

INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA
SUBDIRECCION DE PREDICCIÓN Y CLIMATOLOGIA
SERVICIO DE PREDICCIÓN
SECCION DE PREDICCIÓN NUMERICA

NOTAS DE METEOROLOGIA SINOPTICA

27



INTRODUCCION A LA PREDICCIÓN NUMERICA
UTILIZANDO TECNICAS VARIACIONALES
EN ESPACIOS DE HILBERT

Por Los Drs.

J.G.Rendo y M.Hortal

Madrid, marzo de 1983



I N D I C E

0.- Introducción	pag. 1
1.- Inclusión en un espacio de Hilbert de un campo meteorológico	pag. 3
2.- Aproximante del campo en espacios de dimensión finita	pag. 4
3.- Funciones adecuadas para representar variables meteorológicas	pag. 6
4.- Modelo matemático de una versión abstracta y simple de la atmósfera	pag. 8
5.- Distribuciones según L. Schwartz	pag. 10
6.- Método variacional	pag. 14
7.- Familia de ecuaciones variacionales aproximantes ..	pag. 16
8.- Métodos iterativos	pag. 18
9.- Modelo barotrópico equivalente	pag. 21
-Tratamiento de la función Jacobiana y Linealización de (48)	pag. 28
-Linealización por iteración funcional	pag. 29
10.- Método Numérico en V_{Z_0} (57)	pag. 31
-Método Numérico	pag. 34
BIBLIOGRAFIA	pag. I



I N T R O D U C C I O N

Se dice que un problema está bien planteado si para un conjunto de datos, llamado conjunto inicial, existe exactamente una solución y ésta depende continuamente de aquel conjunto. Para precisar este concepto, nosotros debemos indicar los espacios donde la solución ha de ser obtenida, el espacio de los datos - iniciales, así como la noción de dependencia continua entre la solución y el campo inicial.

Teniendo en cuenta lo anterior será más fácil situar a muchos problemas meteorológicos en la condición de problemas físicamente bien planteados.

Los sistemas de ecuaciones encontrados en los problemas meteorológicos son, a menudo, muy complicados; éstos están a veces formados por subsistemas de diferentes tipos (elípticos, hiperbólicos, parabólicos, etc). La estima del error y la demostración de la convergencia se presenta más difícil al complicar se más los problemas. Existen lagunas ó faltas de coherencia entre la matemática del problema (visto desde los adelantos de los métodos de resolución) y los métodos usuales, ya anticuados, de resolución, porque los recientes avances teóricos introducen métodos matemáticos y nuevos conceptos que, probablemente, se presentan innecesarios a personas no especialistas en Análisis Nu-mérico. Esta aparente dificultad (que tampoco puede negarse que existe) debe vencerse llegando a comprender que se simplifican las técnicas de resolución.

La Materia debe organizarse, no obstante, de acuerdo con la naturaleza física del problema, ya que, los sistemas matemáticos adquieren aspectos diversos al considerar en detalle los campos físicos que afectan (dentro, no obstante, de características comunes en áreas diferentes).

Dado que los modelos de predicción numérica, así como algunos de análisis objetivo, que estamos estudiando y desarrollando en la Sección de Predicción Numérica, son tratados por métodos variacionales, tales como el de los "Elementos Finitos", entre otros, nos parece conveniente introducir las nociones necesarias para que el lector interesado en la aplicación de los modelos pueda comprender los tópicos matemáticos sin desviar su atención en deducir los asertos que estructuralmente los sostienen y que en poco le ayudan en la concepción de los fenómenos físicos que analiza o predice. Se suponen, no obstante, conocimientos elementales acerca de los espacios de Hilbert.

Para alcanzar nuestro objetivo, nos referiremos a lo largo del texto al modelo barotrópico en sus versiones simple y equivalente, que está incluido dentro del problema general de "Navier-Stokes" - "Euler".

1.- Inclusión en un espacio de Hilbert de un campo meteorológico

Ω es el interior de una región de predicción $\bar{\Omega}$ de frontera Γ situada sobre una proyección conforme (de las usadas en meteorología). ($\Omega \cup \Gamma \equiv \bar{\Omega}$; $\Omega \cap \Gamma = \emptyset$ (espacio vacío)).

Para un periodo de tiempo $]0, \bar{t}[$, tenemos definidas las variables meteorológicas, ó campos meteorológicos de interés, sobre el cilindro $\Omega \times]0, \bar{t}[$, es decir:

Si por \mathcal{M} representamos una de estas variables ó campos meteorológicos, \mathcal{M} es una función numérica definida sobre $\Omega \times]0, \bar{t}[$, con valores reales ó complejos $\mathcal{M}(x, t)$, que, para un instante $t_0 \in]0, \bar{t}[$, se convierte en una función numérica $\mathcal{M}_0 = v$, definida sobre Ω con valores reales ó complejos $\mathcal{M}_0(x) = v(x) = \mathcal{M}(x, t_0)$. Las definiciones de \mathcal{M} y $\mathcal{M}_0 = v$, pueden extenderse a $\bar{\Omega} \times [0, \bar{t}]$ y $\bar{\Omega}$, respectivamente.

Entonces, si consideramos definido sobre Ω un conjunto de funciones numéricas, dotado de una estructura de espacio de Hilbert V , con producto escalar $((u, v))$, $u, v \in V$, y, si definimos sobre el intervalo $I =]0, \bar{t}[$ un conjunto de funciones \mathcal{F} , con valores en el espacio de Hilbert V , tal que, para toda $t_0 \in]0, \bar{t}[$, exista una función v , perteneciente a V , que verifique $v(x) = \mathcal{M}_0(x) = \mathcal{M}(x, t_0)$, $x \in \Omega$; $\mathcal{M}(x, t) \in \mathcal{F}$, podemos dar estructura hilbertiana a \mathcal{F} , representándolo por $\mathcal{F}(I; V)$, de producto escalar

$$\int_0^{\bar{t}} ((u(t), g(t))) dt$$

para toda $u(t), g(t) \in \mathcal{F}(I; V)$. De esta manera, se puede definir (&) un espacio de Hilbert $\mathcal{F}(I; V)$ y asociarlo al campo meteorológico cuyo comportamiento se desee estudiar en el cilindro $\Omega \times]0, \bar{t}[$; es decir, si $\mathcal{M}(x, t)$ representa una variable meteorológica definida sobre $\bar{\Omega} \times [0, \bar{t}]$, ésta es lo mismo que el resultado de la composición

$$\begin{aligned} [0, \bar{t}] \ni t &\longrightarrow \mathcal{M}(t) = v(x) \longrightarrow \mathcal{M}(t)(x) = \\ &= \mathcal{M}(x, t), \quad \forall \mathcal{M} \in \mathcal{F}(I; V) \end{aligned}$$

2.- Aproximante del campo en espacios de dimensión finita

Una vez situados en un espacio de Hilbert separable, sabemos que existen sistemas de elementos del espacio que lo generan y subconjuntos de aquellos sistemas que son minimales, o bases que engendran subespacios densos del espacio de Hilbert considerado; es decir, podemos obtener subespacios vectoriales de dimensión finita, que aproximan convenientemente al espacio de Hilbert del campo meteorológico que nos ocupa. Si \mathcal{M} es el campo meteorológico y \mathcal{M}_N su aproximante, lo que antecede puede indicarse en términos de la acotación del resto $\mathcal{M} - \mathcal{M}_N$, eligiendo un $\varepsilon > 0$, arbitrario y, buscando un número natural \bar{N} dependiente de ε , tal que, si W es el espacio que se desea aproximar y $W_{\bar{N}}$ su aproximante, se tenga

(&) Veremos en alguna otra nota que, no siempre es suficiente asociar un espacio de Hilbert. Se necesitarán espacios de Banach reflexivos.

$$(1) \int_0^{\bar{t}} \| \mathcal{M} - \mathcal{M}_{\bar{N}} \| dt \leq \varepsilon \quad \text{para } \mathcal{M} \in \mathcal{W} \text{ y } \mathcal{M}_{\bar{N}} \in \mathcal{W}_{\bar{N}}$$

donde, $\mathcal{W} = \mathcal{F}(I; V)$. \bar{N} será la dimensión de $\mathcal{W}_{\bar{N}}$, o sea, el cardinal de la base $\{w_{\hat{J}}\}$ que genera $\mathcal{W}_{\bar{N}}$, para $w_{\hat{J}} \in \mathcal{W}$, $V_{\hat{J}}$ ente ro multidimensional.

