ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE LA PRECIPITACIÓN Y TEMPERATURA EMPLEANDO LA TRANSFORMADA DE LEGENDRE

Alvaro LÓPEZ-LAMBRAÑO[1,4], Carlos FUENTES[2], Alvaro LÓPEZ-RAMOS[3]
[1]*Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño, Universidad Autónoma de Baja California. Km. 103 carretera Tijuana – Ensenada, C.P. 22860, Ensenada, Baja California, México.*
[2]*Facultad de Ingeniería. Universidad Autónoma de Querétaro. Cerro de las Campanas. 76010 Santiago de Querétaro, Qro., México.*
[3]*Escuela de Ingenierías y Arquitectura. Facultad de Ingeniería Civil. Universidad Pontificia Bolivariana. Montería, Km 8 vía a Cereté, Córdoba, Colombia*
[4]*Hidrus S.A de CV. Querétaro, México*
altoti@gmail.com, cbfuentesr@gmail.com, alopezramos@hotmail.com

RESUMEN
Se realiza el análisis de la estructura en diferentes escalas de tiempo de la precipitación y temperatura utilizando la transformada de Legendre, para así obtener las medidas multifractales de dichas variables. Para el análisis de las variables climatológicas en estudio, se emplea el método Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA) a partir de series de tiempo con resoluciones anuales, mensuales y diarias para 50 años de registro. En este caso de estudio, se define una función de partición y a partir de ella, se construye el correspondiente formalismo multifractal que permite analizar la regularidad Hölder de funciones que integran dichas medidas. A partir de la transformada de Legendre, fue posible el análisis estructural de las variables precipitación y temperatura, mediante la obtención del espectro de singularidades de las mismas. El análisis multifractal se muestra como una herramienta adecuada y eficiente para caracterizar las series de precipitación y temperatura en el estudio del cambio climático. Los espectros multifractales obtenidos son asimétricos, presentando ramas derechas más largas en la mayoría de los casos, lo que indica una alta heterogeneidad de las variables en estudio.

Palabras clave: Análisis multifractal, Leyes potenciales, Exponente de Hurst, Teoría de escala.

ABSTRACT
In this work the Hurst exponent, which can characterize correlation and persistence in time series, will be obtained by using the Multifractal Analysis. Data series of temperature and rainfall will be studied. Furthermore, the multifractality of such series will be analized applying the Multifractal Detrended Fluctuation Analysis method.

Key words: Multifractal analysis, Power law, Hurst exponent, Scale theory.

1. INTRODUCCIÓN

La precipitación y temperatura exhiben una alta variabilidad tanto en el tiempo como en el espacio. La mayor parte de los estudios se han orientado hacia el entendimiento de todos los mecanismos físicos que generan dichas variables y a la incorporación de su dinámica en los modelos estocásticos; por lo tanto la alta variabilidad de la precipitación y temperatura en consideración ha inducido al estudio de sus diferentes escalas de forma independiente, ocasionando un uso restringido de los citados modelos. Sin embargo, la mezcla de escalas es frecuente en hidrología, donde suele trabajarse con datos pertenecientes a pequeñas escalas temporales para obtener estimaciones correspondientes a escalas temporales más elevadas.

Mandelbrot (1967) introduce el concepto de fractal en términos de estadística autosimilar, el término radica en que la forma de un objeto no define su tamaño, definiendo los fractales como objetos que poseen una apariencia similar cuando se observan en diferentes escalas, poseen detalles a escalas pequeñas arbitrarias, por lo que se tornan demasiado complejas como para estudiarse por la geometría Euclidiana. La geometría fractal es caracterizada por la prevalencia de variables aleatorias distribuidas hiperbólicamente, para la cual Pr (U>u) α u-α, donde Pr es la probabilidad de que el valor de la variable exceda u, y α es un exponente positivo. Los fractales permiten generar estructuras bastante complejas por medio de agrupaciones, por lo que pueden aplicarse a prácticamente cualquier estudio deseado. (Lovejoy y Mandelbrot, 1984).

La teoría de los fractales, y su posterior evolución hacia la teoría de los multifractales, estudia matemáticamente esta invarianza de escala, y se utiliza para describir fenómenos muy complejos con simples leyes potenciales caracterizadas por sus exponentes. Los multifractales describen procesos para los que se necesitan múltiples exponentes de escala.

Asimismo, el análisis multifractal puede servir como una herramienta de validación de modelos estocásticos de la precipitación mediante la comparación del espectro de las dimensiones de las series observadas y las series sintéticas generadas.

