}{\xi_2} & 0 & 0 & \frac{2\xi_6}{\xi_2} & \frac{1}{\xi_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On note que $\mathcal{K}_2^1(\xi) \notin \mathcal{L}_2$, donc on calcule

- $\omega_2 = \{\omega_{1,2}, \omega_{2,2}, \omega_{3,2}\}$ avec $\omega_{1,2} = \{y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1\}$, $\omega_{2,2} = \{y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2\}$ et $\omega_{3,2} = \{y_3, \dot{y}_3, \ddot{y}_3\}$;
- $\mathcal{F}_2 = \{\mathcal{F}_{1,2}, \mathcal{F}_{2,2}, \mathcal{F}_{3,2}\}$ avec $\mathcal{F}_{j,2} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,2}}\{d\omega_{j,2}\}$;

On peut vérifier que

- $\mathcal{F}_{1,2} \not\subset \{\mathcal{F}_1 \cap \{\mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{F}_{1,2}\}\}$ alors $b_1 = 2$;
- $\mathcal{F}_{2,2} \subset \{\mathcal{F}_1 \cap \{\mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{F}_{2,2}\}\}$ alors $b_2 = 1$;
- $\mathcal{F}_{3,2} \subset \{\mathcal{F}_1 \cap \{\mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{F}_{3,2}\}\}$ alors $b_3 = 1$.

On peut aussi vérifier que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. On procède alors à la troisième itération.

4. Itération 3 (i=3). On obtient :

$$— \mathcal{L}_3 = \text{span}_{\omega_2}\{d\omega_2\} = \text{span}_{\omega_2}\{d\xi_1, d\xi_2, d\xi_4, d\xi_6, d\xi_8, d\xi_{10}, d\xi_{12}\};$$

$$— \partial\Omega_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \xi_2 & -1 - \xi_1 & 0 & \xi_8 & 0 & 0 & 0 & \xi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{10} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{12} & 0 & 0 & 0 & -2\xi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$— \text{et } \mathcal{K}_3(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\xi_1 + \xi_2}{\xi_4} & \frac{1 + \xi_1}{\xi_4} & \frac{1}{\xi_4} & -\frac{\xi_8}{\xi_4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\xi_{10}}{\xi_1} & 0 & 0 & \frac{1}{\xi_1} & \frac{1}{\xi_1} & 0 & 0 \\ -\frac{\xi_{12}}{\xi_2} & -\frac{\xi_{12}}{\xi_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\xi_6}{\xi_2} & \frac{1}{\xi_2} \end{bmatrix}.$$

Pour $j = 1, 2, 3$, $\mathcal{K}_3^j(\xi) \in \mathcal{L}$, alors on arrête l'algorithme et on note $\partial\Omega = \partial\Omega_3$ et $\mathcal{K}(\xi) = \mathcal{K}_3(\xi)$.

L'algorithme s'est terminé de manière positive, donc le Théorème 5.3 est satisfait et l'état du système (5.16) est alors observable. Cela signifie que l'état x_2 est observable et que les paramètres inconnus θ_1 , θ_3 et θ_5 du système (5.16) sont aussi identifiables. L'observateur proposé peut donc nous permettre d'estimer ces paramètres.

A partir de la matrice $P = \mathcal{K}(\xi)\partial\Omega$ et de $z = P\xi$, nous avons

$$dz = Pd\xi = K(\xi)d\Omega \text{ avec } d\Omega = \partial\Omega d\xi.$$

Sachant que $d\Omega = (dy_1, d\dot{y}_1, d\ddot{y}_1, dy_2, d\dot{y}_2, d\ddot{y}_2, dy_3, d\dot{y}_3)^T$, on obtient

$$\begin{cases} d\xi_2 & = dy_1 + d\dot{y}_1 \\ d\xi_8 & = -\frac{\xi_1 + \xi_2}{y_2} dy_1 + \frac{1 + \xi_1}{y_2} d\dot{y}_1 + \frac{1}{y_2} d\ddot{y}_1 - \frac{\xi_8}{y_2} dy_2 \\ d\xi_{10} & = -\frac{\xi_{10}}{y_1} dy_1 + \frac{1}{y_1} dy_2 + \frac{1}{y_1} d\dot{y}_2 \\ d\xi_{12} & = -\frac{\xi_{12}}{y_1 + \dot{y}_1} dy_1 - \frac{\xi_{12}}{y_1 + \dot{y}_1} d\dot{y}_1 + \frac{2y_3}{y_1 + \dot{y}_1} dy_3 + \frac{1}{y_1 + \dot{y}_1} d\dot{y}_3 \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\begin{cases} dx_2 = d(y_1 + \dot{y}_1) \\ d(\theta_1 y_2) = d(\dot{y}_1 + \ddot{y}_1 + y_1(y_1 + \dot{y}_1)) \\ d(\theta_3 y_1) = d(y_2 + \dot{y}_2) \\ d(\theta_5 y_1 + \rho_5 \dot{y}_1) = d(y_3^2 + \dot{y}_3) \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{cases} z_1 = x_2 = y_1 + \dot{y}_1 \\ y_2 z_2 = y_2 \theta_1 = \dot{y}_1 + \ddot{y}_1 + y_1 (y_1 + \dot{y}_1) \\ y_1 z_3 = y_1 \theta_3 = y_2 + \dot{y}_2 \\ (y_1 + \dot{y}_1) z_4 = (y_1 + \dot{y}_1) \theta_5 = y_3^2 + \dot{y}_3 \end{cases}$$

et finalement, on a :

$$\begin{cases} x_2 = y_1 + \dot{y}_1 \\ \theta_1 = \frac{\dot{y}_1 + \ddot{y}_1 + y_1 (y_1 + \dot{y}_1)}{y_2} \\ \theta_3 = \frac{y_2 + \dot{y}_2}{y_1} \\ \theta_5 = \frac{y_3^2 + \dot{y}_3}{y_1 + \dot{y}_1} \end{cases}$$

Il est donc clair qu'on peut avoir des problèmes de singularité dans l'estimation des paramètres θ_1 , θ_3 et θ_5 .

A partir de l'équation (5.13), l'utilisation de la méthode proposée nous conduit donc à définir :

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{t-T}^t ((y_1 + \dot{y}_1) - z_1) ds \\ S_2 &= \int_{t-T}^t y_2 ((\dot{y}_1 + \ddot{y}_1 + y_1^2 + y_1 \dot{y}_1) - y_2 z_2) ds \\ S_3 &= \int_{t-T}^t y_1 ((y_2 + \dot{y}_2) - y_1 z_3) ds \\ S_4 &= \int_{t-T}^t (y_1 + \dot{y}_1) ((y_3^2 + \dot{y}_3) - (y_1 + \dot{y}_1) z_4) ds \end{aligned}$$

Nous pouvons alors suivre la forme proposée (5.14) pour concevoir un observateur en temps fini pour estimer les paramètres identifiables $z = (x_2, \theta_1, \theta_3, \theta_5)^T$.

La simulation numérique a été réalisée à l'aide de la méthode d'Euler avec un pas fixe $h = 0,001$. Les conditions initiales sont $x(0) = [1, 3, 1, 1, 1, 1]^T$, $z(0) = [3, 0, 0, 0]^T$ et $\hat{\theta}(0) = [5, 0, 3, 0, -1, 0]^T$. Les valeurs réelles des paramètres inconnus sont $(\theta_1, \theta_3, \theta_5)^T = (1, 2, 4)^T$. Les figures suivantes montrent les résultats des simulations.

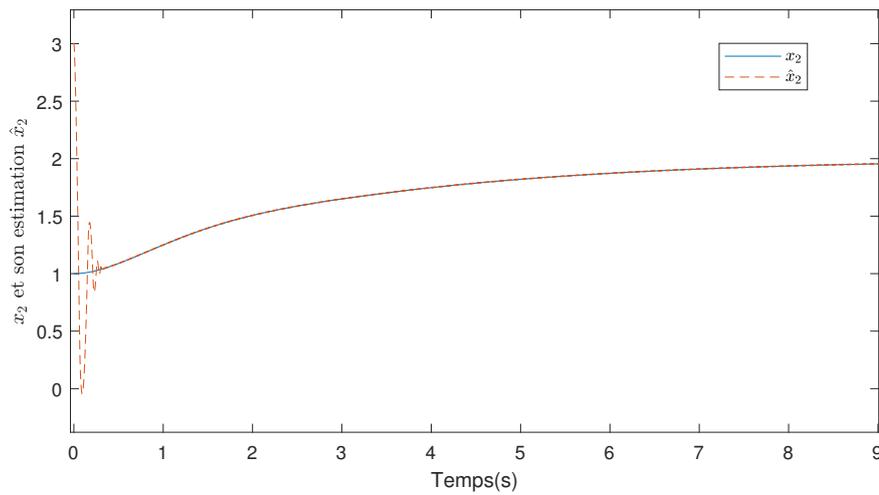


FIGURE 5.2 – L'état x_2 et son estimation \hat{x}_2

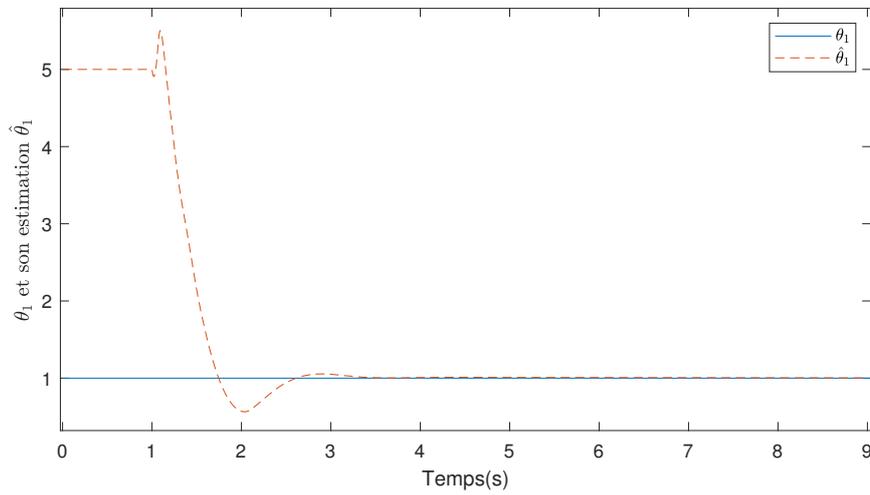


FIGURE 5.3 – Paramètre θ_1 et son estimation $\hat{\theta}_1$

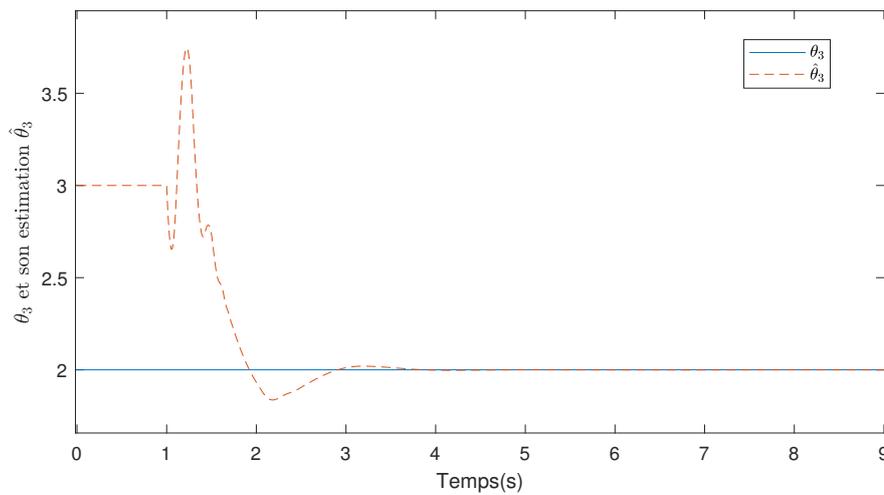
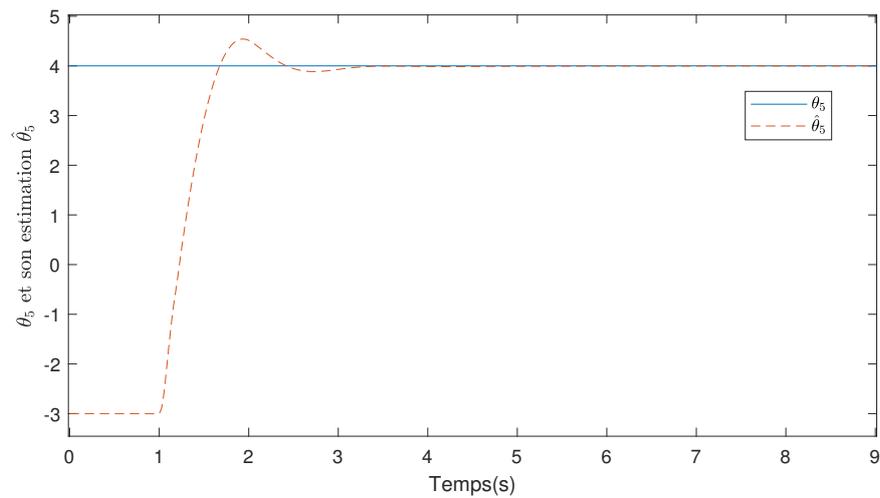


FIGURE 5.4 – Paramètre θ_3 et son estimation $\hat{\theta}_3$

FIGURE 5.5 – Paramètre θ_5 et son estimation $\hat{\theta}_5$

Les Figures 5.2, 5.3, 5.4 et 5.5 montrent respectivement que les estimations de l'état x_2 et des paramètres inconnus θ_1 , θ_3 et θ_5 qui convergent bien en temps fini. Ce qui montre aussi que le problème de singularité a bien été surmonté dans les estimations des paramètres inconnus.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'identifiabilité partielle ou totale de paramètres inconnus des interconnexions entre plusieurs systèmes dynamiques. Un observateur en temps fini a été proposé pour estimer les valeurs des paramètres identifiables. Les résultats de simulation de l'exemple illustratif prouvent l'efficacité de l'observateur proposé. Dans le chapitre qui va suivre, nous étendrons les résultats obtenus à un réseau de systèmes dynamiques non linéaires avec entrées inconnues.

Estimation pour les systèmes non linéaires à entrées inconnues

Sommaire

6.1	Introduction	113
6.2	Formulation du problème	113
6.3	Observabilité et Identifiabilité	115
6.4	Exemple illustratif	117
6.5	Conclusion	122

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'observations des systèmes non linéaires avec des paramètres constants mais inconnus et des entrées inconnues. Ces entrées inconnues peuvent être des perturbations ou des bruits. Étant donné que nous ne connaissons pas la dynamique des entrées inconnues, le but de notre travail est de pouvoir estimer partiellement ou globalement les paramètres inconnus sans que le résultat ne soit influencé par ces entrées inconnues. Pour y parvenir, nous allons adapter l'algorithme élaboré dans le chapitre précédent pour les systèmes non linéaires sans entrées inconnues aux systèmes non linéaires avec des entrées inconnues.

6.2 Formulation du problème

Cette partie est consacrée à l'extension des résultats obtenus dans le chapitre précédent aux systèmes de la même classe mais avec des entrées inconnues. Pour cela, nous considérons un réseau de k systèmes dynamiques avec des paramètres d'interconnexion constants mais inconnus et des entrées inconnues.

Supposons que chaque sous système Σ_i ($1 \leq i \leq k$) impliqué dans le réseau considéré peut être

modélisé mathématiquement sous la forme suivante :

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_i = \bar{f}_i(x_i) + \sum_{j=1}^{q_i} \varphi_{i,j}(x_j)\theta_{i,j} + \tilde{g}_i(x_i)\vartheta_i \\ \dot{\theta}_i = 0 \\ y_i = \bar{h}_i(x_i) \end{cases} \quad (6.1)$$

où $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i})^T \in \mathbb{R}^{n_i}$ représente l'état du sous système Σ_i , $y_i = (y_{i,1}, \dots, y_{i,p_i})^T \in \mathbb{R}^{p_i}$ la sortie, $\vartheta_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ le vecteur des entrées inconnues et $\tilde{g}_i(x) = (\tilde{g}_{i,1}, \dots, \tilde{g}_{i,m_i}) \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$ la matrice des entrées inconnues. Le vecteur des paramètres $\theta_i = (\theta_{i,1}, \dots, \theta_{i,q_i})^T \in \mathbb{R}^{q_i}$ représente les coefficients d'interconnexion **constants mais inconnus** réalisant les interconnexions topologiques entre différents sous systèmes du réseau. Le vecteur des fonctions $\varphi_{i,j}(x_j) = (\varphi_{i,j}^1(x_j), \dots, \varphi_{i,j}^{n_i}(x_j))^T \in \mathbb{R}^{n_i}$ représente les informations qu'un sous système Σ_j injecte dans le sous système Σ_i via la connexion réalisée par les paramètres θ_i . Donc, la matrice des fonctions $\varphi_i(x) = (\varphi_{i,1}^T(x_1), \dots, \varphi_{i,q_i}^T(x_{q_i}))^T \in \mathbb{R}^{n_i \times q_i}$ représente l'ensemble des informations injectées par le réseau dans le sous système Σ_i .