De las propiedades de los espacios funcionales se deduce que existen dos números naturales N_x y N_t , tales que, $\bar{N} = N_x \cdot N_t$, y la siguiente relación de inclusión

$$(2) \quad \mathcal{F}^{(I)}_{N_t} \otimes V_{N_x} \begin{array}{c} \hookrightarrow \mathcal{F}^{(I)} \otimes V \\ \hookrightarrow \mathcal{F}^{(I; V_{N_x})} \end{array} \hookrightarrow \mathcal{F}^{(I; V)}$$

tiene lugar, cuando cada subespacio es denso en él siguiente (\hookrightarrow = inclusión densa). $\mathcal{F}^{(I)}$ es un espacio de funciones numéricas definidas sobre I , $\mathcal{F}^{(I)}_{N_t}$ y V_{N_x} son los aproximantes respectivos de $\mathcal{F}^{(I)}$ y V . " \otimes " denota el operador producto tensorial entre funciones, que definimos por $\alpha(t) \otimes v(x) = \alpha(t) v(x)$, $\alpha \in \mathcal{F}^{(I)}$, $v \in V$.

Entonces, si $\{\alpha_i\}$, $1 \leq i \leq N_t$ y $\{w_J\}$, $J = (j, p)$, $1 \leq j \leq N_1$, $1 \leq p \leq N_2$, $N_x = N_1 \cdot N_2$ son las bases de $\mathcal{F}^{(I)}$ y V_N , respectivamente, se tiene, pues, $w_{\hat{J}} = w_J \otimes \alpha_i = w_J \alpha_i$; $\hat{J} = (j, p, i)$, $1 \leq j \leq N_1$, $1 \leq p \leq N_2$, $1 \leq i \leq N_t$, $\bar{N} = N_1 \cdot N_2 \cdot N_t$, y nosotros aproximamos los elementos de $\mathcal{F}^{(I; V)}$ por los de $\mathcal{F}^{(I)}_{N_t} \otimes V_N$, de forma que, tomando $\varphi \in \mathcal{F}^{(I; V)}$, para un $\varepsilon > 0$ arbitrario, exista un $\bar{N} = N_x \cdot N_t$ tal, que (1) tenga lugar; es decir:

$$\int_0^{\bar{t}} \| \varphi - \varphi_{\bar{N}} \| dt \leq \varepsilon$$

para

$$(3) \quad \varphi_{\bar{N}} = \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{J=(j,p)} \varphi_{\bar{N}}^{i,J} \quad \omega_J(x) \alpha_i(t), \quad 1 \leq j \leq N_1, \quad 1 \leq p \leq N_2$$

donde, la sucesión numérica $(\varphi_{\bar{N}}^{i,J})$ es de cuadrado sumable.

Después de lo que llevamos dicho, (3) es una buena estimación de $\varphi \in \mathcal{F}(I; V)$ y $\varphi_{\bar{N}}$ es el aproximante de campo meteorológico φ objeto de estudio.

3.- Funciones adecuadas para representar variables meteorológicas

Lo dicho hasta aquí queda bastante abstracto si no se dan criterios suficientes para obtener los entes matemáticos anteriormente mencionados.

Las ecuaciones que rigen la atmósfera relacionan funciones que toman valores acotados (en general) sobre el dominio $\bar{\Omega} \times [0, \bar{t}]$ y, nosotros debemos extender el conjunto funcional $\mathcal{F}(I; V)$ a aquél cuyas funciones sean de cuadrado integrable, al menos, sobre $\bar{\Omega} \times [0, \bar{t}]$, y ésto significa que para toda $\varphi \in \mathcal{F}(I; V)$ tenga lugar la desigualdad

$$(4) \quad \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} \varphi^2 \, dx \, dy < \infty; \quad (x,y) \in \bar{\Omega}$$

Si en este tipo de funciones consideramos $v = \varphi(t) \in V$, se cumple también

$$(5) \quad \int_{\Omega} v^2 \, d\Omega < \infty$$

y denotamos al espacio de las funciones v , definidas sobre $\bar{\Omega}$ que verifican (5) por $L^2(\Omega)$, este espacio es un hilbert clásico si lo dotamos del producto escalar

$$(6) \quad (u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx dy, \quad u, v \in L^2(\Omega)$$

Entonces, en un primer intento, podemos considerar a un campo meteorológico incluido en un espacio de Hilbert $\mathcal{F}(I; L^2(\Omega))$, y si exigimos que las funciones de éste verifiquen (4), podemos escribirlo como

$$(7) \quad L^2(I; L^2(\Omega)) = \mathcal{F}(I; L^2(\Omega))$$

y el producto escalar en (7) será

$$(8) \quad (\varphi, \psi)_{\mathcal{F}} = \int_0^{\bar{t}} (\varphi(t), \psi(t)) \, dt; \quad \varphi, \psi \in L^2(I; L^2(\Omega))$$

Introducido el espacio de Hilbert como herramienta de trabajo, debemos aprovechar la presencia natural del espacio Dual de un hilbert para seguir ampliando los espacios de definición de los campos meteorológicos.

Es sabido que un espacio de Hilbert es denso en su dual en la topología de éste, y hay teoremas clásicos que demuestran que existen isomorfismos entre un espacio de Hilbert H y su dual H' , y que incluso pueden identificarse convenientemente. Los elementos de H' , llamados funcionales o formas lineales, aplican los elementos de H en números reales o complejos, como se sabe; esto es, si $f \in H$ y $f' \in H'$, se tiene

$$(9) \quad \langle f', f \rangle = f'(f) = k \quad (\text{número real o complejo})$$

Cuando no se confunda (9) con el producto escalar en $L^2(\Omega)$, haremos

$$\langle f', f \rangle = (f', f)$$

Ya que en la topología de H' éste contiene los puntos límites de H , interesa en ciertos problemas utilizar los funcionales de H' para ampliar el espacio de las soluciones que definen un campo meteorológico. Se aprovechan así funciones con menos regularidad para representar campos discontinuos.

4.- Modelo matemático de una versión abstracta y simple de la atmósfera.

Hagamos de nuevo una abstracción de un modelo de atmósfera y planteemos el sistema ó modelo matemático que lo describe en la forma más sencilla

$$(10) \quad A\psi = F$$

donde A es un operador que relaciona dos campos meteorológicos ψ y F , definidos sobre los espacios de Hilbert \bar{X} e \bar{Y} , respectivamente. F es una función conocida en \bar{Y} , y ψ es la incógnita que hay que hallar en \bar{X} .

El operador A es, en general, una matriz cuyos elementos son expresiones de operadores en derivadas parciales, entre otras. En esta nota consideramos solamente aquellos operadores A de elementos que son combinaciones de operadores en derivadas parciales afectados de coeficientes acotados y que tengan, al menos, una parte principal lineal, simétrica y definida positiva. Esta última propiedad se llama coercividad ó -elipticidad, y se expresa por

$$(11) \quad \langle A\psi, \psi \rangle \geq \gamma^2 \|\psi\|^2, \quad \gamma \text{ es real y } \|\cdot\| \text{ es la norma en el subespacio de } \bar{X}, \text{ que sea dominio del operador } A.$$

Desgraciadamente, no siempre es posible obtener un modelo matemático que describa un proceso atmosférico con el operador A ó su parte principal coercivas^(&); pero, cuando ésto ocurre, aparece un subespacio canónico $D(A)$ asociado a A contenido en X y que es el dominio de A . El operador A define en su dominio el producto escalar

$$(12) \quad (\psi, \varphi)_A = \langle A\psi, \varphi \rangle$$

y que en la mayoría de los casos se tendrá

$$(13) \quad (\psi, \varphi)_A = \int_{\Omega} A\psi \bar{\varphi} \, d\Omega, \quad \bar{\varphi} \text{ es la conjugada compleja de } \varphi$$

con lo cual $D(A)$ adquiere carácter prehilbertiano y, entonces, lo denotaremos por el símbolo genérico V , y su producto escalar por $((.,.)) = (.,.)_A$. El cuadrado de su norma es

$$(14) \quad (\psi, \psi)_A = ((\psi, \psi)) = \|\psi\|^2 = \|\psi\|_A^2$$

que denominamos energía del campo ψ relativa al operador A .

