

POSIBLES RELACIONES ENTRE DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL Y LA
COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Lic. YENNY ROCIO GAVIRIA FUENTES

UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA

FACULTAD CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

BOGOTÁ

2018

POSIBLES RELACIONES ENTRE DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL Y LA
COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

YENNY ROCIO GAVIRIA FUENTES

Trabajo de grado para optar al título de Magister en educación.

ASESOR: MARCO ANTONIO FERIA URIBE

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL


FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BOGOTÁ

2019

RESUMEN ANÁLITICO EN EDUCACIÓN-RAE

	Resumen Analítico en Educación - RAE
	Página 1 de 2
1. Información General	
Tipo de documento	Tesis de grado
Acceso al documento	Universidad Externado de Colombia. Biblioteca Central
Título del documento	Posibles Relaciones Entre Del Razonamiento Covariacional Y La Comprensión Del Concepto De Función
Autor(a)	Yenny Rocío Gaviria Fuentes
Director	Marco Antonio Feria Uribe
Publicación	
Palabras Claves	Pensamiento Variacional, Razonamiento Covariacional, Comprensión del concepto de función, Función.

2. Descripción

En la presente investigación se hizo un proceso de indagación a cerca del razonamiento variacional y su relación con la comprensión del concepto de función, para ello en una fase inicial se identificó el problema de investigación, de manera que se estableciera un marco de referencia bajo el cual sustentar la propuesta, luego se procedió a realizar un diseño metodológico con el cual se atendiera a los objetivos trazados para abordar el problema, luego hacer un respectivo análisis de la información recolectada y generar las conclusiones respectivas del proceso llevado tanto en la investigación como en la intervención.

3. Fuentes

- Arnal, J., Del Rincón D. y Latorre, A. (1992). Investigación educativa. Editorial Labor. Barcelona.
- Ávila, P. (2011). *Razonamiento covariacional a través de software dinámico. El caso de la variación lineal y cuadrática*. Universidad Nacional de Colombia. Medellín
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio*. EMA, 8 (2), 121-156.
- Castro C. y Díaz M. (2014). *Enseñanza del Concepto de Función*. Para estudiantes de educación superior. Universidad Sergio Arboleda. Bogotá
- Gómez, O. (2015). *Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá
- ICFES (2013). *Sistema Nacional de la evaluación estandarizada de la educación: Alineación del examen saber 11*. Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. MEN. Bogotá.
- Sierpinska A., (1992). *Sobre la comprensión de la noción de función*. [Traducido al español de

The concepts of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy]. Universidad del Valle. Calí.

- Vasco, C. (2006). *El Pensamiento Variacional y la Modelación Matemática*. XI CIAEM, Brasil.
- Villa, A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de la funciones cuadráticas. Universidad de Antioquia. Medellín

4. Contenidos

Los contenidos efectuados en el presente trabajo están asociados al pensamiento variacional enfocado al estudio de la variación y cambio, que para ser analizados se hace uso de diferentes sistemas de representación tales como tabular, gráfico, simbólico y algebraico. Sin embargo, es de tener en cuenta que en la presente investigación se indagan sobre los razonamientos covariacionales, así como también actos de comprensión manifestados durante el análisis de las situaciones de variación. La investigación está conformada por cinco capítulos: en el primero se hace el planteamiento del problema, en el cual se expone la importancia de que los estudiantes razonen covariacionalmente y comprendan la relación con la función; en el segundo capítulo se encuentra el marco referencial sobre variación y comprensión; para el tercero, se presenta el diseño metodológico para el planteamiento de la propuesta; en el cuarto, se presentan los resultados obtenidos con la implementación de la propuestas, los hallazgos, conclusiones y recomendaciones.

5. Metodología

El proceso metodológico para el diseño de la intervención se encuentra relacionado con la búsqueda de situaciones en las cuales se encuentren procesos de variación , para ello se tuvo en

cuenta la propuesta de Castro & Díaz (2004) en el cual indican algunas nociones previas que deben manejar los estudiantes y luego proponen situaciones de tipo inclusivo en el aula, de ellas solo se tomaran en cuenta tres, debido a que la investigación no se centra en el concepto de función sino en el estudio de los Razonamiento Covariacionales y de los Actos de Comprensión alcanzados al ejecutar dichas situaciones.

Se toman en cuenta tres contextos:

El primero en el diagnóstico, relacionado con el costo del transporte y el dinero que debe presupuestar en determinados días indicados. El segundo en las actividades de la intervención, el cual se asocia al análisis de dos movimientos de un balón. El tercero en la evaluación y cierre, en este se solicita la construcción de cajas por medio de la aplicación de nociones previas en el contexto geométrico.

6. Conclusiones

Como se mostró anteriormente se logró realizar un diagnóstico para identificar los actos de comprensión y acciones mentales correspondientes a los razonamientos manifestados por los estudiantes, allí se encontró que el máximo nivel de razonamiento alcanzado fue el cuatro y de comprensión el diez por dos grupos. Cinco de los grupos se ubicaron en un nivel de razonamiento tres, sin embargo los actos de comprensión se distribuyeron entre dos grupos para el acto ocho donde hubo y tres grupos para el acto cinco.

Para el diseño de las actividades se tuvo en cuenta lo expuesto en el marco referencial en el cual indica que para el pensamiento variacional son necesarias situaciones de variación y

cambio en diferentes contextos, adicionalmente que haya un tránsito entre diferentes sistemas de representación para luego plantear preguntas que conduzcan al estudiante al análisis de la situación.

Fue posible tipificar cada una de las actividades realizadas por los estudiantes en la intervención y la actividad de cierre, en el desarrollo de las actividades de la intervención hubo inconvenientes de dos tipos: el primero de interpretación de información suministrada por el software y la discriminación de variables en una situación de movimiento, debido a que aunque se solicitaban cambios en relación al tiempo y desplazamiento, relacionaron otras variables tales como presión y fuerza. Las actividades en las cuales los grupos alcanzaron mayores niveles de razonamiento y actos comprensión, fueron aquellas relacionadas con el costo de transporte (diagnóstico) y la construcción de cajas (actividad de cierre).

Al analizar las actividades ejecutadas, aunque se esperaba que los estudiantes transitaran por todas las acciones mentales y actos de comprensión en el desarrollo de los talleres, sin embargo algunos grupos mantuvieron su desempeño o avanzaron en el proceso como se observó en la tabla 17, no era posible que un grupo permaneciera en un acto de comprensión sin modificar la acción mental desarrollada. Como por ejemplo, el acto de comprensión cinco (C (f)5: Discriminación entre variables independientes y dependientes) se relaciona con la acción mental tres (coordinación de la cantidad del cambio) debido a que los estudiantes verbalizan la conciencia de la cantidad del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.

<p>Fecha de elaboración del Resumen:</p>			<p>2018</p>
--	--	--	-------------

Tabla de contenido

Resumen Analítico en Educación - RAE	3
INTRODUCCIÓN	10
1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	12
1.1 Definición del problema.....	12
1.2 Pregunta(s) de investigación	14
1.3 Objetivos de la investigación	14
1.3.1 Objetivo General	14
1.3.2 Objetivos Específicos	14
1.4 Antecedentes del problema	15
1.2.1 Antecedentes razonamiento covariacional	15
1.2.2 Respecto a la comprensión del concepto de función.	19
1.5 Justificación del problema.....	21
2. MARCO REFERENCIAL	22
2.1 Pensamiento variacional	22
2.2 Enseñanza del Concepto de Función	23
2.3 Razonamiento Covariacional	26
2.4 Comprensión en Matemáticas	29
3. DISEÑO METODOLÓGICO	32
3.1 Enfoque de investigación	32
3.2 Tipo de investigación	32
3.3 Población y muestra de la investigación	33
3.4 Consideraciones éticas	33
3.5 Unida de análisis	33
3.6 Categorías de análisis de análisis	35
3.7 Matriz categorial	35
Tabla 3	36
3.8 Fase Diagnóstica	36
3.8.1 Instrumento Diagnostico	37
3.8.2 Resultados Diagnostico	39
3.9 Fase de Intervención	41

3.9.1 Metodología de la intervención	42
3.9.2 Sistematización de la información de la intervención	42
3.9.3 Hipótesis de intervención	43
3.9.4 Estructura de la intervención	43
3.9.5 Instrumentos de la intervención	44
GUÍA DE TRABAJO PRIMER MOMENTO	45
GUÍA DE TRABAJO CUARTO MOMENTO	47
GUÍA DE TRABAJO CIERRE DE LA ACTIVIDAD	49
4. Resultados, hallazgos, conclusiones y recomendaciones	49
4.1 Resultados	49
4.1.1 Resultados guía uno	49
4.1.2 Resultados guía dos	52
4.1.3 Resultados guía tres socializaciones	55
4.1.4 Resultados guía cuatro	56
4.1.5 Actividad de cierre	60
4.2 Hallazgos	64
4.3 Conclusiones	67
4.4 Recomendaciones	70
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71
ANEXOS	73

INTRODUCCIÓN

El pensamiento variacional va más allá de definir, tabular y graficar funciones debido a que este se enmarca en un proceso dinámico, lo que implica que se encuentra inmerso en situaciones de cambio y movimiento de las cuales se requiere caracterizar y estudiar el cambio con el fin de obtener regularidades y establecer patrones que rigen dichas regularidades, que posibiliten procesos identificación de covariación entre variables (Vasco, 2003).

En la presente investigación se estudia el pensamiento variacional desde los razonamientos covariacionales propuestos por Carlson et al. (2003), ejecutados por los estudiantes en situaciones de variación y cambio. Así como también, determinar los actos de comprensión de concepto de función determinados por Sierpiska (1992) de manera que se puede llegar a establecer relaciones entre razonamientos covariacionales y actos de comprensión según los procesos efectuados en el abordaje de cada situación problema.

En el capítulo uno, se aborda el problema de investigación, que genera una pregunta y objetivos a los cuales se hizo una verificación de antecedentes, para sí poder llegar a justificar el sentido de realizar la investigación.

Para el capítulo dos, se hizo la estructuración del marco de referencia en el cual se encuentra estructurada la investigación encontrando cuatro ejes principales: el primero relacionado con el pensamiento variacional, el segundo con la enseñanza del concepto de función, el tercero con el razonamiento variacional y por último la comprensión en matemáticas, en especial lo relacionado a la función.

El capítulo tres, está relacionado con el diseño metodológico en el cual se delimita la investigación y se pone en marcha el planteamiento de la intervención alineada con los posibles alcances y el marco referencial. Para ello, se hace la descripción del enfoque y tipo de investigación, así como también la caracterización de la población, las categorías de análisis y la presentación de los instrumentos usados en la intervención.

En el capítulo cuatro se hace el proceso de análisis y presentación de resultados obtenidos con la propuesta, como también los hallazgos encontrados durante el análisis de cada una de las actividades propuestas.

Para finalizar en el capítulo cinco, se presentan las conclusiones y recomendaciones obtenidas al analizar el proceso realizado durante la investigación.

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Definición del problema

El problema de investigación surge al observar en la formación escolar en matemáticas en lo que tiene que ver con el componente de variacional, es especial a la función se ha privilegiado en la enseñanza el desarrollo de algoritmos, obviando las conexiones con otras áreas del conocimiento (Villa, 2012). Por lo que para los estudiantes la variación o específicamente la función es algo abstracto que sólo habita en el mundo de las operaciones y no tiene relación con situaciones en la vida cotidiana.

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) la función es concebida como parte del pensamiento variacional, esto implica que para su conceptualización se requiera: identificar cambios, regularidades o patrones en diversos contextos con el fin de ser expresados mediante algún tipo de representación o modelación matemática. La intención del pensamiento variacional, es la resolución de problemas a partir la identificación de la variación y cambio, para modelar situaciones de la vida cotidiana. El desarrollo de éste se hace a partir del estudio de regularidades y la identificación de criterios que rigen esas regularidades se puedan encontrar patrones que se repiten recurrentemente a través de procesos de visualización, exploración y manipulación.

Es de tener en cuenta que los Estándares también indican que el docente debe propender por fomentar en los estudiantes el ser matemáticamente competente, lo que implica que se debe desarrollar competencias tales como: formular, plantear, transformar y resolver problemas que provienen de la vida cotidiana de relacionados con otras áreas; usar diferentes

registros de representación para dar a conocer ideas matemáticas; usar la argumentación, la prueba y la refutación, siendo esto posible sólo si se tiene dominio sobre el tema trabajado; dominar procedimientos y algoritmos matemáticos.

Sin embargo, como se mencionó anteriormente en las escuelas se privilegia el dominio de procedimientos y algoritmos y en el caso de trabajar problemas, estos no requieren de un análisis e identificación de los datos que los lleven encontrar cambios que generen la modelación de la situación en diferentes tipos de representaciones y de allí se produzcan conjeturas. En algunos casos se restringe la enseñanza a la representación gráfica de una expresión proporcionada en el problema, obtener algunas coordenadas específicas o generar algún tipo de afirmación que guarde relación con el problema.

Es de tener en cuenta que los estudiantes están siendo evaluados constantemente por pruebas estandarizadas, tal es el caso de la prueba Saber 11 en la cual las preguntas buscan indagar sobre las competencias de comunicación, razonamiento y resolución de problemas, como también componentes tales como el Numérico- Variacional, Geométrico- Métrico y Aleatorio que guardan relación con las expuestas en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), expuesto en el documento de Alineación del examen Saber 11 (ICFES, 2013). En esta prueba las preguntas tienen dos niveles de dificultad, el primero corresponde a contenidos genéricos que corresponde a lo que cualquier persona debería saber para desenvolverse en su cotidiano (razonamiento cuantitativo) y los no genéricos que requieren de un dominio curricular abordado en las instituciones educativas. La estructura de estas preguntas es: un enunciado, debe estar en marcados en un contexto; la pregunta, indica al estudiante cual es el dato solicitado; para luego seleccionar respuestas.

El conflicto interno que encuentran los estudiantes es el desconocer cómo abordar estos enunciados, cómo determinar las variables de un problema si estas dependen de la interpretación y respectivo análisis de la pregunta, si en sus clases se les ha formado es en dominar formulas y desarrollar de algoritmos.

1.2 Pregunta(s) de investigación

¿Qué relaciones hay entre el razonamiento covariacional y la comprensión del concepto de función cuando estudiantes de grado once desarrollan situaciones de tipo variacional?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo General

Identificar las relaciones que pueden surgir entre el razonamiento covariacional y la comprensión del concepto de función en estudiantes de grado once, al desarrollar situaciones de tipo variacional

1.3.2 Objetivos Específicos

- Diagnosticar el nivel de razonamiento covariacional y comprensión del concepto de función de los estudiantes de grado once.
- Diseñar y aplicar una secuencia que medida por los niveles de razonamiento, permita observar la comprensión del concepto de función (lineal y cuadrática) y los niveles de razonamiento covariacionales de los estudiantes.
- Tipificar los razonamientos covariacionales y de comprensión del concepto de función de los estudiantes en la solución de una situación de variacional.

- Examinar relaciones entre los niveles de razonamientos de los estudiantes y el nivel de comprensión del concepto de función.

1.4 Antecedentes del problema

Para identificar los antecedentes de la presente investigación, se tuvieron en cuenta dos criterios de búsqueda: el primero relacionada con procesos de razonamiento covariacional, en el que se caracterizó las situaciones que se relacionen con variación y de ella cómo extraer los razonamientos covariacionales de los estudiantes; el segundo se hace una revisión a las acciones que implican la comprensión de la función en los estudiantes.

1.2.1 Antecedentes razonamiento covariacional

Carlson et al. (2003) en la investigación “Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio”, comenta que el razonamiento variacional es un proceso que puede realizarse por medio de fases como: la construcción de una imagen de cambio en una cantidad, la coordinación de imágenes de dos cantidades y formación de una imagen de la covariación simultánea de dos cantidades. Es por esto que es posible establecer operaciones mentales que se interpretan como acciones mentales que involucran la coordinación de cantidades y análisis de comportamientos de cada una con respecto a otra en cada instante, con el fin de establecer niveles que emergen a partir de la sucesión de acciones mentales. Cuando un estudiante tiene dificultad en la comprensión de la noción de función repercute al momento de trabajar límites y derivadas porque tienen pocas habilidades en razonamiento covariacional, debido a que los estudiantes deben observar la función como covariación de los valores de entrada con los de salida.

Los autores citados, mencionan que las acciones mentales sirven de medio para clasificar comportamientos que se puede observar cuando los estudiantes realizan tareas de covariación. Para alcanzar un nivel, los estudiantes deben haber alcanzado las acciones mentales correspondientes al nivel y las correspondientes a los niveles anteriores.