Pour simplifier notre investigation, notons $n = \sum_{i=1}^k n_i$, $m = \sum_{i=1}^k m_i$, $p = \sum_{i=1}^k p_i$ et $q = \sum_{i=1}^k q_i$. Définissons $x = (x_1^T, \dots, x_k^T)^T \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des états du réseau global des systèmes dynamiques, $y = (y_1^T, \dots, y_k^T)^T \in \mathbb{R}^p$ le vecteur des sorties mesurées, $\vartheta = (\vartheta_1^T, \dots, \vartheta_k^T)^T \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des entrées inconnues et $\theta = (\theta_1^T, \dots, \theta_k^T)^T \in \mathbb{R}^q$ le vecteur des paramètres inconnus. On peut alors écrire l'ensemble du système de réseau sous la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{f}(x) + \varphi(x)\theta + \tilde{g}(x)\vartheta \\ \dot{\theta} = 0 \\ y = \bar{h}(x) \end{cases} \quad (6.2)$$

où $\bar{f}(x) = (\bar{f}_1^T(x_1), \dots, \bar{f}_k^T(x_k))^T$, $\bar{h}(x) = (\bar{h}_1^T(x_1), \dots, \bar{h}_k^T(x_k))^T$, $\tilde{g}(x) = (\tilde{g}_1^T(x_1), \dots, \tilde{g}_k^T(x_k))^T$, $\varphi(x) = \text{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x))$.

Tant que les paramètres inconnus sont considérés comme étant constant, on peut les traiter comme étant des variables d'états additionnels dont la dynamique est nulle ($\dot{\theta} = 0$). Pour cela, notons $\xi = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$. Alors le système (6.2) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) + \tilde{g}(\xi)\vartheta \\ y = h(\xi) \\ z = P\xi \end{cases} \quad (6.3)$$

où $\xi \in \mathbb{R}^{n+q}$, $f(\xi) = \bar{f}(x) + \varphi(x)\theta$, $h(\xi) = \bar{h}(x)$ et $\tilde{g}(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+q) \times m}$. Le vecteur $z \in \mathbb{R}^p$ représente les variable à identifier et $P \in \mathbb{R}^{p \times (n+q)}$ est une matrice constante introduite pour simplifier la présentation de l'observabilité des états et de l'identifiabilité des paramètres inconnus dans la suite de notre travail.

Remarque 6.1. On serait tenté de faire la même chose pour les entrées inconnues (c'est à dire les traiter

comme des variables d'état supplémentaires). Mais ceci est impossible vu que nous ne connaissons pas la dynamique des entrées inconnues. Le problème des entrées inconnues sera donc traité différemment dans la suite.

Pour $\vartheta = 0$ et en fonction des différents choix de la matrice P , l'estimation de z peut être interprétée de différentes manières comme dans le chapitre précédent. Les Définitions, Remarques et Théorème du chapitre 5 sont aussi valables dans ce chapitre.

A partir de la forme compacte déduite (6.3), nous allons chercher dans la section suivante les conditions qui garantissent l'identifiabilité partielle ou globale des paramètres constants inconnus en présence des entrées inconnues.

6.3 Observabilité et Identifiabilité

Cette section est consacré à la généralisation des résultats obtenus dans le chapitre précédent. En plus des hypothèses imposées pour l'estimation des paramètres inconnus, d'autres conditions sont ajoutées et l'algorithme est adapté aux systèmes avec des entrées inconnues. Rappelons que sans perte de généralité, on suppose toujours que les composantes de h du système (6.3) sont linéairement indépendantes.

Notons que l'algorithme du chapitre précédent n'est pas efficace pour les systèmes avec des entrées inconnues. Compte tenu de ce fait et pour en déduire la condition suffisamment faible de l'identifiabilité des paramètres en présence des entrées inconnues, nous allons optimiser l'algorithme précédent. Mais avant cela, rappelons aussi que pour tout entier b_j , $j = 1, \dots, p$, nous définissons

$$\omega = \{h_1, \dots, L_f^{b_1} h_1, \dots, h_p, \dots, L_f^{b_p} h_p\},$$

et $\Xi = \{\mathcal{X} + \Theta\}$. Nous avons

$$\mathcal{F} = \Xi \cap \text{span}_\omega\{d\omega\}$$

En tenant compte des résultats obtenus dans [BARBOT et al., 2009], définissons aussi $G = \text{span}\{\tilde{g}(\xi)\} = \text{span}\{\tilde{g}_1(\xi), \dots, \tilde{g}_m(\xi)\}$ et son annihilateur G^\perp tels que $G^\perp G = 0$.

Définissons

$$V = (L_f^{b_1} h_1, \dots, L_f^{b_p} h_p)^T$$

et

$$\Gamma = \begin{pmatrix} L_{\tilde{g}_1} L_f^{b_1} h_1 & \cdots & L_{\tilde{g}_m} L_f^{b_1} h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\tilde{g}_1} L_f^{b_p} h_p & \cdots & L_{\tilde{g}_m} L_f^{b_p} h_p \end{pmatrix}.$$

L'algorithme suivant est alors proposé pour assouplir la condition d'identifiabilité du Théorème 5.2. Il est similaire à l'algorithme 5.1 proposé dans le chapitre 5 auquel de nouvelles conditions sont ajoutées pour étendre son efficacité aux classes de systèmes dynamiques avec des entrées inconnues.

Algorithme 6.1.

1. *Initialisation :*

- $b_j = 0, j = 1, \dots, p;$
- $\omega_0 = \{\omega_{1,0}, \dots, \omega_{p,0}\}$ avec $\omega_{j,0} = \{h_j\};$
- $\mathcal{F}_0 = \{\mathcal{F}_{1,0}, \dots, \mathcal{F}_{p,0}\} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_0}\{d\omega_0\}$ avec $\mathcal{F}_{j,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,0}}\{d\omega_{j,0}\};$
- Définir $G = \text{span}\{\tilde{g}_1(\xi), \dots, \tilde{g}_m(\xi)\};$
- $i = 1$ et $l = 0.$

2. *Itération i :* Calculer $\mathcal{L}_i = \text{span}_{\omega_{i-1}}\{d\omega_{i-1}\}$ et G^\perp l'annihilateur de G tel que

$$G^\perp = \text{span}\{\bar{\vartheta} \in \mathcal{L}_i \mid \bar{\vartheta} \tilde{g} = 0, \forall \tilde{g} \in G\};$$

3. Calculer $\partial\Omega_i = \frac{\partial\omega_{i-1}^T}{\partial\xi};$

4. Pour une matrice P donnée, déterminer la matrice $\mathcal{K}_i(\xi)$ telle que $P = \mathcal{K}_i(\xi)\partial\Omega_i$. Ensuite, noter $\mathcal{K}_i^j(\xi)$ la j ème ligne de la matrice $\mathcal{K}_i(\xi);$

5. Vérifier :

- si tous les éléments des vecteurs $\mathcal{K}_i^j(\xi) \notin \mathcal{L}_i$, alors aller à l'étape 6;
- Dans le cas contraire, aller à l'étape 11;

6. Calculer $V_i = \left(L_f^{b_1} h_1, \dots, L_f^{b_p} h_p\right)^T$ et $\Gamma_i = \begin{pmatrix} \Gamma_{1,i} \\ \vdots \\ \Gamma_{p,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{\tilde{g}_1} L_f^{b_1} h_1 & \cdots & L_{\tilde{g}_m} L_f^{b_1} h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\tilde{g}_1} L_f^{b_p} h_p & \cdots & L_{\tilde{g}_m} L_f^{b_p} h_p \end{pmatrix};$

- Vérifier si $\Gamma_i = 0$ alors aller à l'étape 8;
- Sinon, aller à l'étape 7;

7. Déterminer $G^\perp \cap \mathcal{L}_i$. Noter $\Upsilon_i = \{\bar{\vartheta} \in G^\perp \cap \mathcal{L}_i \mid \bar{\vartheta} V_i \notin \omega_{i-1}\};$

Si $\Upsilon_i \neq 0$ alors il existe une nouvelle sortie fictive. Incrémenter l puis calculer $\bar{y} = \bar{\vartheta} V_i$ et $y_{p+l} = \bar{y} \bmod \omega_{i-1}$. Ensuite, recalculer $\Gamma_i = (\Gamma_{1,i}, \dots, \Gamma_{p+l,i})^T$ avec $\Gamma_{p+l,i} = 0$.

8. Calculer :

- $\omega_i = \{\omega_{1,i}, \dots, \omega_{p+l,i}\}$ avec $\omega_{j,i} = \{h_j, \dots, h_j^{(b_j+1)}\}, j = 1, \dots, p+l;$
- $\mathcal{F}_i = \{\mathcal{F}_{1,i}, \dots, \mathcal{F}_{p+l,i}\} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_i}\{d\omega_i\}$ avec $\mathcal{F}_{j,i} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,i}}\{d\omega_{j,i}\};$

9. Vérifier si $\mathcal{F}_{j,i} \not\subset \{\mathcal{F}_{i-1} \cup \{\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{j,i}\}\}$ et $\Gamma_{j,i} = 0$, alors faire $b_j = b_j + 1;$

10. Vérifier :

- si $\mathcal{F}_{i-1} \subset \mathcal{F}_i$, alors faire $i = i + 1$ puis retourner au 2 pour l'itération suivante;
- Dans le cas contraire, aller au 11;

11. Fin de l'algorithme.

Alors noter

$$\partial\Omega(\xi) = \partial\Omega_i(\xi), \mathcal{L} = \mathcal{L}_i, \text{ et } \mathcal{K}(\xi) = \mathcal{K}_i(\xi).$$

Si l'algorithme se termine de façon négative, c'est-à-dire qu'à la fin de l'algorithme $\mathcal{K}(\xi) \notin \mathcal{L}$, alors z n'est pas observable.

La nouveauté dans cet algorithme concerne l'introduction de Υ qui permet d'inhiber l'effet des entrées inconnues afin de pouvoir calculer les dérivées d'ordre supérieur des sorties sous certaines conditions. Des sorties fictives peuvent alors être déduites à partir des sorties réelles mesurées [BARBOT et al., 2009]. Notons que cette opération peut engendrer des singularités dans l'estimation des états et des paramètres (singularités apparaissant dans l'estimation des sorties fictives).

Théorème 6.1. *S'il existe $\mathcal{K}(\xi)$ telle que $P = \mathcal{K}(\xi)\partial\Omega(\xi)$ et que $\mathcal{K}^j(\xi) \in \mathcal{L}$ alors z est observable.* \diamond

La preuve est la même que pour le Théorème 5.3.

Si l'algorithme se termine de manière positive, connaissant P , $\mathcal{K}(\xi)$ et $\partial\Omega$, on peut alors déduire z comme présenté dans le **Chapitre 5** :

$$z = F(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$$

où $F(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$ est une fonction rationnelle et $l \in \mathbb{N}$.

Un observateur similaire à celui proposé dans le **Chapitre 5** peut alors être réalisé pour l'estimation de z .

6.4 Exemple illustratif

Pour illustrer l'efficacité du nouvel algorithme, nous allons considérer un réseau de trois systèmes dynamiques interconnectés comme le montre la Figure 6.1. Les interconnexions sont réalisées via des paramètres inconnus mais constants qui sont représentés par le vecteur $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_5)^T$.

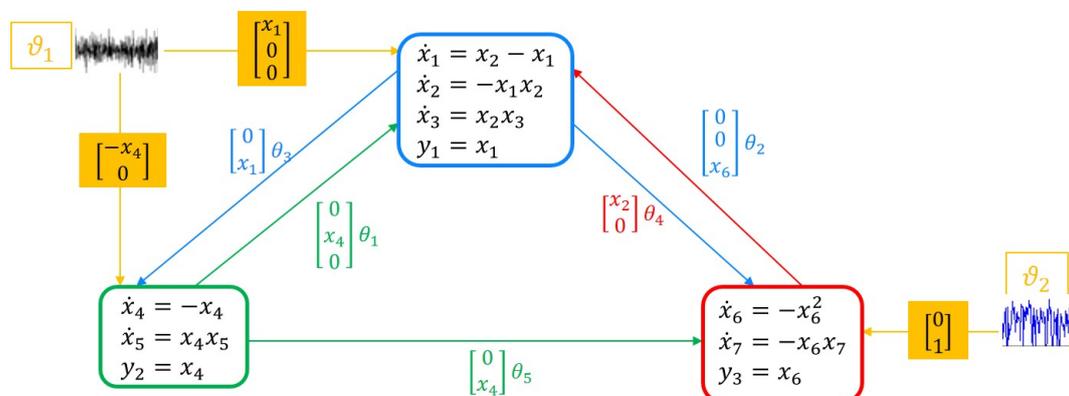


FIGURE 6.1 – Réseau formé par 3 systèmes avec des entrées inconnues

La dynamique de l'ensemble du réseau est donc décrite par la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1 + x_1 \vartheta_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 + \theta_1 x_4 \\ \dot{x}_3 = -x_2 x_3 + \theta_2 x_6 \\ \dot{x}_4 = x_4 - x_4 \vartheta_1 \\ \dot{x}_5 = x_4 x_5 - \theta_3 x_1 \\ \dot{x}_6 = -x_6^2 + \theta_4 x_2 \\ \dot{x}_7 = -x_6 x_7 + \theta_5 x_4 + \vartheta_2, \\ y = (x_1, x_4, x_6)^T \end{cases} \quad (6.4)$$

où le vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_7)^T$ représente les états du réseau global, $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ le vecteur des sorties mesurées et $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)^T$ le vecteur des entrées inconnues.

En considérant les paramètres inconnus comme étant des états additionnels, c'est-à-dire en définissant $\xi = (x, \theta)^T$, le système (6.4) peut alors être réécrit sous la forme du système (6.3) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi)\vartheta \\ y = (y_1, y_2, y_3)^T \end{cases} \quad (6.5)$$

où $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{12}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)^T$,

$f(\xi) = (\xi_2 - \xi_1, \xi_2 + \xi_4 \xi_8, -\xi_3 + \xi_6 \xi_9, -\xi_4, -\xi_4 + \xi_1 \xi_{10}, \xi_6 + \xi_2 \xi_{11}, -\xi_7 + \xi_4 \xi_{12}, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, et

$$g(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & -\xi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Dans cet exemple, nous voulons vérifier l'observabilité de l'état x_2 et l'identifiabilité des paramètres θ_1 et θ_4 . Pour cela, nous avons choisi la matrice P correspondante comme suit :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent, nous avons $z = P\xi = (x_2, \theta_1, \theta_4)^T$.