El espacio V definido de esta manera está contenido algebraica y topológicamente en $L^2(\Omega)$ y se llamará espacio de energía del operador A .

En un espacio de energía V , relativo a A , se tiene

$$(15) \quad \|\psi\|_A^2 \leq \frac{1}{\gamma^2} \|\psi\|^2, \quad \gamma \text{ es el coeficiente de (11)}$$

y $\|\cdot\|$ la norma en $L^2(\Omega)$, entonces,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\psi - \psi_N\| = 0 \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \|\psi - \psi_N\|_A = 0$$

(&) En otras notas se dará respuesta a este problema.

para una estima ó aproximante Ψ_N de Ψ .

5.- Distribuciones según L. Schwartz

En un nuevo intento de ampliar el espacio de las soluciones del problema matemático que define las relaciones entre campos meteorológicos, introducimos las distribuciones de Laurent Schwartz y las derivadas de las distribuciones y de las funciones en este sentido.

Consideramos el espacio vectorial $\mathcal{D}(\Omega)$ de las funciones reales ó complejas sobre el plano euclideo \mathbb{R}^2 (&) infinitamente derivables y de soporte compacto (subconjunto cerrado y acotado en Ω). Es clásico que toda función continua de soporte acotado puede aproximarse uniformemente por funciones pertenecientes a $\mathcal{D}(\Omega)$.

Para poder tomar límites en las sucesiones de funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$, dotamos a este espacio de una topología o convergencia diciendo que, la sucesión (φ_j) de funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge a la función φ perteneciente, también, a $\mathcal{D}(\Omega)$ para $j \rightarrow \infty$, si los soportes de todas las φ_j están contenidos en un mismo conjunto acotado independiente de j , y las derivadas de todo orden m de las φ_j convergen uniformemente a las derivadas correspondientes de φ ; $\varphi, \varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$. Recordamos que φ_j tiende a φ según la convergencia uniforme si para un $\varepsilon > 0$ arbitrario existe un número natural N , tal que para toda $j \geq N$ se verifique

$$(16) \quad \supremo |\varphi - \varphi_j| \leq \varepsilon$$

(&) en general sobre \mathbb{R}^n

Se denomina distribución según Schwartz a un funcional lineal T , llamado forma lineal, continuo sobre el espacio vectorial $\mathcal{D}(\Omega)$. Esto significa que a toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, T le asigna un número real ó complejo $T(\varphi)$ que denotaremos por $\langle T, \varphi \rangle$, tal que, cuando φ_j converge a φ para $j \longrightarrow \infty$ en la topología de $\mathcal{D}(\Omega)$, la sucesión de números $T(\varphi_j)$ converge al número $T(\varphi)$.

Es inmediato ver que el conjunto de las distribuciones T definidas sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ constituyen un espacio vectorial que representamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$, este espacio es obviamente el dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$ y el producto escalar $\langle T, \varphi \rangle$ para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se denomina producto dual que es una aplicación llamada forma bilineal.

Si queremos trabajar con las distribuciones tenemos que definir las derivadas en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Este concepto debe introducirse de forma que, si consideramos la derivada parcial $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ de una distribución T respecto de x_i y T resultase ser una función derivable en sentido ordinario, debe encontrarse que la derivada $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ coincide con la definición ordinaria.

Sea f una función diferenciable y con derivada continua. Entonces tenemos, para $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
 (17) \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle &= \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi \, dx = \int_{b_1}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi \, dx_1 = \\
 &= - \int_{b_1}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{a_2} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \, dx_1 = - \iint_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \, dx = \\
 &= - \left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle
 \end{aligned}$$

ya que

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi \, dx_1 = \left[f \varphi \right]_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \, dx_1 \quad \text{y} \quad \left[f \varphi \right]_{a_1}^{a_2} = 0$$

por anularse φ fuera de un conjunto acotado. Deduciendo finalmente que

$$(18) \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle = - \left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle$$

La expresión (18) es lo que se entiende por derivada de una función en el sentido de las distribuciones y ello nos lleva a definir la derivada $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ para una distribución T por

$$(19) \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

Se observa en (19) que $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ es, como T , una forma lineal sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, lo que la convierte en una distribución perteneciente también a $\mathcal{D}'(\Omega)$.

En cuanto a las derivadas de segundo orden tenemos

$$(20) \quad \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} \right\rangle$$

$$(21) \quad \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial x_1}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right\rangle$$

pero como

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad \text{se deduce que}$$

$$(22) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial x_1}$$

En general, podemos obtener la derivación de orden múltiple $p = (p_1, p_2)$ (p_1 y p_2 son números naturales tales que $|p| = p_1 + p_2$) por

$$(23) \quad \langle D^p T, \varphi \rangle = (-1)^{|p|} \langle T, D^p \varphi \rangle$$

Nosotros consideramos la derivación de los operadores en derivadas parciales afectas al operador A , del modelo matemático que describe el modelo atmosférico, en el sentido de las distribuciones de Schwartz.

Debemos recordar algunas propiedades de las distribuciones, tales como que:

- Toda distribución es límite en $\mathcal{D}'(\Omega)$ de una sucesión de polinomios, es decir que el conjunto de todos los polinomios definidos sobre Ω forman un espacio denso en $\mathcal{D}'(\Omega)$; y de esta propiedad y de aplicar proposiciones sobradamente conocidas, el conjunto de las funciones continuas es denso en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

- Los espacios $\mathcal{D}(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$ son densos en $\mathcal{D}'(\Omega)$, y es muy importante que se verifique la relación de inclusión siguiente

$$(24) \quad \mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \quad (\hookrightarrow \equiv \text{inclusión densa})$$

Y si un espacio de Hilbert V es tal que

$$(25) \quad \mathcal{D}(\Omega) \subset V \subset L^2(\Omega)$$

se verifica que

(26) $\mathcal{D}(\Omega) \subset V \subset L^2(\Omega) \subset V' \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, V' dual de V , pero si se tiene

$$(27) \quad \mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

se verifica la interesante relación de inclusión

$$(28) \quad \mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow V' \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

donde se ha identificado $L^2(\Omega)$ con su dual $(L^2(\Omega))'$.

6.- Método variacional

Como se sabe, un método variacional consiste en construir un funcional que incluya el operador y los datos relativos al problema considerado y después de construir el funcional, resolver el problema es lo mismo que hallar el mínimo de aquél. Pero para que este mínimo exista, el funcional debe ser convexo, y esta situación solamente se da si los operadores A son coercivos (11). Además, la búsqueda del mínimo es correcta en problemas independientes del tiempo, en otro caso lo que se halla son los puntos (funciones) estacionarios respecto del funcional (no respecto del tiempo).