En la investigación se hace la aplicación de instrumentos a estudiantes de segundo semestre de un curso de cálculo donde observaron que el uso de representaciones con material concreto proporcionó herramientas para ayudar al estudiante a hacer inferencias en cuando al razonamiento en el cambio de una variable mientras atendía el cambio de la otra.

Como conclusiones de la experiencia, los autores evidenciaron que a pesar de ser estudiantes de segundo semestre y haber realizado dos cursos de cálculo, los estudiantes presentan dificultad para establecer la razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea. Sin embargo, hubo estudiantes que llegaron a niveles de razonamiento 4 y 5 a partir de argumentos seudo –analíticos (verbales no demostrados mediante procesos matemáticos). También indican los investigadores, la idea básica de variación es accesible a los niños de nivel elemental y medio, por lo que consideran que las tareas propuestas pueden ser aplicadas a estudiantes que no tengan conocimientos de cálculo, pero si habilidades de razonamiento covariacional.

En el mismo sentido, la investigación de Villa (2012) en su artículo “Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadrática” describe los razonamientos de un estudiante de pre cálculo a partir de la solución de una situación de tipo variacional. En el proceso de análisis de lo manifestado por los estudiantes se utilizó como recurso para caracterizar el

razonamiento covariacional las acciones mentales y niveles de razonamiento propuestas por Carlson et al. (2003) Citado por Villa (2012), con forme el estudiante solucionó la actividad se caracterizaba la acción mental desarrollada (pueden variar del 1 al 5, siendo cinco de los procesos más complejos), estas no son excluyentes, sino por el contrario complementarias. Una vez establecida la acción, se asocia a un nivel de razonamiento que indica el grado de comprensión de la variación. Una vez realizado el proceso de análisis, se evidenció que el estudiante logro realizar las acciones mentales uno, dos y tres, por lo que el nivel de razonamiento es tres. El estudiante logró identificar el cambio, la dirección y la cuantificación, no pudo ejecutar los procesos más complejos; como la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea.

Por su parte Ávila (2011) en la investigación “Razonamiento covariacional a través de software dinámico. El caso de la variación lineal y cuadrática” propone un estudio de caso con dos estudiantes de grado decimo, trabajó los conceptos de función lineal y función cuadrática, utilizó como mediación entre las situaciones y las tareas asignadas, algunos software dinámicos tales como Geogebra y Modellus. La autora aplicó tres guías: en la primera solicitó a los estudiantes consultar planes de datos en tres compañías diferentes y seleccionar la que ellos consideraban era la mejor opción; la segunda, consistía en presentar el movimiento de un carro en una simulación realizada en el software Modellus y para el análisis del movimiento (gráficas y tablas) se utilizó el software Geogebra; en la tercera guía, se planteó actividades en las cuales debían dar cuenta de lo comprendido sobre análisis de situaciones, generalización de procesos y tasa de variación promedio. En las tres guías se hizo un proceso progresivo, inicialmente descripciones verbales de qué cambia y cómo cambia, a la cuantificación del cambio mediante la

aplicación de instrumentos diseñados por la investigadora, para encontrar regularidades que pueden ser justificadas desde procesos operacionales. Para describir los procesos de razonamiento relacionados con la función lineal y cuadrática, la investigadora tiene en cuenta los aportes de Carlson et. al. (2003) citado por Ávila (2011), encontró resultados similares a Villa (2012) debido a que los estudiantes hacen una aproximación a la acción mental cuatro, pero no logran concretizar los procesos de manera consiente e intencional, por lo que sólo alcanzaron las acciones mentales uno, dos y tres, llegando a un nivel de razonamiento tres.

Un proceso similar de adaptación de actividades lo realizó Gómez (2015) quien analizó las actividades realizadas por Carlson et. al. (2003) y Villa (2013), teniendo en cuenta que Carlson afirma que las actividades no son específicas a un grado o nivel escolar, si los estudiantes están razonando covariacionalmente se pueden alcanzar todos los niveles. Sin embargo, a pesar de las adaptaciones y los instrumentos diseñados por el investigador, los estudiantes realizaron acciones mentales uno, dos y tres, llegando a un nivel de razonamiento tres. Al final el investigador propone para posteriores trabajos se adapten o diseñen nuevas actividades con las que se pueda movilizar los procesos de razonamiento para alcanzar los niveles cuatro y cinco

En ese sentido esta investigación busca que los estudiantes razonen covariacionalmente mediante la presentación de situaciones de variación y cambio, que serán dirigidas por la investigadora por medio del uso de la aplicación de instrumentos con los cuales los estudiantes puedan tener una movilización de saberes para pasar de un nivel de razonamiento a otro, donde el estudiante complejiza cada vez más su conocimiento y es capaz de usarlo en diferentes contextos.

1.2.2 Respecto a la comprensión del concepto de función.

Murillo (2013) realiza una investigación titulada: “Caracterización de la comprensión del concepto de función en los estudiantes de grados noveno y once de los colegios públicos de la Virginia” para identificar y caracterizar los niveles de comprensión del concepto de función, tuvo como referente las concepciones operacionales y estructurales de estudiantes y docentes a partir de la implementación de instrumentos de los cuales se podrá realizar un análisis cuantitativo de tipo estadístico. La investigadora hace una revisión a las prácticas de aula de los docentes donde encuentra el uso de textos guía, en los que predomina el formalismo al momento de presentar el concepto, cuando hay ejemplos de tipo constructivista no se le permite al estudiante construir el concepto por sí mismo, no se establecen conexiones con temas anteriores como un desarrollo secuencial y no independientes, las situaciones tienen un desarrollo deductivo sin contexto.

De tal forma, Murillo hace una revisión teórica en referencia a la comprensión del concepto de función encontró teorías en las cuales se comprende a partir de la superación de obstáculos (Sierpinska, 1990), en otras teorías de tipo constructivistas proponen que el proceso de comprensión está dado por un proceso constante de reflexión y reestructuración del conocimiento (Ayers, Davis, Dubinsky y Lewin, 1998). Por su parte Carpenter y Lehrer (1999) citado por Murillo (2013), consideran que el proceso de comprensión es evolutivo que surge de cinco actividades mentales: planteamiento de relaciones, aplicación de conocimientos matemáticos, meditación de las experiencias, articulación de saberes y construcción propia del conocimiento matemático.

Murillo (2013) basada en la teoría de Sfard (1991) sobre comprensión de conceptos dice: “Comprender un concepto matemático implica una serie de acciones secuenciales motivados por el sujeto que aprende, quien desde su experiencia o interacción con el medio adquiere un conocimiento básico que va modificando cada vez que recibe una nueva información, lo cual permite identificar características, describir fenómenos y establecer conclusiones de situaciones cada vez más complejas” (p.41)

Con el fin de identificar la importancia de la comprensión del concepto de función, los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas (MEN, 2006) menciona que este concepto es concebido bajo en campo de estudio del pensamiento variacional, lo que implica que se quiere identificar cambios, regularidades o patrones en diversos contextos con el fin de ser expresados mediante algún tipo de representación. La intención de este pensamiento, es la resolución de problemas a partir de procesos de la identificación de la variación y cambio, para modelar situaciones de la vida cotidiana. El pensamiento variacional puede desarrollarse a partir del estudio de regularidades y la detección de criterios que rigen esas regularidades para encontrar patrones que se repiten recurrentemente a través de procesos de visualización, exploración y manipulación.

A manera de cierre, se tomará en cuenta para la presente investigación el documento de Carlson (2003) para identificar las características de las actividades que se deben proponer a los estudiantes que generen razonamiento variacional en su desarrollo. Con respecto al diseño de las situaciones se retomará la propuesta por Ávila (2012) junto con los instrumentos diseñados para verificar posibles ajustes que sean necesarios para llegar a la comprensión del concepto de función teniendo en cuenta el enfoque constructivista señalado por Murillo (2013) donde se busca que el estudiante a partir de la experiencia tome sus saberes previos y sean complejizados

conforme se desarrollan los instrumentos propuestos y lleguen a manejar el concepto como un objeto en cualquier contexto. Para el análisis de la información recolectada de los estudiantes, se tendrá en cuenta a Villa (2012) para caracterizar los comportamientos de los estudiantes que permitan indicar que se encuentra desarrollando una acción mental y cumplen las condiciones necesarias para ubicarlos en un correspondiente nivel de razonamiento propuesto por Carlson (2003) según los procesos realizados por los estudiantes.

1.5 Justificación del problema

La propuesta de investigación surge en respuesta a proponer situaciones que potencien el pensamiento variacional mediante desarrollo de la competencia de razonamiento en el análisis de situaciones problema de manera que los estudiantes estén en la capacidad de identificar qué, cómo y cuánto cambian variables en situaciones problema (MEN, 2006).

Adicionalmente, la propuesta pretende abordar la dificultad evidenciada por Villa (2012) al limitar la enseñanza al desarrollo de algoritmos, mediante el planteamiento de situaciones problema que se encuentren asociadas a diferentes contextos, con el fin de llevar a los estudiantes a que razonen e identifiquen regularidades que le permitan establecer conjeturas sobre las situaciones trabajadas, para luego transitar por diferentes tipos de representación que conduzcan a la comprensión de la función.

La investigación tiene en cuenta el llamado realizado por Gómez (2015) en revisar el diseño o adaptación de situaciones que posibiliten el alcanzar niveles de razonamiento covariacional cuatro y cinco, relacionados con la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea al analizar los cambios y caracterizar la función a partir de ellos.

Por lo anterior, la importancia de esta investigación radica en ver los aportes de la enseñanza de la función a través de la presentación de situaciones problema de tipo variacional de manera que los estudiantes puedan llegar a desarrollar no solo algoritmos, sino puedan establecer razonamientos covariacionales a partir de los cuales identifiquen como la función llega a modelar un problema.

2. MARCO REFERENCIAL

El segundo capítulo hace la presentación de marco referencial asociado al razonamiento covariacional y la comprensión del concepto de función que servirán de referencia para el planteamiento de actividades y análisis de las fases de intervención.

2.1 Pensamiento variacional

En referencia al pensamiento variacional, Vasco (2006) plantea la pertinencia de observar el pensamiento variacional como algo dinámico y no estático, por lo que no se puede considerar como pensamiento variacional la replicación de representaciones algebraicas de funciones, debido a que cuando se presenta se observa es como algo estático donde las variables no están relacionadas entre sí. Por lo que “el pensamiento variacional es la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud” (pág. 6), para captar la variación es necesario identificar un cambio o patrón el cual es posible hallar al aplicar el pensamiento numérico, una vez identificada una regularidad se establece una conjetura para una proyección y esta continua cumpliendo el patrón se hace uso del pensamiento espacial y al entender la covariación entre cantidades de magnitud se hace referencia en pensamiento métrico.

El autor menciona que para desarrollar una situación problema se pueden realizar varias fases, no necesariamente secuenciales:

- “Captación de patrones.
- Creación de un modelo mental.
- Echar a andar el modelo.
- Comparar resultados con el proceso modelado.
- Revisión de modelo”. (Vasco, 2006, p. 7)

Teniendo en cuenta lo anterior, se concluye que el pensamiento variacional requiere tener un estudiante activo en clase y no un objeto que transcriba lo visto, permitiendo dinamizar las prácticas de aula a partir de la movilización de saberes en la solución de problemas; estableciendo conjeturas, verificando la pertinencia de cada estimación, reflexionando y poniéndolas a prueba, para socializarlas y establecer acuerdos. Este pensamiento abre la posibilidad de proponer modelos creados por el estudiante y no solo impuestos por el docente. Por lo cual se toma como referencia la siguiente investigación sobre la enseñanza de función de manera que se tengan en cuenta algunos parámetros que contribuyan al diseño de las actividades de la investigación:

2.2 Enseñanza del Concepto de Función

Las investigaciones de Castro y Díaz (2014) muestran que los estudiantes de educación media presentan deficiencias en la construcción del concepto, algunas dificultades se deben a:

- La construcción deficiente del concepto.
- Falta de situaciones significativas, esto se relaciona con el modelo tradicional del docente.

- La clase de actividades desarrolladas con los diferentes registros de representación.
- La ejercitación de lo simbólico que favorece la manejo de procesos algorítmicos en situaciones problema en las que se encuentre inmerso el concepto.

Las autoras comentan que posterior a una revisión bibliográfica, la propuesta es soportada por el análisis histórico epistemológico que implica trabajar situaciones de cambio y movimiento, las diferentes formas de representación según su aparición histórica; tabular, gráfica y algebraica. En la revisión de concepciones, se observa que los estudiantes trabajan la parte algorítmica, debido a que en el proceso de aprendizaje se hace énfasis en lo algebraico y repetición de modelos.

Desde grado sexto hasta once los estudiantes han trabajado conceptos asociados a función como lo son manejo del plano cartesiano, gráficos, tabulación de situaciones de variación, entre otras.

Señalan que investigaciones realizadas muestran deficiencia en la construcción del concepto. Por esto ven la necesidad de hacer una propuesta para los primeros semestres de educación superior que favorezcan la comprensión de conceptos tales como el límite, derivada e integral.

Las nociones previas son:

- Par ordenado: es una pareja de la forma (x, y) con un criterio de ordenación donde el primer elemento se conoce como abscisa y el segundo como ordenada. Estas parejas pueden ser representadas de manera simbólica, tabular y gráfica, al tener en cuenta el orden es posible hacer el cambio de registro cuando así sea necesario.

- Escalas: se usa para representar diferentes unidades de medida, para ello se divide en partes iguales una línea recta; cada parte representa una escala específica que representa un valor determinado. En el plano cartesiano, cada eje puede tener una escala diferente.

- Interpretación de la letra: “Küchemann (1980) identificó seis formas de interpretar los símbolos literales: letra evaluada; letra no utilizada; letra como objeto; letra como incógnita específica; letra como número generalizado y la letra como variable” (Castro C. & Díaz M, 2014, p.19).

Para el estudio de funciones el estudiante debe comprender : la letra evaluada, en la que a la letra es posible asignar un valor numérico y dependiendo de este la función toma un único valor, y la letra como variable, en el cual se relacionan dos conjuntos y la letra no tiene un rango de valores específicos.

Castro C. & Díaz M (2014) mencionan que se deben promover situaciones inclusivas que pretenden direccionar el proceso de construcción del concepto de función mediante:

- Situaciones de relación: son aquellas que permiten al docente identificar nociones previas de los estudiantes. Se pueden representar de manera gráfica y tabular.
- Situaciones de identificación de funciones: son las situaciones en las que los estudiantes, mediante la comparación entre de gráficas y tablas, clasifican entre las relaciones las que cumplen la condición de ser funcionales.
- Situaciones de caracterización de funciones: este tipo de situaciones pretenden caracterizar los diferentes tipos de funciones (lineales, constante, cuadrática, entre otras), así como también dominio y rango, para identificar las características particulares de cada una tanto gráfica como algebraicamente.

Sin embargo, es de tener en cuenta que la investigación pretende analizar los razonamientos de los estudiantes cuando se enfrentan a una situación de variación, para ellos se tiene en cuenta la investigación de Carlson y sus colaboradores que se presenta a continuación:

2.3 Razonamiento Covariacional

Para Carlson et al. (2003) el razonamiento covariacional son las actividades cognitivas que se realiza cuando se hace la coordinación de dos cantidades que varían mientras una cambia respecto a la otra. Los autores consideran que “las imágenes de covariación son evolutivas” (Saldanha y Thompson (1998) citado por Carlson (2003)) en el sentido de una sucesión ordenada que se pueden establecer por medio de niveles. Las imágenes hacen referencia a algo dinámico que surge de acciones y cambios de atención, mediante la utilización de operaciones mentales.

Estos teóricos afirman que los estudiantes pueden tener pensamientos y comportamientos pseudo- analíticos que hacen referencia a relaciones mentales que pueden parecer como si el estudiante realizara la comprensión de un concepto, pero de hecho no logra asociarlo a un concepto en particular. Por ello, que se debe tener en cuenta el proceso evolutivo de las acciones mentales, lo cual permite observar que el comportamiento o pensamiento no se hace de manera esporádica sino consiente.

También indican Carlson y sus colaboradores que “en forma colectiva, estos estudios sugieren que el razonamiento covariacional es fundamental para comprender conceptos principales del cálculo y que los currículos convencionales no han sido efectivos para promover esta habilidad de razonamiento en los estudiantes”. (p. 127)

- Acciones mentales de razonamiento covariacional:

Las acciones mentales son un medio que permiten clasificar los comportamientos de los estudiantes cuando se enfrentan a actividades de covariación, como se enuncian a continuación:

Tabla 1

Acciones mentales del razonamiento covariacional.

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Nota: Tomado de Carlson et al (2003, p. 128)

- Niveles de razonamiento variacional: Para determinar que un estudiante se encuentra en un nivel de razonamiento debe sustentar que desarrolla una acción mental al enfrentarse a una situación problema que corresponde a ese nivel junto con las acciones de razonamiento que se encuentran por debajo de él.

