Probabilidad: curiosidades

B

DOI: 10.31978/014-18-009-X.B

CARLOS SANTOS BURGUETE
Centro Nacional de Predicción (CNP), Agencia Estatal de Meteorología (AEMET)

> Another mistaken notion connected with the law of large numbers is the idea that an event is more or less likely to occur because it has or has not happened recently. The idea that the odds of an event with a fixed probability increase or decrease depending on recent occurrences of the event is called the gambler's fallacy. For example, if Kerrich landed, say, 44 heads in the first 100 tosses, the coin would not develop a bias towards the tails in order to catch up! That's what is at the root of such ideas as "her luck has run out" and "He is due". That does not happen. For what it's worth, a good streak doesn't jinx you, and a bad one, unfortunately , does not mean better luck is in store.
>
> *The Drunkard's Walk: How Randomness Rules Our Lives* – LEONARD MLODINOW

> ¿Cómo osamos hablar de leyes del azar? ¿No es, acaso, el azar la antítesis de cualquier ley?
>
> *Calcul des Probabilités* – BERTRAND RUSSELL

La teoría de la probabilidad, una parte de la teoría matemática denominada de la medida, nos puede ayudar a entender el mundo que nos rodea y los acontecimientos que en él suceden de una forma más natural que otras concepciones. Su aplicación en el dominio científico y técnico ha permitido conformar teorías importantes en numerosas disciplinas y la meteorología no es una excepción: nuestro modo de describir y computar la evolución de la atmósfera lleva asociada una incertidumbre, que se puede plasmar en términos de probabilidades. No obstante, algunos de sus aspectos pueden desafiar el sentido común. En este anexo completamos algunas ideas de probabilidad en los sistema(s) de predicción por conjuntos (SPC), mostrando unas pinceladas de esos aspectos curiosos que salen de la experiencia cotidiana.

Palabras clave: probabilidad, teorema de BAYES, problema de MONTY HALL, problema del cumpleaños.

Imagen parte superior: nube bandera en el Cervino/Matterhorn (4478 m), Zermatt (Suiza), hacia el suroeste, 24 de julio de 2011, a las 18:27. Fotografía de JOSÉ ANTONIO QUIRANTES CALVO.

B.1 Teorema de Bayes para tests no perfectos

Imaginar un test de *masculitis* (enfermedad ficticia que aparece en la película *El último varón sobre la Tierra*, de JAMES TINLING, 1933). Este test tiene una *sensibilidad* (propiedad estadística) del 99 %: dará un 99 % de positivos en una muestra de enfermos. Por otro lado, su *especifidad* (otra propiedad estadística, complementaria de la sensibilidad) es también del 99 %: dará un 99 % de negativos en una muestra de individuos sanos. El test solo es perfecto si tanto su especificidad como su sensibilidad estadísticas son del 100 %, lo cual no se da habitualmente y se ha de asumir que estos tests no son perfectos. Se ha calculado que un 0.5 % de la población ha caído víctima de la extraña enfermedad.

Si se selecciona un individuo al azar, se le hace el test de masculitis y da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que realmente esté enfermo?

La intuición humana, sujeta a numerosos sesgos cognitivos y otros condicionamientos (ver sec. 40.1.2 en la página 616), a menudo comete grandes errores en estas estimaciones que, en ocasiones, pueden dar lugar a tomar peores decisiones. Para dar una respuesta precisa, podemos aplicar el teorema de BAYES. Usaremos la siguiente notación: individuo enfermo de masculitis, im; individuo sano, is; test positivo, tp; test negativo, tn.

La probabilidad de que, habiendo resultado positivo el test, el individuo esté realmente enfermo de masculitis, se expresa mediante probabilidad condicionada $P(im|tp)$, que podemos calcular mediante el teorema de BAYES (ec. G.11 en la página 1024):

$$P(im|tp) = \frac{P(tp|im)P(im)}{P(tp)}$$

Desarrollando $P(tp) = P(tp|im)P(im) + P(tp|is)P(is)$ resulta:

$$P(im|tp) = \frac{P(tp|im)P(im)}{P(tp|im)P(im) + P(tp|is)P(is)}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$P(im|tp) = \frac{0{,}99 \times 0{,}005}{0{,}99 \times 0{,}005 + 0{,}01 \times 0{,}995} \approx 33{,}2\,\%$$