De todas formas, las cosas no se complican en los problemas meteorológicos si éstos se resuelven (como es la costumbre) por pasos de tiempo, porque, los problemas de la familia resultante se consideran independientes del tiempo en cada paso. ¿Qué pasa entonces con los demás problemas?. El aserto que exponemos a continuación aclara la situación:

TEOREMA: Si (10) tiene solución, la solución de la ecuación

$$(29) \quad (A\psi, v) = (F, v)$$

es el mínimo del funcional

$$(30) \quad \mathcal{F}(v) = (Av, v) - 2(F, v), \quad \forall v \in V = \text{espacio de energías, y recíprocamente.}$$

Efectivamente, la expresión (F, v) es un número para cada $v \in V$, entonces puede considerarse F como una forma lineal sobre V , luego $F \in V'$ dual de V , y como ya sabemos por (14) que

$$(Av, v) = ((v, v)) = \|v\|^2$$

Si tenemos en cuenta la desigualdad de Cauchy Schwartz (&)

$$(31) \quad |(F, v)| \leq |F| |v| \leq \frac{|F|}{\gamma^2} \|v\|, \quad ,$$

donde γ es el parámetro de (11), deducimos que la forma lineal (F, v) está acotada en el espacio de energías V y como el teorema de Riesz (&) dice que "si tenemos una forma lineal acotada sobre V , existe una función $\gamma \in V$ que verifica

$$(32) \quad ((\gamma, v)) = (F, v) \quad ,$$

entonces, $(32) \implies (29)$, puesto que $((\gamma, v)) = (A\psi, v)$

Además es obvio que si $A\psi = F$, se verifica $(A\psi, v) = (F, v)$, entonces un modelo de atmósfera descrito por el modelo matemático $A\psi = F$ (10) tiene solución en el espacio de Hilbert V .

(&) vease cualquier libro sobre espacios funcionales (Yosida - Functional Analysis (1969), por ejemplo).

Veamos que Ψ es el mínimo de (30). Para ello escribi-
mos (30) por

$$(33) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}(\tilde{\Psi}) &= (A\tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}) - 2(F, \tilde{\Psi}) \equiv \|\tilde{\Psi}\|^2 - 2(F, \tilde{\Psi}) = \\ &= \|\tilde{\Psi}\|^2 - 2(A\Psi, \tilde{\Psi}) = \|\Psi - \tilde{\Psi}\|^2 - \|\Psi\|^2 \end{aligned}$$

y el mínimo $\mathcal{F}(\tilde{\Psi})$ es

$$(34) \quad \min \mathcal{F}(\tilde{\Psi}) = \mathcal{F}(\Psi) = -\|\Psi\|^2$$

Entonces, a una de las ecuaciones (29) ó (32) se les denomina ecuaciones variacionales, ecuaciones que siempre existen, aunque el operador no sea elíptico, ahora bien, pueden no existir soluciones ó éstas no ser únicas si no hay mínimo en (30), y deben utilizarse otros condicionantes en sustitución de (30) para obtener una solución verdadera de (10)^(&).

En conclusión, nosotros resolveremos los problemas me-
teorológicos mediante las ecuaciones variacionales (29) ó (32).

7.- Familia de ecuaciones variacionales aproximantes

Supongamos primeramente una base completa y ortonormal del espacio de energías V ; es decir, un conjunto de elementos de V .

$$(35) \quad \{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \quad \text{tal que } ((\omega_\nu, \omega_\mu)) = \delta_{\nu\mu} \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = \mu \\ 0 & \text{si } \nu \neq \mu \end{cases}$$

(&) en trabajos posteriores se tratarán los operadores no coercivos.

En relación con esta base, Ψ puede representarse por la serie de Fourier en $L^2(\Omega)$

$$(36) \quad \Psi = \sum_{\nu=1}^{\infty} (F, \omega_{\nu}) \omega_{\nu} ; V \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow V'$$

No obstante, debemos seleccionar bases cómodas aunque no sean ortonormales, con tal que generen espacios densos en V , es decir necesitamos subconjuntos de V que sean linealmente independientes y que formen un conjunto completo, propiedad que definiremos diciendo que "si $\{\omega_{\nu}\}$ es una base completa y Ψ es un elemento de V , entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existen un número $N \in \mathbb{N}$ y un conjunto de números $\{\Psi_{\nu}\}$ (reales o complejos) de cardinal N , tal que se verifique la desigualdad siguiente:

$$(37) \quad \|\Psi - \sum_{\nu=1}^N \Psi_{\nu} \omega_{\nu}\| \leq \varepsilon$$

Para cada N , la sección $\{\omega_{\nu}\}_{1 \leq \nu \leq N}$ de la base $\{\omega_{\nu}\}_{1 \leq \nu \leq \infty}$ genera una sucesión de espacios aproximantes de V , que denotamos por V_N , y es precisamente en el espacio V_N donde estimamos una aproximación Ψ_N del campo meteorológico Ψ , haciendo actuar el operador (10) sobre este espacio dotado del producto escalar de V mediante la ecuación variacional aproximante

$$(38) \quad (A\Psi_N, v) = (F, v) ; \Psi_N = \sum_{\nu=1}^N \Psi_{\nu} \omega_{\nu} \quad (\&)$$

(&) Si interviene el tiempo (38) sería (38)' $\langle (A\Psi_N, v), \alpha \rangle =$

$$= \langle (F, v), \alpha \rangle = \int_0^{\bar{t}} (F, v) \alpha(t) dt \quad y$$

$$\Psi_N = \sum_{\nu} \sum_i \Psi_{\nu}^i \omega_{\nu}(x) \alpha_i(t)$$

para cualquier F dado en $L^2(\Omega)$ y para todo $v \in V_N$.

El hecho de poder elegir cualquier $v \in V_N$, nos lleva a seleccionar las funciones básicas ω_ν para verificar (38); obteniendo sistemas de Cramer que conviertan (38) en un modelo numérico asociado a (10); ésto se ve fácilmente porque podemos sustituir en (38), $\gamma_{\bar{N}}$ por la estima

$$\sum_{\nu=1}^N \gamma_\nu \omega_\nu \quad \text{y } \underline{v} \text{ por } \omega_k, \quad 1 \leq k \leq N \quad \text{para tener}$$

$$(39) \quad \sum_{\nu=1}^N \gamma_\nu (A \omega_\nu, \omega_k) = (F, \omega_k) \quad , \quad 1 \leq k \leq N$$

pero $(A \omega_\nu, \omega_k) = ((\omega_\nu, \omega_k))$, (13) y (14),

y el determinante de la matriz $((\omega_\nu, \omega_k))$ es distinto de cero por ser los elementos de $\{\omega_\nu\}$ linealmente independientes. Entonces (38) tiene una solución única para cada N .

8.- Métodos iterativos

En las aplicaciones de la predicción numérica del tiempo, la matriz A del sistema (39) que se corresponde con el operador A de (10) es muy grande y entonces resulta ventajoso utilizar métodos iterativos para resolver (39); ya que si A es coerciti-

vo todos los métodos iterativos son convergentes. Nosotros escribimos aquí uno muy sencillo y directo:

Sea A_N la matriz del sistema (39), Ψ_N el vector incógnita y F_N el vector segundo miembro, entonces tenemos el sistema matricial siguiente .

$$(40) \quad A_N \Psi_N = F_N$$

Si I_N es la matriz identidad, podemos transformar (40) en

$$(41) \quad \Psi_N = (I_N - \lambda A_N) \Psi_N + \lambda F_N$$

donde λ es un parámetro de relajación.