Tabla 2.

Niveles de la covariacional

<p>Niveles del razonamiento covariacional</p> <p>El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.</p> <p>Nivel 1 (N1). Coordinación</p> <p>En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).</p> <p>Nivel 2 (N2). Dirección</p> <p>En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.</p> <p>Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa</p> <p>En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.</p> <p>Nivel 4 (N4). Razón promedio</p> <p>En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.</p> <p>Nivel 5 (N5). Razón instantánea</p> <p>En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.</p>
<p>Nota: Tomado de Carlson et al. (2003, p. 129)</p>

2.4 Comprensión en Matemáticas

Para Sierpinska (1992) la comprensión hace referencia a cuando el estudiante es capaz de diferenciar un objeto, caracterizarlo, establecer relaciones con otros conceptos y sus posibles aplicaciones. Comenta que en matemáticas la comprensión se relaciona con los cambios cualitativos dados en la mente respecto al conocimiento matemático de concepciones iniciales a modificaciones dadas por un proceso. Los cambios pueden estar dados por actos de sobrepasar errores del pasado que persisten conforme pasa el tiempo (obstáculos epistemológicos) o cambios en las nuevas formas de conocer (actos de comprensión).

Para llegar a comprender el concepto de función el estudiante debe poder abordar las preguntas ¿qué dice la definición del concepto? ¿A qué hace alusión la definición?, junto a todas las posibles relaciones que surjan para dar respuesta a ellas.

Sierpinska indica que para tener un acto de comprensión se debe transitar cuatro categorías: la primera es **identificación**, consiste de caracterizar el objeto matemático; la segunda es **discriminación**, en esta categoría se reconoce la relaciones con otros objetos, sin embargo este guarda propiedades específicas; la siguiente categoría es la **generalización** en la que hay conciencia de extender lo caracterizado a otras aplicaciones; la última categoría es **síntesis** en la cual se pasa de la situación a la identificación de relaciones, regularidades, propiedades de forma consciente. Los estudiantes pueden realizar acciones que lleven a una comprensión evolutiva del concepto (actos de comprensión) o también se puede presentar que durante la mediación del docente – saber y el estudiantes, se establecen errores de tipo epistemológico que pueden ser concebidos como obstáculos para el aprendizaje del concepto. Aunque la autora presenta los actos de comprensión y obstáculos epistemológicos que pueden

presentar los estudiantes conforme abordan el concepto de función, para la investigación solo se tendrán en cuenta los actos de comprensión que se enuncian a continuación:

Tabla 2

Actos De Comprensión

-
- C (f)1: Identificación de los cambios en el mundo circundante como un problema práctico a resolver.
- C (f)2: identificación de regularidades en relaciones entre las modificaciones como una forma de tratar los cambios.
- C (f)3: identificación de los sujetos del cambio en el estudio de los cambios.
- C (f)4: Discriminación entre dos modos de pensamiento matemático: uno en términos de cantidades conocidas y desconocidas, el otro en términos de cantidades variables y constantes.
- C (f)5: Discriminación entre variables independientes y dependientes.
- C (f)6: Generalización y síntesis de la noción de número.
- C (f)7: Discriminación entre número y cantidad.
- C (f)8: Síntesis del concepto de ley y el concepto de función; en particular, la toma de conciencia del posible uso de funciones en el modelo de relaciones entre magnitudes físicas u otras.
- C (f)9: Discriminación entre la función y las herramientas analíticas que algunas veces se usan para describir su ley.
- C (f)10: Discriminación entre definición matemática y descripciones del objeto.
- C (f) 11: Síntesis del concepto general de función como objeto.
- C (f) 12: Discriminación entre los conceptos de función y relación.
- C (f) 13: Discriminación entre la noción de función y sucesión.
- C (f) 14: Discriminación entre coordenadas de un punto de una curva y el segmento de línea como la completa realización de alguna función para la curva.
- C (f) 15: Discriminación entre diferentes formas de representar funciones y las funciones mismas.
-

Nota: actos de comprensión planteados por Sierpinska (1992)

La autora comenta algunas recomendaciones didácticas para la presentación y abordaje del concepto de función, las que se tendrán en cuenta en la investigación para el diseño de las actividades son las siguientes:

1. Los estudiantes deben identificar los cambios, regularidades y relaciones entre ellos.

2. Las funciones pueden aparecer como modelos de fenómenos de la vida diaria, social y económica, o en otras ciencias.
3. El uso, construcción e interpretación de tablas permite tener un acercamiento a la noción de función.
4. La introducción de la definición general de la función no tienen sentido antes de desarrollar una cultura matemática en los estudiantes.
5. Proveer diversas representaciones para el reconocimiento de la función, flexibilidad en modelos de expresión y representación.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Enfoque de investigación

El enfoque de la investigación es de tipo cualitativo, puesto que pretende estudiar el razonamiento variacional en estudiantes de grado once al abordar situaciones de movimiento y cambio, mediante la aplicación de una propuesta de actividades por parte investigadora, en la cual se logre describir y establecer el nivel de comprensión del concepto de función. Al centrar su objetivo en las acciones humanas, siguiendo una metodología de observación y análisis de lo ocurrido durante el desarrollo de la propuesta. (Arnal, 1992).

3.2 Tipo de investigación

La presente investigación es de tipo Investigación-Acción debido a que las acciones ejecutadas pretenden modificar una situación una vez que se diagnostique y comprenda más profundidad los problemas identificados (Elliot, citado por Arnal, 1992). En relación con la presente investigación se pretende tipificar los niveles de razonamiento covariacional y los actos de comprensión alcanzados por los estudiantes en el diagnóstico y ver el proceso conforme se desarrollan las situaciones problemas implementadas durante la investigación.

La intervención se desarrolla en tres fases:

1. Diagnóstico: se presenta una situación y un taller del cual se hace la tipificación inicial de los razonamientos covariacionales y de comprensión de los estudiantes al iniciar el proceso de investigación.

2. Secuencia de Actividades: Los estudiantes desarrollaron dos situaciones relacionadas con el movimiento de un balón, la primera se hace bajo el análisis del pase en línea recta del balón y en la segunda el pase se realiza por medio de rebotes. De cada situación los estudiantes debe transitar

por los diferentes tipos de representación tales como el simbólico, tabular, gráfico y algebraico, con forme van solucionando las preguntas indicadas.

3. Evaluación: Los estudiantes desarrollar la actividad de cierre la cual consiste en identificar cuantos modelos de cajas se pueden armar con una hoja cuadrada, de allí los estudiantes deben caracterizar las variables inmersas por medio de un taller del cual se tipificaran el estado final de niveles de razonamiento covariacional y actos de comprensión ejecutados.

3.3 Población y muestra de la investigación

La población con la cual se desarrolló la investigación fueron estudiantes de Grado Once una Institución Educativa Departamental ubica en el municipio de Guasca Cundinamarca, la muestra fue no probabilística por conveniencia ya que se da énfasis en la formación en funciones y sus características y al tener en cuenta que los niveles de razonamiento cuatro y cinco requieren de habilidades y procesos matemáticos tales identificación de los cambios, cuantificación y la obtención de la razón de cambio promedio e instantánea. El curso focalizado cuenta con veintiún estudiantes de los cuales hay 10 mujeres y 11 hombres, cuyas edades oscilan entre los 16 y 18 años.

3.4 Consideraciones éticas

Para realizar el proceso de intervención de la investigación, se dio a conocer los objetivos y metodología de la propuesta al Rector, Coordinador, Docente Titular, Estudiantes y Padres de familia con el fin de obtener la aceptación de la participación de los estudiantes para la aplicación de las situaciones problema y su respectivo análisis.

3.5 Unidad de análisis

Como unidad de análisis se eligió el pensamiento variacional porque uno de los referentes bajo los cuales los estudiantes han recibido su formación escolar son los Lineamientos

Curriculares Para Matemáticas (MEN, 1998), uno de los pensamientos relacionados en este documento es el variacional en el cual se identifican algunos campos conceptuales:

“• Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad;

- la función como dependencia y modelos de función;
- las magnitudes;
- el álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica,

particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo;

• modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado”. (MEN, 1998, p. 50)

Así mismo, los lineamientos indican que el uso de diferentes escenarios debe ser utilizado para identificar y describir regularidades en los cambios, para describir la relación entre las cantidades cambiantes estableciendo así una relación funcional para poder predecir y controlar cambios. Indica también el documento que uno de los procesos a fomentar es el razonamiento con el cual se puede mostrar el cómo y el por qué se llega a establecer una afirmación sobre un fenómeno estudiado, como también exponer los procesos y argumentos que se realizaron para llegar a dicha afirmación.

Es por esto, que se desprenden las categorías de análisis razonamiento covariacional y comprensión del concepto de función, que se exponen a continuación:

3. 6 Categorías de análisis de análisis

A partir del desarrollo teórico sustentado en el marco teórico, para esta investigación se tendrá en cuenta dos categorías con sus respectivas subcategorías e indicadores de análisis:

- El razonamiento covariacional, del cual se utilizan las acciones mentales y niveles de razonamiento propuestos por Carlson y sus colaboradores (2003) para poder clasificar los procesos realizados por los estudiantes en la solución de situaciones de variación.
- Comprensión en matemáticas, para esta categoría se usa como referente a Sierpinska (1992), indica obstáculos epistemológicos y actos comprensión, en la investigación se tomaron los actos de comprensión que se relacionaran de acuerdo a cada situación presentada y los razonamientos expuestos por los estudiantes.

3. 7 Matriz categorial

Una vez establecido el problema, la pregunta y los objetivos de investigación, se observó que la unidad de análisis sobre la cual se trabaja durante el pensamiento variacional y a partir de allí que pensó cómo posibilitar que los estudiantes lo comprendieran, de manera que no solo se remitieran a recitar una expresión algebraica, sino establecieran relaciones con fenómenos asociados a la covariación entre variables en situaciones problema. En la tabla No 3 se sintetiza la matriz categorial respectiva

Tabla 3

Matriz Categorial

PREGUNTA PROBLEMA	OBJETIVO GENERAL	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	UNIDAD DE ANÁLISIS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS	INDICADORES
¿Cómo los procesos de razonamiento variacional de los estudiantes de grado once de la I.E. Ciudadela Sucre incide en la comprensión del concepto de función (afín y cuadrática)?	Caracterizar los procesos de razonamiento variacional de los estudiantes de grado once y su incidencia en la comprensión del concepto de función (afín y cuadrática)	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Diagnosticar el nivel de comprensión del concepto de función de los estudiantes de grado once. ➤ Diseñar y aplicar una estrategia que mida por los niveles de razonamiento, mejore la comprensión del concepto de función (afín y cuadrática) ➤ Tipificar los razonamientos de los estudiantes en la solución de una situación de movimiento, a partir de la propuesta de Carlson (2003) ➤ Comparar los niveles de razonamientos de los estudiantes y el nivel de comprensión del concepto de función. 	Pensamiento Variacional	Comprensión en Matemáticas	Actos de comprensión de la función	Para el análisis de las actividades de la propuesta de investigación se tomará los actos de comprensión C(1) hasta el C(12) propuestos por Sierpinski (1992)
				Razonamiento covariacional.	Niveles de razonamiento covariacional	Nivel 1 (N1). Coordinación Nivel 2 (N2). Dirección Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa. Nivel 4 (N4). Razón promedio. Nivel 5 (N5). Razón instantánea.

Nota: planteamiento matriz categorial a partir de pregunta y objetivos de investigación.

3.8 Fase Diagnóstica

Para el diseño del instrumento cada pregunta tuvo una relación directa con una acción mental y un acto de comprensión. La aplicación se desarrolló por parejas de manera que se abiera espacio a discusiones sobre las posibles soluciones al problema planteado sobre costo de transporte. Luego, para el análisis se tomaron los talleres desarrollados por los estudiantes y según cada respuesta se tipificó una acción mental y un acto de comprensión. Por último, se diseñaron las actividades que potenciaran los razonamientos covariacionales para hacer el seguimiento del desempeño de cada grupo conforme se aplica cada actividad.

3.8.1 Instrumento Diagnostico

Tabla 4.

Alineación Instrumento Diagnóstico y Marco Teórico

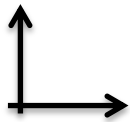
Situación	<p>Patricia vive en Guasca, es empleada del centro comercial Santa fe, al norte de la ciudad de Bogotá. Para ir de su casa al trabajo y viceversa debe tomar una flota cuyo costo es de \$6000 por cada trayecto. Semanalmente tiene derecho a un descanso, la empresa hace el pago mensualmente cada treinta días.</p> <p>Responda las preguntas de acuerdo con la información anterior:</p>													
<ol style="list-style-type: none"> Para realizar un presupuesto del costo del transporte al mes, ¿Qué valores del enunciado se deben tener en cuenta? Patricia quiere hacer un presupuesto que le ayude a determinar el dinero que debe guardar para sus gastos de transporte durante el mes. Tenga en cuenta que Patricia descansa un día a la semana, para completar la información solicitada en la siguiente tabla: 	<p>Nivel de razonamiento</p> <p>Identificación de qué cambia</p> <p>AM1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.</p> <p>AM1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.</p>	<p>Actos de comprensión</p> <p>C (f)1: Identificación de los cambios en el mundo circundante como un problema práctico a resolver.</p> <p>C (f)2: identificación de regularidades en relaciones entre las modificaciones como una forma de tratar los cambios.</p>												
<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="193 950 394 1079">Puntos de referencia</th> <th data-bbox="394 950 604 1079">¿Cuál operación se debe realizar? ¿Por qué?</th> <th data-bbox="604 950 835 1079">Proceso de cálculo del costo de transporte.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="193 1079 394 1153">Día</td> <td data-bbox="394 1079 604 1153"></td> <td data-bbox="604 1079 835 1153"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="193 1153 394 1234">Semana</td> <td data-bbox="394 1153 604 1234"></td> <td data-bbox="604 1153 835 1234"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="193 1234 394 1323">Mes</td> <td data-bbox="394 1234 604 1323"></td> <td data-bbox="604 1234 835 1323"></td> </tr> </tbody> </table>	Puntos de referencia	¿Cuál operación se debe realizar? ¿Por qué?	Proceso de cálculo del costo de transporte.	Día			Semana			Mes			<p>AM1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.</p> <p>AM2. Coordinación de la dirección del</p>	<p>C (f)3: identificación de los sujetos del cambio en el estudio de los cambios.</p> <p>C (f)4: Discriminación entre dos modos</p>
Puntos de referencia	¿Cuál operación se debe realizar? ¿Por qué?	Proceso de cálculo del costo de transporte.												
Día														
Semana														
Mes														

de transporte?

- ¿Qué valor(es) cambia(n) al momento de hallar el costo del transporte en cada punto de referencia?
 - ¿Cómo cambian al comparar dos puntos de referencia diferentes?
4. Complete la siguiente tabla tomando como referencia los procesos realizados en el numeral dos:

Días	1	6	12	26	38
Costo					

5. Represente gráficamente el costo de transporte en los siguientes momentos:
Diario, semana, al mes, mes y medio, a los dos meses.



6. Realice un reporte dirigido a Patricia donde le manifieste cómo determinar el presupuesto durante el mes y cuánto dinero debe guardar en los puntos de referencia tomados en el numeral dos.

cambio de una variable con los cambios en la otra variable.

AM1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.
AM2. Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.
AM3. Coordinación de la cantidad del cambio de una variable con los cambios de la otra.

AM1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.
AM2. Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.
AM3. Coordinación de la cantidad del cambio de una variable con los cambios de la otra.

AM1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.
AM2. Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.
AM3. Coordinación de la cantidad del cambio de una variable con los cambios de la otra.
AM4. Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.

de pensamiento matemático: uno en términos de cantidades conocidas y desconocidas, el otro en términos de cantidades variables y constantes.

C (f)5: Discriminación entre variables independientes y dependientes.

C (f)8: Síntesis del concepto de ley y el concepto de función; en particular, la toma de conciencia del posible uso de funciones en el modelo de relaciones entre magnitudes físicas u otras.

C (f) 10: Discriminación entre definición matemática y descripciones del objeto.

3.8.2 Resultados Diagnostico

Para el análisis del diagnóstico se observó el proceso realizado por cada grupo durante la solución de la situación asociada al transporte, a cada una de las preguntas le fue asignada una acción mental y acto de comprensión como se muestra a continuación:

Tabla 7.