La multifractalidad como teoría para completar la descripción de las series temporales de variables hidrológicas, ha sido una teoría ampliamente estudiada en las últimas décadas (e.g. Schertzer y Lovejoy, 1987; sLadoy et al., 1993; Fraedrich y Larnder, 1993; Over y Gupta, 1994; Svensson et al., 1996; Tessier et al., 1993, 1996; de Lima y Grasman, 1999; Kiely e Ivanova, 1999; Kantelhardt et al., 2006.

Este trabajo tiene como principal objetivo el análisis de la estructura en diferentes escalas de tiempo de la precipitación y temperatura utilizando la transformada de Legendre para así obtener las medidas multifractales de las variables en estudio.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Consideremos que tenemos una medida μ con un soporte C. Podemos recubrir a este soporte con una familia de conjuntos formados por $N(s)$ cajas $Bi(s)$ cada una de lado s. La función de partición asociada con la medida y con la cobertura se define como:

$$Z(q,s) = \sum_{i=1}^{N(s)} \mu_i^q(s) \quad [1]$$

donde q es un número real y $\mu_i^q(s)$ es una función de $B_i(s)$.
Admitiendo que para $s \to 0^+$ se tiene la siguiente relación exponencial,

$$Z(q,s) \sim s^{\tau(q)} \quad [2]$$

A partir de la expresión anterior, el formalismo multifractal usa la transformada de Legendre para relacionar el exponente de escala $\tau(q)$ con el espectro multifractal. Suponiendo que $\tau(q)$ es una función de concavidad negativa, la transformada de Legendre de la función $-\tau(q)$ es

$$\inf\left\{-\tau(q) + q\alpha\right\} \quad [3]$$

Y se puede establecer que

$$d(\alpha) = \inf_{q \in R}\left\{-\tau(q) + q\alpha\right\} \qquad [4]$$

Dado, derivando $-\tau(q) + q\alpha$,se tiene que el mínimo se alcanza en un único *q* y esto sucede cuando

$$\alpha = \tau'(q) \qquad [5]$$

así mismo, se estima

$$d(\alpha) = q\alpha - \tau(q) \qquad [6]$$

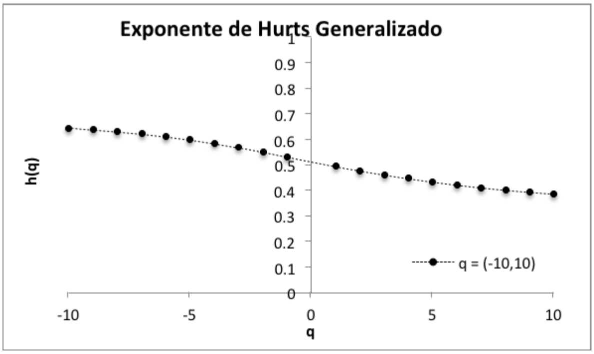
donde α es la intensidad de la singularidad o el exponente de Hölder y $d(\alpha)$ es el espectro multifractal.

3. MATERIALES Y MÉTODOS

Se utilizan para el análisis los datos de precipitación anual, mensual y diaria registrados en la estación climatológica Presa Centenario, dicha estación se encuentra ubicada en el estado de Querétaro – México, entre las coordenadas 20° 01' 16" y 21° 35' 38" Latitud Norte99° 00' 46" y 100° 35' 46" Longitud Oeste.
En este trabajo se aplica el método Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA) a una serie de precipitaciones de 50 años de registro.
El método MFDFA involucra la transformada de Legendre [4] para la obtención del espectro multifractal de la medida.
Este método aplica para el caso de medidas μ de Borel no negativas, singulares y de soporte acotado. Esto incluye el caso de aquellas cuyo soporte es un conjunto de Cantor generalizado. En estos casos, se puede definir una función de partición cuya naturaleza depende del método, y a partir de ella, construir el correspondiente formalismo multifractal que permite analizar la regularidad Hölder de funciones que integran dichas medidas.
La estructura de evento de lluvia que se utiliza para el análisis se plantea de tal forma que un evento de lluvia (i) se define como una secuencia de cantidades no nulas de lluvia, y su tamaño es representado por la columna de agua acumulada desde el inicio hasta el momento en que finaliza la precipitación; por lo tanto cada valor que conforma la serie de tiempo de precipitaciones, constituye un evento acumulado de lluvia.
Finalmente, a partir de las ecuaciones [3-6] se desarrolla el formalismo multifractal que permite obtener los espectros de singularidades de la precipitación y temperatura.