En appliquant l'Algorithme 6.1 au réseau considéré dans cet exemple, nous avons :

1. Initialisation :

— $\omega_0 = \{\omega_{1,0}, \omega_{2,0}, \omega_{3,0}\}$, avec $\omega_{1,0} = \{y_1\}$, $\omega_{2,0} = \{y_2\}$ et $\omega_{3,0} = \{y_3\}$;

— $\mathcal{F}_0 = \{\mathcal{F}_{1,0}, \mathcal{F}_{2,0}, \mathcal{F}_{3,0}\}$ avec $\mathcal{F}_{1,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{1,0}}\{d\omega_{1,0}\}$, $\mathcal{F}_{2,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{2,0}}\{d\omega_{2,0}\}$, $\mathcal{F}_{3,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{3,0}}\{d\omega_{3,0}\}$;

$$— G = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & -\xi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \text{ dont l'annihilateur est}$$

$$G^\perp = \text{span}\{d\xi_2, d\xi_3, d\xi_5, d\xi_6, d\xi_8, d\xi_9, d\xi_{10}, d\xi_{11}, d\xi_{12}, \xi_4 d\xi_1 + \xi_1 d\xi_4\};$$

$$— b_1 = b_2 = b_3 = 0 \text{ et } i = 1.$$

2. Itération 1 (i=1). On a

$$— \mathcal{L}_1 = \text{span}_{\omega_0}\{d\omega_0\} = \text{span}_{\omega_0}\{d\xi_1, d\xi_4, d\xi_6\};$$

$$— \partial\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$— \text{et } \mathcal{K}_1(\xi) = P[\partial\Omega_1]_R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que pour $j = 1, 2$, $\mathcal{K}_1^j(\xi) \notin \mathcal{L}_1$. Alors :

$$— \text{On calcule } V_1 = \begin{pmatrix} \xi_2 - \xi_1 \\ \xi_4 \\ -\xi_6^2 + \xi_2 \xi_{11} \end{pmatrix} \text{ et } \Gamma_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ -\xi_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$— \text{On détermine maintenant } G^\perp \cap \mathcal{L}_1 = \text{span}\{d\xi_6, \xi_4 d\xi_1 + \xi_1 d\xi_4\};$$

$$— \text{Ensuite on détermine aussi } \Upsilon_1 = \text{span}\{\bar{\vartheta} \in G^\perp \cap \mathcal{L}_1 \mid \bar{\vartheta} V_1 \notin \omega_0\} = \text{span}\{\xi_4 d\xi_1 + \xi_1 d\xi_4\}$$

$$— \text{On constate que } \Upsilon_1 \neq 0, \text{ donc on incrémente } l = 1 \text{ et on définit } b_4 = 0,$$

$$\bar{y} = \bar{\vartheta} V_1 = (\xi_2 - \xi_1)\xi_4 + \xi_4 \xi_1 = \xi_2 \xi_4 \text{ puis } y_4 = \bar{y} \text{ mod } \omega_0 = \xi_2 \text{ pour } \xi_4 \neq 0.$$

3. Nous pouvons alors calculer :

$$— \omega_1 = \{\omega_{1,1}, \omega_{2,1}, \omega_{3,1}, \omega_{4,1}\} \text{ avec } \omega_{1,1} = \{y_1, \dot{y}_1\}, \omega_{2,1} = \{y_2, \dot{y}_2\}, \omega_{3,1} = \{y_3, \dot{y}_3\} \text{ et } \omega_{4,1} = \{y_4, \dot{y}_4\};$$

$$— \mathcal{F}_1 = \{\mathcal{F}_{1,1}, \mathcal{F}_{2,1}, \mathcal{F}_{3,1}, \mathcal{F}_{4,1}\} \text{ avec } \mathcal{F}_{j,1} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,1}}\{d\omega_{j,1}\}$$

4. On peut donc vérifier que

$$— \Gamma_{1,1} \neq 0 \text{ donc } b_1 = 0;$$

$$— \Gamma_{2,1} \neq 0 \text{ donc } b_2 = 0;$$

$$— \mathcal{F}_{3,1} \not\subset \{\mathcal{F}_0 \cap \{\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_{3,1}\}\} \text{ et } \Gamma_{3,1} = 0 \text{ donc on incrémente } b_3 \text{ d'où } b_3 = 1;$$

$$— \mathcal{F}_{4,1} \not\subset \{\mathcal{F}_0 \cap \{\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_{4,1}\}\} \text{ et } \Gamma_{4,1} = 0, \text{ on incrémente donc } b_4 \text{ ce qui nous donne } b_4 = 1;$$

Notons que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$, donc nous pouvons procéder à l'itération suivante.

5. Itération 2 (i=2). Nous avons

$$\begin{aligned}
& \text{— } \mathcal{L}_2 = \text{span}_{\omega_1} \{d\omega_1\} = \text{span}_{\omega_1} \{d\xi_1, d\xi_2, d\xi_4, d\xi_6, d\xi_8, d\xi_{11}\}; \\
& \text{— } \partial\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{11} & 0 & 0 & 0 & -2\xi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi_2 & -\xi_1 & 0 & \xi_8 & 0 & 0 & 0 & \xi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et} \\
& \text{— } \mathcal{K}_2(\xi) = P[\partial\Omega_2]_R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\xi_2}{\xi_4} & \frac{-\xi_8}{\xi_4} & 0 & 0 & \frac{1}{\xi_4} & \frac{1}{\xi_4} \\ 0 & 0 & \frac{2\xi_6}{\xi_2} & \frac{1}{\xi_2} & \frac{-\xi_{11}}{\xi_2} & 0 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

6. Pour $j = 1, 2$, on peut vérifier que $\mathcal{K}_2^j(\xi) \in \mathcal{L}_2$, donc on arrête l'algorithme puis on note $\partial\Omega = \partial\Omega_2$ et $\mathcal{K}(\xi) = \mathcal{K}_2(\xi)$.

On conclut donc que z est observable, c'est-à-dire que l'état x_2 est observable et les paramètres θ_1 et θ_4 sont identifiables.

On peut alors proposer un observateur en temps fini comme dans le chapitre 5 pour estimer l'état x_2 et les paramètres θ_1 et θ_4 .

Alors, à partir de $P = \mathcal{K}(\xi)\partial\Omega$ et $z = P\xi$, on a :

$$dz = Pd\xi = \mathcal{K}(\xi)\partial\Omega d\xi \text{ avec } d\Omega = \partial\Omega d\xi.$$

Sachant que $d\omega = (dy_1, dy_2, dy_3, \dot{y}_3, dy_4, d\dot{y}_4)^T$, on obtient

$$\begin{cases} d\xi_2 & = dy_4 \\ d\xi_8 & = \frac{\xi_2}{\xi_4} dy_1 - \frac{\xi_8}{y_2} dy_2 + \frac{1}{y_2} dy_4 + \frac{1}{y_2} d\dot{y}_4 \\ d\xi_{11} & = \frac{2\xi_6}{y_4} dy_3 + \frac{1}{y_4} d\dot{y}_3 - \frac{\xi_{11}}{y_4} dy_4 \end{cases}$$

ce qui implique que

$$\begin{cases} d\xi_2 & = dy_4 \\ d(\xi_8 y_2) & = d(y_1 y_4 + \dot{y}_4) \\ d(\xi_{11} y_4) & = d(y_3^2 + \dot{y}_3) \end{cases}$$

et au final, on obtient

$$\begin{cases} x_2 & = \xi_2 = y_4 \\ \theta_1 & = \xi_8 = \frac{y_1 y_4 + \dot{y}_4}{y_2} \\ \theta_4 & = \xi_{11} = \frac{y_3^2 + \dot{y}_3}{y_4} \end{cases}$$

avec $y_4 = x_2 = \frac{1}{y_2}(\dot{y}_1 y_2 + y_1 \dot{y}_2)$ pour $y_2 \neq 0$.

Les résultats obtenus montrent bien que l'algorithme proposé permet sous certaines conditions d'observer les états et d'identifier les paramètres inconnus de manière partielle ou globale.

On peut donc utiliser le même observateur que dans le Chapitre 5 pour estimer l'état x_2 et les paramètres θ_1 et θ_4 .

La simulation numérique a été réalisée à l'aide de la méthode d'Euler avec un pas fixe $h = 0.001$. Les conditions initiales sont $x(0) = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]^T$, $\hat{x}(0) = [0, 2, 3, 1, -1, -3, 0]^T$, $\hat{\theta}(0) = [3, 0, 0, 5, 0]^T$ et les valeurs réels des paramètres $[\theta_1, \theta_4]^T = [1, 2]^T$. Les figures 6.2, 6.3 et 6.4 suivantes montrent les résultats de simulation pour l'estimation de l'état x_2 et des paramètres θ_1 et θ_4 .

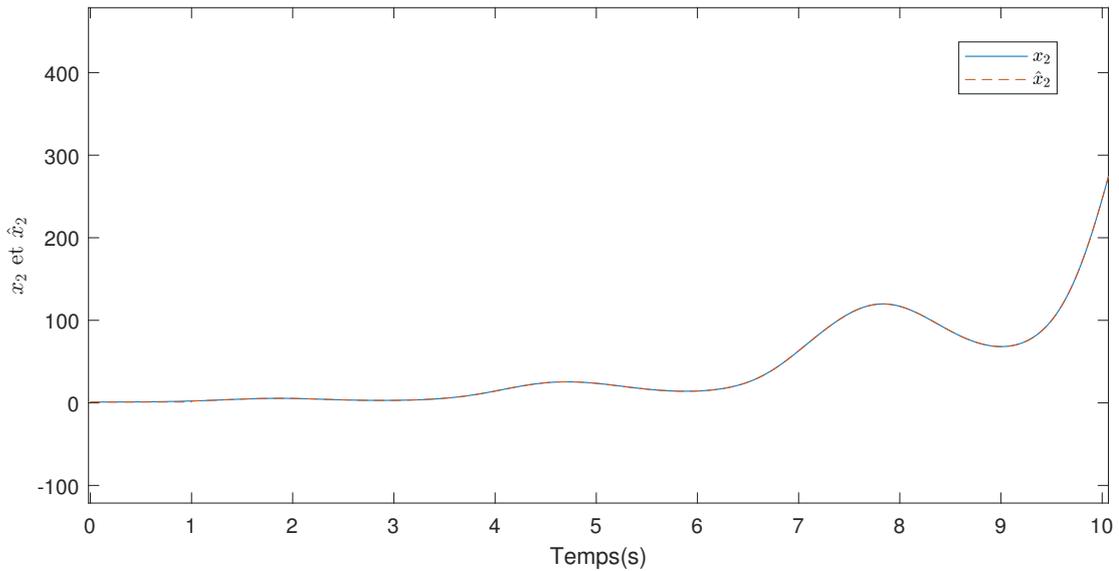


FIGURE 6.2 – L'état x_2 et son estimation \hat{x}_2

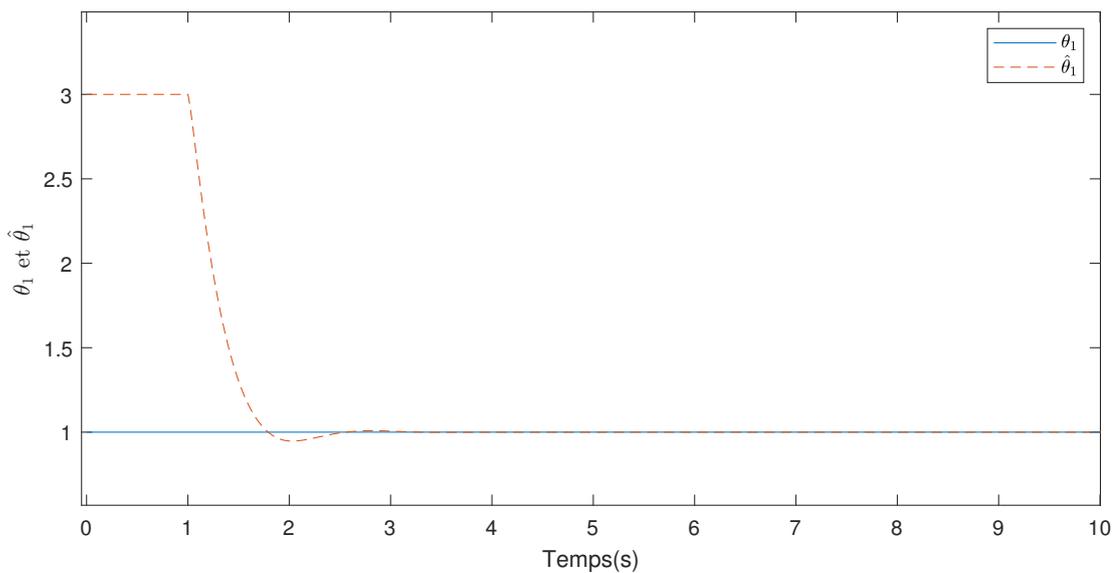
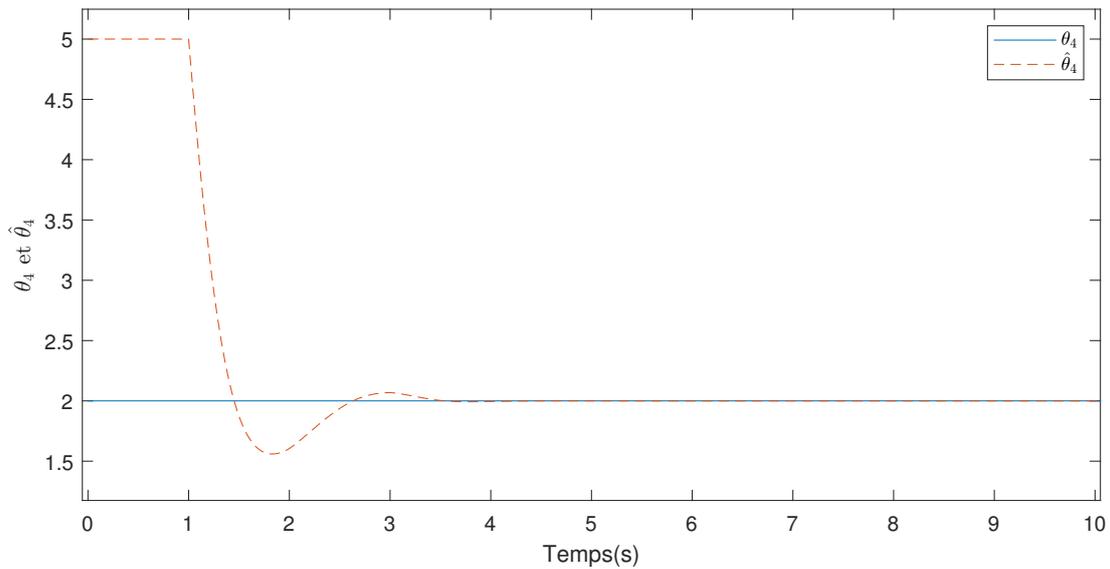


FIGURE 6.3 – Paramètre θ_1 et son estimation $\hat{\theta}_1$

FIGURE 6.4 – Paramètre θ_4 et son estimation $\hat{\theta}_4$

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'identifiabilité partielle ou globale de paramètres inconnus des interconnexions entre plusieurs systèmes dynamiques d'un réseau en présence des entrées inconnues. Un observateur à mode glissant a été proposé pour estimer les valeurs des paramètres identifiables. Un exemple a été donné et des simulations ont été effectuées pour illustrer les résultats obtenus. Notons que les résultats décrits ici sont obtenus à partir des résultats du chapitre précédent. Dans la suite de nos travaux, nous allons nous intéresser aux cas de réseau de systèmes dynamiques non linéaires à entrées inconnues et avec retard.

Estimation pour les TDS non linéaires

Sommaire

7.1	Introduction	123
7.2	Formulation du problème	124
7.3	Étude du cas sans les entrées inconnues	125
7.4	Étude du cas avec des entrées inconnues	128
7.5	Estimateur par modes glissants d'ordre supérieur	129
7.6	Exemple illustratif	131
7.7	Conclusion	135

7.1 Introduction

Par rapport aux TDS linéaires, les systèmes non linéaires à retard sont encore plus réalistes et leurs études permettent de se rapprocher au maximum des systèmes réels. Ce type de système est généralement très complexe. Mais de nombreux chercheurs ont effectué des travaux sur des systèmes non linéaires à retards et des résultats existent sous certaines conditions. La complexité augmente considérablement si l'on doit considérer ces systèmes en réseau.

Dans les Chapitres 5 et 6, nous avons évoqué l'identifiabilité topologique d'un réseau de systèmes dynamiques non linéaires. Dans ce chapitre, nous allons considérer le problème d'identification de la topologie comme un problème d'observation partielle ou globale des états et des paramètres inconnus d'un système non linéaire avec retards. Nous serons donc amenés à utiliser les résultats obtenus précédemment dans ce manuscrit.