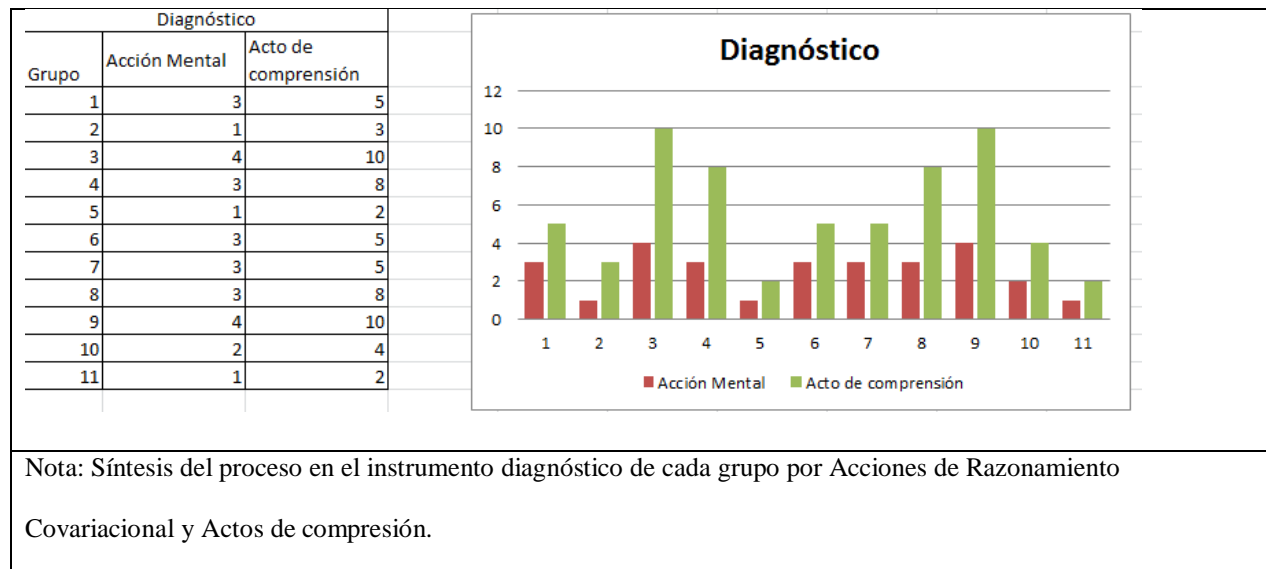
Análisis instrumento Guía uno

	1		2		3		4		5		6	
Pregunta												
Grupo												
Grupo 1	AM1	C (1)	AM1	C (2)	AM2	C (4)	AM3	C (5)	AM3	C (8)	AM3	C (5)
Grupo 2	AM1	C (1)	AM1	C (1)	AM1	C (2)	AM1	C (2)	AM1	C (2)	AM1	C (3)
Grupo 3	AM1	C (1)	AM1	C (1)	AM2	C (4)	AM3	C (5)	AM3	C (8)	AM4	C (10)
Grupo 4	AM1	C (1)	AM1	C (1)	AM2	C (4)	AM3	C (5)	AM3	C (8)	AM3.	C (8)
Grupo 5	AM1	C (1)	AM1	C (1)	AM1	C (2)	AM1	C (2)	AM1	C (2)		
Grupo 6	AM1	C (1)	AM1	C (1)	AM2	C (4)	AM3	C (5)	AM3	C (8)	AM3.	C (5)
Grupo 7	AM1	C (1)	AM1	C (1)	AM2	C (4)	AM3	C (5)	AM3	C (8)	AM3.	C (5)
Grupo 8	AM1	C (1)	AM1	C (1)	AM2	C (4)	AM3	C (5)	AM3	C (8)	AM3.	C (8)
Grupo 9	AM1	C (1)	AM1	C (1)	AM2	C (4)	AM3	C (5)	AM3	C (8)	AM4	C (10)
Grupo 10	AM1	C (1)	AM1	C (1)	AM1	C (2)	AM1	C (2)	AM1	C (2)	AM2	C (4)
Grupo 11	AM1	C (1)	AM1	C (1)	AM1	C (2)	AM1	C (2)	AM1	C (2)		

Nota: Las contracciones corresponde a AM- Acción Mental, C() Acto de comprensión, Sin Respuesta

Una vez observados los razonamientos de cada una de las pregunta, se asignó la mayor acción de mental y el acto de comprensión alcanzados, según los razonamientos puestos al solucionar las preguntas.

Tabla 8.

Tipificación Acciones mentales y Actos de comprensión Diagnóstico.

Así por ejemplo, los grupo que se mantuvieron en una acción mental uno y un acto de comprensión dos fueron aquellos quienes determinaron que había un cambio en el costo de transporte conforme hubiera mayor cantidad de días, lo que implica la determinación de las variables en la situación, pero no llegaron a establecer la dependencia entre ellas, ni la coordinación entre la dirección del cambio.

Por otra parte, los grupos que alcanzaron los niveles más altos de razonamiento covariacional y de actos de comprensión hicieron una coordinación entre la razón de cambio de una variable con los cambios de la otra así:

¿Algún valor se mantiene constante al calcular el costo de transporte? Explique de qué manera encontró este valor

Si, se mantiene el valor de \$6.400 porque es el valor diario que gasta y se multiplica por los días de semana y mes que trabaja.

¿Qué valor(es) varia(n) al momento de hallar el costo del transporte en cada punto de referencia? A partir de un ejemplo explique su respuesta.

Varían los valores de semana y mes. Ej:

A la semana gasta \$38.400 trabajando 6 días y al mes gasta \$166.400 trabajando 26 días

¿Cómo cambian los valores al comparar dos puntos de referencia diferentes?

Cambian los resultados con el número de días que trabaja al ser multiplicados.

Solución de taller estudiantes. Razonamiento identificación de variables.

Para sintetizar, todos los grupos desarrollaron la acción mental uno lo que implica que alcanzaron el nivel de razonamiento uno que corresponde al de Coordinación, de estos uno grupo avanzó al nivel de razonamiento dos donde identificaron la dirección del cambio, cinco de las parejas lograron ejecutar acciones mentales que los ubicaron en un nivel de razonamiento tres en el cual coordinaron la cuantificación del cambio y finalmente solo dos parejas consiguieron un nivel de razonamiento cuatro en el cual hallaron la razón de cambio promedio al identificar las variables inmersas en el problema, luego cuantificar el cambio y para llegar a establecer en qué medida los cambios de una variable tenía efectos en el valor adquirido para la otra variable. Es de tener en cuenta que es necesario verificar que los estudiantes alcanzaron estos niveles de manera consiente, por lo que durante la intervención se deben volver a tener en cuenta preguntas o instrucciones asociadas a cada acción mental.

3.9 Fase de Intervención

Para el diseño de los instrumentos se tuvo en cuenta que las actividades estuvieran enmarcadas en situaciones problema que surgen de hacer una revisión de los actos de comprensión indicados por Sierpinska (1992) y su desarrollo histórico, para tomar algunas

situaciones asociadas a ellos. Adicionalmente se diseñaron preguntas que fomentaran el razonamiento sobre los cambios de las variables asociadas a cada situación (covariación).

Las situaciones de tipo covariacional estuvieron relacionadas con el análisis dos movimientos con un balón: el primero hacer rotación en el suelo de un extremo al otro de la cancha y el segundo el pase del balón por medio de un rebote.

Para la evaluación de cierre, se solicitó a los estudiantes indicar las posibles cajas que se puedan construir con una hoja cuadrada.

3.9.1 Metodología de la intervención

Para la ejecución de las actividades la investigadora diseñó un taller que consta de preguntas e instrucciones de manera que los estudiantes aborden cada situación, la caractericen y establezcan diferentes representaciones entre ellas. Cada una de las preguntas está a lineada de manera que corresponda a un nivel de razonamiento y un acto de comprensión para que al analizar los razonamientos de los estudiantes se observe si alcanzó un nuevo nivel o lo mantuvo durante la ejecución.

En relación a la aplicación de cada taller, se estimó una duración de un bloque (dos horas clase), es decir, seis bloques. Sin embargo, se realizó un ajuste debido a que en la institución el horario es de una sola hora por lo que fue necesario tomar el doble de sesiones y tres adicionales, debido a que algunas horas clase se redujeron por actividades institucionales.

3.9.2 Sistematización de la información de la intervención

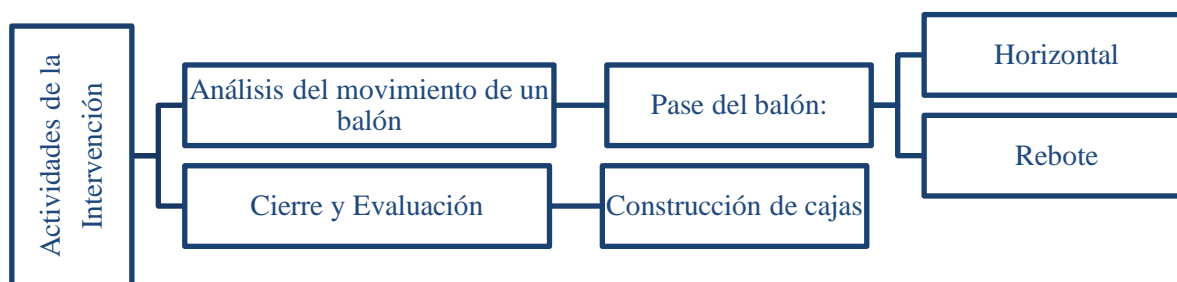
Para sistematizar la información recogida en con la aplicación de cada taller, se diseñó tabla de categorización por acciones mentales y actos de comprensión, de manera que al revisar

las respuestas de los grupos en cada pregunta del instrumento se asignara una acción mental y un acto de comprensión, permitiendo así verificar el proceso durante el desarrollo del taller ya que se identifica si se mantuvo en una misma acción mental y acto de comprensión o se desplazaron hacia acciones y actos más complejos. Luego de esto, se procedió a construir una nueva tabla que resumiera el proceso de cada grupo, en la cual se plasmó la acción mental y acto de comprensión mayor alcanzada durante el desarrollo del taller.

3.9.3 Hipótesis de intervención

Las actividades de intervención permitirán tipificar los niveles de razonamiento y actos de comprensión ejecutados por los estudiantes al enfrentarse a situaciones problema, de manera que se lleguen a establecer posibles relaciones entre ellos.

3.9.4 Estructura de la intervención



Para la intervención se tuvo en cuenta que para propiciar el Razonamiento variacional las Situaciones deben estar enmarcadas en la variación y cambio, para ello se utilizó en una primera parte el análisis de dos movimientos de un balón donde mediante preguntas se solicitó a estudiantes identificar variables para establecer regularidades, así como también cambios durante los movimientos. El primer movimiento está conformado por tres bloques de clase:

- en el primero los estudiantes realizaron el pase de un punto a otro del balón del cual se les solicitó información de manera que hicieron diferentes tipos de representación (tabular, gráfica y simbólica)
- luego para el segundo bloque, mediante el apoyo del Software Tracker los estudiantes revisarían sus conjeturas y procesos desarrollados en el primer taller contrastado con la información proporcionada por el software, esto mediante el desarrollo de la segunda parte de la guía uno,
- para el tercer bloque, se hizo una socialización del proceso desarrollado en la guía uno, mediante preguntas orientadoras expuestas más adelante.

Para el segundo movimiento se hizo el pase por medio de rebotes, para este taller se procesó el movimiento en el software Tracker y solicitó a los estudiantes analizar el movimiento a partir del tiempo y la altura en puntos indicados en tablas y preguntas.

El taller de Evaluación y Cierre se dividió en dos partes, en la primera se debía hacer la construcción de modelos de cajas con una hoja de forma cuadrada, posterior a ello solucionar algunas preguntas y representaciones solicitadas. En la segunda parte los estudiantes debían hacer la simulación en el software Geogebra y en el taller contestar las preguntas indicadas.

3.9.5 Instrumentos de la intervención

A continuación se presentan los talleres propuestos para la fase de intervención en la investigación, la única variación que presenta con los aplicados a los estudiantes son los espacios entre cada pregunta para hacer la respectiva solución.

Tabla 5.

Instrumentos de Intervención

GUÍA DE TRABAJO PRIMER MOMENTO

PRIMERA PARTE.

Objetivo: Describir el movimiento rectilíneo uniforme realizado con un balón.

Materiales:

- Balón
- Un marcador o tiza
- Celular o cámara.
- Metro

Distribución del salón:

- Grupos de tres personas formados, para la distribución de salón se hará uso de fichas y los estudiantes que tenga igual figura formarán un grupo.

Roles de los integrantes en los grupos:

- Líder: se encargará de lanzar el balón sobre una línea recta y expondrá el proceso al final de la clase.
- Generador de ideas: trazará una línea recta de tres metros de largo en el suelo con la tiza y llevará el registro de video del movimiento del balón.
- Corrector: llevará el registro escrito de los objetivos de la actividad y tomará el registro del tiempo que tarda el balón en recorrer el segmento trazado con la tiza.

DESARROLLA

Entre los integrantes de cada grupo deben responder las siguientes preguntas, para ello deben tener como referente la experiencia realizada con el balón y se puede usar los registros de video y escritos que haya tomado el grupo.

- Describa de forma detallada ¿cómo se puede determinar que el balón se movió?
- ¿Qué movimiento describió?
- ¿Qué variables están involucradas en el movimiento del balón?, y ¿Qué relaciones encuentra entre ellas?

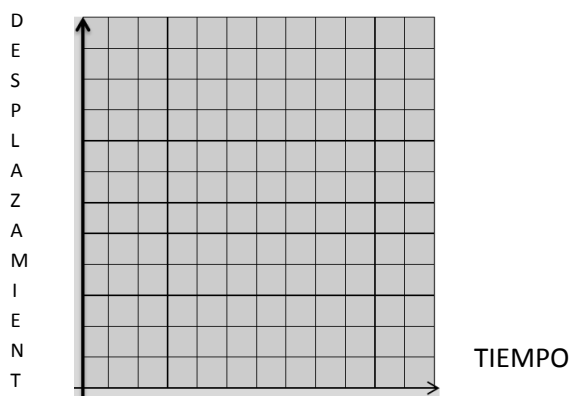
SEGUNDA PARTE

Objetivo: Relacionar los datos obtenidos en el experimento y analizar la información

1. Analice el video y complete la siguiente tabla de datos según el movimiento realizado por el balón.

Tiempo (segundos)					
Desplazamiento (centímetros)					

Desplazamiento Vs Tiempo



Conteste las siguientes preguntas teniendo en cuenta los valores de la tabla y la gráfica.

- ¿Cuál es la diferencia en el tiempo y el desplazamiento del balón teniendo en cuenta los siguientes

intervalos de tiempo?

t_i	t_f	$\Delta t = (t_f - t_i)$	X_i	X_f	$\Delta X = (X_f - X_i)$
0s	1s				
1s	2s				
2s	3s				
3s	4s				
4s	5s				
5s	6s				
6s	7s				

- ¿Cuánto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo?
- Al avanzar el tiempo, ¿Qué afirmación se puede hacer respecto al desplazamiento de manera cualitativa y cuantitativamente?

GUIA DE TRABAJO SEGUNDO MOMENTO

Procedimiento:

Con el video que realizo en la primera parte del trabajo, enviar a la docente el archivo para ser procesado en el programa Tracker (Ver anexo 1) y luego a cada grupo se le entregará los datos y gráficas suministrados por el software.

DESARROLLA

Conteste las siguientes preguntas tomando como referente valores de la tabla y la gráfica suministrados por Tracker.

- ¿Cuál es la diferencia en los desplazamientos del balón teniendo en cuenta los siguientes intervalos de tiempo?

t_i	t_f	$\Delta t = (t_f - t_i)$	X_i	X_f	$\Delta X = (X_f - X_i)$	$m = \Delta X / \Delta t$
0s	0,5s					
0,5s	1s					
1s	1,5s					
1,5s	2s					
2s	2,5s					
2,5s	3s					

- ¿Cuánto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo?
- Al avanzar el tiempo, ¿Qué afirmación se puede hacer respecto al desplazamiento cualitativa y cuantitativamente?
- ¿Cuál es la diferencia en el desplazamiento del balón teniendo en cuenta los siguientes intervalos de tiempo?

t_i	t_f	$\Delta t = (t_f - t_i)$	X_i	X_f	$\Delta X = (X_f - X_i)$	$m = \Delta X / \Delta t$
-------	-------	--------------------------	-------	-------	--------------------------	---------------------------

0s	0,4s					
0,4s	0,8s					
0,8s	1,2s					
1,2s	1,6s					
1,6s	2s					
2s	2,4s					

- ¿Qué tanto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo?
- Al avanzar el tiempo, ¿Qué afirmación se puede hacer respecto al desplazamiento cualitativa y cuantitativamente?
- De acuerdo a los datos obtenidos, ¿Qué interpretación le puede dar a los resultados en los intervalos de la primera tabla y la segunda tabla?
- ¿Algún valor se mantuvo constante al analizar el movimiento del balón por medio de cada una de las tablas?
- ¿Qué valor(es) cambia (ron) al analizar el movimiento del balón por medio de cada una de las tablas?
- Encuentre la función que modela el movimiento balón de acuerdo a los datos arrojados por Tracker. Justifique su respuesta.