4. RESULTADOS

Se realiza una aplicación de la técnica MF-DFA sobre las series de tiempo de precipitación y temperatura.
Empleando la transformada de Legendre se obtiene el espectro de singularidades para comprobar la naturaleza multifractal de las series temporales de precipitación y temperatura. Para ello, se define el momento estadístico "*q*", el cual fijamos entre (-10, 10).
A partir del formalismo planteado en las ecuaciones [3-6] se puede determinar el exponente de Hurst generalizado para valores de *q*, en este caso entre -10 y 10.
De acuerdo a la relación entre el exponente de Hurst y $h(q)$, i.e. $h(q=10)-1=H$, se podría encontrar el valor del exponente de Hurst.
En los resultados se muestran las funciones $h(q)$ y $\tau(q)$, y posteriormente se obtiene la función de escalado de momentos $\tau(q)$, en donde se observa un comportamiento multifractal de las series de precipitación y temperatura por la fuerte dependencia del exponente generalizado *q* y $\tau(q)$. Ver figura 1 y 2.



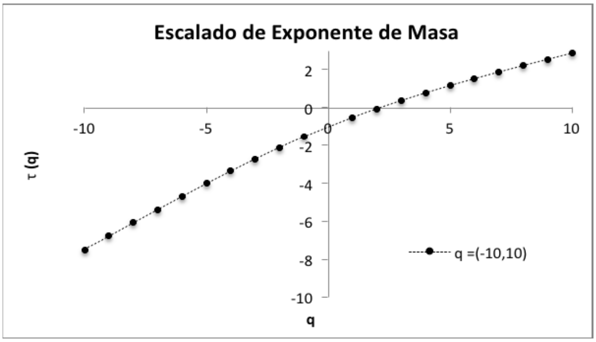
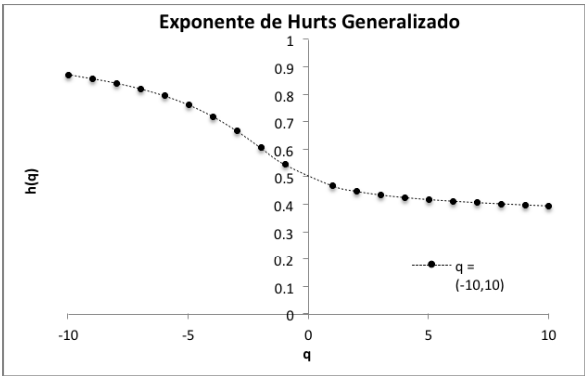


Fig. 1: Función $h(q)$ *y* $\tau(q)$ *obtenida para la precipitación y un momento q = 10.*
Fuente: elaboración propia.



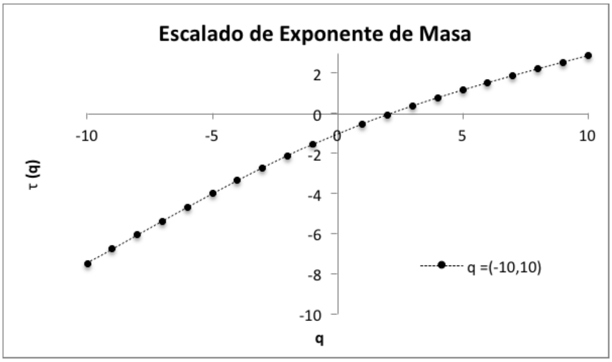


Fig. 2: Función $h(q)$ y $\tau(q)$ obtenida para la temperatura y un momento q = 10.
Fuente: elaboración propia.

A partir de las funciones $\tau(q)$ y aplicando la ecuación [4] correspodiente a la transformada de Legendre, se genera el espectro multifractal de la precipitación y temperatura. Ver figura 3 y 4.

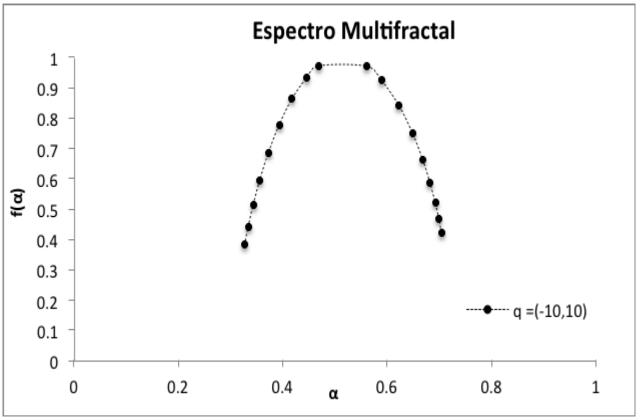


Fig. 3: Espectro multifractal de la precipitación a partir de la Función $\tau(q)$ y para valores de q = -10, 10. Fuente: elaboración propia.