7.2 Formulation du problème

Considérons une fois encore un réseau de k systèmes dynamiques où ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$) et dont le modèle mathématique général est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{f}(x(t-s\tau)) + \varphi(x(t))\theta + \tilde{g}(x(t-s\tau))\vartheta, & s \in \mathbb{N}, s\tau \in \mathcal{S} \\ y(t) = \bar{h}(x(t-s\tau)) \\ x(t) = x_0 \quad \forall t \in [-s\tau, 0] \end{cases} \quad (7.1)$$

où

$$\begin{aligned} x_i &= (x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i})^T \in \mathbb{R}^{n_i} \text{ et } x = (x_1^T, \dots, x_k^T)^T \in \mathbb{R}^n; \\ y_i &= (y_{i,1}, \dots, y_{i,p_i})^T \in \mathbb{R}^{p_i} \text{ et } y = (y_1^T, \dots, y_k^T)^T \in \mathbb{R}^p; \\ \vartheta_i &= (\vartheta_{i,1}, \dots, \vartheta_{i,m_i})^T \in \mathbb{R}^{m_i} \text{ et } \vartheta = (\vartheta_1^T, \dots, \vartheta_k^T)^T \in \mathbb{R}^m; \\ \theta_i &= (\theta_{i,1}, \dots, \theta_{i,q_i})^T \in \mathbb{R}^{q_i} \text{ et } \theta = (\theta_1^T, \dots, \theta_k^T)^T \in \mathbb{R}^q; \\ \tilde{g}_i(x_i(t-s\tau)) &= (\tilde{g}_{i,1}(x_i(t-s\tau)), \dots, \tilde{g}_{i,m_i}(x_i(t-s\tau))) \text{ et} \\ \tilde{g}(x(t-s\tau)) &= (\tilde{g}_1(x_1(t-s\tau)), \dots, \tilde{g}_k(x_k(t-s\tau))); \\ \varphi_{i,j}(x_j) &= (\varphi_{i,j}^1(x_j), \dots, \varphi_{i,j}^{n_i}(x_j))^T \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad \varphi_i(x) = (\varphi_{i,1}^T(x_1), \dots, \varphi_{i,q_i}^T(x_{q_i}))^T \in \mathbb{R}^{n_i \times q_i} \text{ et} \\ \varphi(x(t)) &= \text{diag}\{\varphi_1(x(t)), \dots, \varphi_k(x(t))\} \in \mathbb{R}^{(n+q) \times q}; \\ \bar{f}(x(t-s\tau)) &= \begin{pmatrix} \bar{f}_1(x_1(t-s\tau)) \\ \vdots \\ \bar{f}_k(x_k(t-s\tau)) \end{pmatrix}, \text{ et } \bar{h}(x(t-s\tau)) = \begin{pmatrix} \bar{h}_1(x_1(t-s\tau)) \\ \vdots \\ \bar{h}_k(x_k(t-s\tau)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

avec $n = \sum_{i=1}^k n_i$, $m = \sum_{i=1}^k m_i$, $p = \sum_{i=1}^k p_i$ et $q = \sum_{i=1}^k q_i$;

Le vecteur $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ représente le vecteur des états du sous système Σ_i du réseau, $y_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ le vecteur de sorties et $\vartheta_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ le vecteur des entrées inconnues. La constante positive τ représente un retard commensurable. Le paramètre $\theta_i \in \mathbb{R}^{q_i}$ représente le coefficient (constant mais inconnu) de connexion entre deux sous systèmes du réseau. La constante positive s_i est le coefficient du retard commensurable de base τ et \mathcal{S} est un ensemble fini des coefficient du retard.

Connaissant la dynamique des paramètres inconnus mais constants par intervalles, nous pouvons alors les considérer comme des états additionnels. Par conséquent, le modèle du réseau (7.1) peut alors être réécrit sous la forme suivante en définissant $\xi = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$ et en introduisant l'opérateur de retard δ tel que $x(t-s\tau) = \delta^s x(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = f(\xi, \delta) + g(\xi, \delta)\vartheta \\ y(t) = h(\xi, \delta) \\ z(t) = P\xi(t) \end{cases} \quad (7.2)$$

où $\xi \in \mathbb{R}^{n+q}$, $f(\xi, \delta) = \bar{f}(x(t-s)) + \varphi(x(t))\theta$ et $\bar{h}(\xi, \delta) = h(x(t-s\tau))$. Comme dans le Chapitre 5, la matrice P est choisie en fonction des états et des paramètres inconnus dont on veut étudier l'identifiabilité. Étant donné la complexité du système (7.2), nous allons entamer notre étude avec le cas le plus simple, c'est-à-dire en supposant qu'il n'y a pas d'entrées inconnues.

7.3 Étude du cas sans les entrées inconnues

Dans cette section, on suppose que $\vartheta = 0$. Le système (7.2) peut alors être écrit sous sa forme simplifiée suivante

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = f(\xi, \delta) \\ y(t) = h(\xi, \delta) \\ z(t) = P\xi(t) \end{cases} \quad (7.3)$$

En considérant les paramètres inconnus du système (7.1) comme des variables d'état avec des dynamiques nulles, l'identification des paramètres inconnus peut alors dans ce cas être résumée à un simple problème d'observabilité des états. Nous allons donc rappeler les définitions de l'observabilité algébrique (pour l'état x dans (7.1)) et de l'identifiabilité algébrique (pour les paramètres θ dans (7.1)) pour un système non linéaire à retards.

Auparavant, définissons \mathcal{K} comme un domaine des fonctions méromorphes d'un nombre fini de variables dans

$$\{x(t-j\tau), j = 0, 1, \dots, s; s \in \mathbb{N}\}$$

Notons $\mathcal{K}[\delta]$ l'anneau non-commutatif du polynôme de l'opérateur δ avec des coefficients définis sur \mathcal{K} :

$$\mathcal{K}[\delta] = \sum a_i \delta^i, a_i \in \mathcal{K}.$$

Introduisons aussi un opérateur d'avance ∇ tel que $x(t+s\tau) = \nabla^s x(t)$ et $\mathcal{K}(\delta, \nabla)$ un anneau polynômial tel que $\mathcal{K}(\delta, \nabla) = \sum a_i \delta^i + \sum b_i \nabla^i, a_i, b_i \in \mathcal{K}$.

Définissons $\mathcal{M} = \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{d\epsilon | \epsilon \in \mathcal{K}\}$ comme étant un module à gauche défini sur $\mathcal{K}(\delta)$ et $\mathcal{Y} = \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{dy, d\dot{y}, \dots\}$ comme étant un sous module de \mathcal{M} . Soient $\mathcal{X} = \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{dx\}$, $\Theta = \text{span}\{d\theta\}$ et $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^q$ tels que $\theta \in \mathcal{P}$. Soient \mathcal{I} un ensemble des fonctions initiales défini sur $[-s\tau, 0]$ et $\mathcal{W} = \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ tels que

$$(\theta, x_0) \rightarrow (\theta, \delta^j y^{(i)}(t), i, j := 0, 1, \dots, l).$$

Définition 7.1. (*Identifiabilité algébrique pour les TDS*) [ZHANG et al., 2006] Le système (7.1), est dit être algébriquement identifiable s'il existe un entier positif $l \geq 0$, un ensemble ouvert \mathcal{W} et une fonction méromorphe ϕ tels que $\theta = \phi(y^{(i)}(t-j), i, j = 0, 1, \dots, l)$ est vrai pour tout $(\theta, x_0) \in \mathcal{W}$.

Dans la suite, des conditions nécessaires à l'identification partielle ou globale des états et des paramètres inconnus seront déduites pour le système (7.3). Sans perte de généralité, supposons

que les composantes de h du système (7.3) sont linéairement indépendantes. Notons $\Xi = \{\mathcal{X} + \Theta\}$ et

$$\mathcal{F}_l = \Xi \cap \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{dy, d\dot{y}, \dots, dy^{(l)}\}$$

pour $l \in \mathbb{N}$. Il a été montré dans [ZHANG et al., 2006] que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}_{n+q}$.

Définissons le matrice d'observabilité $\partial\Omega$ comme suit :

$$\partial\Omega = \frac{\partial[h_1, L_f h_1, \dots, L_f^{n_1-1} h_1, \dots, h_p, \dots, L_f^{n_k-1} h_p]^T}{\partial\xi} \quad (7.4)$$

et le résultat suivant a été présenté dans ZHANG et al., 2006.

Théorème 7.1. *Le paramètre θ du système (7.1) est identifiable (respectivement z du système (7.3) est observable) si le rang $_{\mathcal{K}(\delta)}\partial\Omega = n + q$ dans le sens où ses colonnes sont indépendantes sur $\mathcal{K}(\delta)$. \diamond*

La condition requise dans le théorème ci-dessus pour l'observabilité des états ainsi que pour l'identifiabilité des paramètres du système est relativement forte. Cette condition suffisante exige que tous les états du système soient observables. Sachant que tous les paramètres ne dépendent pas de tous les états du système, on proposera ci-après un algorithme pour relâcher la condition du Théorème 7.1. Ainsi, on pourra identifier tout ou partie des paramètres du système même si tous les états ne sont pas observables.

Notons \mathcal{K}_ω comme étant une fonction méromorphe d'un nombre fini de variables dans $\{\omega(t - j\tau), j = 1, \dots, s, s \in \mathbb{N}\}$ et $\mathcal{K}_\omega(\delta)$ un anneau polynômial défini sur \mathcal{K}_ω tel que

$$\mathcal{K}_\omega(\delta) = \sum c_i \delta^i, \quad c_i \in \mathcal{K}_\omega.$$

L'algorithme suivant est proposé pour assouplir la condition suffisamment forte énoncée dans le Théorème 7.1.

Algorithme 7.1.

1. Initialisation :

- $b_j = 0, j = 1, \dots, p;$
- $\omega_0 = \{\omega_{1,0}, \dots, \omega_{p,0}\}$, avec $\omega_{j,0} = \Xi \cap \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{h_j\};$
- $\mathcal{F}_0 = \{\mathcal{F}_{1,0}, \dots, \mathcal{F}_{p,0}\}$ avec $\mathcal{F}_{j,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,0}}\{d\omega_{j,0}\};$
- $i = 1.$

2. Itération i : Calculer $\mathcal{L}_i = \text{span}_{\mathcal{K}_{\omega_{i-1}}(\delta)}\{d\omega_{i-1}\};$

3. Calculer $\partial\Omega_i = \frac{\partial\omega_{i-1}^T}{\partial\xi}$ et pour la matrice P correspondant à z , déterminer la matrice $K_i(\xi, \delta)$ telle que $P = K_i(\xi, \delta)\partial\Omega_i$. Notons $K_i(\xi, \delta)$ la j ème ligne de la matrice $K_i^j(\xi, \delta);$

- 4. — Vérifier si tous les $K_i^j(\xi, \delta) \notin \mathcal{L}_i$, alors aller au 5;
- Dans le cas contraire, aller au 8;

5. Déterminer :

- $\omega_i = \{\omega_{1,i}, \dots, \omega_{p,i}\}$ avec $\omega_{j,i} = \Xi \cap \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{h_j, \dots, h_j^{(b_j+1)}\}$;
- $\mathcal{F}_i = \{\mathcal{F}_{1,i}, \dots, \mathcal{F}_{p,i}\} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_i}\{d\omega_i\}$ avec $\mathcal{F}_{j,i} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,i}}\{d\omega_{j,i}\}$;

6. Vérifier si $\mathcal{F}_{j,i} \not\subset \{\mathcal{F}_{i-1} \cup \{\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{j,i}\}\}$, alors $b_j = b_j + 1$;

7. Vérifier :

- si $\mathcal{F}_{i-1} \subset \mathcal{F}_i$, alors incrémenter i puis retourner au 2 pour l'itération suivante;
- Sinon, aller au 8;

8. Stopper la boucle. Alors noter $\partial\Omega = \partial\Omega_i$, $\omega = \omega_{i-1}$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_i$, et $K(\xi, \delta) = K_i(\xi, \delta)$.

9. Fin de l'algorithme.

A la fin de l'application de l'algorithme, si $K(\xi, \delta) \notin \mathcal{L}$, alors z n'est pas observable.

Théorème 7.2. Si la matrice $K(\xi, \delta)$ existe après l'application de l'Algorithme 7.1 telle que $P = K(\xi, \delta)\partial\Omega$ et que les composantes de tous les éléments des lignes de $K(\xi, \delta)$ satisfont $K^j(\xi, \delta) \in \mathcal{L}$, alors z est observable. \diamond

Preuve. D'après la définition de \mathcal{L}_i , celui-ci définit l'espace observable à chaque itération i . Après l'application de l'Algorithme 7.1 au système (7.3), on obtient des matrices $\mathcal{K}_i(\xi)$ et $d\Omega$ telles que $P = \mathcal{K}(\xi)d\Omega$. Si $\mathcal{K}^j(\xi) \in \mathcal{L}$, alors tous les éléments dans $\mathcal{K}(\xi)$ sont générés par \mathcal{L} . Et donc, cela implique que $z = P\xi$ est observable. \blacksquare

Remarque 7.1. La matrice $\partial\Omega \in \mathcal{K}^{r \times (n+q)}(\delta)$ étant de rang plein dans le sens des lignes, il existe son inverse à droite $[\partial\Omega]_R^{-1} \in \mathcal{K}^{(n+q) \times r}(\delta, \nabla)$ telle que $\partial\Omega[\partial\Omega]_R^{-1} = I_r$.

Alors, la matrice $K(\xi, \delta)$ peut être déterminée comme suit :

$$K(\xi, \delta) = P[\partial\Omega]_R^{-1}. \quad (7.5)$$

En supposant que la matrice P est choisie de sorte que $K(\xi, \delta) \in \mathcal{L}$ (ce qui signifie que z correspondant à P choisie est observable), le lemme suivant est valable.

Lemme 7.1. Il existe deux fonctions $F_1(\delta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})$ et $F_2(\delta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})$ telles que :

$$F_1(\delta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})z = F_2(\delta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}). \quad (7.6)$$

Preuve. A partir du système (7.3), on a $z = P\xi$ dont la dérivée nous donne $dz = d(P\xi) = Pd\xi$. Sachant que $P = K(\xi, \delta)\partial\Omega$ et en remplaçant P dans la relation précédente, on obtient $dz = K(\xi, \delta)\partial\Omega d\xi$. Notons $d\Omega = \partial\Omega d\xi$, alors on a $dz = K(\xi, \delta)d\Omega$.

Remarquons que dz est une 1-forme fermé, cela implique que $K(\xi, \delta)d\Omega$ est aussi une 1-forme fermé. Par conséquent, nous avons $d(F(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})) = dz$, ce qui implique que

$$z = F(\delta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}) \text{ où } F(\delta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}) = \frac{\bar{g}(\delta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})}{g(\delta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})}.$$

\blacksquare

Après avoir déduit la condition suffisante moins restrictive sur l'observabilité de z , un observateur approprié, comme par exemple un observateur par modes glissant, peut alors être proposé pour l'estimation de celui-ci.

7.4 Étude du cas avec des entrées inconnues

Dans cette partie, nous allons étendre les résultats en prenant en compte les entrées inconnues. Pour rappel, ces entrées inconnues peuvent être des perturbations ou des bruits.

Étant donné que nous prenons en compte les entrées inconnues, l'algorithme 7.1 ne convient donc plus pour l'estimation des états et des paramètres inconnus du système considéré. Comme dans le Chapitre 6, la méthode la mieux adaptée est d'annihiler l'effet des entrées inconnues afin d'aller plus loin dans la dérivation des sorties. Il paraît donc nécessaire d'optimiser l'Algorithme 7.1 pour étendre les résultats au systèmes avec des entrées inconnues. Pour cela, en se référant toujours aux résultats présentés dans [BARBOT et al., 2009], définissons un espace $G = \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{\tilde{g}_1(\xi, \delta), \dots, \tilde{g}_m(\xi, \delta)\}$ dont on note son annihilateur G^\perp tel que $G^\perp G = 0$. Définissons aussi un vecteur

$$V = (L_f^{b_1} h_1, \dots, L_f^{b_p} h_p)^T$$

et la matrice

$$\Gamma = \begin{pmatrix} L_{\tilde{g}_1} L_f^{b_1} h_1 & \cdots & L_{\tilde{g}_m} L_f^{b_1} h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\tilde{g}_1} L_f^{b_p} h_p & \cdots & L_{\tilde{g}_m} L_f^{b_p} h_p \end{pmatrix}.$$

L'algorithme 7.1 peut être adapté comme suit pour estimer les états et les paramètres inconnus en présence des entrées inconnues.

Algorithme 7.2.