GUIA DE TRABAJO TERCER MOMENTO

Objetivo: Validar y corregir procesos tendientes al concepto de función.

Materiales:

- Carteleras con procesos realizados por cada grupo.
- Desarrollo guía uno y dos de cada grupo.

Descripción: A partir de los resultados tenidos en el primer y segundo momento por cada grupo, se realizará la socialización de los resultados y hallazgos encontrados conforme se analizó el movimiento del balón.

Sobre la experiencia:

1. ¿Cómo determinaron que el balón se movió?
2. ¿Qué diferencias y similitudes encontraron al desarrollar cada una de las guías?
3. ¿hubo alguna pregunta emergente de la cual haya solicitado ayuda a la docente o aun tenga dudas?

Sobre el desarrollo de los talleres.

1. ¿Cuáles son las variables inmersas en la situación?
2. Describa el movimiento del balón a partir de la gráfica suministrada por el programa.
3. ¿Cómo es el comportamiento de dichas variables?
4. ¿Cómo pueden interpretar el Δ para analizar cada una de las variables?
5. Al comparar las tablas realizadas con los datos suministrados por el software Tracker, ¿Qué afirmaciones se pueden realizar?
6. Al tener en cuenta los datos encontrados podría plantear una expresión matemática que represente la situación. (Explicar cómo encontrar la función que modela el movimiento)
7. Podría proponer alguna manera de modelar la situación. (Exponer cada una de las funciones que surgieron de la experiencia)

GUIA DE TRABAJO CUARTO MOMENTO

Objetivo: Describir el movimiento de la pelota.

Materiales:

- Computador
- Video del rebote de un balón
- Programas (Tracker, Geogebra)

Procedimiento:

1. Procesar el Video del rebote del balón en el software Tracker (Ver anexo 2) y suministrar los datos a los estudiantes para realizar las tablas uno y dos del presente taller.
2. Responder las preguntas de acuerdo al movimiento y los datos generados por el software Tracker.

CONTESTA

Observe el video el video y la información generada por Tracker.

1. ¿Cuál es la diferencia en el desplazamiento del balón teniendo en cuenta los siguientes intervalos de tiempo?

t_i	t_f	$\Delta t = (t_f - t_i)$	Y_i	Y_f	$\Delta Y = (Y_f - Y_i)$	$\Delta Y / \Delta t$
0,2	0,3					
0,3	0,4					
0,4s	0,5s					
0,5s	0,6s					
0,1	0,6					

- Describa el desplazamiento el balón de acuerdo a la altura en cada uno de los intervalos de tiempo observados
 - ¿Qué sucede con la pendiente en cada uno de los intervalos?, señale en la gráfica los puntos extremos indicados en el intervalo e indique la pendiente entre ellos.
2. ¿Cuál es la diferencia en el desplazamiento del balón en los siguientes intervalos de tiempo?

t_i	t_f	$\Delta t = (t_f - t_i)$	Y_i	Y_f	$\Delta Y = (Y_f - Y_i)$	$\Delta Y / \Delta t$
1,0	6,0					
2,0	5,0					
3,0	4,0					
3,2	3,8					
3,4	3,6					
3,49	3,51					

- ¿Qué tanto se desplaza el balón en cada uno de los siguientes intervalos de tiempo?
 - ¿Qué sucede con los desplazamientos en la altura de cada intervalo?
 - ¿cómo es el comportamiento de la pendiente en cada intervalo trabajado? señale en la gráfica los puntos indicados en el intervalo e indique la pendiente entre ellos.
3. De acuerdo a los datos obtenidos, ¿Qué interpretación le puede dar a los resultados en los intervalos en la primera tabla y en la segunda tabla?
 4. Tomando los datos del tiempo final (t_f) en cada uno de los intervalos de la primera tabla, con la variación de la altura (ΔY) que corresponde a ese intervalo, forme coordenadas tiempo-Altura ($t_f, \Delta Y$) en Geogebra y luego una esos puntos observando la gráfica que les da, y conteste las siguientes preguntas
- ¿Qué relación encuentra entre la línea recta y la parábola?
 - ¿Qué interpretación le da a la diferencia de alturas?

- **Actividad de cierre**

Tabla 6.

Instrumento de Evaluación

GUÍA DE TRABAJO CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Objetivo: Determinar el nivel de comprensión del concepto de función.

PRIMERA PARTE.

Materiales: hoja de papel y software Geogebra.

Construcción: En una hoja de figura cuadrada, realizar posibles modelos de cajas (sin tapa y sin pestañas).

- ¿Cuántos pueden construirse? ¿Por qué?
- ¿Qué magnitudes cambian al hacer una nueva caja?
- Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta dos de los elementos que cambian en el desarrollo.

- Proponga una representación gráfica para la situación



En el software Geogebra, realizar el modelo del papel y los posibles dobleces generados por las cajas.

Describe el proceso de construcción y los elementos que tuvo en cuenta para generar los dobleces

- ¿Qué variables puede identificar que mantienen o varían en el modelo? Justifique su respuesta.
- ¿Cómo se podría determinar cuánto cambian las variables?
- Describa cómo se puede percibir los cambio
- ¿Los cambios son uniformes?

Proponga una expresión algebraica que le permita representar la situación, describa cómo la puede encontrar y por qué guarda relación con la situación

Nota: el instrumento se divide en dos partes: la primera experimental y en la segunda se hace un proceso de modelación de la situación en Geogebra

4. Resultados, hallazgos, conclusiones y recomendaciones

4.1 Resultados

4.1.1 Resultados guía uno

Para el abordaje de la primera guía relacionada con el análisis del movimiento del balón se analizó el instrumento de manera semejante al mostrado en el diagnóstico, sin embargo

la variación en cuanto a la organización de la información consiste en que el proceso de los grupos se observa de manera vertical al responder cada pregunta:

Tabla 9.

Análisis instrumento Guía dos

Grupo	1	2	3	4	5	6
Pregunta						
Describa de forma detallada ¿cómo se puede determinar que el balón se movió?	AM1-C(1)	AM1-C(1)	AM1-C(1)	AM1-C(1)	AM1-C(1)	AM1-C(1)
¿Qué movimiento describió?						
¿Qué variables están involucradas en el movimiento del balón?, y ¿Qué relaciones encuentra entre ellas?	AM1-C(3)	AM1-C(3)	AM1-C(3)	AM1-C(3)	AM1-C(1)	AM2-C(3)
Analice el video y complete la siguiente tabla de datos según el movimiento realizado por el balón.						
¿Cuál es la diferencia en el tiempo y el desplazamiento del balón teniendo en cuenta los siguientes intervalos de tiempo?	AM2-C(3)	AM2-C(4)	AM2-C(3)	AM2-C(4)	AM1-C(1)	AM1-C(1)
¿Cuánto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo?	AM2-C(4)	AM2-C(4)	AM2-C(3)	AM2-C(3)	AM1-C(1)	AM2-C(3)
Al avanzar el tiempo, ¿Qué afirmación se puede hacer respecto al desplazamiento de manera cualitativa y cuantitativamente?	AM3-C(8)	AM3-C(8)	AM2-C(3)	AM2-C(3)	AM1-C(1)	AM2-C(3)
Nota: Tipificación del proceso de cada grupo según lo ejecutado en cada una de las preguntas.						

El grupo uno al cuatro mantiene un proceso progresivo, aunque con un alcance diferente porque los dos reconocen y discriminan variables, pero en el grupo uno y dos reconocen la coordinación de la dirección del cambio así:

-
- Describe de forma detallada ¿cómo se puede determinar que el balón se movió?
se ejerce una fuerza que impulsa el balón a cierta velocidad para conservar la trayectoria rectilínea que se quiere obtener.
 - ¿Qué movimiento describió?
Movimiento Rectilíneo ya que su velocidad fue constante y se hizo una trayectoria recta.
 - ¿Qué variables están involucradas en el movimiento del balón?, y ¿Qué relaciones encuentra entre ellas?
Velocidad, Tiempo, Distancia + Velocidad - tiempo
-

Tipificación de razonamiento Grupo uno

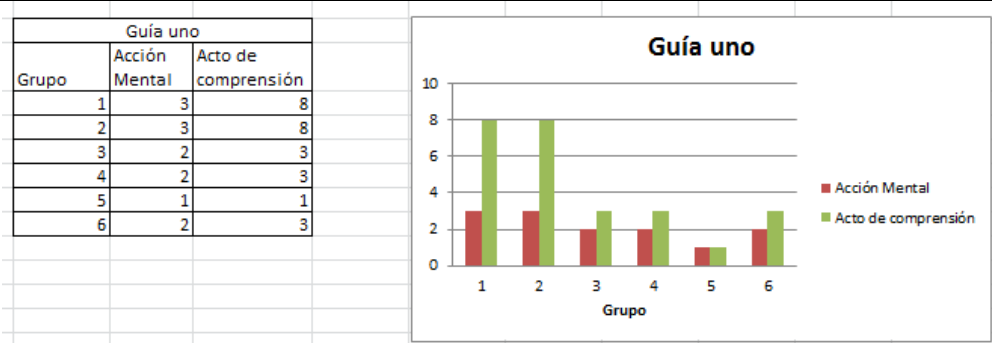
En el grupo cinco que mantuvo un nivel de razonamiento y acto de comprensión mínimo tuvo esta categorización porque describe la experiencia, pero no genera algún tipo de análisis y/o reflexión sobre ella:

se encargaba de hacer el primer lanzamiento, en el punto final estaba la otra integrante del grupo y cumplía la función de detener el balón por último fue grabado el recorrido del balón desde el punto inicial al punto final; teniendo en cuenta el tiempo y la distancia del balón en cada parte dividida. Concluimos que el balón se demora 4s para llegar al punto final. Por lo tanto en cada parte tuvo el tiempo de:

Tipificación de razonamiento Grupo cinco.

En consecuencia, los grupos obtuvieron la siguiente tipificación de niveles de razonamientos y actos de comprensión para la Guía uno:

Tabla 10.

Tipificación Acciones mentales y Actos de comprensión Guía uno.

Nota: Síntesis del proceso de cada grupo por Acciones de Razonamiento Covariacional y Actos de comprensión Guía Uno

4.1.2 Resultados guía dos

Para esta guía a los estudiantes se les proporcionó los datos suministrados por el software Tracker al procesar el video del movimiento realizado en la guía uno, de allí los estudiantes debían extraer información de acuerdo a las instrucciones dadas en cada pregunta, según la información proporcionada se tipificaron los razonamientos covariacionales y actos de comprensión así:

Tabla 11.

Análisis instrumento Guía dos

Pregunta	Grupo	1	2	3	4	5	6
¿Cuál es la diferencia en los desplazamientos del balón teniendo en cuenta los siguientes intervalos de tiempo?- completar tabla		AM1 -C(1)		AM2 -C(4)	AM2- C(4)	AM 1- C(2)	AM1 -C(1)
¿Cuánto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo?							

Al avanzar el tiempo, ¿Qué afirmación se puede hacer respecto al desplazamiento cualitativa y cuantitativamente?	AM2 -C(3)	AM2 -C(4)	AM2- C(5)	AM2- C(4)	AM2 -C(3)
¿Cuál es la diferencia en el desplazamiento del balón teniendo en cuenta los siguientes intervalos de tiempo?- completar tabla	AM2 -C(3)	AM2 -C(4)	AM2- C(4)	AM 1- C(2)	AM2 -C(3)
¿Qué tanto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo?	AM2 -C(3)	AM2 -C(4)	AM3- C(5)	AM 1- C(2)	AM2 -C(3)
Al avanzar el tiempo, ¿Qué afirmación se puede hacer respecto al desplazamiento cualitativa y cuantitativamente?	AM2 -C(3)	AM1 -C(2)	AM3- C(7)	AM 1- C(2)	AM2 -C(3)

Nota: Tipificación del proceso de cada grupo según lo ejecutado en cada una de las preguntas, el grupo número dos No presentó la guía debido a que se encontraba ausente.

Para el análisis de esta guía se tuvo que tener en cuenta que en algunas ocasiones los estudiantes pueden presentar pensamientos y comportamientos pseudo-analíticos con los cuales se pensaría que el estudiante alcanzó una acción mental determinada. Sin embargo, al continuar con la ejecución del taller se observó que no era claro para ellos el dominio de este razonamiento, como se muestra a continuación:

<table border="1"> <thead> <tr> <th>t_i</th> <th>t_i</th> <th>$\Delta t = (t_i - t_{i-1})$</th> <th>X_i</th> <th>X_{i-1}</th> <th>$\Delta X = (X_i - X_{i-1})$</th> <th>$m = \Delta X / \Delta t$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0s</td> <td>0.5s</td> <td>0.5</td> <td>2.013</td> <td>0</td> <td>2.013</td> <td>2.013/0.5 = 2.133</td> </tr> <tr> <td>0.5s</td> <td>1s</td> <td>0.5</td> <td>4.124</td> <td>2.013</td> <td>2.111</td> <td>2.111/0.5 = 2.14</td> </tr> <tr> <td>1s</td> <td>1.5s</td> <td>0.5</td> <td>6.187</td> <td>4.124</td> <td>2.063</td> <td>2.063/0.5 = 2.14</td> </tr> <tr> <td>1.5s</td> <td>2s</td> <td>0.5</td> <td>8.180</td> <td>6.187</td> <td>1.993</td> <td>1.993/0.5 = 1.993</td> </tr> <tr> <td>2s</td> <td>2.5s</td> <td>0.5</td> <td>10.109</td> <td>8.180</td> <td>1.929</td> <td>1.929/0.5 = 1.929</td> </tr> <tr> <td>2.5s</td> <td>3s</td> <td>0.5</td> <td>11.967</td> <td>10.109</td> <td>1.858</td> <td>1.858/0.5 = 1.858</td> </tr> </tbody> </table> <p>• ¿Cuánto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo?</p> <p>el balón se desplaza de una forma rectilínea cada 0.5 segundos pasa por uno de los puntos dados y varía los intervalos de tiempo</p> <p>• Al avanzar el tiempo, ¿Qué afirmación se puede hacer respecto al desplazamiento cualitativa y cuantitativamente?</p> <p>el balón hace un desplazamiento rectilíneo y en cada punto varía el tiempo y distancia que recorre</p> <p>• ¿Cuál es la diferencia en el desplazamiento del balón teniendo en cuenta los siguientes intervalos de tiempo?</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>t_i</th> <th>t_i</th> <th>$\Delta t = (t_i - t_{i-1})$</th> <th>X_i</th> <th>X_{i-1}</th> <th>$\Delta X = (X_i - X_{i-1})$</th> <th>$m = \Delta X / \Delta t$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0s</td> <td>0.4s</td> <td>0.4</td> <td>3.07</td> <td>0</td> <td>3.07</td> <td>3.07/0.4 = 7.675</td> </tr> <tr> <td>0.4s</td> <td>0.8s</td> <td>0.4</td> <td>6.14</td> <td>3.07</td> <td>3.07</td> <td>3.07/0.4 = 7.675</td> </tr> <tr> <td>0.8s</td> <td>1.2s</td> <td>0.4</td> <td>9.21</td> <td>6.14</td> <td>3.07</td> <td>3.07/0.4 = 7.675</td> </tr> <tr> <td>1.2s</td> <td>1.6s</td> <td>0.4</td> <td>12.28</td> <td>9.21</td> <td>3.07</td> <td>3.07/0.4 = 7.675</td> </tr> <tr> <td>1.6s</td> <td>2s</td> <td>0.4</td> <td>15.35</td> <td>12.28</td> <td>3.07</td> <td>3.07/0.4 = 7.675</td> </tr> <tr> <td>2s</td> <td>2.4s</td> <td>0.4</td> <td>18.42</td> <td>15.35</td> <td>3.07</td> <td>3.07/0.4 = 7.675</td> </tr> <tr> <td>2.4s</td> <td>2.8s</td> <td>0.4</td> <td>21.49</td> <td>18.42</td> <td>3.07</td> <td>3.07/0.4 = 7.675</td> </tr> <tr> <td>2.8s</td> <td>3.2s</td> <td>0.4</td> <td>24.56</td> <td>21.49</td> <td>3.07</td> <td>3.07/0.4 = 7.675</td> </tr> </tbody> </table> <p>• ¿Qué tanto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo?</p> <p>el balón se desplaza cada segundo de una forma rectilínea pero varía a cambiar de cada cuadro seleccionado</p>	t _i	t _i	$\Delta t = (t_i - t_{i-1})$	X _i	X _{i-1}	$\Delta X = (X_i - X_{i-1})$	$m = \Delta X / \Delta t$	0s	0.5s	0.5	2.013	0	2.013	2.013/0.5 = 2.133	0.5s	1s	0.5	4.124	2.013	2.111	2.111/0.5 = 2.14	1s	1.5s	0.5	6.187	4.124	2.063	2.063/0.5 = 2.14	1.5s	2s	0.5	8.180	6.187	1.993	1.993/0.5 = 1.993	2s	2.5s	0.5	10.109	8.180	1.929	1.929/0.5 = 1.929	2.5s	3s	0.5	11.967	10.109	1.858	1.858/0.5 = 1.858	t _i	t _i	$\Delta t = (t_i - t_{i-1})$	X _i	X _{i-1}	$\Delta X = (X_i - X_{i-1})$	$m = \Delta X / \Delta t$	0s	0.4s	0.4	3.07	0	3.07	3.07/0.4 = 7.675	0.4s	0.8s	0.4	6.14	3.07	3.07	3.07/0.4 = 7.675	0.8s	1.2s	0.4	9.21	6.14	3.07	3.07/0.4 = 7.675	1.2s	1.6s	0.4	12.28	9.21	3.07	3.07/0.4 = 7.675	1.6s	2s	0.4	15.35	12.28	3.07	3.07/0.4 = 7.675	2s	2.4s	0.4	18.42	15.35	3.07	3.07/0.4 = 7.675	2.4s	2.8s	0.4	21.49	18.42	3.07	3.07/0.4 = 7.675	2.8s	3.2s	0.4	24.56	21.49	3.07	3.07/0.4 = 7.675	<p>• ¿Cuánto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo?</p> <p>el balón se desplaza en cada intervalo t_1 y t_2 dependiendo la velocidad en la cual se lanza y en cual llega.</p> <p>• Al avanzar el tiempo, ¿Qué afirmación se puede hacer respecto al desplazamiento de manera cualitativa y cuantitativamente?</p> <p>la velocidad inicial es mayor ya que se lanza con una fuerza con bastante presión y al llegar a el otro lado no llega con la misma fuerza, al inicio fue 3.07 y al finalizar 12.0.</p>
t _i	t _i	$\Delta t = (t_i - t_{i-1})$	X _i	X _{i-1}	$\Delta X = (X_i - X_{i-1})$	$m = \Delta X / \Delta t$																																																																																																											
0s	0.5s	0.5	2.013	0	2.013	2.013/0.5 = 2.133																																																																																																											
0.5s	1s	0.5	4.124	2.013	2.111	2.111/0.5 = 2.14																																																																																																											
1s	1.5s	0.5	6.187	4.124	2.063	2.063/0.5 = 2.14																																																																																																											
1.5s	2s	0.5	8.180	6.187	1.993	1.993/0.5 = 1.993																																																																																																											
2s	2.5s	0.5	10.109	8.180	1.929	1.929/0.5 = 1.929																																																																																																											
2.5s	3s	0.5	11.967	10.109	1.858	1.858/0.5 = 1.858																																																																																																											
t _i	t _i	$\Delta t = (t_i - t_{i-1})$	X _i	X _{i-1}	$\Delta X = (X_i - X_{i-1})$	$m = \Delta X / \Delta t$																																																																																																											
0s	0.4s	0.4	3.07	0	3.07	3.07/0.4 = 7.675																																																																																																											
0.4s	0.8s	0.4	6.14	3.07	3.07	3.07/0.4 = 7.675																																																																																																											
0.8s	1.2s	0.4	9.21	6.14	3.07	3.07/0.4 = 7.675																																																																																																											
1.2s	1.6s	0.4	12.28	9.21	3.07	3.07/0.4 = 7.675																																																																																																											
1.6s	2s	0.4	15.35	12.28	3.07	3.07/0.4 = 7.675																																																																																																											
2s	2.4s	0.4	18.42	15.35	3.07	3.07/0.4 = 7.675																																																																																																											
2.4s	2.8s	0.4	21.49	18.42	3.07	3.07/0.4 = 7.675																																																																																																											
2.8s	3.2s	0.4	24.56	21.49	3.07	3.07/0.4 = 7.675																																																																																																											