Si

$$0 \leq \lambda_1^N \leq \lambda_2^N \leq \dots \leq \lambda_N^N$$

son los autovalores de A_N . Los autovalores de la matriz $I_N - \lambda A_N$ serán

$$\{1 - \lambda \lambda_\nu^N\} \quad 1 \leq \nu \leq N$$

y si ponemos
$$\lambda = -\frac{2}{\lambda_1^N + \lambda_N^N}$$

todos los valores de $I_N - \lambda A_N$ están en el intervalo

$$\left[-\frac{\lambda_N^N - \lambda_1^N}{\lambda_N^N + \lambda_1^N}, \frac{\lambda_N^N - \lambda_1^N}{\lambda_N^N + \lambda_1^N} \right], \text{ puesto que}$$

$$-\frac{\lambda_N^N - \lambda_1^N}{\lambda_N^N + \lambda_1^N} \leq \frac{\lambda_1^N + \lambda_N^N - 2\lambda_\nu^N}{\lambda_N^N + \lambda_1^N} \leq \frac{\lambda_N^N - \lambda_1^N}{\lambda_N^N + \lambda_1^N}$$

y consecuentemente el valor absoluto $|1 - \lambda\lambda_\nu^N|$ verifica

$$|1 - \lambda\lambda_\nu^N| < 1, \quad 1 \leq \nu \leq N$$

relación que nos permite iterar (41) por

$$(42) \quad \psi_{\bar{N}}^{(i+1)} = \left(I_N - \frac{2}{\lambda_1^N + \lambda_N^N} A_N \right) \psi_{\bar{N}}^{(i)} + \frac{2F_{\bar{N}}}{\lambda_1^N + \lambda_N^N}$$

El esquema (42) converge a la solución de (39) con una velocidad en progresión geométrica de razón =

$$= \frac{\lambda_N^N - \lambda_1^N}{\lambda_N^N + \lambda_1^N} = \frac{C_N - 1}{C_N + 1},$$

siendo C_N la condición numérica de la matriz A_N .

Para conseguir una convergencia rápida deben aplicarse operadores cuyas matrices correspondientes tengan sus autovalores verificando las desigualdades

$$(43) \quad 0 < k_1 \leq \lambda_\nu^N \leq k_2 < \infty \quad \forall \nu,$$

donde k_1 y k_2 son dos números reales positivos, entonces tomando

$\lambda = \frac{2}{k_1 + k_2}$ como parámetro de relajación, se tiene

$$(44) \quad \Psi_{\bar{N}}^{(i+1)} = \left(I_N - \frac{2}{k_1 + k_2} A_N \right) \Psi_{\bar{N}}^{(i)} + \frac{2}{k_1 + k_2} F_{\bar{N}}$$

con una velocidad de convergencia en progresión geométrica de

$$\text{razón} \quad \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}$$

9.- Modelo barotrópico equivalente

Para ilustrar el empleo de las técnicas variacionales y facilitar su comprensión en el campo de la predicción numérica del tiempo, hemos desarrollado la resolución del caso más simple de las ecuaciones de predicción, a saber la ecuación del modelo barotrópico equivalente:

$$(45) \quad (\nabla^2 - M) \frac{\partial Z}{\partial t} + J \left[Z, \left(g/f \nabla^2 Z + f \right) \right] = 0 ,$$

en el interior del cilindro $\bar{\Omega} \times [0, \bar{t}]$,

$$(46) \quad BZ = Z_T \quad , \quad (B, \text{ operador frontera, aquí es una restricción})$$

en el contorno \mathcal{T} de Ω , y

$$(47) \quad Z(t=0) = Z_0$$

de condiciones iniciales .

Z es el geopotencial de la superficie isobárica a predecir (generalmente 500 mb), J es la función jacobiana y ∇^2 el operador Laplaciana. M es una constante cuyo valor se ajusta empíricamente y que posee el significado físico de una disipación, f es el parámetro de Coriolis y g la aceleración de la gravedad.

La ecuación (45) puede escribirse en la forma

$$(48) \quad (-\nabla^2 + M) \frac{\partial Z}{\partial t} = J \left[Z, \left(\frac{g}{f} \nabla^2 Z + f \right) \right]$$

y si pensamos en J como una función conocida F , tenemos

$$A \frac{\partial Z}{\partial t} = F, \quad A = -\nabla^2 + M$$

y como A es de coeficientes constantes, (48) puede escribirse por

$$(49) \quad \frac{\partial}{\partial t} A Z = F$$

que después de integrarla entre t_i y t ; $t_i, t \in]0, \bar{t}[$ se tiene la extrapolación

$$(50) \quad A Z(t) = A Z(t_i) + \int_{t_i}^t F dt$$

$Z(t)$ es una función definida sobre Ω y nosotros introducimos un espacio de Hilbert que la contiene mediante el operador A . Empezamos por escribir

$$(51) \quad A Z = (-\nabla^2 + M) Z = F_Z$$

donde $F_Z \in L^2(\Omega)$.

Entonces definimos

$$(52) \quad (A Z, \varphi) = ((-\nabla^2 + M) Z, \varphi) = (-\nabla^2 Z, \varphi) + (M Z, \varphi) = \\ = (\nabla Z, \nabla \varphi) + M(Z, \varphi) \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

y de suponer $\nabla^2 Z$, ∇Z y Z , funciones de $L^2(\Omega)$, podemos poner

$$(53) \quad (\nabla Z, \nabla \varphi) = \int_{\Omega} \nabla Z \overline{\nabla \varphi} \, d\Omega \quad \text{y} \quad (Z, \varphi) = \int_{\Omega} Z \overline{\varphi} \, d\Omega$$

donde la barra indica el elemento conjugado, luego, después de hacer $Z = \varphi$ en la última expresión de (52) tenemos

$$(54) \quad |\nabla \varphi|^2 + M |\varphi|^2 = \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 \, d\Omega + M \int_{\Omega} \varphi^2 \, d\Omega > 0, \\ \varphi \neq 0 \quad \text{y} \quad M > 0$$

lo que nos dice que el operador A define por (52) un producto escalar que representamos por

$$(Z, \varphi)_A = (A Z, \varphi)$$

sobre el conjunto de las funciones Z definidas sobre Ω , tales que $A Z \in L^2(\Omega)$. Pero como

$$|\nabla \varphi|^2 + |\varphi|^2 \geq |\nabla \varphi|^2 + M |\varphi|^2 \quad , \quad 0 \leq M \leq 1$$

se gana en generalidad si introducimos el producto escalar asociado a A por

$$(55) \quad ((Z, \varphi)) = \int_{\Omega} (\nabla Z \overline{\nabla \varphi} + Z \overline{\varphi}) \, d\Omega,$$

pudiendo definir ahora como conjunto dominio de A el espacio

$$(56) \quad H^1(\Omega) = \left\{ Z \mid Z \in L^2 ; \nabla Z \in L^2(\Omega) \text{ en el sentido de las distribuciones} \right\}$$

El espacio $H^1(\Omega)$ con el producto escalar (55) es un espacio de Hilbert y para un tiempo $t \in]0, \bar{t}[$ la altura (&) $Z(t) \in H^1(\Omega)$. Además al restringir $Z(t)$ por las condiciones de contorno (46), el dominio de A es un subespacio de $H^1(\Omega)$ que dotado del producto escalar de éste se convierte en el espacio prehilbertiano de energías V , relativo al operador A.

El espacio V depende de las condiciones de contorno de Ω ; éstas pueden ser varias y todas válidas mientras que el operador A se mantenga coercivo. Nosotros consideramos aquí las condiciones de Dirichlet, manteniendo constante sobre Γ la altura (&)

$$Z|_{\Gamma} = Z(t)|_{\Gamma} = Z_0|_{\Gamma} ,$$

(Z_0 = campo inicial; $Z_0|_{\Gamma}$ = campo inicial restringido a la frontera)

durante el tiempo de integración del modelo. Entonces el espacio V es tal que

$$(57) \quad V_{Z_0} = Z_0 + V$$

donde los elementos $Z(t) \in V_{Z_0}$ verifican la igualdad

$$(58) \quad Z(t) = Z_0 + \tilde{Z}$$

(&) ó geopotencial.

luego

$$(59) \quad Z(t) - Z_0 = \tilde{Z} \in V$$

La obtención de $Z(t)$, $t \in]0, \bar{t}[$, se hace según (58) a través del campo inicial Z_0 y del espacio de energías V , pero también se puede obtener $Z(t)$ directamente del espacio V_{Z_0} . No obstante, el trabajo en este último espacio requiere más cuidados porque es un espacio afín, no un espacio vectorial como lo es V , donde resulta más fácil trabajar para los menos iniciados.