1. Initialisation :

- $b_j = 0, j = 1, \dots, p$;
- $\omega_0 = \{\omega_{1,0}, \dots, \omega_{p,0}\}$, avec $\omega_{j,0} = \Xi \cap \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{h_j\}$;
- $\mathcal{F}_0 = \{\mathcal{F}_{1,0}, \dots, \mathcal{F}_{p,0}\}$ avec $\mathcal{F}_{j,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,0}}\{d\omega_{j,0}\}$;
- $G = \text{span}\{\tilde{g}_1(\xi, \delta), \dots, \tilde{g}_m(\xi, \delta)\}$;
- $i = 1$ et $l^* = 0$.

2. Calculer $\mathcal{L}_i = \text{span}_{\mathcal{K}_{\omega_{i-1}}(\delta)}\{d\omega_{i-1}\}$ et G^\perp l'annihilateur de G tel que

$$G^\perp = \text{span}\{\bar{\mathfrak{D}} \in \mathcal{L}_i \mid \bar{\mathfrak{D}} \tilde{g} = 0, \forall \tilde{g} \in G\};$$

3. Calculer $\partial\Omega_i = \frac{\partial\omega_{i-1}^T}{\partial\xi}$;

4. Pour la matrice P correspondant à z , déterminer la matrice $K_i(\xi, \delta)$ telle que $P = K_i(\xi, \delta)\partial\Omega_i$. Notons $K_i(\xi, \delta)$ la jème ligne de la matrice $K_i^j(\xi, \delta)$;

5. Vérifier si tous les $K_i^j(\xi, \delta) \notin \mathcal{L}_i$, alors aller au 6; Dans le cas contraire, aller au 11;
6. Calculer $V_i = (L_f^{b_1} h_1, \dots, L_f^{b_l} h_1)^T$ et

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} \Gamma_{1,i} \\ \vdots \\ \Gamma_{p,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{\bar{g}_1} L_f^{b_1} h_1 & \cdots & L_{\bar{g}_m} L_f^{b_1} h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\bar{g}_1} L_f^{b_p} h_p & \cdots & L_{\bar{g}_m} L_f^{b_p} h_p \end{pmatrix};$$
 - Vérifier si $\Gamma_i = 0$ alors aller au 8;
 - Sinon, aller au 7;
7. Déterminer $G^\perp \cap \mathcal{L}_i$ et noter $\Upsilon_i = \{\bar{\delta} \in G^\perp \cap \mathcal{L}_i \mid V_i \bar{\delta} \notin \omega_i\}$;
Si $\Upsilon_i \neq 0$, il existe une nouvelle sortie fictive. Alors, incrémenter l^* puis calculer $\bar{y} = V_i \bar{\delta}$ et $y_{p+l^*} = \bar{y} \bmod \omega$. Ensuite, recalculer $\Gamma_i = (\Gamma_{1,i}, \dots, \Gamma_{p+l^*,i})^T$ avec $\Gamma_{p+l^*,i} = 0$.
8. Calculer :
 - $\omega_i = \{\omega_{1,i}, \dots, \omega_{p+l^*,i}\}$ avec $\omega_{j,i} = \Xi \cap \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{h_j, \dots, h_j^{(b_j+1)}\}$ et pour $j = 1, \dots, p+l^*$;
 - $\mathcal{F}_i = \{\mathcal{F}_{1,i}, \dots, \mathcal{F}_{p+l^*,i}\} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_i}\{d\omega_i\}$ avec $\mathcal{F}_{j,i} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,i}}\{d\omega_{j,i}\}$;
9. Vérifier si $\mathcal{F}_{j,i} \not\subset \{\mathcal{F}_{i-1} \cup \{\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{j,i}\}\}$ et que $\Gamma_{j,i} = 0$, alors $b_j = b_j + 1$;
10. Vérifier si $\mathcal{F}_{i-1} \subset \mathcal{F}_i$, alors incrémenter i puis retourner au 2) pour l'itération suivante; sinon, aller au 11;
11. Noter $\partial\Omega = \partial\Omega_i$, $\omega = \omega_{i-1}$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_i$, et $K(\xi, \delta) = K_i(\xi, \delta)$.
12. Fin de l'algorithme.

A la fin de l'application de l'algorithme, si $K(\xi, \delta) \notin \mathcal{L}$, alors z n'est pas observable.

Après l'application de l'algorithme, le Théorème 7.2 et le Lemme 7.1 peuvent alors s'appliquer pour la suite de l'étude de l'estimation des états et des paramètres inconnus du système considéré.

7.5 Estimateur par modes glissants d'ordre supérieur

L'étude de l'observabilité des états et de l'identifiabilité des paramètres inconnus ayant été réalisée dans la section précédente, un observateur peut alors être proposé pour estimer les états observables et les paramètres identifiables.

Si le vecteur des paramètres inconnus θ est identifiable, selon la Définition 7.1, il est possible de déterminer algébriquement θ comme une fonction des sorties y du système et de ses dérivées $\{\dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(k)}\}$.

En se référant au Lemme 7.1, il paraît clair que (7.6) aurait un problème de la singularité si $g(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$ passe par zéro à certaines valeurs de y et de ses dérivées. [XIA, 2003]. Ainsi, nous nous proposons d'utiliser un observateur à mode glissant pour l'estimation des états et des paramètres du réseau considéré.

Le principe des observateurs par modes glissants consiste à contraindre, à l'aide de fonctions discontinues, les dynamiques d'un système d'ordre n à converger vers une variété S de dimension

($n-p$) dite surface de glissement (p étant la dimension du vecteur de mesures). Nous ne détaillerons pas plus ici les développements théoriques afférents à cette méthode. Le lecteur intéressé pourra se référer aux ouvrages [EDWARDS et al., 1998; PERRUQUETTI et al., 2002; УТКИН, 1992] ou aux tutoriaux [BARTOLINI et al., 1999; SIRA-RAMIREZ, 1992]. Ici, nous allons utiliser ce qu'on appelle "un différentiateur exacte robuste en temps fini par modes glissants d'ordre supérieur" (real-time exact robust HOSM differentiator) [LEVANT, 2003; LEVANT et al., 2012] (une forme similaire de différentiateur avec une preuve de convergence par fonction de Lyapunov peut être trouvée dans [BARBOT et al., 2010]). Une procédure de conception d'un tel différentiateur est rappelée dans ce qui suit. Considérons un signal $y(t) \in C^{k^*}$ (c'est à dire au moins k^* fois dérivable), et supposons que $(y, \dots, y^{(k^*)}) = (Z_1, \dots, Z_{k^*+1})$. Le différentiateur robuste proposé par Levant dans [LEVANT, 2005] prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{Z}}_1 &= -\lambda_0 M^{\frac{1}{k^*}} |\hat{Z}_1 - y|^{\frac{k^*}{k^*+1}} \text{sign}(\hat{Z}_1 - y) + \hat{Z}_2 = v_1; \\ \dot{\hat{Z}}_2 &= -\lambda_1 M^{\frac{1}{k^*-1}} |\hat{Z}_2 - v_1|^{\frac{k^*-1}{k^*}} \text{sign}(\hat{Z}_2 - v_1) + \hat{Z}_3 = v_2; \\ &\vdots \\ \dot{\hat{Z}}_{k^*} &= -\lambda_{k^*-1} M^{\frac{1}{2}} |\hat{Z}_{k^*} - v_{k^*-1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{Z}_{k^*} - v_{k^*-1}) + \hat{Z}_{k^*+1} = v_{k^*}; \\ \dot{\hat{Z}}_{k^*+1} &= -\lambda_{k^*} M \text{sign}(\hat{Z}_{k^*+1} - v_{k^*}).\end{aligned}$$

où M est choisi pour être plus grand que la k^* -ième dérivée de $y(t)$, λ_i sont des paramètres de conception définis positifs. Il est à noter que le réglage de ces paramètres est décrit en détail dans [LEVANT, 1998] et [LEVANT, 2003]. Soient les erreurs d'observation définies comme : $e_i = Z_i - \hat{Z}_i$. Les dynamiques des erreurs d'observation sont alors données par :

$$\begin{aligned}e_1 &= \hat{Z}_1 - y; \\ e_2 = \dot{e}_1 &= \lambda_0 M^{\frac{1}{k^*}} |e_1|^{\frac{k^*}{k^*+1}} \text{sign}(e_1); \\ &\vdots \\ e_{k^*} = \dot{e}_{k^*-1} &= \lambda_{k^*-1} M^{\frac{1}{2}} |e_{k^*-1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{k^*-1}); \\ e_{k^*+1} = \dot{e}_{k^*} &= \lambda_{k^*} M \text{sign}(e_{k^*}).\end{aligned}$$

Il a été prouvé dans [LEVANT, 2003] qu'il existe un t_0 tel que $\forall t > t_0$, nous avons

$$e_i = Z_i - \hat{Z}_i = 0$$

pour $1 \leq i \leq k^* + 1$. Ceci nous permet donc d'obtenir les dérivées des sorties souhaitées en temps fini.

Comme le système considéré possède p sorties mesurées et l^* sorties fictives, alors il nous faudra construire $p + l^*$ différentiateurs. Dans la section suivante, un exemple est proposé pour illustrer les résultats obtenus.

7.6 Exemple illustratif

Considérons le réseau de systèmes non linéaires à retards suivant (Figure 7.1) :

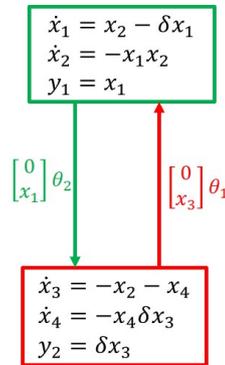


FIGURE 7.1 – Réseau formé par 2 systèmes dynamiques à retards

Le modèle de l'ensemble du réseau est décrit par la forme groupée suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - \delta x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 + \theta_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + x_4 \\ \dot{x}_4 = x_4 \delta x_3 + \theta_2 x_1 \\ y_1 = x_1; y_2 = \delta x_3 \end{cases} \quad (7.7)$$

où $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ représente le vecteur des états et $y = (y_1, y_2)^T$ le vecteur des sorties. Soit $z = (\theta_1, \theta_2)^T$ les paramètres inconnus à identifier.

Le système (7.7) peut alors être réécrit sous la forme de (7.3) :

$$\begin{cases} \xi = (x^T, \theta^T)^T \\ \dot{\xi} = f(\xi, \delta) \\ y = (y_1, y_2)^T \end{cases}$$

où $f(\xi, \delta) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \theta_1, \theta_2, \delta)$.

On a alors $\xi = (x_1, x_2, x_3, x_4, \theta_1, \theta_2)^T$. La matrice P correspondant à z est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, en appliquant l'Algorithme 7.1 au système, on a :

- Initialisation : On initialise $\omega_0 = \{y_1, y_2\}$, $\mathcal{F}_{1,0} = \text{span}_{y_1}\{d\xi_1\}$, $\mathcal{F}_{2,0} = \text{span}_{y_2}\{d(\delta\xi_3)\}$, $\mathcal{F}_0 = \text{span}_{\omega_0}\{d\xi_1, d(\delta\xi_3)\}$ et $b_1 = b_2 = 1$. En suite, on procède à la première itération.

— Itération 1 ($i=1$) : On détermine $\mathcal{L}_1 = \text{span}_{\mathcal{K}_{\omega_0}(\delta)}\{d\omega_0\} = \text{span}_{\mathcal{K}_{\omega_0}(\delta)}\{d\xi_1, d\delta\xi_3\}$;

$$\partial\Omega_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K_1(\xi, \delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $K_1^j(\xi, \delta) \notin \mathcal{L}_1$ pour $j = 1, 2$. Alors on calcule

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \{y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2\} \\ \mathcal{F}_{1,1} &= \text{span}_{\{y_1, \dot{y}_1\}}\{d\xi_1, d\xi_2\} \\ \mathcal{F}_{2,1} &= \text{span}_{\{y_2, \dot{y}_2\}}\{d\delta\xi_3, d\delta\xi_4\} \text{ et} \\ \mathcal{F}_1 &= \text{span}_{\omega_1}\{d\xi_1, d\xi_2, d\delta\xi_3, d\delta\xi_4\}. \end{aligned}$$

On vérifie aussi que $\mathcal{F}_{j,1} \not\subset \{\mathcal{F}_0 \cap \{\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_{j,1}\}\}$ avec $j = 1, 2$, alors on fait $b_1 = b_2 = 2$;

Notons que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$, donc on entame la deuxième itération.

— Itération 2 ($i=2$) : On détermine

$$\mathcal{L}_2 = \text{span}_{\mathcal{K}_{\omega_1}(\delta)}\{d\omega_1\} = \text{span}_{\mathcal{K}_{\omega_1}(\delta)}\{d\xi_1, d\xi_2, d\delta\xi_3, d\delta\xi_4\};$$

$$\partial\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & \delta & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K_2(\xi, \delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Ensuite on vérifie que $K_2^j(\xi) \notin \mathcal{L}_2$, $j = 1, 2$, et donc on calcule :

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \{y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2\}, \\ \mathcal{F}_{1,2} &= \text{span}_{\{y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1\}}\{d\xi_1, d\xi_2, d(\xi_3\xi_5)\}, \\ \mathcal{F}_{2,2} &= \text{span}_{\{y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2\}}\{d\delta\xi_3, d\delta\xi_4, d(\delta\xi_1\xi_6)\}, \text{ et} \\ \mathcal{F}_2 &= \text{span}_{\omega_2}\{d\xi_1, d\xi_2, d\delta\xi_3, d\delta\xi_4, d(\xi_3\xi_5), d\xi_6\}. \end{aligned}$$

On peut alors vérifier que

— $\mathcal{F}_{1,2} \not\subset \{\mathcal{F}_1 \cap \{\mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{F}_{1,2}\}\}$ donc $b_1 = 3$;

— $\mathcal{F}_{2,2} \not\subset \{\mathcal{F}_1 \cap \{\mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{F}_{2,2}\}\}$ donc $b_2 = 3$.

On peut aussi vérifier que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, donc on procède à l'itération suivante.

— Itération 3 (i=3) : On détermine d'abord

$$\mathcal{L}_3 = \text{span}_{\mathcal{K}_{\omega_2}(\delta)}\{d\omega_2\} = \text{span}_{\mathcal{K}_{\omega_2}(\delta)}\{d\xi_1, d\xi_2, d\delta\xi_3, d\delta\xi_4, d(\xi_3\xi_5), d\xi_6\};$$

$$\partial\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta^2 - \xi_2 & -\delta - \xi_1 & \theta_1 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & \delta & 0 & 0 \\ \theta_2\delta & 0 & \delta\xi_4\delta + \delta & -\delta + \delta^2\xi_3\delta & 0 & \delta\xi_1 \end{pmatrix};$$

$$[\partial\Omega_2]_R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla & \nabla & 0 \\ \frac{\delta^2\xi_1}{\delta\xi_3} & \frac{\delta^2+\delta\xi_1}{\delta\xi_3} & \frac{\delta}{\delta\xi_3} & \frac{-\theta_1}{\delta\xi_3} & 0 & 0 \\ \frac{-\theta_2}{\delta\xi_1} & 0 & 0 & \frac{-\delta^2\xi_3}{\delta\xi_1} & \frac{1-\delta^2\xi_3}{\delta\xi_1} & \frac{1}{\delta\xi_1} \end{pmatrix} \text{ et donc}$$

$$K_3(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2\xi_1}{\delta\xi_3} & \frac{\delta^2+\delta\xi_1}{\delta\xi_3} & \frac{\delta}{\delta\xi_3} & \frac{-\theta_1}{\delta\xi_3} & 0 & 0 \\ \frac{-\theta_2}{\delta\xi_1} & 0 & 0 & \frac{-\delta^2\xi_3}{\delta\xi_1} & \frac{1-\delta^2\xi_3}{\delta\xi_1} & \frac{1}{\delta\xi_1} \end{bmatrix},$$

avec $\partial\Omega_2 \in \mathcal{K}(\delta)^{n \times \sum b_j}$ et $[\partial\Omega_2]_R^{-1} \in \mathcal{K}(\delta, \nabla)^{\sum b_j \times n}$.

Pour $j = 1, 2$ on a $K_3^j(\xi) \in \mathcal{L}$, donc on stoppe l'algorithme. On remarque que le Théorème 7.2 est satisfaite, et z du système (7.7) est alors observable.

D'où, les paramètres θ_1 et θ_2 du système (7.7) sont identifiables. L'observateur proposé peut donc nous permettre d'estimer ces paramètres identifiables.