Tipificación de taller dos, Grupo 3

El grupo elige de manera correcta las variables para las operaciones indicadas en las tablas, luego al responder las preguntas, en las primeras categoriza de manera correcta las variables y coordina la dirección del cambio del tiempo y desplazamiento. Sin embargo en las últimas hay una conciencia de un cambio, pero no le es claro cuáles son las variables debido a que para describir dicho cambio usa valores de las tablas pero asignado a otras variables como lo son presión y fuerza.

En relación a los razonamientos del grupo tres cuantifican el cambio de acuerdo a los datos obtenidos en la tabla, sin embargo presentan confusión en determinar la variable, debido a que utilizan el tiempo para indicar el desplazamiento del balón con expresiones como “se desplazada 0,5 segundos a una distancia aproximada de 10 a 0.5” esta aproximación corresponde al desplazamiento horizontal en cada intervalo, como se muestra en la siguiente imagen:

• ¿Cuál es la diferencia en el desplazamiento del balón teniendo en cuenta los siguientes intervalos de tiempo?

t	t _n	$\Delta t = (t_n - t_i)$	X _i	X _n	$\Delta X = (X_n - X_i)$	m = $\Delta X / \Delta t$
0s	0.4s	0.4	10.5	9.2	-1.3	-3.25
0.4s	0.8s	0.4	9.2	8.1	-1.1	-2.75
0.8s	1.2s	0.4	8.1	7.4	-0.7	-1.75
1.2s	1.6s	0.4	7.4	6.9	-0.5	-1.25
1.6s	2s	0.4	6.9	6.4	-0.5	-1.25
2s	2.4s	0.4	6.4	5.9	-0.5	-1.25
2.4s	2.8s	0.4	5.9	5.4	-0.5	-1.25
2.8s	3.2	0.4	5.4	4.9	-0.5	-1.25

• ¿Qué tanto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo? - 0.5

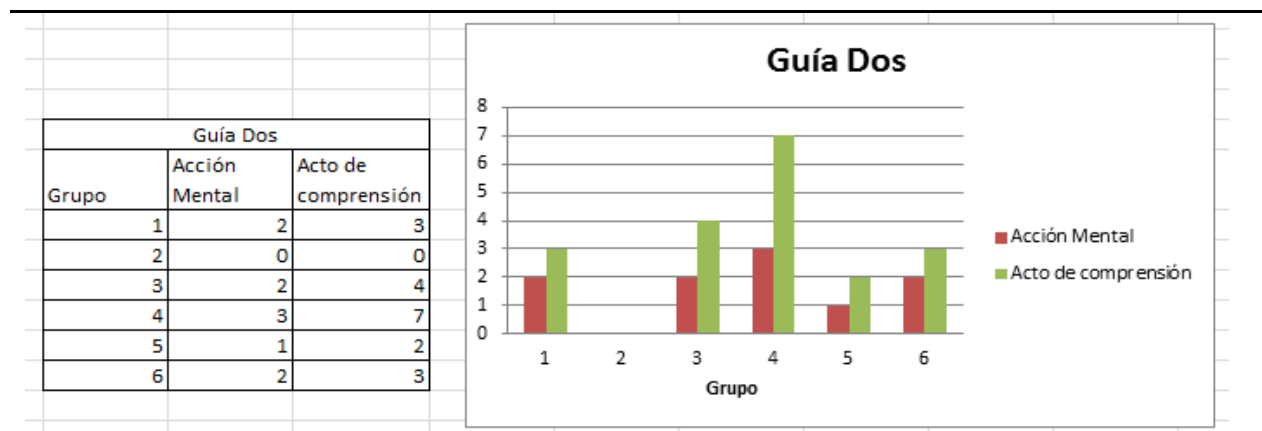
se deslaza cada 0.5 segundos a una distancia aproximada a: 10 y 0.5 segundos

Cuantificación del cambio. Grupo cuatro.

Por lo que según el desempeño general del taller se asignó el nivel de razonamiento covariacional y actos de comprensión a cada grupo de la siguiente manera:

Tabla 12.

Tipificación Acciones mentales y Actos de comprensión Guía dos.



Nota: Síntesis del proceso de cada grupo por Acciones de Razonamiento Covariacional y Actos de comprensión Guía Dos

4.1.3 Resultados guía tres socializaciones

Esta guía fue diseñada con la intención de revisar los procesos ejecutados por cada grupo y hacer aclaración de dudas manifestadas por los estudiantes, así como también aclarar las confusiones manifestadas respecto a las unidades de medida. Es así que según las respuestas en las preguntas se tipificó las acciones mentales y actos de comprensión, o en las preguntas en las cuales no es posible tipificar se agregaron notas con los comentarios de los estudiantes.

Tabla 13.

Análisis instrumento Socialización

Pregunta	Grupo						
	1	2	3	4	5	6	
Sobre la experiencia: 1. ¿Cómo determinaron que el balón se movió?	Am1-C(1)	Am2-C(4)	Am1-C(2)	Am1-C(1)	Am2-C(3)	AM1-C(1)	

	2. ¿Qué diferencias y similitudes encontraron al desarrollar cada una de las guías?	No trajeron las Guías	Am2-C(4)	Am2-C(3)	Am2-C(4)	Am2-C(4)	Am2-C(4)
	3. ¿hubo alguna pregunta emergente de la cual haya solicitado ayuda a la docente o aun tenga dudas?	Las preguntas estuvieron relacionadas con términos como: el significado de delta de t, cómo hacer una descripción cualitativa y cuantitativa, cómo hacer aproximaciones cuando hay varios decimales					
Sobre el desarrollo de los talleres.	1. ¿Cuáles son las variables inmersas en la situación?	AM1-C(3)	AM1-C(3)	AM2-C(4)	AM1-C(3)	AM2-C(4)	AM3-C(5)
	2. Describa el movimiento del balón a partir de la gráfica suministrada por el programa.	AM1-C(3)	AM1-C(3)	AM2-C(4)	AM1-C(3)	AM2-C(4)	AM3-C(5)
	3. ¿Cómo es el comportamiento de dichas variables?						
	4. ¿Cómo pueden interpretar el <i>Delta para</i> analizar cada una de las variables?	Debido a que esta fue una de las preguntas recurrentes en el desarrollo del primer taller, los estudiantes comentaron la respuesta de la docente relacionada con la resta entre los valores extremos de los intervalos indicados.					

Nota: Tipificación del proceso de cada grupo según lo ejecutado en cada una de las preguntas.

La docente aclaró que para determinar el movimiento de balón se tienen en cuenta el desplazamiento y el tiempo, así como también tomo los datos suministrados por Tracker para indicar el significado de cada variable y su relación con los datos solicitados en cada uno de los talleres.

4.1.4 Resultados guía cuatro

En la guía los estudiantes debían analizar un segundo movimiento del balón, relacionado con un pase por medio del rebote, para realizar el análisis a partir de los datos suministrados por Tracker, en resultados hubo que hacer un código de colores explicados al final de la tabla:

Tabla 14.

Análisis instrumento Guía Cuatro

Pregunta	Grupo	1	2	3	4	5	6
¿Cuál es la diferencia en el desplazamiento del balón teniendo en cuenta los siguientes intervalos de tiempo?-completa la tabla	Am1-C(2)			Am1-C(2)	Am1-C(1)	Am1-C(2)	AM1-C(1)
Describe el desplazamiento el balón de acuerdo a la altura en cada uno de los intervalos de tiempo observados	Am1-C(2)			Am1-C(1)Nota 3	Am1-C(2)	Am1-C(2)	
¿Qué sucede con la pendiente en cada uno de los intervalos?, señale en la gráfica los puntos extremos indicados en el intervalo e indique la pendiente entre ellos.				Am2-C(4)	Am1-C(1)	Am2-C(4)	
2. ¿Cuál es la diferencia en el desplazamiento del balón en los siguientes intervalos de tiempo?- completar tabla	AM2-C(4)			AM1-C(1)	AM1-C(1)	AM1-C(1)	AM1-C(1)
¿Qué tanto se desplaza el balón en cada uno de los siguientes intervalos de tiempo?				Am1-C(3) Identifica Cambios en el desplazamiento pero incluye otra variable (Fuerza)	Incluye variables no relacionadas.	AM1-C(1)	
¿Qué sucede con los desplazamientos en la altura de cada intervalo?				Am1-C(3)	Establece relaciones entre velocidad y fuerza	AM1-C(1) Nota 1	
¿Cómo es el comportamiento de la pendiente en cada intervalo trabajado? señale en la gráfica los puntos indicados en el intervalo e indique la pendiente entre ellos.				Am1-C(3)	Am1-C(1)	Am1-C(1)	

De acuerdo a los datos obtenidos, ¿Qué interpretación le puede dar a los resultados en los intervalos en la primera tabla y en la segunda tabla?

Tomando los datos del tiempo final (t_f) en cada uno de los intervalos de la primera tabla, con la variación de la altura (ΔY) que corresponde a ese intervalo, forme coordenadas tiempo-Altura (t_f , ΔY) en Geogebra y luego una esos puntos observando la gráfica que les da, y conteste las siguientes preguntas. ¿Qué relación encuentra entre la línea recta y la parábola?

¿Qué interpretación le da a la diferencia de alturas?

Am1-C(2)

Am1-C(1)

Nota 2

AM2-C(4)

Am1-C(1)

Nota 2

AM2-C(4)

AM1-C(2)

Nota: A continuación se explica colores y simbología usada para la tipificación de Acciones Mentales y Actos de Comprensión.

Tomo desplazamiento Horizontal	N1-el grupo identifica que hay un cambio, pero al intentar comparar el primer movimiento con el segundo toma valores incorrectos, no toma altura, sino mezcla desplazamiento horizontal con el vertical para determinar las imágenes de los intervalos
La fracción de tiempo tomada no corresponde al intervalo indicado. 0,3 0,03	N2-Consecuencia de los valores comparados, no se encuentran similitudes.
Toma en desorden los datos sin discriminar las variables	N3-Se mezclan tres variables, desplazamiento, fuerza y altura. Sin tener en cuenta los datos propuestos en el problema.

En esta guía los estudiantes manifestaron mayor dificultad en su abordaje, debido a que la situación ya no se enmarcaba en un movimiento lineal, sino el realizado por medio de una función cuadrática y al desarrollar el taller, tomaron los datos suministrados por Tracker sin discriminar las variables, de manera que hubo incoherencia entre los valores obtenidos en las tablas y las descripciones realizadas en las preguntas. Por ejemplo, el grupo cuatro inicialmente indica que el desplazamiento es no constante, sin embargo más adelante afirma que la velocidad si lo es, como se puede observar en las siguientes imágenes:

CONTESTA

Observe el video el video y la información generada por Tracker.