Hagamos en (59)

$$(60) \quad Z_0 = Z(t=0)$$

y tendremos

$$(61) \quad \tilde{Z}_0 = Z(0) - Z_0 = 0$$

sobre $\Gamma =$ frontera de Ω ; entonces tomamos

$$(62) \quad V = \{ \tilde{Z} \in H^1(\Omega) ; \tilde{Z}|_{\Gamma} = 0 \}$$

que denotamos por

$$H_0^1(\Omega) = V$$

y éste es el espacio energético relativo de operador $-\nabla^2 + M$, en las condiciones de contorno $\tilde{Z}|_{\Gamma} = 0$, $-\nabla^2 + M$ es evidentemente coercivo porque se tiene

$$(63) \quad (\nabla \tilde{Z}, \nabla \tilde{Z}) + M(\tilde{Z}, \tilde{Z}) = |\nabla \tilde{Z}|^2 + M |\tilde{Z}|^2 \geq M \{ |\nabla \tilde{Z}|^2 + |\tilde{Z}|^2 \} = \\ = M \|\tilde{Z}\|^2$$

$$M = \gamma^2, \quad 0 \leq M \leq 1, \quad \text{para } M > 1, \text{ basta tomar} \\ \gamma^2 = 1 \quad (11)$$

Según lo dicho en el nº 1 de este trabajo, los elementos $\varphi \in H^1_0$ son imágenes de $t \in [0, \bar{t}]$ por la función $\tilde{Z} = Z - Z_0$ tal que

$$\tilde{Z}(t) = (Z - Z_0)(t) = Z(t) - Z_0 \in H^1_0(\Omega)$$

Entonces

$$\tilde{Z} = Z - Z_0 \in \mathcal{F}([0, \bar{t}]; H^1_0(\Omega))$$

y si elegimos el espacio funcional

$$(64) \quad \mathcal{F}([0, \bar{t}]; H^1_0(\Omega)) = L^2([0, \bar{t}]; H^1_0(\Omega)), \quad (7) \text{ y } (8)$$

para este caso particular, tenemos para este espacio el subespacio

$$L^2([0, \bar{t}]) \otimes H^1_0(\Omega)$$

que le es denso, y donde podemos considerar los aproximantes de Z , pero debido a la transitividad de la densidad aún podemos hacer otras elecciones donde considerar los aproximantes de \tilde{Z} tales como la del subespacio $H^1([0, \bar{t}]) \otimes H^1_0(\Omega)$ denso en $L^2([0, \bar{t}]) \otimes H^1_0(\Omega)$ y, por lo tanto, en $L^2([0, \bar{t}]; H^1_0(\Omega))$, sin embargo dicha elección ha de estar relacionada a las condiciones del modelo.

Con esto hemos llegado a una situación donde predecir

Z es resolver el sistema que resulta al formular la ecuación variacional aproximante por la sustitución en (48) de Z por Z, y ésta por (3)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{J=(j,p)} \varphi_{\bar{N}}^{i,J} \left\{ (\nabla \omega_J, \nabla \omega_q) \cdot (\dot{\alpha}_i, \alpha_k) + \right. \\
 (65) \quad & \left. + (\omega_J, \omega_q) \cdot (\dot{\alpha}_i, \alpha_k)' \right\} = \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} F \bar{\omega}_q \bar{\alpha}_k \, d\Omega \, dt ; \\
 & q = (l,s) ; \quad 1 \leq j,l \leq N_1 , \quad 1 \leq p,s \leq N_2
 \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales nulas para (61), pero que no son cero para (47). La notación en (65) es

$$\begin{aligned}
 (\nabla \omega_J, \nabla \omega_q) &= \int_{\Omega} \nabla \omega_J \bar{\nabla} \omega_q \, d\Omega \\
 (\omega_J, \omega_q) &= \int_{\Omega} \omega_J \bar{\omega}_q \, d\Omega \\
 (\dot{\alpha}_i, \alpha_k) &= \int_0^{\bar{t}} \left(\frac{d}{dt} \alpha_i \right) \bar{\alpha}_k \, dt
 \end{aligned}$$

Finalmente, Z se obtiene al hacer uso de (58).

Tratamiento de la función Jacobiana y Linealización de (48)

En (48) tenemos

$$\begin{aligned}
 (66) \quad F &= J \left[Z, \left(\frac{g}{f} \nabla^2 Z + f \right) \right] = \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \frac{g}{f} (\nabla^2 Z + f) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \frac{g}{f} (\nabla^2 Z + f) \right),
 \end{aligned}$$

$$(x, y) \in \Omega$$

y, según (29), (50) y (52), podemos escribir

$$\begin{aligned}
 (67) \quad &(\nabla Z(t), \nabla \varphi) + M(Z(t), \varphi) = (\nabla Z(t_i), \nabla \varphi) + M(Z(t_i), \varphi) + \\
 &+ \left\{ \left(\frac{\partial Z(t_i^+)}{\partial y} \frac{g}{f} (\nabla^2 Z(t_i^+) + f), \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \right. \\
 &\left. - \left(\frac{\partial Z(t_i^+)}{\partial x} \frac{g}{f} (\nabla^2 Z(t_i^+) + f), \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right\} \tau ; \tau = t - t_i \\
 &t_i^+ \in]t_i, t[,
 \end{aligned}$$

que verifica (54), la igualdad tiene lugar en $\mathcal{D}'([0, t])$, luego hay que multiplicar ambos miembros por $\alpha_k(t)$ (38)' para integrar sobre el intervalo $[0, t]$. (67) es una ecuación del tipo (29) y (32), y en ella debemos sustituir $Z(t)$ y $Z(t_i)$ por $\tilde{Z}(t)$ y $\tilde{Z}(t_i)$, respectivamente, y luego éstos por (3).

Linealización por iteración funcional

Planteamos (48) con la función Jacobiana (66) como un problema de valores iniciales y de contorno.

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} (-\nabla^2 + M) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \frac{g}{f} (\nabla^2 \tilde{z} + f) \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \frac{g}{f} (\nabla^2 \tilde{z} + f) \right) = 0 \\ \tilde{z} = 0 \quad \text{en } \Gamma \\ \tilde{z}(x, y, 0) = \tilde{z}_0(x, y) \quad \text{en } \Omega, (x, y) \in \Omega \end{array} \right.$$

que puede escribirse en forma variacional:

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (\tilde{z}, \varphi)_{H_0^1} + b(\tilde{z}, \tilde{z}, \varphi) = (z_0, \varphi)_{H^1} \delta_0 \quad \text{en } \mathcal{D}'([0, \bar{t}]) \\ \forall \varphi \in V, \delta_0 = \text{delta de Dirac.} \\ b(\tilde{z}, \tilde{z}, \varphi) = \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \frac{g}{f} (\nabla^2 \tilde{z} + f), \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \\ - \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \frac{g}{f} (\nabla^2 \tilde{z} + f), \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \quad (\text{ver número 5}) \end{array} \right.$$

El problema (68) es no lineal, y vamos a aproximararlo por el sistema lineal siguiente:

$$(70)_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} (-\nabla^2 + M) \frac{\partial \tilde{z}^0}{\partial t} = J \left[\tilde{z}_0, \frac{g}{f} \nabla^2 \tilde{z}_0 + f \right] \\ \tilde{z}^0 = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \\ \tilde{z}^0(0) = \tilde{z}_0 \quad \text{sobre } \Omega \text{ en un sentido a precisar.} \end{array} \right.$$

$$(70)_m \begin{cases} (-\nabla^2 + M) \frac{\partial \tilde{z}^{(m+1)}}{\partial t} = J [\tilde{z}^{(m)}, \frac{g}{f} \nabla^2 \tilde{z}^{(m)} + f] \\ \tilde{z}^{(m+1)} = 0 \text{ sobre } \Gamma \\ \tilde{z}^{(m+1)}(0) = \tilde{z}_0 \text{ sobre } \Omega \text{ en un sentido a precisar.} \\ \forall m \geq 0 \end{cases}$$

Si escribimos (70) en forma variacional, resulta

$$(71) \begin{cases} \frac{d}{dt} (\tilde{z}^{(m+1)}, \varphi)_{H_0^1} = -b(\tilde{z}^{(m)}, \tilde{z}^{(m)}, \varphi) + (\tilde{z}_0, \varphi)_{H_0^1} \delta_0 \\ \text{en } \mathcal{D}'(]0, \bar{t}[) \forall \varphi \in V \\ m \geq -1, \text{ siendo para } m = -1, b = b(Z_0, Z_0, \varphi) \end{cases}$$

El sistema (71) es lineal y coercitivo (63) y es un aproximante por iteración del modelo barotrópico equivalente, el modelo se verifica en $\mathcal{D}'(]0, \bar{t}[) \forall \varphi \in V = H_0^1(\Omega)$, es decir, se resuelve dualizando ambos miembros con una función que depende del tiempo $t, \alpha_k(t), 1 \leq k \leq N_t$ (3), a fin de llegar a una ecuación variacional del tipo (29) y (32) en la que después de tener en cuenta (3) ó (38)' se obtiene la solución aproximante de \tilde{z} . Por último, Z se halla por (58).