Esta probabilidad, a menudo, resulta sorprendente para la intuición: habiendo resultado positivo el test, la probabilidad de que el individuo esté enfermo es sólo de un 33 %, más pequeña que la probabilidad de estar sano. Este hecho se debe a la baja proporción de enfermos (0.5 %). Si, por ejemplo, se aplica el test a 1000 individuos, esperamos encontrar a 5 enfermos y a 995 sanos. De los 995 sanos, esperamos unos $0{,}01 \times 995 \approx 10$ falsos positivos. De los 5 individuos enfermos, esperamos unos $0{,}99 \times 5 \approx 5$ verdaderos positivos. De modo que de los 15 resultados positivos del test, sólo 5 son verdaderos enfermos.

El factor especificidad juega un importante papel en este ejemplo paradigmático. Incluso elevando la especificidad al 100 %, si la sensibilidad sigue siendo del 99 %, la probabilidad de que la persona esté realmente enferma tras un test positivo solo sube de 33.2 % a 33.4 %. Sin embargo, manteniendo la sensibilidad al 99 % y subiendo la especificidad al 99.5 %, entonces la probabilidad citada sube de 33.2 % a 49.9 %.

La aplicación del teorema de Bayes a este tipo de disyuntivas puede ilustrarse y percibirse mejor mediante un diagrama de árbol como el de la Figura B.1. Este diagrama corresponde a la denominada *interpretación frecuentista* del teorema de BAYES, que no coincide con la *interpretación bayesiana* del mismo.

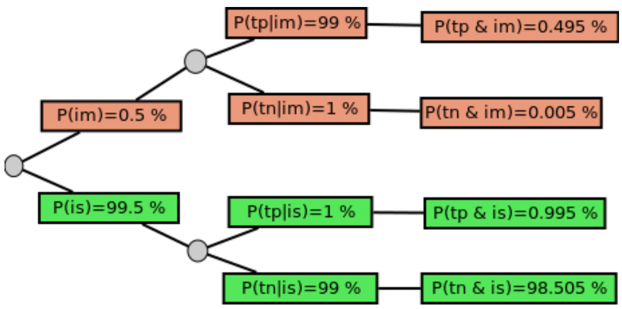

Figura B.1: Diagrama de árbol que ilustra el abanico de casos de enfermos de masculitis (im) e individuos sanos (is), conjuntamente con los resultados positivos (tp) y negativos (tn) del test de la extraña enfermedad (la intersección ∩ se denota como &). Obsérvese que hay un 99.5 % de individuos sanos y un 0.5 % de afectados. Cada grupo se desdobla según los factores, respectivamente de especificidad y sensibilidad, propiedades estadísticas. Las cajas de la derecha son las probabilidades conjuntas de un tipo de test y un tipo de individuo. A partir del diagrama pueden deducirse otras probabilidades. Por ejemplo, la probabilidad de que, dado un test positivo, el individuo esté realmente enfermo, es decir $P(im|tp)$ que, con el teorema de BAYES, es $P(im|tp) = \frac{P(tp \cap im)}{P(tp \cap im) + P(tp \cap is)} = \frac{0{,}495}{0{,}495 + 0{,}995} \approx 0{,}332 \approx 33\,\%$

B.2 El problema de Monty Hall

El de MONTY HALL es un problema de lógica y probabilidad originalmente planteado y resuelto por STEVE SELVIN [7, 8], profesor de bioestadística en la Universidad de California, Berkeley. El problema se hizo famoso en los medios en EE. UU., en el programa de televisión *Let's make a deal*, originalmente del presentador y productor MONTY HALL, dando nombre popular al problema y, posteriormente, en una carta de CRAIG WHITAKER en el apartado *Ask Marilyn* (MARILYN VOS SAVANT) de la revista *Parade* [10]. El problema tiene una solución relacionada con probabilidades, para muchos una solución poco intuitiva e, incluso, controvertida. El problema está estrechamente relacionado con el *Problema de los tres prisioneros* [4, 5] y, también, con la más antigua *Paradoja de* BERTRAND [1, 3]. A continuación presentamos el problema, o juego, en un contexto de juego de cajas con premio en un concurso típico televisivo. Para ilustrar convenientemente el proceso de razonamiento pondremos nuestra atención en la Figura B.2 mientras vamos respondiendo a las preguntas y resolviendo el problema.