1. ¿Cuál es la diferencia en el desplazamiento del balón teniendo en cuenta los siguientes intervalos de tiempo?

t_i	t_f	$\Delta t = (t_f - t_i)$	Y_i	Y_f	$\Delta Y = (Y_f - Y_i)$	$\Delta Y / \Delta t$
0,2	0,3	0,5-0,2=0,1	21,79	21,79	0,00	0
0,3	0,4	0,4-0,3=0,1	21,79	22,80	1,01	10,1/0,1
0,4s	0,5s	0,5-0,4=0,1	22,80	23,69	0,89	8,9/0,1
0,5s	0,6s	0,6-0,5=0,1	23,69	25,69	2	2/0,1
0,1	0,6	0,6-0,1=0,5	21,79	25,69	3,9	3,9/0,5

• Describa el desplazamiento del balón de acuerdo a la altura en cada uno de los intervalos de tiempo observados

el desplazamiento de el balón aumenta de una manera no constante

• ¿Qué sucede con la pendiente en cada uno de los intervalos?, señale en la gráfica los puntos extremos indicados en el intervalo e indique la pendiente entre ellos.

en la pendiente 1 aumenta, la 2 se mantiene constante, la 3 aumenta y la 4 tuvo un aumento considerable

t_i	t_f	$\Delta t = (t_f - t_i)$	Y_i	Y_f	$\Delta Y = (Y_f - Y_i)$	$\Delta Y / \Delta t$
0,0	0,0	0,0-0=0,0	21,7	21,79	-0,09	-0,09/0
0,2	0,2	0,2-0,2=0,0	21,7	21,79	-0,09	-0,09/0
0,4	0,4	0,4-0,4=0,0	21,7	22,80	1,10	1,10/0
0,6	0,6	0,6-0,6=0,0	21,7	25,69	3,99	3,99/0

• ¿Qué sucede con los desplazamientos en la altura de cada intervalo?

que va aumentando la velocidad en cada intervalo y disminuye la fuerza

• ¿cómo es el comportamiento de la pendiente en cada intervalo trabajado? señale en la gráfica los puntos indicados en el intervalo e indique la pendiente entre ellos.

el comportamiento es que disminuye la fuerza y aumenta de manera constante

3. De acuerdo a los datos obtenidos, ¿Qué interpretación le puede dar a los resultados en los intervalos en la primera tabla y en la segunda tabla?

la interpretación de los resultados de cada intervalo en la 2 tabla es que a un mayor tiempo mayor tiempo y disminuye la fuerza de manera constante

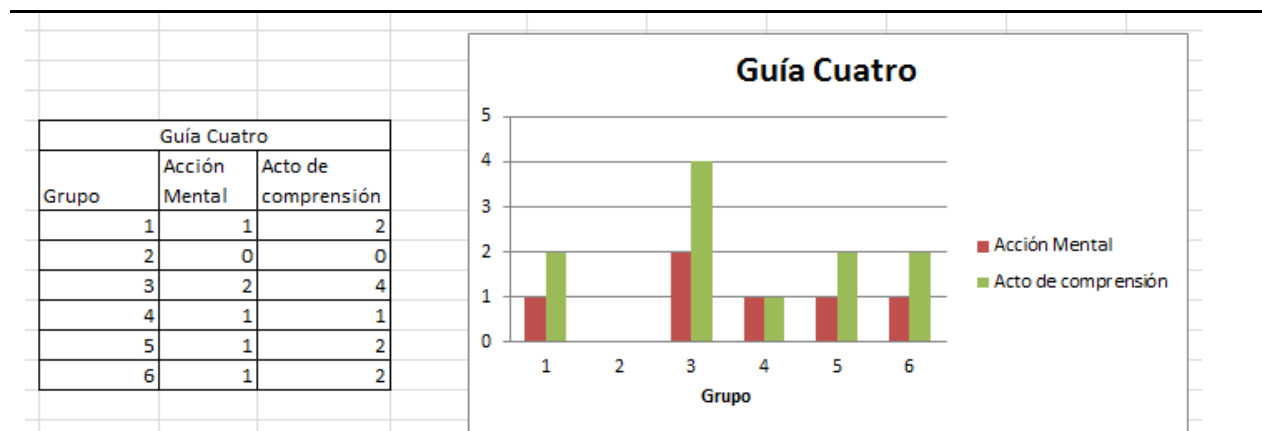
Taller cuatro. Grupo 4

Estas afirmaciones son una contradicción, ya que no es posible cumplir las dos condiciones si la velocidad es constante, las distancias recorridas entre dos puntos también deben serlo y en incrementos desiguales de distancia, la velocidad también aumenta de manera desigual.

El grupo seis fue el único en tomar los valores de manera correcta, sin embargo, no llego a establecer respuestas para las preguntas del taller, no comenta el grupo ninguna causa, se presume que no alcanzó el tiempo para el desarrollo de ellas ya que el grupo pudo haber optado por calcular primero y solucionar las preguntas después, sin embargo no alcanzó a concluir la actividad.

Según las características de los razonamientos y los actos de comprensión de cada grupo, los actos alcanzados en la guía cuatro fueron:

Tabla 15.

Tipificación Acciones mentales y Actos de comprensión Guía 4.

Nota: Síntesis del proceso de cada grupo por Acciones de Razonamiento Covariacional y Actos de comprensión

Guía Cuatro

4.1.5 Actividad de cierre

Como de evaluación de cierre, se presentó a los estudiantes una hoja de papel cuadrada en la cual debían construir cajas (de diferentes tamaños), posterior a ello se les realizó una serie de preguntas que condujeran a la identificación de las variables. Luego se realizó la representación de la situación en Geogebra (Ver anexo 3), para luego abordar las preguntas relacionadas con la identificación de variables, del cambio y representación algebraica de la situación.

Tabla 16.

Análisis instrumento Guía Evaluación y Cierre.

Pregunta	Grupo	1	2	3	4	5	6
¿Cuántos pueden construirse? ¿Por qué?		AM1- C(1)	AM1- C(1)	AM1- C(1)	AM1- C(1)	AM1- C(1)	
¿Qué magnitudes cambian al hacer una nueva caja?		AM1- C(2)	AM1- C(2)	AM1- C(2)	AM1- C(2)	AM1- C(1)	
Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta dos de los elementos que cambian en el desarrollo		AM3- C(5)	AM1- C(3)	AM3- C(5)			
Proponga una representación gráfica para la situación		AM3- C(5)	AM1- C(3)	AM3- C(5)		sin tipificar Nota 4	
En el software Geogebra realizar el modelo del papel y los posibles dobleses generados por las cajas. Describa el proceso de construcción y los elementos que tuvo en cuenta para generar los dobleses							
¿Qué variables puede identificar que mantienen o varían en el modelo? Justifique su respuesta.		AM1- C(3)		AM1- C(3)	AM2- C(3)	AM1- C(3)	
¿Cómo se podría determinar cuánto cambian las variables?		AM2- C(4)		AM3- C(5)	AM2- C(3)	AM2- C(4)	
Describa cómo se puede percibir los cambio		AM2- C(4)		AM4- c(10)	AM- C(3)	AM2- C(4)	
¿Los cambios son uniformes?		AM3- C(5)		AM4- c(10)	AM1- C(1)	AM1- C(1)	
Proponga una expresión algebraica que le permita representar la situación, describa cómo la puede encontrar y por qué guarda relación con la situación		AM3- C(8)		AM4- c(10)	AM1- C(2)	AM3- C(8)	

Nota: N4- Las variables de la representación son iguales

En esta situación la mayoría de los grupos centraron su atención al desarrollo de la caja, identificando como variables el largo y ancho de la caja, con ello procedieron a hacer la selección de pares de coordenadas y luego la representación gráfica de las medidas adquiridas para casos particulares realizados identificados por cada grupo, por ejemplo:

• ¿Cuántos pueden construirse? ¿Por qué?

5 por que se pueden construir de diferentes tamaños y cada vez se vuelven más pequeñas las cajas

• ¿Qué magnitudes cambian al hacer una nueva caja?

cambia su longitud de los lados largo y ancho de cada caja al hacer un nuevo modelo sus vertices son más pequeñas

• Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta dos de los elementos que cambian en el desarrollo.

	caja pequeña	caja grande			
Largo	5.5	13.5			
Ancho	4	3.5			

• Proponga una representación gráfica para la situación

Identificación de Variables. Grupo 3

Aunque reconocieron algunas de las variables inmersas en la situación al experimentar con material tangible, el proceso de continuo respecto al modelado en el software Geogebra contribuyó a que salieran de la visión plana de la situación y tuvieran en cuenta otras variables tales como largo y ancho del doblez sobrante en cada vértice, área de la base, área de las caras laterales y volumen. De las variables mencionadas anteriormente, se tomaron largo y ancho de la base que con ayuda del software se registraron las medidas en una tabla y luego definir la expresión algebraica que posibilitaba la representación. Un proceso similar se hizo al graficar el lado y área de la caja construida en Geogebra, como se ve a continuación:

	A	B	C	c1
1		q		
2	0.9	1.27	(0.9, 0.8)	
3	1.14	0.79	(1.14, 1.2...	
4	1.16	0.75	(1.16, 1.3...	
5	1.16	0.75	(1.16, 1.3...	
6	1.1	0.86	(1.1, 1.21)	
7	0.98	1.1	(0.98, 0.9...	
8	0.94	1.18	(0.94, 0.8...	
9	0.92	1.22	(0.92, 0.8...	
10	0.78	1.5	(0.78, 0.6...	
11	0.72	1.62	(0.72, 0.5...	
12	0.7	1.66	(0.7, 0.49)	
13	0.68	1.7	(0.68, 0.4...	
14	0.64	1.78	(0.64, 0.4...	
15	0.62	1.82	(0.62, 0.3...	

Caja construida en Geogebra. Grupo 4

Este proceso contribuyo en el análisis de la situación debido a que los grupos aportaron mayor información en la solución de cada una de las preguntas propuestas en el taller lo que contribuyó a evidenciar un avance en los niveles de razonamiento de tres de los grupos. En seguida se muestra algunos de los razonamientos aportados por los grupos:

<p>Describe el proceso de construcción y los elementos que tuvo en cuenta para generar los doblesces</p> <p>Polígono regular - 2 click indicar Axios / Clavados A Centro punto - punto Intersección - Perpendicular vista - Hoja calculo - Segmento - se traza el segmento - P > CIPa derecho - registrar en hoja</p> <ul style="list-style-type: none"> ¿Qué variables puede identificar que mantienen o varían en el modelo? Justifique su respuesta. <p>Altura-Ancho <u>en la primera parte de una</u> <u>función lineal y en la segunda Area</u> <u>una función cuadrática.</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ¿Cómo se podría determinar cuánto cambian las variables? <p>se podría determinar ya que en <u>una se observa la altura y el ancho</u> <u>de la caja y en la otra el área de</u> <u>la caja y las dimensiones</u></p>	<ul style="list-style-type: none"> Describe cómo se puede percibir los cambios <p>al mover los puntos P y Q Varía <u>el área de la caja ya que</u> <u>se en a se agranda en P va</u> <u>disminuyendo</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ¿Los cambios son uniformes? <p>si por que se mantienen los angulos <u>asi se varía el tamaño de la</u> <u>caja o arafra</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Proponga una expresión algebraica que le permita representar la situación, describa cómo la puede encontrar y por qué guarda relación con la situación <p>• $S(x) = -2x^2 + 4x + 0$, con la construcción <u>en el programa guarda una relación</u> <u>ya que representa el área de la caja</u></p> <p>• $t(x) = -2x + 4$, con la construcción <u>en el programa guarda una relación</u> <u>ya que representa la altura-ancho de</u> <u>la caja.</u></p>
---	---

Taller evaluación y Cierre. Grupo 3

El grupo seis no tuvo tipificación debido a que la aplicación de este taller se hizo cuando los estudiantes estaban en proceso de recuperación y no pudieron asistir. De igual manera, el grupo dos estuvo en la primera sesión, pero en la segunda no les fue posible presentarse por el mismo motivo.

El grupo cinco tuvo un avance en el proceso debido a que inicialmente no determinaron con claridad las variables, pero posterior a la gráfica lograron determinar los cambios inmersos en la situación.

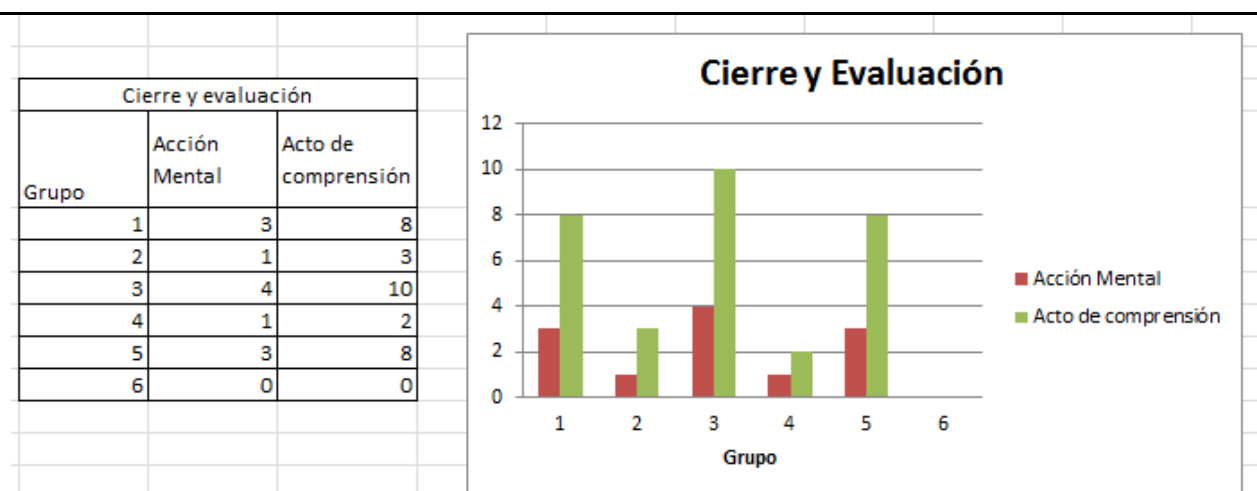
<p>desarrollo.</p> <ul style="list-style-type: none"> Proponga una representación gráfica para la situación 	<p>Describe el proceso de construcción y los elementos que tuvo en cuenta para generar los doblesces</p> <p>Primero dibujamos en la hoja una aproximación cuando formamos <u>una caja rectangular des que es cuadrada y creamos una</u> <u>hoja lista</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ¿Qué variables puede identificar que mantienen o varían en el modelo? Justifique su respuesta. <p>tomamos largo ancho pequeño grande porque es lo <u>que se evidencia explícitamente en el programa.</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ¿Cómo se podría determinar cuánto cambian las variables? <p>cambian al tomar como referencia un punto o <u>alguna de la caja cuando neces sea necesarias</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Describe cómo se puede percibir los cambios <p>de manera física se evidencia con la hoja de papel <u>y virtual por medio del programa</u></p>
--	--

 Desarrollo de taller cierre y Evaluación. Grupo 5

Al final del proceso a los grupos se les asignó los siguientes niveles de razonamiento covariacional y actos de comprensión de acuerdo lo expuesto en el desarrollo del taller:

Tabla 17.

Tipificación Acciones mentales y Actos de comprensión cierre y Evaluación.



Nota: Síntesis del proceso de cada grupo por Acciones de Razonamiento Covariacional y Actos de comprensión Guía Cierre y Evaluación

4.2 Hallazgos

En los hallazgos se encontró que no siempre se guarda un proceso progresivo al comparar todas las guías solucionadas por los estudiantes, así:

Tabla 18.

Comparación del proceso talleres.

Grupo	Acto de comprensión		Guía uno		Guía Dos		Guía Cuatro		Evaluación y Cierre		
	Acción Mental	Acto de comprensión	Acción Mental	Acto de comprensión	Acción Mental	Acto de comprensión	Acción Mental	Acto de comprensión	Acción Mental	Acto de comprensión	
1	3	5	1	3	8	2	3	1	2	3	8
2	1	3	2	3	8	0	0	0	0	1	3
3	4	10	3	2	3	2	4	2	4	4	10
4	3	8	4	2	3	3	7	1	1	1	2
5	1	2	5	1	1	1	2	1	2	3	8
6	3	5	6	2	3	2	3	1	2	0	0
7	3	5									
8	3	8									
9	4	10									
10	2	4									
11	1	2									

Nota: Seguimiento del proceso durante la investigación de los grupos de trabajo.

Debido a que el diagnóstico se hizo en parejas y resto del proceso en tríos o cuartetos, para la comparación se debe observar los colores de cada grupo en el diagnóstico y la intervención, los de igual color son los grupos que se mantuvieron, en donde hay combinación de colores es porque la pareja se desintegro y unió con otro grupo. Hubo una pareja y una persona que por motivos de deserción escolar no volvió a asistir, por ello no se encuentran relacionadas con ningún color.

La mayoría de los grupos presentaron dificultad en los talleres asociados a extraer información del Software Tracker para luego hacer el análisis como se puede observar en las columnas que corresponde a las guías dos y cuatro debido a que las acciones mentales se mantuvieron en la coordinación de una variable con los cambios de la otra, así como también en la coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios de la otra.

Así mismo, los actos de comprensión ejecutados fueron del uno al cuatro donde los estudiantes identifican cambios en las situaciones presentadas, observan que se aplica alguna regularidad y discriminan entre los datos aquellos que se mantienen constantes y los que cambian conforme hay una variación en la situación.

• ¿Cuánto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo?

0,1 se desplaza el balón por cada intervalo de tiempo

• Al avanzar el tiempo, ¿Qué afirmación se puede hacer respecto al desplazamiento de manera cualitativa y cuantitativamente?

Se puede afirmar que el balón avanza constantemente.

2. ¿Cuál es la diferencia en el desplazamiento del balón en los siguientes intervalos de tiempo?

t_i	t_{i+1}	$\Delta t = (t_i - t_{i+1})$	Y_i	Y_{i+1}	$\Delta Y = (Y_i - Y_{i+1})$	$\Delta Y / \Delta t$
1,0	6,0	$0 - 1,2 = -1,2$	2,6	2,3	$\Delta Y = 0,3$	$= -0,25$
2,0	3,0	$0,2 - 1,4 = -1,2$	18,7	15,5	$\Delta Y = 3,2$	$= -2,66$
3,0	4,0	$0,4 - 1,2 = -0,8$	27,3	25,9	$\Delta Y = 1,4$	$= -1,75$
4,0	1,2	$0,6 - 1 = -0,4$	31,1	17,6	$\Delta Y = 13,5$	$= 33,75$
5,0	3,6	$0,8 - 0,9 = -0,1$	27,0	17,6	$\Delta Y = 9,4$	$= -94$
6,0	0,8	$0,83 - 0,86 = -0,03$	25,9	21,9	$\Delta Y = 4$	$= -80$

• ¿Qué tanto se desplaza el balón en cada uno de los siguientes intervalos de tiempo?