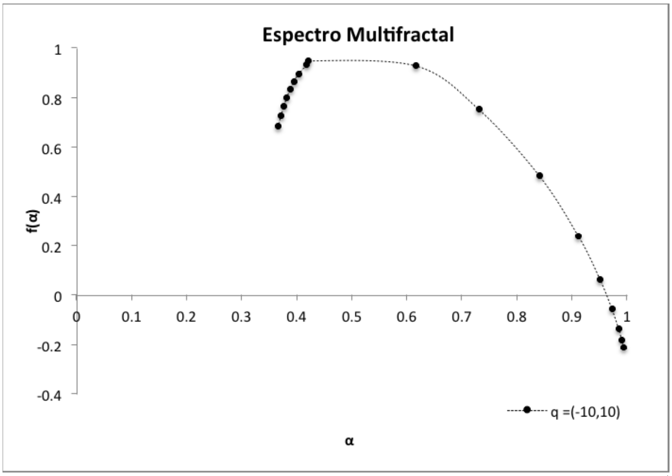


Fig. 4: Espectro multifractal de la temperatura a partir de la Función $\tau(q)$ *y para valores de q = -10, 10. Fuente: elaboración propia.*

Los espectros multifractales presentados en las anteriores, representan una función cóncava, las diferentes partes de la estructura están caracterizadas por diferentes valores de (α) , lo que lleva a la existencia del espectro multifractal $f(\alpha)$.

También es importante mencionar que el ancho correspondiente a cada espectro nos proporciona información sobre la variabilidad de las variables en estudio.

5. CONCLUSIONES

A partir de la transformada de Legendre, fue posible el análisis estructural de la precipitación, mediante la obtención del espectro de singularidades de la precipitación y temperatura. Con respecto al análisis multifractal se ha mostrado como una herramienta adecuada y eficiente para caracterizar las series en estudio. Los espectros multifractales obtenidos en la estación climatológica Presa Centenario son asimétricos, presentando ramas derechas más largas en la mayoría de los casos, lo que indica una alta heterogeneidad de las variables en consideración.

Finalmente, la teoría multifractal es una herramienta apropiada para el estudio del cambio climático debido a que la conceptualización de los posibles cambios de los momentos de la precipitación y temperatura con el tiempo se pueden determinar, permitiendo la realización de inferencias sobre el comportamiento de dichas variables en una zona en particular.

REFERENCIAS

de Lima MIP, Grasman J. (1999). Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal. Journal of Hydrology 220: 1-11.

Fraedrich K, Larnder C. (1993). Scaling regimes of composite rainfall time series. Tellus Series A-Dynamic Meteorology and Oceanography 45A: 289-298.

Kantelhardt JW, Koscielny-Bunde E, Rybski D, Braun P, Bunde A, Havlin S. (2006). Long-term persistence and multifractality of precipitation and river runoff records. Journal of geophysical research-atmospheres 111 (D1): Art. No. D01106.

Kiely G, Ivanova K. (1999). Multifractal analysis of hourly precipitation. Physics and Chemistry of the Earth Part B-Hydrology Oceans and Atmosphere 24: 781 786.

Ladoy P, Schmitt F, Schertzer D, Lovejoy S. (1993). The multifractal temporal variability of Nimes rainfall data. Comptes Rendus del Academie des Sciences Serie II 317(6): 775-782.

Lovejoy S, y Mandelbrot B, Tellus 37A (1984) 209-232.

Mandelbrot B.B, Science 156 (1967) 636-638.

Schertzer D, Lovejoy S. (1987). Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. Journal of Geophysical Research Atmospheres 92: 9693-9714.

Svensson C, Olsson J, Berndtsson R. (1996). Multifractal properties of daily rainfall in two different climates. Water Resources Research 32: 2463-2472.

Tessier Y, Lovejoy S, Schertzer D. (1993). Universal multifractals in rain and clouds: theory and observations. Journal of Applied Meteorology, 32, 223-250.

Over TM, Gupta VK. (1994). Statistical analysis of mesoscale rainfall: dependence of a random cascade generator on large scaling forcing. Journal of Applyed Meteorology, 33, 1526-1543