El sistema (71) es lineal por construcción. Para ver que es coercitivo basta demostrarlo para intervalos pequeños del tiempo $[t_i, t_{i+1}] \subset [0, \bar{t}]$, que puede hacerse por el teorema del valor medio:

$$\frac{1}{t_{i+1} - t_i} (\tilde{z}^{(m+1)}_{(t_{i+1})} - \tilde{z}^{(m+1)}_{(t_i)}, \varphi)_{H_0^1} = (\dot{\tilde{z}}^{(m+1)}_{(t^*)}, \varphi)_{H_0^1}$$

$\dot{\tilde{z}}_{(t^*)}^{(m+1)}$ es la derivada respecto del tiempo de $\tilde{z}_{(t)}^{(m+1)}$ en $t^* \in]t_i, t_{i+1}[$.

De aquí que pueda escribirse para cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ el sistema equivalente al (71):

$$(71) \left\{ \begin{array}{l} (\tilde{z}_{(t_{i+1})}^{(m+1)}, \varphi)_{H_0^1} = (\tilde{z}_{(t_i)}^{(m+1)}, \varphi)_{H_0^1} + (t_{i+1} - t_i) \cdot \\ \left\{ (\tilde{z}_0, \varphi)_{H_0^1} - b (\tilde{z}_{(t^*)}^{(m)}, z_{(t^*)}^{(m)}, \varphi) \right\} \\ (z_0, \varphi)_{H_0^1} = (z_0^*, \varphi), z_0^* = \text{"datos inicializados"}, m \geq -1 \end{array} \right.$$

Pero, $(\tilde{z}_{(t_{i+1})}^{(m+1)}, \varphi)_{H_0^1} = (\nabla z_{(t_{i+1})}^{(m+1)}, \nabla \varphi) + (\tilde{z}_{(t_{i+1})}^{(m+1)}, \varphi)$,

de donde resulta que verifica (52), (53) y (54), que son propiedades suficientes para la coercividad.

10.- Método Numérico en V_{Z_0} (57)

Puesto que la función a predecir (geopotencial de una superficie isobárica) depende bidimensionalmente de las coordenadas espaciales $(x,y) \in \Omega$ y del tiempo $t \in [0, \bar{t}]$, podemos hallar las aproximaciones que definen la solución prevista en un espacio prehilbertiano que sea el producto tensorial de los espacios prehilbertianos unidimensionales en las coordenadas \underline{x} y \underline{y} y el tiempo \underline{t} , respectivamente.

Para satisfacer (45) y (66), necesitamos espacios funcionales en los que Z sea, al menos, tres veces derivable en sentido ordinario. Pero el hecho de poder derivar en sentido de las distribuciones según (67), nos permite utilizar espacios prehilbertianos de funciones una vez derivables en sentido ordinario solamente y ésto nos simplifica el método numérico de resolución, aunque conceptualmente haya que introducir el espacio dual como espacio de las soluciones.

V_{Z_0} es un espacio paralelo al espacio H_0^1 , ambos son subconjuntos (el segundo subespacio) de $H^1(\Omega)$ como espacio de puntos, entonces trabajamos en H^1 .

Sea

$$(72) \quad H_{XYT} = H^1(X) \otimes H^1(Y) \otimes H^1([0, \bar{t}]) \hookrightarrow \mathcal{F}([0, \bar{t}]; H^1(\Omega))$$

y tomemos en H_{XYT} una colección de subespacios densos $H_{XYT}^{\bar{N}}$ que contienen las soluciones aproximantes de Z ; es decir, si

$Z_{\bar{N}} \in H_{XYT}^{\bar{N}}$, se tiene que

$$(73) \quad Z_{\bar{N}} = Z_{\bar{N}}(x, y, t) = \sum_{ijk}^{IJK} Z_{ijk} \omega_i(x) \omega_j(y) \omega_k(t), \text{ ver (3)}$$

Y para todo número real positivo ε , verifica

$$(74) \quad \|Z - Z_{\bar{N}}\| \leq \varepsilon$$

a partir de tres números naturales I_0 , J_0 y K_0 , siendo $\bar{N} = I \cdot J \cdot K$ y Z_{ijk} una sucesión real ó complejo de cuadrado sumable, es decir

$$\sum_{ijk} Z_{ijk}^2 < \infty$$

Si por $H^1(s)$ representamos cualquiera de los espacios factores de (72), $s \in \{x, y, t\}$, una base generadora $\{\omega_\nu\}$ de un espacio factor aproximante viene dada por las funciones "Chapeau"

$$(75) \quad \omega_\nu(s) = \begin{cases} \frac{s - s_{\nu-1}}{s_\nu - s_{\nu-1}}, & s_{\nu-1} \leq s \leq s_\nu \\ \frac{s_{\nu+1} - s}{s_{\nu+1} - s_\nu}, & s_\nu \leq s \leq s_{\nu+1} \\ 0, & \forall s \notin [s_{\nu-1}, s_{\nu+1}] \end{cases}$$

de donde resulta inmediatamente la base de $H_{XYT}^{\bar{N}}$, $\{\omega_{ijk}\}$, donde

$$(76) \quad \omega_{ijk} = \omega_i(x) \omega_j(y) \omega_k(t)$$

$$1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq j \leq J, \quad 1 \leq k \leq K$$

Así que dentro del espacio definido en (72) podemos tratar la ecuación del modelo (48), en forma variacional, multiplicando escalarmente (dualizando; ver puntos del párrafo 3) ambos miembros por las funciones base w_{lmn} (76), donde los subíndices \underline{l} , \underline{m} y \underline{n} recorren los valores interiores de los subíndices \underline{i} y \underline{j} , y todos los de \underline{k} , respectivamente, de la expresión análoga a la (73) en que se podría desarrollar la función aproximante de la incógnita Z .

De esta forma y con las condiciones de contorno e iniciales, las cuales definen los coeficientes Z_{ijk} extremos, es decir, para los valores $i=1, i=I, j=1, j=J, k=1$, obtenemos un sistema algebraico de $(I-2)(J-2)(K-1)$ ecuaciones con el mismo número de incógnitas que, en principio, puede resolverse dando una solución -- única.

El sistema obtenido es un sistema no lineal y, por tanto, su resolución es larga y complicada, pero puede linealizarse de diversas maneras. La adoptada en el presente modelo es considerar la función jacobiana que aparece en la ecuación (48) como no dependiente del tiempo^(&), y cuyo valor es igual al valor que adopta dicha función en el instante $t=t_n$; de esta forma, el sistema a resolver es lineal y, por tanto, más sencillo.

La propiedad de las funciones "chapeau", que hemos definido, de que en cada nodo la única función base no nula es la correspondiente a dicho nodo, cuyo valor es la unidad, hace que el coeficiente Z_{ijk} sea una aproximación suficientemente buena, para una función f regular, al valor $Z(x_i, y_j, t_k)$ de dicha función en el punto (x_i, y_j) para el instante t_k . Ello nos permite tomar como campo inicial Z_{ij1} los valores de la altura de la superficie de 500 mb en el momento del análisis para los puntos de la red que corresponden a nodos del área de trabajo y, a la inversa, tomar como valores previstos de la función en los nodos, en el instante T , los valores de los coeficientes Z_{ijk} , obtenidos en la resolución del sistema de ecuaciones.