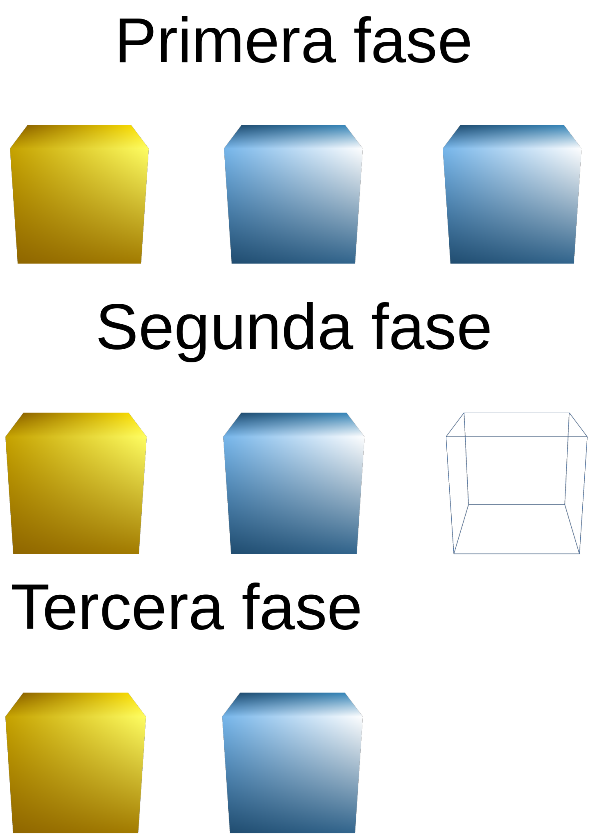

Figura B.2: Reglas del juego de MONTY HALL.

Reglas del juego de MONTY HALL. Se tienen tres cajas cerradas (Figura B.2), en una de las cuales, seleccionada al azar, se ha escondido un premio. En la primera fase del juego, con el objetivo de encontrar el premio, el concursante ha de elegir una de las tres cajas (digamos la amarilla en la Figura B.2). Una vez elegida, ésta no se abre, sino que queda señalada. En la segunda fase del juego el presentador, para ayudar al concursante, abre una de las dos cajas restantes, mostrando que está vacía (la de la derecha en la Figura B.2), de modo que sólo quedan dos cajas cerradas: la que eligió el concursante (amarilla) y otra caja (centro). En la tercera fase del juego, el concursante tendrá la opción de plantarse con la caja que eligió al principio (amarilla), o bien cambiar y elegir la otra caja (centro).

Estrategia. Hay varios aspectos interesantes en este juego. Uno de ellos es: ¿hay alguna *estrategia ganadora*? ¿Es mejor plantarse con la caja elegida al principio? ¿Es mejor cambiar? ¿O es indiferente?

Probabilidades. Otro aspecto a tener en cuenta son las probabilidades de conseguir encontrar el premio en cada fase del juego: ¿cuál es la probabilidad de encontrar el premio en la primera fase? ¿cuál es la probabilidad de encontrarlo en la tercera?

En la primera fase del juego el concursante debe elegir, al azar, una de las tres cajas. La probabilidad de elegir la caja con el premio es de:

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{3}$$

En ese punto hay acuerdo general. Una vez elegida la caja, en la segunda fase del juego, el presentador ayuda al concursante abriendo una de las dos cajas restantes, que no contiene el premio: está vacía. Ahí empieza la tercera fase del juego: el concursante deberá elegir una de las dos cajas: bien plantarse con la caja que había elegido al principio, o bien cambiar a la otra caja que el presentador no ha abierto. Muchas personas piensan que, en este punto, la probabilidad de elegir la caja con el premio es de $\frac{1}{2}$. ¿Piensa usted de este modo?