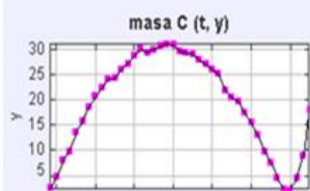
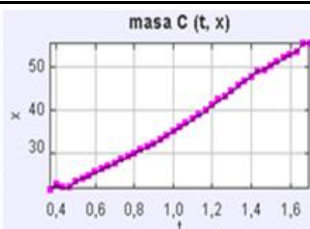
• ¿Qué sucede con los desplazamientos en la altura de cada intervalo?

Grupo 6, taller dos

Grupo 6, taller cuatro

Una de las dificultades observadas respecto al software fue la discriminación de variables ya que en la guía cuatro se les proporcionó a los estudiantes información sobre tiempo (t), desplazamiento horizontal (x), altura (y) y gráficas. Sin embargo, los estudiantes no tomaron en cuenta lo solicitado en el enunciado respecto a alturas, sino tomaron valores o del desplazamiento horizontal o de manera arbitraria, el dato que tomaron con mayor presión fue el tiempo.

masa_C		
t	x	y
0,36625556	21,790456	2,63594335
0,39952222	22,8007132	4,9567499
0,4324	22,1413466	8,17808807
0,46594444	22,2447007	9,94377363
0,49924444	23,6920257	13,5939253
0,53217778	24,3811487	15,8134819
0,56543333	24,79062	18,706632
0,59868889	25,6989828	20,7470147
0,63194444	26,5079927	22,5699414
0,6652	27,2310486	24,2725029
0,69845556	27,6859423	24,3642082
0,73171111	28,637735	26,0965362
0,76496667	29,3471628	27,3149772



t	x	y	...
0	1,6	7,6	...
0,2	7,4	7,2	...
0,4	1,2	0,8	...
0,6	2	0,4	...
0,8	0,4	0,2	...
1,0	0,2	0,1	...

Confusión de datos seleccionados para guía cuatro.

Respecto al diseño de las actividades, se observó que los estudiantes tuvieron un mejor desempeño en aquellas situaciones que les solicitaba extraer información de elementos

cotidianos como el transporte o que partieran de la manipulación de material tangible como la construcción de la caja con papel, para luego ir a lo abstracto al representar la situación en el software Geogebra.

Respecto a la estructura de las actividades, se usaron tres contextos diferentes con el fin de determinar que los estudiantes estuvieran en la capacidad de identificar los cambios en situaciones que no fueran ajenas a su entorno y de allí se posibilitara el análisis de la información. Sin embargo, uno de los ítem en el que tuvieron mayor dificultad fue en el de plantear expresiones algebraicas que representaran la información, ya que los grupos encontraban pares ordenados, pero el proceso de generalización no determinaban como hacerlo, ya que manifestaban que sus nociones previas de función consistían en representar expresiones dadas por el docente y no extraer información para luego ser representada.

En relación a la aplicación, debido al corto tiempo de cada sesión de clase se tomaron más de las horas proyectadas, hubo material suficiente para la ejecución de cada Guía. Sin embargo, la asistencia de los estudiantes fue uno de los inconvenientes al momento de revisar el proceso de los grupos dos y seis, ya que no asistían o desarrollaron las Guías incompletas.

4.3 Conclusiones

Como se mostró anteriormente se logró realizar un diagnóstico para identificar los actos de comprensión y acciones mentales correspondientes a los razonamientos manifestados por los estudiantes, allí se encontró que el máximo nivel de razonamiento covariacional alcanzado fue el cuatro y de comprensión el diez por dos grupos. Cinco de los grupos se

ubicaron en un nivel de razonamiento tres, sin embargo los actos de comprensión se distribuyeron entre dos grupos para el acto ocho donde hubo y tres grupos para el acto cinco.

Para el diseño de las actividades se tuvo en cuenta lo expuesto en el marco referencial en el cual indica que para el pensamiento variacional son necesarias situaciones de variación y cambio en diferentes contextos, adicionalmente que haya un tránsito entre diferentes sistemas de representación para luego plantear preguntas que conduzcan al estudiante al análisis de la situación.

Fue posible tipificar cada una de las actividades realizadas por los estudiantes en la intervención y la actividad de cierre, en el desarrollo de las actividades de la intervención hubo inconvenientes de dos tipos: el primero de interpretación de información suministrada por el software y la discriminación de variables en una situación de movimiento, debido a que aunque se solicitaban cambios en relación al tiempo y desplazamiento, relacionaron otras variables tales como presión y fuerza. Las actividades en las cuales los grupos alcanzaron mayores niveles de razonamiento y actos comprensión, fueron aquellas relacionadas con el costo de transporte (diagnóstico) y la construcción de cajas (actividad de cierre).

Respecto a las relaciones entre los razonamientos covariacionales y actos de comprensión, se observó que los diseños de las actividades para cada Acción mental se le podían relacionar por lo menos un acto de comprensión como se muestra a continuación:

Nivel de razonamiento	Actos de comprensión
AM1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	C (f)1: Identificación de los cambios en el mundo circundante como un problema práctico a resolver. C (f)2: identificación de regularidades en relaciones entre las modificaciones como una forma de tratar los cambios.
AM1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	C (f)3: identificación de los sujetos del cambio en el estudio de los cambios.

AM2. Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	C (f)4: Discriminación entre dos modos de pensamiento matemático: uno en términos de cantidades conocidas y desconocidas, el otro en términos de cantidades variables y constantes.
AM1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra. AM2. Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	C (f)5: Discriminación entre variables independientes y dependientes.
AM3. Coordinación de la cantidad del cambio de una variable con los cambios de la otra.	
AM1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra. AM2. Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable. AM3. Coordinación de la cantidad del cambio de una variable con los cambios de la otra.	C (f)8: Síntesis del concepto de ley y el concepto de función; en particular, la toma de conciencia del posible uso de funciones en el modelo de relaciones entre magnitudes físicas u otras.
AM1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra. AM2. Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable. AM3. Coordinación de la cantidad del cambio de una variable con los cambios de la otra. AM4. Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	C (f) 10: Discriminación entre definición matemática y descripciones del objeto.

Al analizar las actividades ejecutadas, aunque se esperaba que los estudiantes transitaran por todas las acciones mentales y actos de comprensión en el desarrollo de los talleres, sin embargo algunos grupos mantuvieron su desempeño o avanzaron en el proceso como se observó en la tabla 17, no era posible que un grupo permaneciera en un acto de comprensión sin modificar la acción mental desarrollada. Como por ejemplo, el acto de comprensión cinco (C (f)5: Discriminación entre variables independientes y dependientes) se relaciona con la acción mental tres (coordinación de la cantidad del cambio) debido a que los estudiantes verbalizan la

conciencia de la cantidad del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.

4.4 Recomendaciones

- Las situaciones de tipo variacional permiten que los estudiantes establezcan relaciones de su vida escolar con su entorno de manera que observen una aplicabilidad y así un sentido de por qué y para qué aprender, por lo cual se recomienda ofrecer contextos conocidos y del interés de los estudiantes.
- Un factor importante para la investigación fueron los instrumentos aplicados a los estudiantes, se sugiere que la estructura sea: una parte de análisis cuantitativo de las situaciones y otra parte en la que los estudiantes expliquen de manera descriptiva lo que piensan que ocurre y/o se solicita el instrumento.
- Es recomendable que el docente investigador sea el mismo quien dirija el curso, debido a que se presentaron novedades con la docente titular que afectaron la implementación continua de las actividades.
- La aplicación debe realizarse durante el periodo lectivo escolar, debido a que el cruce con el proceso de recuperación género que los grupos no asistieran completos a las últimas sesiones de clase.
- Al usar un software desconocido para los estudiantes, es necesario hacer un periodo de aprestamiento que le permita a los estudiantes un reconocimiento de las herramientas e información suministrada, ya que esto permite tener una mejor interpretación y análisis por parte de los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnal, J., Del Rincón D. y Latorre, A. (1992). *Investigación educativa*. Editorial Labor. Barcelona.

Ávila, P. (2011). *Razonamiento covariacional a través de software dinámico. El caso de la variación lineal y cuadrática*. Universidad Nacional de Colombia. Medellín

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio*. EMA, 8 (2), 121-156.

Castro C. y Díaz M. (2014). *Enseñanza del Concepto de Función*. Para estudiantes de educación superior. Universidad Sergio Arboleda. Bogotá

Gómez, O. (2015). *Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá

ICFES (2013). *Sistema Nacional de la evaluación estandarizada de la educación: Alineación del examen saber 11*. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (1996). *Lineamientos Curriculares para Matemáticas*. MEN. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. MEN. Bogotá.

Sierpinska A., (1992). *Sobre la comprensión de la noción de función*. [Traducido al español de The concepts of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy]. Universidad del Valle. Calí.

Vasco, C. (2006). *El Pensamiento Variacional y la Modelación Matemática*. XI CIAEM, Brasil.

Villa, A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de la funciones cuadráticas. Universidad de Antioquia. Medellín

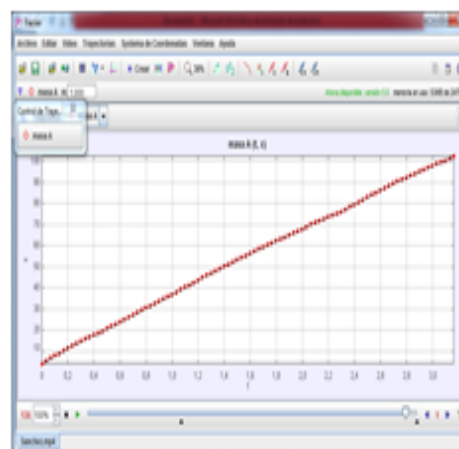
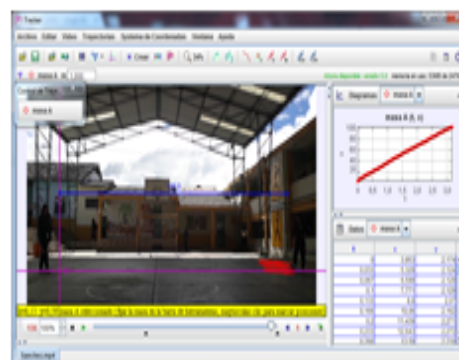
ANEXOS

Anexo 1

IGD Técnico Comercial/Mariano Cepina Rodríguez
 Matemáticas Grado 11
 Nombre

0,76566667	19,4017724	1,59781111	56,308699	1,43006667	60,5873511
0,79993333	20,4594919	1,6211	57,4764266	2,46333333	61,6092263
0,83225555	21,5272177	1,65427778	58,4381289	2,4958	62,0446953
0,86552222	22,5950127	1,68767778	59,3728214	2,52992222	64,1520227
0,89976667	23,6548133	1,72101111	60,2823227	2,56271111	65,1777412
0,92208889	24,7066741	1,75423333	61,4062209	2,59543333	66,2122209
0,95338889	25,7902069	1,7976	61,3491709	2,62798889	67,4011693
0,98569999	26,8103442	1,83093333	62,146007	2,66036667	68,472063
1,02197778	27,8522142	1,86412222	64,0368869	2,69232222	69,5058169
1,06522222	28,214889	1,8974	65,0590603	2,72986667	69,574637
1,09833333	40,2542421	1,9307	65,9989816	2,7629	91,4741593
1,13178889	41,2162279	1,96397778	66,9822708	2,7952	92,2574618
1,16518667	42,2898981	1,99722222	67,8101484	2,82798889	92,2089522
1,19828889	43,5297288	2,03061111	68,9212703	2,8628	94,2829214
1,23168889	44,8076222	2,06388889	70,1229225	2,89804444	95,1991199
1,26502222	45,9204479	2,09717778	71,1150018	2,92934444	96,0786628
1,29827778	45,9478022	2,13043333	71,8922757	2,96233333	97,0292469
1,33153333	47,842779	2,16372222	72,7097267	2,99596667	97,8391248
1,3649	49,1194179	2,197	72,2222096	3,02918889	98,8554924
1,39908889	50,1858722	2,2303	74,6162297	3,06233333	98,6252613
1,43226667	51,0912599	2,26358889	75,2267518	3,09578889	100,205069
1,46483333	52,1458229	2,29687778	75,9792754	3,12822222	101,422267
1,49793333	52,3637757	2,33016667	77,2586263		
1,53124444	54,2761142	2,36348889	78,5272448		
1,56452222	55,227918	2,39677778	79,5284729		

IGD Técnico Comercial/Mariano Cepina Rodríguez
 Matemáticas Grado 11
 Nombre



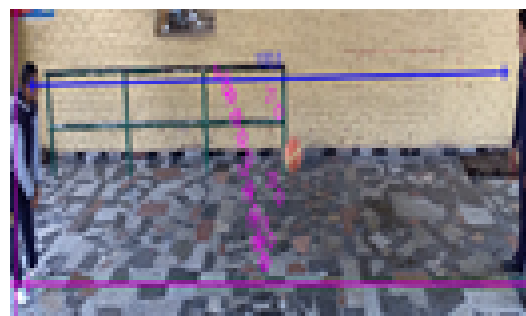
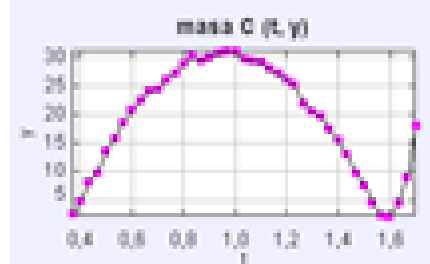
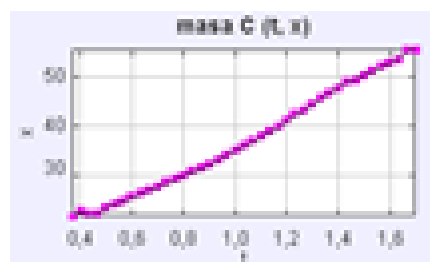
ANEXO 2

IGD Técnico Comercial Mariano Cepina Rodríguez

Matemáticas Grado 11

Plano del balón

CHUMAC		
E	x	y
0,36623333	21,790485	2,62394233
0,36653333	22,6007132	4,9587499
0,4324	22,1413466	6,17608907
0,46594444	22,2447007	6,94277263
0,46624444	22,6620257	12,5639253
0,53217778	24,2611467	15,6134619
0,56542222	24,79052	18,706622
0,56666666	25,6666629	20,7470147
0,62194444	26,5079927	22,5699414
0,6652	27,2210466	24,2725029
0,66645556	27,6659422	24,2642062
0,72171111	28,627725	26,0965263
0,76466667	29,2471629	27,2149772
0,76622222	30,0009412	28,7215242
0,82147778	30,669447	30,1697766
0,8651	31,5241705	32,4252606
0,86633333	32,266466	30,0170654
0,92144444	32,2072039	30,7145914
0,96434444	34,2069221	31,1712654
0,96762222	35,2520766	30,951935
1,0211	36,1452792	32,5477474
1,06467778	37,0279396	32,2504639
1,06792222	38,1569639	32,1570226
1,12266667	39,0459062	32,0176291
1,16466667	40,1124652	32,0699625
1,16771111	41,2711174	32,9704241
1,22266667	42,5590976	32,1251209
1,26691111	43,4127021	31,9291444
1,26715556	44,5791904	30,6026729
1,32252222	45,9012169	19,6742906
1,36266666	46,9285441	17,6026622
1,36724444	48,0097464	15,5071745
1,42222222	48,2199144	12,1704962
1,46277778	48,6180262	6,92024562
1,49706667	50,6202622	7,59107292
1,52255556	51,4242229	4,65262056
1,56264444	52,4362059	2,24409122
1,56654444	53,057722	2,29024645



ANEXO 3

Protocolo de construcción Caja:

1. Insertar polígono regular.
2. Trazar circunferencia en uno de los vértices.
3. Con la herramienta compas, trasladar el radio de la circunferencia a cada vértice.
4. Con la opción puntos de intersección encontrar las intersecciones entre circunferencia y cada lado del cuadrado.
5. Trazar perpendicular.
6. Seleccionar el vértice la primera circunferencia y trazar el cuadrilátero formado por perpendiculares.
7. Ir a vista, hoja de cálculo.
8. Seleccionar uno de los lados del cuadrilátero en la vista algebraica, clic derecho y dar opción registró hoja de cálculo.
9. Seleccionar en la vista algebraica el cuadrilátero y registrar en la hoja de cálculo.
10. En la Hoja de Cálculo, en la columna C en la fila 2, ingresar: =(A2,B2)
11. Arrastrar para copiar.
12. Seleccionar coordenadas y luego, Clic derecho- crear, lista.
13. En entrada: Ajustepolinomico(I1,2)