Par un simple calcul algébrique, nous avons $P = K(\xi, \delta)\partial\Omega$ et $z = P\xi$, dont la dérivée nous donne $dz = Pd\xi = K(\xi, \delta)\partial\Omega d\xi$.

En définissant $\partial\Omega d\xi = d\Omega = (dy_1, d\dot{y}_1, d\ddot{y}_1, dy_2, d\dot{y}_2, d\ddot{y}_2)^T$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\delta^2 y_1}{y_2} dy_1 + \frac{\delta^2 + \delta y_1}{y_2} d\dot{y}_1 + \frac{\delta}{y_2} d\ddot{y}_1 - \frac{\xi_5}{y_2} dy_2 & = d\xi_5 \\ -\frac{\xi_6}{\delta y_1} dy_1 - \frac{\delta y_2}{\delta y_1} dy_2 + \frac{1 - \delta y_2}{\delta y_1} d\dot{y}_2 + \frac{1}{\delta y_1} d\ddot{y}_2 & = d\xi_6 \end{cases}$$

lequel équivaut à

$$\begin{cases} d(\theta_1 y_2) = d(y_1 \delta^2 y_1 + \dot{y}_1 (\delta^2 + \delta y_1) + \delta \ddot{y}_1) \\ d(\theta_2 \delta y_1) = d(-y_2 \delta y_2 + (1 - \delta y_2) \dot{y}_2 + \ddot{y}_2) \end{cases}$$

et au final on obtient

$$\begin{cases} \theta_1 & = \frac{y_1 \delta^2 y_1 + \dot{y}_1 (\delta^2 + \delta y_1) + \ddot{y}_1 \delta}{y_2} \\ \theta_2 & = \frac{-y_2 \delta y_2 + \dot{y}_2 (1 - \delta y_2) + \ddot{y}_2}{\delta y_1} \end{cases}$$

À partir de ce résultat, nous pouvons alors concevoir un observateur par modes glissants pour estimer les paramètres inconnus du système.

La simulation numérique a été réalisée sous Matlab en utilisant la méthode d'Euler avec un pas fixe $h = 0.001$. Les conditions initiales sont $x(0) = [1, 1, 1, 1, 1, 1]^T$, $\hat{x}(0) = [1, 0, -1, -2, 3, 2, 1]^T$ et $\hat{\theta}(0) = [3, 5]^T$. Les valeurs réels des paramètres sont $[\theta_1, \theta_4]^T = [2, 4]^T$. Les figures 7.2 et 7.3 suivantes montrent les résultats de simulation pour l'estimation des paramètres θ_1 et θ_2 .

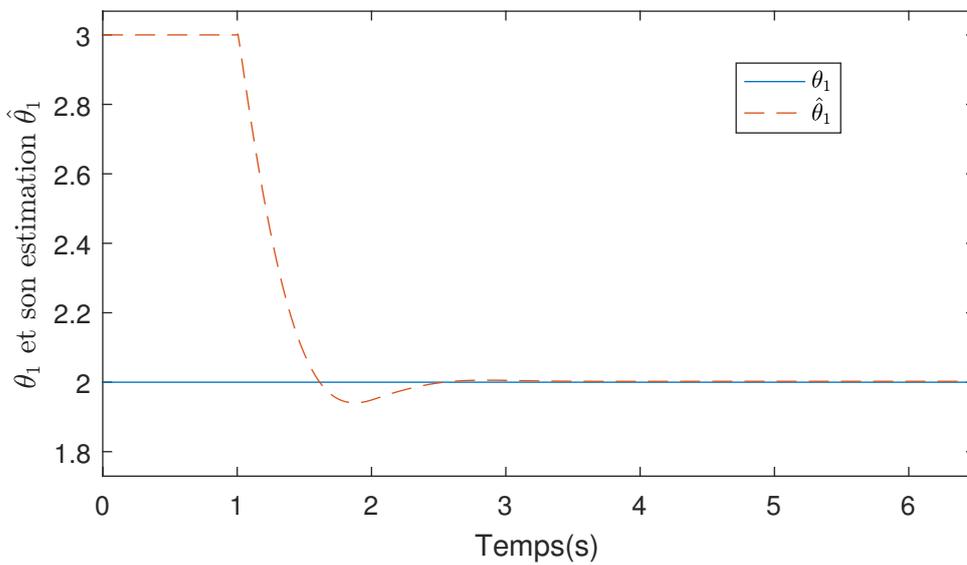


FIGURE 7.2 – Paramètre θ_1 et son estimation $\hat{\theta}_1$

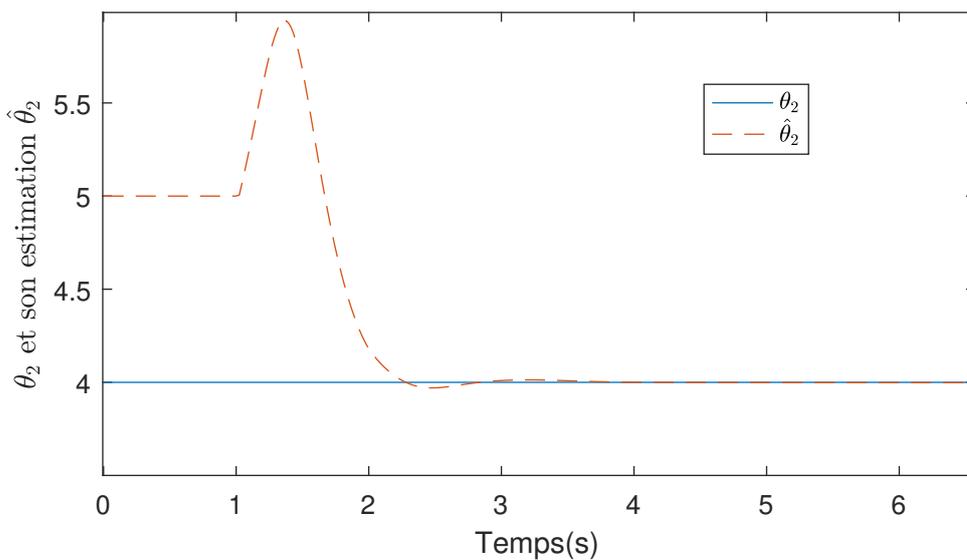


FIGURE 7.3 – Paramètre θ_2 et son estimation $\hat{\theta}_2$

7.7 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude sur l'identification paramétrique d'un réseau de systèmes non linéaires à retard commensurable a été présentée. Le problème de l'identifiabilité partielle ou totale de paramètres inconnus a été étudié et un algorithme a été proposé pour résoudre ce problème. Un exemple illustratif a également été proposé pour prouver l'efficacité de la méthode proposée. Les résultats obtenus sont l'extension des résultats que nous avons obtenus dans le chapitre précédent pour des réseaux de systèmes non linéaires sans retard.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

Cette thèse est construite autour de la problématique de l'estimation des systèmes dynamiques complexes. Elle englobe l'étude de l'observabilité et de l'identifiabilité pour les systèmes dynamiques en général et la proposition d'estimateurs en temps fini. Dans un premier temps, nous avons fait un petit rappel sur les systèmes complexes qui sont une association de systèmes dynamiques linéaires et non linéaires avec ou sans retards.

Nos contributions ont été regroupées en deux grandes parties : la première partie est consacrée aux systèmes complexes linéaires et la deuxième est consacrée aux systèmes complexes non linéaires.

La première grande partie est constituée de trois (3) chapitres. Nous avons donc présenté dans le Chapitre 2 les résultats de nos études sur l'estimation en temps fini des états et des paramètres inconnus d'un réseau de systèmes dynamiques linéaires. Ainsi, nous avons formulé le problème qui a retenu notre attention, c'est-à-dire le problème de l'identification topologique en le ramenant sous la forme d'un problème d'identification de paramètres. Ensuite, nous avons imposé des hypothèses et déduit des conditions qui nous ont permis de proposer un estimateur impulsif. Un exemple illustratif a été présenté afin de bien montrer que l'estimateur (observateur d'états et des paramètres inconnus) proposé converge en temps fini.

Dans le chapitre 3, nous avons fait une analyse de l'observation des systèmes à retards. Des définitions sur les matrices polynômiales, les anneaux, ainsi que sur l'inversion à gauche et à droite y sont présentées. Des conditions suffisantes ont été ensuite déduites, ce qui nous a permis de proposer un observateur en temps fini. L'observateur proposé est basé sur une combinaison de deux observateurs de type Luenberger et converge en un temps fixe prédéterminé. Un exemple a été donné à la fin du chapitre, dans lequel des résultats de simulation ont été présentés pour illustrer l'efficacité de l'observateur proposé.

Le chapitre 4 a fait l'objet d'études sur l'observation des systèmes dynamiques à entrées inconnues. Dans ce chapitre, les résultats du chapitre 3 ont été utilisés. Le chapitre a été subdivisé en deux parties : l'une traitant le cas le plus simple, c'est-à-dire le cas où les entrées inconnues n'ont pas d'effets directs sur les sorties, et l'autre généralisant les résultats obtenus dans la première partie au cas où les entrées inconnues apparaissent dans les sorties. Il est important de rappeler que les entrées inconnues représentent des perturbations ou des phénomènes extérieurs qui peuvent survenir à tout moment et sur lesquels on n'a aucun contrôle.

Dans la deuxième grande partie du manuscrit, le Chapitre 5 nous plonge dans un monde

beaucoup plus complexe. En effet, nous y avons présenté le problème de l'estimation d'un réseau de systèmes non linéaires. Nos investigations se sont focalisées sur l'observation simultanée des états et des paramètres inconnus d'un réseau de systèmes non linéaires. Des conditions nécessaires ont été déduites et un algorithme a été proposé pour permettre l'observabilité partielle des états et l'identifiabilité partielle des paramètres inconnus.

Le chapitre 6 a fait l'objet d'une extension des résultats du Chapitre 5 aux réseaux de systèmes non linéaires à entrées inconnues. De nouvelles conditions ont été déduites et l'algorithme proposé dans le Chapitre 5 a été modifié afin de l'adapter aux nouvelles classes de systèmes considérées.

Enfin, dans le chapitre 7, les résultats précédemment obtenus dans les chapitres 5 et 6 ont été utilisés pour obtenir de nouveaux résultats pour un réseau de systèmes non linéaires à retards commensurables avec des entrées inconnues. Les résultats obtenus dans le chapitre 7 sont donc une généralisation des résultats obtenus pour les systèmes dynamiques complexes considérés dans cette thèse.

Perspectives

Comme ouverture à cette thèse, nous avons identifié plusieurs pistes. Étant donné que nous avons présenté des résultats pour des réseaux de systèmes complexes avec des entrées inconnues, il serait aussi intéressant de traiter le problème de l'estimation des entrées inconnues. Les résultats seraient très intéressants et pourraient être utilisés pour le diagnostic, et la détection et l'identification de défauts dans des réseaux de systèmes complexes. Quelques travaux allant dans ce sens existent dans la littérature pour des systèmes sans paramètres inconnus [BARBOT et al., 2009].

De même, une extension des résultats obtenus dans cette thèse aux systèmes complexes avec des retards non commensurables mérite une attention particulière de la part de la communauté scientifique. En effet, il serait intéressant de considérer des retards multiples dans l'estimation de la topologie d'un réseau de systèmes complexes.

Une autre piste également très intéressante serait de traiter le même problème avec des retards inconnus. Ceci reviendrait à estimer non seulement les états et les paramètres inconnus du réseau considéré mais aussi des éventuelles retards qui peuvent apparaître dans les états et dans les sorties. Cette piste peut être menée à bien, en se référant aux récents travaux de [ZHENG et al., 2018] portant sur l'identification des retards.

Une autre perspective serait d'envisager le cas où la matrice des fonctions d'interconnexion φ dépend non seulement des états mesurables mais aussi des états non observables, ainsi que le cas où l'on ne connaît pas la dynamique des paramètres inconnus.

Bibliographie

- BAMIEH, B., F. PAGANINI et M. A. DAHLEH (2002). « Distributed control of spatially invariant systems ». In : *IEEE Trans. Aut. Control* 47, p. 1091-1107 (cf. p. 21).
- BANKS, S. P. (1981). « A note on nonlinear observers ». In : *International Journal of Control* 34, p. 185-190 (cf. p. 14).
- BARBOT, J.-P., M. FLIESS et T. FLOQUET (2007). « An algebraic framework for the design of nonlinear observers with unknown inputs ». In : *IEEE Conference on Decision and Control*, p. 384-389 (cf. p. 23).
- BARBOT, J.-P., D. BOUTAT et T. FLOQUET (2009). « An observation algorithm for nonlinear systems with unknown inputs ». In : *Automatica* 45.8, p. 1970-1974 (cf. p. 115, 117, 128, 140).
- BARBOT, J. P et T. FLOQUET (2010). « Iterative higher order sliding mode observer for nonlinear systems with unknown inputs ». In : *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Special Issue in Honor of Professor Hassan K. Khalil's 60th Birthday* 17.6, p. 1019-1033 (cf. p. 130).
- BARBOT, J., T. BOUKHOBZA et M. DJEMAI (1996). « Sliding mode observer for triangular input form ». In : *Processing of the 35th IEEE CDC-, Japan* (cf. p. 15).
- BARTOLINI, G., A. FERRARA, A. LEVANT et E. USAI (1999). « On second order sliding mode controllers ». In : *Variable structure systems, sliding mode and nonlinear control*, K.D. Young and Ü. Özgüner Eds., *Lecture Notes in Control and Information Sciences* 247, Springer-Verlag, London, p. 329-350 (cf. p. 130).
- BASKER, V. R., J. D. ENGELSTAD, C. T. BAAB et O. D. CRISALLE (1999). « Systems with uncertain input delay - design for robust stability and performance ». In : *Proceedings of the American Control Conference* 1, p. 414-418 (cf. p. 18).
- BEJARANO, F., T. FLOQUET, W. PERRUQUETTI et G. ZHENG (2013). « Observability and detectability of singular linear systems with unknown inputs ». In : *Automatica* 49.3, p. 793-800 (cf. p. 23).
- BEJARANO, F. et G. ZHENG (2017a). « Observability of Singular Systems with Commensurate Time-Delays and Neutral terms ». In : *Automatica, Elsevier* 85, p. 462-467 (cf. p. 21).
- (2017b). « Unknown Input Functional Observability of Descriptor Systems with Neutral and Distributed Delay Effects ». In : *Automatica, Elsevier* 85, p. 186-192 (cf. p. 21).
- BEJARANO, J. et G. ZHENG (2014). « Observability of linear systems with commensurate delays and unknown inputs ». In : *Automatica* 50.8, p. 2077-2083 (cf. p. 47, 71).
- BELLMAN, R. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press (cf. p. 7).
- BESANÇON, G. (2000). « Remarks on nonlinear adaptive observer design ». In : *Systems and Control Letters* 41.4, p. 271-280 (cf. p. 4).
- BHAT, K. et H. KOIVO (1976). « Modal characterizations of controllability and observability in time delay systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 21.2, p. 292-293 (cf. p. 21).
- BORNARD, G. et H. HAMMOURI (1988). « A high gain observer for a class of uniformly observable systems ». In : *Proceedings du Colloque International en Automatique Non Linéaire, Nantes* (cf. p. 12).