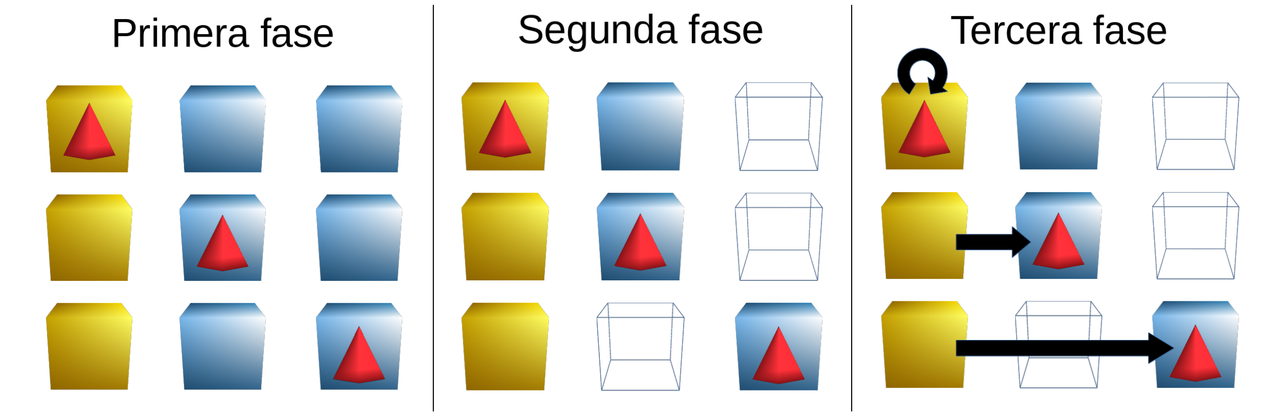

Figura B.3: Espacio muestral en el juego de MONTY HALL.

Fuera de contexto, es una respuesta lógica: tenemos dos cajas (eso sí que es vivir el presente) y, por tanto, la probabilidad de elegir la caja con el premio es:

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{2}$$

Que levante la mano quien piense así: mucha gente.

Examinemos el espacio muestral mediante la Figura B.3, conceptualmente similar a los diagramas de árbol tipo BAYES mostrados en la sección B.1 en la página 950. En la parte izquierda de la figura desplegamos, para la primera fase del juego, las tres opciones posibles. De las tres cajas, digamos que el concursante elige la de la izquierda. Este hecho es irrelevante pues, por simetría, pueden construirse espacios idénticos con el concursante eligiendo la del centro o la de la derecha, sin alterar las conclusiones. De modo que, por simplicidad, estudiamos los casos en que la caja elegida (en amarillo) es la de la izquierda. Hay tres casos posibles: que el premio (pirámide roja) esté en la caja izquierda (ilustrado en la fila superior), que esté en la caja central (fila del centro) o que esté en la caja derecha (fila inferior). En la segunda fase del juego, el presentador ayuda al concursante abriendo una de las cajas que el concursante no había elegido, y que ha de estar vacía. En el caso de la fila superior, puede abrir indistintamente la caja central o la derecha, digamos que la derecha. En la fila central sólo puede abrir la derecha y en la inferior sólo puede abrir la central. En la tercera fase del juego, el concursante deberá decidir si plantarse o cambiar de caja. Veamos la mejor opción en cada caso. En la fila superior es mejor plantarse, quedarse con la caja elegida inicialmente (flecha negra de ida y vuelta). En la fila del centro es mejor cambiar a la caja no elegida al principio, en resumen, es mejor cambiar (flecha negra de ida). Por último, en la fila inferior también es mejor cambiar (flecha negra de ida). Repasando y contando, resulta que en 1 de los 3 casos es mejor plantarse y en 2 de los 3 casos es mejor cambiar. Por tanto, las probabilidades de encontrar el premio, en la tercera fase del juego, no son $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$, sino que son $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ si, respectivamente, nos plantamos o cambiamos de caja. Empezamos así, respondiendo a las preguntas de probabilidades. En la primera fase la probabilidad de encontrar el premio era de $\frac{1}{3}$ y, en la tercera fase, no es $\frac{1}{2}$, sino $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ si, respectivamente, nos plantamos o cambiamos de caja.

Es especialmente interesante, desde el punto de vista psicológico, el hecho de que mucha gente piensa inmediatamente en la probabilidad de $\frac{1}{2}$ en la tercera fase. ¿Porqué es así? La clave de la cuestión es que considerar, en esa tercera fase, que «tenemos dos cajas y ya está» es una descontextualización. No es tan sencillo como decir «ya está», porque no está todo: había una tercera caja, que el presentador, para ayudar al concursante, ha abierto y descartado. Se ha añadido, de algún modo, información en el problema. Hay una propensión, en la mente humana, tanto al efecto de encuadre (ver sec. 40.1.2 en la página 616) como a la descomposición analítica. Esta última es una poderosa herramienta que, no obstante, en ocasiones lleva a descontextualizar un problema, perdiendo así información relevante.

Intentemos ahora abordar las otras preguntas, relacionadas con la estrategia. En teoría de juegos se habla de *estrategia ganadora* (en juegos de *longitud infinita*) cuando existen unas pautas que inclinan la victoria hacia algún jugador. ¿Existe estrategia ganadora en este juego de MONTY HALL? Hemos visto que, en la tercera fase del juego las probabilidades son $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ si, respectivamente, nos plantamos o cambiamos de caja.

Es evidente que es mejor cambiar y ésa ha de ser la estrategia ganadora. Ahora bien, ¿garantiza esta estrategia ganar todas y cada una de las jugadas? Desde luego que no. Puedo jugar una vez y perder, la probabilidad de ganar es de $\frac{2}{3}$. Lo que sí sabemos es que, si jugamos un gran número de veces, ganaremos aproximadamente en $\frac{2}{3}$ de las ocasiones: ganaremos de forma estadística. Si jugamos, por ejemplo, 1000 veces, esperamos (*valor esperado*) ganar en $\frac{2}{3} \times 1000 \approx 667$ ocasiones. Sabemos también que la realidad no se adapta a nuestros modelos (por mucho que algunos lo intenten): puestos a jugar, ganaremos, por ejemplo, en 659 ocasiones, o en 651, o en 678, pero es difícil que ganemos exactamente en 667 ocasiones.

Bien. ¿Y qué tiene este juego que ver con los SPC? Pues tiene mucho que ver, sobre todo con la verificación de los mismos. Los SPC ofrecen predicciones del tiempo en forma de probabilidades. De un modo similar al de este juego, la estrategia ganadora existe porque hay ingredientes internos al juego que dan probabilidades de ganar superiores (o muy superiores) a $\frac{1}{2}$. Pero el precio a pagar es que nadie nos garantiza ganar jugando una sola vez: hay que jugar muchas veces. En predicción probabilista, el hecho de dar, por ejemplo, un 30 % de probabilidades de que llueva mañana en Almendricos, no será contrastable siquiera con la precipitación observada al día siguiente. Pero utilizando la predicción probabilista durante todos los días del año, finalmente podremos hacer un balance con sentido (ver, por ejemplo, sección 15.10 en la página 234) y comprobar que usar predicciones de un SPC es una estrategia ganadora lo que implica, en el sentido del *valor económico relativo* (sección 15.10 en la página 234), que es más rentable que otras estrategias.

C_1	C_2	C_3
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Tabla B.1: Tabla de probabilidades inicial en el juego de MONTY HALL.

Profundicemos un poco más en el aspecto de la información que aporta el presentador del juego al abrir una de las cajas que no elige el concursante. Para ello, vamos a definir sucesos asociados a cada fase del juego y, a continuación, construiremos unas tablas con probabilidades individuales y marginales, asociadas a dichos sucesos.

Consideremos los sucesos siguientes:

- C_i el premio está en la caja i. Se cumple que $P(C_i) = \frac{1}{3}$. Ver Tabla B.1.
- B_i el concursante, en la primera fase del juego, elige la caja i. Podemos pensar en sucesos conjuntos, como por ejemplo $B_1 \cap C_1$ que sería la probabilidad de que que el concursante haya encontrado el premio, siempre que éste estuviera en la primera caja, etc.
- B el concursante, en la primera fase del juego, elige la caja donde está el premio, sea cual sea la caja.
- F_i es la apertura, por parte del presentador, de una cualquiera de las cajas no elegidas por el concursante, que debe estar vacía, digamos la caja i.
- F es la apertura, por parte del presentador, de una cualquiera de las cajas no elegidas por el concursante, que debe estar vacía.

En la Tabla B.1 podemos ver probabilidades asociadas al suceso F_i en diferentes casos.

En este punto es clave notar que B y F no son sucesos independientes.

F_i	C_1	C_2	C_3
$B_1 \cap C_3$	0	1	0
$B_2 \cap C_3$	1	0	0
$B_3 \cap C_3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabla B.2: Tabla de probabilidades en el juego de MONTY HALL.