- BORNARD, G., N. COUELLE et F. CELLE (1991a). « Regularly persistent observer for bilinear systems ». In : *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, 3, Brighton, England (cf. p. 13).
- BORNARD, G. et H. HAMMOURI (1991b). « A High Gain Observer for a Class of Uniformly Observable Systems ». In : *Conference on Decision and Control*, p. 1494-1496 (cf. p. 15).
- BOUKAS, E. (2007). « State feedback stabilization of nonlinear discrete-time systems with time-varying time-delay nonlinear analysis ». In : *Nonlinear Analysis* 66.6, p. 1341-1350 (cf. p. 18).
- BOUTAT, D., G. ZHENG, J. P. BARBOT et H. HAMMOURI (2006). « Observer Error Linearization Multi-Output Depending ». In : *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 5394-5399 (cf. p. 22).
- BREWER, J., J. BUNCE et F. V. VLECK (1986). « Linear systems over commutative rings ». In : *Marcel Dekker, New York* (cf. p. 21).
- BRIAT, C., H. HJALMARSSON, K. H. JOHANSSON, U. JÖNSSON, G. KARLSSON, et H. SANDBERG (2010). « Nonlinear state-dependent delay modeling and stability analysis of internet congestion control ». In : *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision & Control (Hilton Atlanta Hotel, Atlanta, GA, USA)* (cf. p. 18).
- CALIFANO, C., L.-A. M. MARTINEZ et C. H. MOOG (août 2011). « On the observer canonical form for Nonlinear Time-Delay Systems ». In : *18th IFAC World Congress*. 6 pages. Milano, Italy, pp (cf. p. 21).
- CAO, Y. Y., X. Y. SUN et J. LAM (1998). « Delay-dependent robust H1 control for uncertain systems with time-varying delays ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 43.3, p. 338-344 (cf. p. 18).
- CHEN, C. T. (1984). « Linear system theory and design ». In : *Holt, Rinehart and Winston, New York* (cf. p. 18).
- CHEN, J., G. GU et C. N. NETT (2012). « A new method for computing delay margins for stability of linear delay systems ». In : *Systems & Control Letters* 26.2, p. 107-117 (cf. p. 17).
- CHEN, M.-C., S. DAWSON et C. B. JACKSON (2008). « Higgs triplets, decoupling, and precision measurements ». In : *Phys. Rev. D* 78 (9), p. 093001 (cf. p. 23).
- CHEN, W. et M. SAIF (2006). « Unknown input observer design for a class of nonlinear systems : an LMI approach ». In : *Proceedings of the American Control Conference (Minneapolis, Minnesota, USA)*, p. 834-838 (cf. p. 18).
- CHEN, W. H. et W. X. ZHENG (2007). « Delay-dependent robust stabilization for uncertain neutral systems with distributed delays ». In : *Automatica* 43, p. 95-104 (cf. p. 18).
- CHIASSON, J. et J. LOISEAU (2007). *Application of Time Delay Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (cf. p. 15).
- CHO, Y. M. et R. RAJAMANI (1997). « A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems ». In : *IEEE Trans On Automatic Control* 42.4, p. 534-537 (cf. p. 4).
- CONTE, G., A. M. PERDON et G. GUIDONE-PEROLI (2003). « Unknown input observers for linear delay systems : a geometric approach ». In : *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, Hawaii USA, p. 6054-6059 (cf. p. 21).
- CURTAIN, R. F. et A. J. PRITCHARD (1978). « Infinite dimensional linear systems theory ». In : *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag 8 (cf. p. 16).
- DAROUACH, M. (2006). « Full Order Unknown Inputs Observers Design for Delay Systems ». In : *in Proc. of IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation* (cf. p. 21).
- DAROUACH, M., P. PIERROT et E. RICHARD (1999). « Design of reduced-order observers without internal delays ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 44.9, p. 1711-1713 (cf. p. 17).
- DATKO, R. (1998). « A paradigm of ill-posedness with respect to time delays ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 43.7, p. 964-967 (cf. p. 17).

- DELFOUR, M. C. et S. K. MITTER (1972). « Controllability, observability and optimal feedback control of affine hereditary differential systems ». In : *SIAM Journal on Control* 10.298-328, p. 2 (cf. p. 19, 20).
- DIOP, S., J. GRIZZLE, P. MORAAL et A. STEFANOPOULOU (1994). « Interpolation and Numerical Differentiation for Observer Design ». In : Baltimore, USA (cf. p. 15).
- D'ANDREA, R. et G. E. DULLERUD (2003). « Distributed control design for spatially interconnected systems ». In : *IEEE Trans. Aut. Control* 48, p. 1478-1495 (cf. p. 21).
- EDWARDS, C. et S. K. SPURGEON (1998). « Sliding mode control - Theory and application ». In : *Taylor & Francis, London* (cf. p. 130).
- EMRE, E. et G. J. KNOWLES (1984). « Control of linear systems with fixed noncommensurate point delays ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 29.12, p. 1083-1090 (cf. p. 17).
- ENGEL, R. et G. KREISSELMEIER (2002). « A continuous-time observer which converges in finite time ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 47.7, p. 1202-1204 (cf. p. 30).
- FARKH, R. (2011). *Commande PID des systèmes à retard*. Thèse de Doctorat, École Nationale d'Ingénierie de Tunis (cf. p. 15).
- FARZA, M., M. M'SAAD, T. MAATOUG et M. KAMOUN (2009). « Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems ». In : *Automatica* 45.10, p. 2292 -2299 (cf. p. 4).
- FATTOUH, A., O. SENNAME et J. michel DION (1999). « An Unknown Input Observer Design for Linear Time-Delay Systems ». In : *IEEE Conference on Decision and Control*, p. 4222-4227 (cf. p. 21).
- FAX, J. A. et R. M. MURRAY (2004). « Information flow and cooperative control of vehicle formations ». In : *IEEE Trans. Aut. Control* 49, p. 1465-1476 (cf. p. 22).
- FEKI, M. (2003). « An adaptive chaos synchronization scheme applied to secure communication ». In : *Chaos, Solitons & Fractals* 18.1, p. 141 -148 (cf. p. 23).
- FLIESS, M., J. LEVINE, P. MARTIN et P. ROUCHON (1995). « Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples ». In : *International journal of control* 61.6, p. 1327-1361 (cf. p. 15).
- FLIESS, M. et H. MOUNIER (1998). « Controllability and observability of linear delay systems : an algebraic approach ». In : *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* 3, p. 301-314 (cf. p. 21, 99).
- FLOQUET, T. et J. P. BARBOT (2004). « A sliding mode approach of unknown input observers for linear systems ». In : *2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No.04CH37601)*. T. 2, 1724-1729 Vol.2 (cf. p. 23).
- FLOQUET, T. et J. BARBOT (2006a). « An observability form for linear systems with unknown inputs ». In : *International Journal of control* 79, p. 132-139 (cf. p. 23).
- (2006b). « State and unknown input estimation for linear discrete-time systems ». In : *Automatica* 42.11, p. 1883-1889 (cf. p. 23).
- (2007). « Super twisting algorithm based step-by-step sliding mode observers for nonlinear systems with unknown inputs ». In : *International Journal of Systems Science* 38, p. 803-815 (cf. p. 23).
- FLOQUET, T., C. EDWARDS et S. K. SPURGEON (2013). « On Sliding Mode Observers for Systems with Unknown Inputs ». In : *Automatica* 49.3, p. 793-800 (cf. p. 23).
- FRIDMAN, E. et U. SHAKED (2002). « An improved stabilization method for linear time-delay systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 47.11, p. 1931-1937 (cf. p. 17).
- FRIDMAN, E. et G. TSOEDIK (2009). « H_∞ control of distributed and discrete delay systems via discretized lyapunov functional ». In : *European Journal of Control* 15.1, p. 84-96 (cf. p. 18).
- FRIDMAN, L., Y. SHTESSEL, C. EDWARDS et X. YAN (2007). « State Estimation and Input Reconstruction in Nonlinear Systems via Higher Order Sliding Mode Observer ». In : *2007 American Control Conference*, p. 3807-3812 (cf. p. 23).

- FU, Y.-M., G.-R. DUAN et S.-M. SONG (2004). « Design of unknown input observer for linear time-delay systems ». In : *International Journal of Control, Automation, and Systems* 2.4, p. 530-535 (cf. p. 21).
- GABASOV, R., R. ZHEVNIAK, F. M. KILLOVA et T. B. KOPEYKINA (1972). « Conditional observability of linear systems ». In : *Probl. Contr. Theory* 1.3-4, p. 217-238 (cf. p. 20).
- GARCÍA-RAMÍREZ, E., C. CALIFANO, L. MÁRQUEZ-MARTÍNEZ et C. MOOG (2016). « Observer design based on linearization via input-output injection of time-delay systems ». In : *IFAC-PapersOnLine* 49.18. 10th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems NOLCOS 2016, p. 672 -677 (cf. p. 14).
- GAUTHIER, J. P. et G. BORNARD (1981). « Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 26, p. 922-926 (cf. p. 13).
- GAUTHIER, J.-P., H. HAMMOURI et I. KUPKA (1991). « Observers for nonlinear systems ». In : *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 2368-2369 (cf. p. 13).
- GAUTHIER, J.-P., H. HAMMOURI et S. OTHMAN (1992). « A simple observer for nonlinear systems with applications to bioreactors ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 37.6, p. 875-880 (cf. p. 4).
- GAUTHIER, J.-P. et I. KUPKA (1994). « Observability and observers for nonlinear systems ». In : *Siam Journal on Control and Optimization* 32, p. 975-994 (cf. p. 13).
- GERMANI, A. et P. PEPE (2005). « A state observer for a class of nonlinear systems with multiple discrete and distributed time-delays ». In : *European Journal of Control* 11.3, p. 196-205 (cf. p. 18).
- GOHBERG, I., P. LANCASTER et L. RODMAN (2009). *Matrix Polynomials (Classics in Applied Mathematics)*. Society for Industrial et Applied Mathematic (cf. p. 74).
- GRIZZLE, J. et P. MORAAL (1990). « Newton, observers and nonlinear discrete-time control ». In : p. 760-767 (cf. p. 15).
- HALE, J. K. et S. M. V. LUNEL (1993). « Introduction to functional differential equations ». In : *New York : Springer-Verlag* (cf. p. 16).
- HAN, Q. L. (2003). « Stability criteria for a class of linear neutral systems with time-varying discrete and distributed delays ». In : *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 20.4, p. 371-386 (cf. p. 18).
- HE, P., H. Y. LAN et G. Q. TAN (2011). « Delay-independent stabilization of linear systems with multiple time-delays ». In : *World Academy of Science, Engineering and Technology* 75, p. 1008-1012 (cf. p. 17).
- HE, Y., M. WU et J. H. SHE (2006). « Delay-dependent stability criteria for linear systems with multiple time delays ». In : *IEEE Proceedings-Control Theory & Applications* 153, p. 447-452 (cf. p. 17).
- HERMANN, R. et A. KRENER (1977). « Nonlinear controllability and observability ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 22.5, p. 728-740 (cf. p. 14).
- HOU, M., P. ZITEK et R. J. PATTON (2002). « An Observer Design For Linear Time-Delay Systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 47.1, p. 121-125 (cf. p. 17, 48, 56, 70, 71, 74, 81).
- JI, X. et G. CHEN (2007). « On the v -stability of complex dynamical networks ». In : *Automatica* 43, p. 1049-1057 (cf. p. 22).
- KADER, Z., G. ZHENG et J.-P. BARBOT (2018). « Finite-time and asymptotic left inversion of nonlinear time-delay systems ». In : *Automatica, Elsevier* (cf. p. 21).
- KALMAN, R. E. (1960). « A new approach to linear filtering and prediction problems ». In : *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering* 82, p. 35-45 (cf. p. 9, 10).
- KALMAN, R. E. (1959). « On the general theory of control systems ». In : *in Proc. First International Congress of Automatic Control* 4.3, p. 110-110 (cf. p. 7).

- (1963). « Mathematical description of linear dynamical systems ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 1.2, p. 152-192 (cf. p. 7).
- KASZKUREWICZ, E. et A. BHAYA (1993). « A delay-independent robust stability condition for linear discrete time systems ». In : *Proceedings of the 32th IEEE Conference on Decision & Control (San Antonio, Texas)*, p. 3459-3460 (cf. p. 18).
- KOLMANOVSKII, V. B., S. I. NICULESCU et K. GU (1999a). « Delay effects on stability : A survey ». In : *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision & Control*, p. 1993-1998 (cf. p. 16).
- KOLMANOVSKII, V. B., S. I. NICULESCU et J. P. RICHARD (1999b). « On the lyapunov-krasovskii functionals for stability analysis of linear delay systems ». In : *International Journal of Control* 72, p. 374-384 (cf. p. 17).
- KOLMANOVSKII, V. B. et J. P. RICHARD (1999c). « Stability of some linear systems with delays ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 44.5, p. 371-376 (cf. p. 16).
- KRENER, A. et A. ISIDORI (1983). « Linearization by output injection and nonlinear observers ». In : *Sys. and Cont. Letters*, 3, p. 47-52 (cf. p. 12).
- KRENER, A. et W. RESPONDEK (1985). « Nonlinear observer with linearizable error dynamics ». In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 23.2, p. 197-216 (cf. p. 100).
- KUMAR, V. et N. LEONARD (2005). « Cooperative control ». In : *Springer, Lecture notes in control and information sciences* 309 (cf. p. 21, 22).
- LABIT, Y. (2002). *Contribution à la commande non linéaire par des approches linéaires*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (cf. p. 11).
- LANGBORT, C., R. S. CHANDRA et R. D'ANDREA (2004). « Distributed control design for systems interconnected over an arbitrary graph ». In : *IEEE Trans. Aut. Control* 49, p. 1502-1519 (cf. p. 22).
- LANGUEH, K., O. DATCU, J. BARBOT, G. ZHENG et K. BUSAWON (2015). « Outputs analysis and dual immersion method for chaotic systems ». In : *2015 International Conference on Computing, Communication and Security (ICCCS)*, p. 1-6 (cf. p. 103).
- LANGUEH, K., G. ZHENG et T. FLOQUET (2017a). « Finite-time estimation for linear TDS via two coupled Luenberger observers ». In : *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, p. 3733-3738 (cf. p. 5).
- (2017b). « Topology identification of network systems ». In : *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, p. 5865-5869 (cf. p. 5).
- (2018). « Impulsive fixed-time observer for linear time-delay systems ». In : *Journal of the Franklin Institute* 355.7, p. 3354 -3366 (cf. p. 5).
- LANGUEH, K. A., G. ZHENG et T. FLOQUET (2016a). « Finite-time observer for linear system with time-delay ». In : *2016 35th Chinese Control Conference (CCC)*, p. 56-60 (cf. p. 5).
- (2016b). « Finite-time unknown input observer for linear time-delay systems ». In : *2016 55th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (cf. p. 5).
- LEE, E. B. et A. OLBROT (1981a). « Observability and related structural results for linear hereditary systems ». In : *International Journal of Control* 34.6, p. 1061-1078 (cf. p. 16).
- LEE, E. et A. OLBROT (1981b). « Observability and related structural results for linear hereditary systems ». In : *International Journal of Control* 34.6, p. 1061-1078 (cf. p. 20).
- LEE, T. N. et U. L. RADOVIC (1988). « Decentralized stabilization of linear continuous and discrete-time systems with delays in interconnections ». In : *IEEE Trans. on Automatic Control* 33, p. 757-761 (cf. p. 3).
- LEVANT, A. (1998). « Robust exact differentiation via sliding mode technique ». In : *Automatica* 34.3, p. 379-384 (cf. p. 130).
- (2001). « High Order Sliding Modes and Arbitrary-Order Exact Robust Differentiator ». In : *Proceedings of European Control Conference, CDROM* (cf. p. 15).