Normalizando las tres últimas filas de la Tabla B.2, resulta la Tabla B.3. Los sucesos descritos tienen el siguiente significado: D_1 cambiamos la elección inicial de caja, D_2 cambiamos la elección inicial de caja, D_3 nos plantamos con la caja que elegimos inicialmente.

	C_1	C_2	C_3
D_1	0	$\frac{1}{3}$	0
D_2	$\frac{1}{3}$	0	0
D_3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

Tabla B.3: Tabla de probabilidades normalizada en el juego de MONTY HALL.

La probabilidad de encontrar el premio cambiándose viene dada por $P(D_1) + P(D_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, mientras que la probabilidad de ganar el premio plantándose viene dada por $P(D_3) = \frac{1}{3}$. Recuperamos, con esta notación, el resultado alcanzado anteriormente. Ahora introducimos la teoría de la información.

Teoría matemática de la información. La denominada teoría matemática de la información (en inglés Mathematical Theory of Communication) [2, 6], estudia la cuantificación, el almacenamiento y la comunicación de la información. CLAUDE E. SHANNON fue pionero en esta concepción en 1948 [9], estudiando procesamiento de señales y aspectos como compresión de datos. Entre sus numerosas aplicaciones están la ya mencionada compresión de datos, tanto sin pérdida (*lossless*) como con filtrado de información innecesaria (*lossy*), codificación de canales, etc. Se ha utilizado en las misiones *Voyager*, inventos como el CD, telefonía móvil, desarrollo de Internet, estudios de lingüística y de la percepción humana y comprensión de los agujeros negros, entre otras muchas. En teoría de la información se trabaja con *entropía*. La entropía es una magnitud común en física, asociada al desorden, en particular al número de estados posibles de un sistema.

Entropía en teoría matemática de la información. En este ámbito la entropía es una magnitud clave que cuantifica la cantidad de incertidumbre asociada al valor de una variable aleatoria o al resultado de un proceso estocástico. Por ejemplo, puede demostrarse que el resultado de un lanzamiento de moneda al aire (sin trucar) provee menos información (entropía más baja) que el resultado de una tirada de dado (asimismo sin trucar). Para una variable con sucesos x_i y probabilidades asociadas $p(x_i)$, la entropía viene dada por la expresión:

$$H(X) = \sum p(x_i) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_i)} \right) \tag{B.1}$$

Para dos variables:

$$H(X|Y) \sum_{i,j=1}^{3} p(x_i \cap y_i) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_i)} \right) \tag{B.2}$$

Entropía e incertidumbre en el problema de MONTY HALL. Sin profundizar demasiado en los fundamentos de la teoría, vamos a calcular directamente las medidas de entropía y de pérdida de incertidumbre asociadas al problema de MONTY HALL. Para la primera fase, la entropía correspondiente es:

$$\begin{aligned} H(X) = &\sum_{i=1}^{3} P(C_i) \log_2 \left(\frac{1}{P(C_i)} \right) = \\ = &\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} \log_2 \left(\frac{1}{\frac{1}{3}} \right) = 3 \times \frac{1}{3} \log_2 (3) = \\ = &\log_2 (3) \end{aligned}$$

Para la tercera fase, la entropía vendrá dada por la expresión:

$$\begin{aligned} H(X|Y) = &\sum_{i,j=1}^{3} P(C_i \cap D) \log_2 \left(\frac{1}{P(C_i)} \right) = \\ &+0 + P(C_2 \cap D_1) \log_2 \left(\frac{1}{P(C_2)} \right) + 0 \\ &+P(C_1 \cap D_2) \log_2 \left(\frac{1}{P(C_1)} \right) + 0 + 0 \\ &+P(C_1 \cap D_3) \log_2 \left(\frac{1}{P(C_1)} \right) + \\ &+P(C_2 \cap D_3) \log_2 \left(\frac{1}{P(C_2)} \right) + 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} H(X|Y) = \quad & 0 && +\frac{1}{3}\log_2 2 && +0 \\ & +\frac{1}{3}\log_2 2 && +0 && +0 \\ & +\frac{1}{6}\log_2 2 && +\frac{1}{6}\log_2 2 && +0 = \end{aligned}$$

Es decir:

$$H(X,Y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

Ahora, la información mutua o balance de entropía viene dado por:

$$\begin{aligned} I(X,Y) = &H(X) - H(X|Y) = \\ = &\log_2 (3) - 1 = \log_2 (3) - \log_2 (2) = \\ = &\log_2 \left(\frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

Esta diferencia indica que ha habido una disminución de incertidumbre, cuantificada como $\log_2 \left(\frac{3}{2}\right)$, sobre la variable aleatoria X, una vez que conocemos el resultado sobre la variable aleatoria Y. El presentador ha añadido información al abrir la caja y esa disminución de incertidumbre está cuantificada en $\log_2 \left(\frac{3}{2}\right)$.