- LEVANT, A. (2003). « Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control ». In : *International Journal on automatic* 76.9/10, p. 924-941 (cf. p. 130).
- (2005). « Homogeneity approach to high-order sliding mode design ». In : *Automatica* 41, p. 823-830 (cf. p. 130).
- LEVANT, A. et M. LIVNE (2012). « Exact differentiation of signals with unbounded higher derivatives ». In : *IEEE TAC* 57.4, p. 1076-1080 (cf. p. 130).
- LIEN, C. H. (2007). « Delay-dependent and delay-independent guaranteed cost control for uncertain neutral systems with time-varying delays via LMI approach ». In : *Chaos, Solitons and Fractals* 33, p. 1017-1027 (cf. p. 18).
- LOUISELL, J. (1995). « Absolute stability in linear delay-differential systems : Ill-posedness and robustness ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 40.7, p. 1288-1291 (cf. p. 17).
- LUENBERGER, D. G. (1966). « Observer for multivariable systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 11.2, p. 190-197 (cf. p. 10).
- (1971). « An Introduction to Observers ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 16, p. 596-620 (cf. p. 10).
- MAHMOUD, M. S. (2000). *Robust control and filtering for time-delay systems* (cf. p. 15).
- MARINO, R. et P. TOMEI (1995a). « Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems ». In : *IEEE Trans. on Automatic Control* 40.7, p. 1300-1304 (cf. p. 4, 104).
- MICHIELS, W., V. V. ASSCHE et S. I. NICULESCU (2005). « Stabilization of time-delay systems with a controlled time-varying delay and applications ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 50.4, p. 493-504 (cf. p. 17).
- MOLINARI, B. (1976). « A strong controllability and observability in linear multivariable control ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 21.5, p. 761-764 (cf. p. 71, 81).
- MOOG, C., R. CASTRO-LINARES, M. VELASCO-VILLA et L. A. MARQUE-MARTINEZ (2000). « The disturbance decoupling problem for time-delay nonlinear systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 45.2 (cf. p. 21).
- MURPHY, K. A. (2001). « Estimation of time and state-dependent delays and other parameters in functional differential equations ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 50.4, p. 972-1000 (cf. p. 18).
- NEWMAN, M. (2006). « The structure and dynamics of networks ». In : *Princeton, NJ : Princeton University Press* (cf. p. 21).
- NICOSIA, S. et A. TORNAMBE (1989). « High-gain observers in the state and parameters estimation of robots having elastic joints ». In : *Systems & Control Letters* 31, p. 331-337 (cf. p. 15).
- NICULESCU, S.-I. (2001). « Delay effects on stability : A robust control approach ». In : *Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer* 269 (cf. p. 15).
- OH, S. et H. KHALIL (1997). « Nonlinear Output-Feedback Tracking Using High-gain Observer and Variable Structure Control ». In : *Automatica* 33.10, p. 1845-1856 (cf. p. 15).
- OLBROT, A. W. (1977). « A counterexample to "observability of linear systems with timevariable delays" ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 22.2, p. 281-283 (cf. p. 20).
- (1981). « Observability and observers for a class of linear systems with delays ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 26.2, p. 513-517 (cf. p. 19, 20).
- PANDHARIPANDE, R. et R. P. THOMAS (2014). « ALMOST CLOSED 1-FORMS ». In : *Glasgow Mathematical Journal* 56.1, p. 169-182 (cf. p. 103).
- PENG, C. et Y. C. TIAN (2009). « Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with time-varying delay ». In : *Information Sciences* 178.8, p. 3187-3197 (cf. p. 18).
- PERRUQUETTI, W. et J.-P. BARBOT (2002). *Sliding Mode Control in Engineering*. Marcel Dekker (cf. p. 130).

- POLYAKOV, A. (2012). « Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of Linear Control Systems ». In : *IEEE Trans. on Automatic Control* 57.8, p. 2106-2110 (cf. p. 105).
- PONTRYAGIN, L. S., V. G. BOLTYANSKII, R. V. GAMKRELIDZE et E. F. MISHCHENKO (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience (cf. p. 7).
- POURBOGHRAT, F. et D. H. CHYUNG (1986). « Exact state-variable reconstruction of delay systems ». In : *International Journal of Control* 44.3, p. 867-877 (cf. p. 16).
- PRESCOTT, T. P., M. LANG et A. PAPACHRISTODOULOU (2015). « Quantification of Interactions between Dynamic Cellular Network Functionalities by Cascaded Layering ». In : *PLOS Computational Biology* (cf. p. 3).
- RABAH, R. (1995). « On Observability of linear delay systems with unknown inputs ». In : *3rd IEEE Mediterranean Symposium on New Directions*. Limassol, Cyprus (cf. p. 20).
- RAFF, T. et F. ALLGÖWER (2007). « An impulsive observer that estimates the exact state of a linear continuous-time system in predetermined finite time ». In : *Proceedings of the 15th Mediterranean Conference on Control and Automation* (cf. p. 30).
- RAJAMANI, R. et K. HEDRICK (1995). « Adaptive observer for active automotive suspensions - theory and experimentation ». In : *IEEE Trans On Control Systems Technology* 3.1, p. 86-93 (cf. p. 4).
- RAO, V. S. H. et N. YADAVIAH (2005). « Parameter identification of dynamical systems ». In : *Chaos, Solitons and Fractals* 23.4, p. 1137 -1151 (cf. p. 4).
- REN, W. et R. W. BEARD (2007). « Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control ». In : *Springer, Lecture notes in Communication and Control Engineering Series, London* (cf. p. 21).
- SALAMON, D. (1980). « Observers and duality between observation and state feedback for time delay systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 25.6, p. 1187-1192 (cf. p. 20).
- SCHÖLLIG, A., U. MÜNZ et F. ALLGÖWER (2007). « Topology-Dependent Stability of a Network of Dynamical Systems with Communication Delays ». In : *Proceedings of the European Control Conference*, p. 1197-1202 (cf. p. 3).
- SENAME, O. (1997). « Unknown input robust observer for time delay system ». In : *IEEE Conference on Decision and Control* (cf. p. 70).
- (2001). « New trends in design of observers for time-delay systems ». In : *Kybernetika* 37.4, p. 427-458 (cf. p. 16, 21).
- SEURET, A., T. FLOQUET, J. P. RICHARD et S. SPURGEON (2007). « A sliding mode observer for linear systems with unknown time varying delay ». In : *Proceedings of the American Control Conference* 388, p. 4558-4563 (cf. p. 18).
- SHIMKIN, N. et A. FEUER (1987). « Persistency of excitation in continuous-time systems ». In : *Systems and Control Letters* 9, p. 225-233 (cf. p. 104).
- SILM, H., R. USHIROBIRA, D. EFIMOV, J.-P. RICHARD et W. MICHIELS (2017). « A distributed finite-time observer for linear systems ». In : *Proc. 56th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (cf. p. 22).
- SILVERMAN, L. (1969). « Inversion of multivariable linear systems ». In : *IEEE Trans. Automat. Control* 14, p. 270-276 (cf. p. 71, 81).
- SIRA-RAMIREZ, H. (1992). « On second order sliding mode controllers ». In : *Systems and Control Letters* 19, p. 303-312 (cf. p. 130).
- SONTAG, E. (1976). « Linear systems over commutative rings : A survey ». In : *Ricerche di Automatica* 7, p. 1-34 (cf. p. 21).
- SOUZA, C. E. D., R. M. PALHARES et P. L. D. PERES (1999). « Robust H_∞ filtering for uncertain linear systems with multiple time-varying state delays : An LMI approach ». In : *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision & Control*, p. 2023-2028 (cf. p. 18).
- TAMI, R., D. BOUTAT et G. ZHENG (2013). « Extended output depending normal form ». In : *Automatica* (cf. p. 14).

- TAMI, R., G. ZHENG, D. BOUTAT, D. AUBRY et H. WANG (2016). « Partial observer normal form for nonlinear system ». In : *Automatica* 64, p. 54-62 (cf. p. 14).
- THAU, F. E. (1973). « Observing the state of nonlinear dynamic systems ». In : *International Journal of Control* 17.3, p. 471-479 (cf. p. 14).
- UTKIN, V. I. (1978). « Sliding Mode and their application in variable structure systems ». In : *Mir* (cf. p. 15).
- (1992). « Sliding Modes in Control and Optimization ». In : *Berlin, Germany, Springer-Verlag* (cf. p. 15, 130).
- VOULGARIS, P. G., G. BIANCHINI et B. BAMIEH (2003). « Optimal H2 controllers for spatially invariant systems with delayed communication requirements ». In : *Syst. Control Letters* 50, p. 347-361 (cf. p. 22).
- WANG, J., Q. ZHANG et L. LJUNG (2009). « Revisiting Hammerstein system identification through the two-stage algorithm for bilinear parameter estimation ». In : *Automatica* 45, p. 2627-2633 (cf. p. 22).
- WANG, X et G. CHEN (2003). « Complex networks : smallworld, scale-free and beyond ». In : *IEEE Circuits Systems Magazine* 3, p. 6-20 (cf. p. 22).
- WU, C. W. (2007). « Synchronisation of complex networks of nonlinear dynamical systems ». In : *World scientific publishing company* (cf. p. 21).
- WU, H. (2002). « Decentralized adaptive robust control for a class of large-scale systems including delayed state perturbations in the interconnections ». In : *IEEE Trans. on Automatic Control* 47, p. 1745-1751 (cf. p. 3).
- WU, Q. et M. SAIF (2007). « Robust fault detection and diagnosis for a multiple satellite formation flying system using second order sliding mode and wavelet networks ». In : *Proceedings of American Control Conference* (cf. p. 22).
- XIA, X., L. MARQUEZ, P. ZAGALAK et C. MOOG (2002). « Analysis of nonlinear time-delay systems using modules over non-commutative rings ». In : *Automatica* 38, p. 1549-1555 (cf. p. 21, 22).
- XIA, X. et C. H. MOOG (2003). « Identifiability of nonlinear systems with application to HIV/AIDS models ». In : *IEEE Trans. on Automatic Control* 48.2, p. 330-336 (cf. p. 99-101).
- XIA, X. (2003). « Estimation of HIV/AIDS parameters ». In : *Automatica* 39.11, p. 1983-1988 (cf. p. 4, 104, 129).
- XIA, Y., M. FU et P. SHI (2009). *Analysis and Synthesis of Dynamical Systems with Time-Delays*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-02695-9 (cf. p. 15).
- XU, A. et Q. ZHANG (2002). « State And Parameter Estimation For Nonlinear Systems ». In : *15th IFAC World Congress*. T. 35, p. 217-222 (cf. p. 4).
- XUE, A., Y. Y. CAO et D. PI (2004). « Stability analysis and h synthesis for linear systems with time-varying delays ». In : *Proceeding Of the 2004 American Control Conference*, p. 4800-4805 (cf. p. 18).
- YEGANEFAR, N. (2006). *Définitions et analyse de stabilités pour les systèmes à retard non linéaires*. Thèse de doctorat, Université de Lille (cf. p. 18, 19).
- ZHANG, J., X. XIA et C. H. MOOG (2006). « Parameter identifiability of Nonlinear systems with time-delay ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 51.2, p. 371-375 (cf. p. 125, 126).
- ZHANG, L. et Q. ZHANG (2015). « Observability conservation by output feedback and observability Gramian bounds ». In : *Automatica* 60, p. 38-42 (cf. p. 22).
- ZHANG, Q. (2002). « Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (MIMO) linear time-varying systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 47.3, p. 525-529 (cf. p. 4, 15).
- ZHANG, Q. et A. CLAVEL (2001). « Adaptive observer with exponential forgetting factor for linear time varying systems ». In : *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.01CH37228)*. T. 4, p. 3886-3891 (cf. p. 15).

- ZHENG, F. et P. M. FRANK (2002). « Robust control of uncertain distributed delay systems with application to the stabilization of combustion in rocket motor chambers ». In : *Automatica* 38, p. 487-497 (cf. p. 18).
- ZHENG, G., D. BOUTAT et J. P. BARBOT (2007). « Single output-dependent observability normal form ». In : *SIAM, J. Control Optim* 46, p. 2242-2255 (cf. p. 14).
- ZHENG, G., J.-P. BARBOT, D. BOUTAT, T. FLOQUET et J.-P. RICHARD (2011a). « On observation of time-delay systems with unknown inputs ». In : *IEEE TAC* 56.8, p. 1973-1978 (cf. p. 21).
- ZHENG, G. et D. BOUTAT (2011b). « Synchronisation of chaotic systems via reduced observers ». In : *IET Control Theory Applications* 5.2, p. 308-314 (cf. p. 22).
- ZHENG, G., J.-P. BARBOT et D. BOUTAT (2013). « Identification of the delay parameter for nonlinear time-delay systems with unknown inputs ». In : *Automatica* 49.6, p. 1755-1760 (cf. p. 22).
- ZHENG, G., F. J. BEJARRANO, W. PERRUQUETTI et J.-P. RICHARD (2015). « Unknown input observer for linear time-delay systems ». In : *Automatica* 92.61, p. 35-43 (cf. p. 81-83, 86).
- ZHENG, G., D. BOUTAT et J. P. BARBOT (2005). « Output Dependent Observability Linear Normal Form ». In : *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 7026-7030 (cf. p. 14).
- (2009). « Multi-output dependent observability normal form ». In : *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications* 70.1, p. 404-418 (cf. p. 14).
- ZHENG, G., A. POLYAKOV et A. LEVANT (2018). « Delay estimation via sliding mode for nonlinear time-delay systems ». In : *Automatica, Elsevier* 89, p. 266-273 (cf. p. 140).
- ZIMMER, G. (1994). « State observation by online minimization ». In : *Int Journal of Control* 60, p. 595-606 (cf. p. 15).

Annexe

Publications

A.1 Articles de conférences

A.1.0.1 CDC17, Melbourne, Australie.

K Langueh ; G Zheng ; T Floquet Finite-time estimation for linear TDS via two coupled Luenberger observers, 2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC), 3733-3738

K Langueh ; G Zheng ; T Floquet Topology identification of network systems, Decision and Control (CDC), 2017 IEEE 56th Annual Conference on, 5865-5869

A.1.0.2 CDC16, Las Vegas, Nevada, USA.

K Langueh ; G Zheng ; T Floquet Finite-time unknown input observer for linear time-delay systems, Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on, 1435-1440

A.1.0.3 CCC16, Chine.

K Langueh ; G Zheng ; T Floquet Finite-time observer for linear system with time delay, Control Conference (CCC), 2016 35th Chinese, 56-60

A.1.0.4 IFAC NOLCOS 2016, Monterey, California, USA.

K Langueh ; O Datcu ; JP Barbot ; G Zheng ; K Busawon Observability singularities and observer design : dual immersion approach IFAC-PapersOnLine 49 (18), 511-516

A.1.0.5 ICCCS15, Pamplérouses, Iles Maurice.

K Langueh ; O Datcu ; JP Barbot ; G Zheng ; K Busawon Outputs analysis and dual immersion method for chaotic systems Computing, Communication and Security (ICCCS), 2015 International Conference

A.2 Article de journal

A.2.0.1 Journal of the Franklin Institute, 2018.

K Languéh ; G Zheng ; T Floquet Impulsive fixed-time observer for linear time-delay systems, 55 (7), 3354-3366

Résumé

Cette thèse étudie le problème d'identification de la topologie d'un réseau de systèmes complexes dynamiques, dont les sous-systèmes sont décrits par des équations différentielles ordinaires (EDO) et/ou des équations différentielles à retard (EDR). La première partie de ce travail porte sur l'identification des paramètres du réseau de systèmes linéaires. Ainsi, différentes classes de systèmes linéaires ont été traitées, à savoir les systèmes sans retard, les systèmes à retard commensurable et les systèmes à entrées inconnues. Un observateur impulsif est proposé afin d'identifier à la fois les états et les paramètres inconnus de la classe de système dynamique considérée en temps fini. Afin de garantir l'existence de l'observateur impulsif proposé, des conditions suffisantes sont déduites. Des exemples illustratifs sont donnés afin de montrer l'efficacité de l'observateur en temps fini proposé. La deuxième partie de ce travail traite le problème de l'identification de la topologie d'un réseau de systèmes dynamiques non linéaires. Dans nos considérations, les coefficients interconnexions de la topologie du réseau sont considérés comme des paramètres constants. Par conséquent, l'identification de la topologie est équivalente à l'identification des paramètres inconnus. Tout d'abord, nous avons déduit des conditions suffisantes sur l'identifiabilité des paramètres, puis nous avons proposé un différenciateur uniforme avec convergence en temps fini pour estimer les paramètres inconnus.

Mots clés : estimation en temps fini, systèmes à retard, identification des paramètres, systèmes en réseau, observateur à entrée inconnue

FINITE-TIME ESTIMATION OF NONLINEAR AND DELAY SYSTEMS WITH APPLICATION TO NETWORKED SYSTEMS

Abstract

This thesis investigates the topology identification problem for network of dynamical complex systems, whose subsystems are described by ordinary differential equations (ODE) and/or delay differential equations (DDE). The first part of this work focuses on the parameters identification of the network of linear systems. Thus, different classes of linear systems have been treated namely systems without delay, systems with commensurable delay and systems with unknown inputs. An impulsive observer is proposed in order to identify both the states and the unknown parameters of the considered class of dynamic system in finite time. In order to guarantee the existence of the proposed impulsive observer, sufficient conditions are deduced. An illustrative example is given in order to show the efficiency of the proposed finite-time observer. The second part of this work treats the topology identification of the network of nonlinear dynamic systems. In our considerations, the topology connections are represented as constant parameters, therefore the topology identification is equivalent to identify the unknown parameters. A sufficient condition on parameter identifiability is firstly deduced, and then a uniform differentiator with finite-time convergence is proposed to estimate the unknown parameters.

Keywords: finite-time estimation, time-delay systems, parameters identification, networked systems, unknown input observer