B.3 El problema del cumpleaños

Numerosos problemas aparentemente inocentes esconden conceptos de probabilidad relativamente sencillos que pueden desafiar el sentido común. Entre los más conocidos hemos seleccionado el problema del cumpleaños.

Problema del cumpleaños. ¿Cuál es la probabilidad de que en una clase de 23 alumnos haya algún cumpleaños repetido?

A priori y, sin experiencia en problemas y ejercicios de probabilidad, mucha gente responderá que hay muy poca probabilidad. Y estarán equivocados. Construyamos una respuesta paso a paso.

En primer lugar calculemos la probabilidad de que dos personas no repitan cumpleaños. Tomemos a la primera persona como base y la segunda persona deberá haber nacido cualquier día, excepto el del cumpleaños de la primera. Por tanto:

$$P(2) = \frac{364}{365} \approx 0{,}9973$$

Calculemos, ahora, la probabilidad de que tres personas no repitan cumpleaños. Volvemos a tomar a la primera como base, la segunda puede cumplir en $\frac{364}{365}$ y, siguiendo el razonamiento, la tercera en $\frac{363}{365}$. La probabilidad conjunta es, suponiendo que son sucesos independientes:

$$P(3) = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \approx 0{,}9918$$

Así, la probabilidad de que los 23 alumnos hayan nacido en días distintos es:

$$P(23) = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{343}{365} \approx 0{,}4927$$

La probabilidad de lo contrario, es decir, del suceso complementario, será pues:

$$1 - P(23) = 1 - 0{,}4927 = 0{,}5073 \approx 51\,\%$$

Curiosamente, la probabilidad de encontrar dos o más cumpleaños repetidos en una clase de 23 alumnos es ligeramente superior al 50 %. Con 30 alumnos esa probabilidad subiría al 70 %, con 50 hasta el 97 % y con 100 alumnos ya llegamos, redondeando, al 100 %. De forma exacta, hace falta llegar a 366 alumnos para que resulte imposible la repetición de, al menos, un cumpleaños. A partir de 61 alumnos ya se supera el 99,5 % y, a partir de 83, se supera el 99,995 %.

B.4 Referencias

[1] BERTRAND, Joseph. *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, 1889 (citado en página 951).

[2] BRILLOUIN, Leon. *Science and information theory*. Courier Corporation, 2013 (citado en página 954).

[3] DAVIS, Ellery W. “Calcul des Probabilités, par J. Bertrand”. En: *Bulletin of the New York Mathematical Society* 1 (1891), páginas 16-25 (citado en página 951).

[4] GARDNER, Martin. “How three modern mathematicians disproved a celebrated conjecture of Leonhard Euler”. En: *Scientific American* 201.5 (1959), página 188 (citado en página 951).

[5] GARDNER, Martin. “Problems involving questions of probability and ambiguity”. En: *Scientific American* 201.4 (1959), páginas 174-182 (citado en página 951).

[6] KLIR, George J. *Uncertainty and information: foundations of generalized information theory*. John Wiley & Sons, 2005 (citado en página 954).

[7] SELVIN, Steve. “A problem in probability (letter to the editor)”. En: *American Statistician* 29.1 (1975), página 67 (citado en página 951).

[8] SELVIN, Steve. “On the Monty Hall Problem (letter to the editor)”. En: *American Statistician* 29.3 (1975), página 134 (citado en página 951).

[9] SHANNON, Claude Elwood. “A mathematical theory of communication”. En: *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review* 5.1 (2001), páginas 3-55 (citado en página 954).

[10] WHITAKER, Craig F. “Formulation by Marilyn vos Savant of question posed in a letter from Craig Whitaker”. En: *Ask Marilynçolumn, Parade Magazine* (1990), página 16 (citado en página 951).