Método Numérico

a) Dualicemos, de la forma descrita en la sección anterior, la ecuación (48):

$$\left((\nabla^2 - M) \frac{\partial Z}{\partial t}, \omega_{lmn} \right) = - \left(J(Z, \frac{g}{f} \nabla^2 Z + f), \omega_{lmn} \right)$$

$$\text{con } 2 \leq l \leq (I-1) ; \quad 2 \leq m \leq (J-1) ; \quad 1 \leq n \leq (K-1)$$

(&) en cada paso de tiempo $t_n \longrightarrow t_{n+1}$

Desarrollando la función Z en términos de las bases W_{ijk} , obtenemos

$$(77) \quad \left((\nabla^2 - M) \frac{\partial}{\partial t} \sum_{ijk}^{IJK} Z_{ijk} \omega_{ijk}, \omega_{lmn} \right) =$$

$$= -J_{lmn} \left(Z, \frac{g}{f} \nabla^2 Z + f \right)$$

donde, en el segundo miembro, hemos puesto el símbolo J_{lmn} para designar el producto escalar del valor de la función jacobiana en el instante t_n por la función base W_{lmn} , y cuyo cálculo se desarrollará más adelante.

b) Integración en el tiempo

Los únicos coeficientes desconocidos que intervienen en la ecuación en que $l=l_1$, $m=m_1$, $n=n_1$, son aquellos en que $l_1-1 \leq i \leq l_1+1$; $m_1-1 \leq j \leq m_1+1$; $n_1-1 \leq k \leq n_1+1$, ya que, los únicos productos escalares no nulos de la forma (ω_i, ω_l) son aquellos en que $l-1 \leq i \leq l+1$, por la forma en que hemos definido las bases.

En las $(I-2).(J-2)$ ecuaciones, por tanto, en que $n=1$, las incógnitas son los coeficientes Z_{ijk} en que $1 < i < I$; $1 < j < J$; $k=2$, ya que, los Z_{ij1} son las condiciones iniciales y los Z_{ij2} con $i=1$ ó $i=I$ y $j=1$ ó $j=J$ vienen especificados por las condiciones de contorno. El número de estos coeficientes es $(I-2).(J-2)$, igual al número de ecuaciones y, por tanto, el sistema ($K-1$ veces más pequeño que el inicial) puede ser resuelto.

Análogamente, en las $(I-2).(J-2)$ ecuaciones en que $n=2$, una vez resuelto el sistema anterior, no quedan más que la $(I-2).(J-2)$ incógnitas en que $k=3$ y, por tanto, se puede resolver; así se prosigue hasta K veces, obteniéndose entonces los coeficientes Z_{ijK} que son, como antes se ha dicho, los valores de la función Z previstos en cada nodo (i,j) para el instante $t_K = T$, para el que queríamos la predicción.

Para casos como el de la presente ecuación, en que la incógnita no aparece más que como derivada temporal, este procedimiento coincide con el conocido método Leapfrog.

c) Integración en el espacio

De forma análoga, en las ecuaciones en que $l=l_1$; $m=m_1$, las únicas incógnitas que intervienen son aquellas en que $l_1-1 \leq i \leq l_1+1$; $m_1-1 \leq j \leq m_1+1$, por tanto, si conociéramos los valores de $Z_{ij(n+1)}$ para $i=l_1-1$; $i=l_1+1$; $j=m_1-1$; $j=m_1+1$ podríamos, de dicha ecuación, despejar $Z_{l_1 m_1(n+1)}$.

En una primera aproximación, para calcular el coeficiente $Z_{l_1 m_1(n+1)}$ suponemos los coeficientes que le rodean nulos y despejamos de la ecuación correspondiente cada valor de $Z_{ij(n+1)}$.

En sucesivas aproximaciones, vamos tomando los nuevos valores calculados e, introduciéndolos en las ecuaciones, calculamos nuevas aproximaciones para cada coeficiente hasta que la diferencia con la aproximación anterior sea inferior a un valor predeterminado. Durante todo este procedimiento, los coeficientes de la frontera se mantienen constantes, interviniendo

do en el cálculo de las sucesivas aproximaciones para los nodos - inmediatos vecinos del anterior dominio.

Desarrollaremos ahora más ampliamente la ecuación (77): desdoblado las funciones base en función de cada coordenada y - aplicando los operadores a las mismas, así como efectuando el pro ducto escalar, obtenemos.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{ijk}^{IJK} Z_{ijk} \left\{ \underbrace{\left(\int_0^{IH} \omega_i'(x) \omega_l(x) dx \int_0^{JH} \omega_j(y) \omega_m(y) dy + \dots \right)}_1 \right. \\
 & + \left. \int_0^{IH} \omega_i''(x) \omega_l(x) dx \cdot \int_0^{JH} \omega_j''(y) \omega_m(y) dy \right\} \dots \\
 & \int_0^T \omega_k'(t) \omega_n(t) dt - M \underbrace{\int_0^{IH} \omega_i(x) \omega_l(x) dx}_2 \dots \\
 & \cdot \left. \int_0^{JH} \omega_j(y) \omega_m(y) dy \int_0^T \omega_k'(t) \omega_n(t) dt \right\} = -J_{lmn}
 \end{aligned}$$

Las derivadas segundas de las funciones base que aparecen en algunas de las integrales se toman en el sentido de las dis tribuciones, ya que una función "chapeau" como las utilizadas aquí no es dos veces derivable en el sentido de funciones (sentido ordi nario). Para calcular, pues, dichas integrales lo hacemos por par tes.

$$\int u'' v dx = u' v - \int u' v' dx$$

apareciendo ya, únicamente, derivadas primeras, fácilmente calcula bles.

Si denotamos por C_{ij}^{lm} el número marcado con 1 en la expresión (10), por A_{ij}^{lm} el marcado como 2, y por B_k^n el correspondiente al tiempo, dicha ecuación toma la forma

$$(79) \quad \sum_{ijk}^{IJK} z_{ijk} \left(C_{ij}^{lm} - M A_{ij}^{lm} \right) B_k^n = -J_{lmn}$$

ó bien, como $B_{n+1}^n = 0.5$; $B_n^n = 0$; $B_{n-1}^n = -0.5$

$$\begin{aligned} \sum_{ij}^{IJ} z_{ij(n+1)} \left(C_{ij}^{lm} - M A_{ij}^{lm} \right) &= -2J_{lmn} + \\ + \sum_{ij}^{IJ} z_{ij(n-1)} \left(C_{ij}^{lm} - M A_{ij}^{lm} \right) \end{aligned}$$

invirtiendo la matriz cuadrada $\left(C_{ij}^{lm} - M A_{ij}^{lm} \right)$, tenemos

$$(80) \quad z_{ij(n+1)} = -2 \sum_{lm}^{IJ} J_{lmn} \left(C_{ij}^{lm} - M A_{ij}^{lm} \right)^{-1} + z_{ij(n-1)}$$

que es la expresión, como ya dijimos, del método leapfrog, utilizado frecuentemente para la integración en el tiempo en modelo numéricos.

El problema queda, pues, reducido a calcular el término

$$- \sum_{lm}^{IJ} J_{lmn} \left(C_{ij}^{lm} - M A_{ij}^{lm} \right)^{-1}$$

que denotaremos por \dot{z}_{ijn} por razones obvias, por tanto

$$(81) \quad \sum_{ij}^{\text{IJ}} \dot{z}_{ijn} \left(C_{ij}^{1m} - M A_{ij}^{1m} \right) = -J_{1mn}$$

que desarrollada da

$$(82) \quad \begin{aligned} \dot{z}_{1mn} \left(C_{1m}^{1m} - M A_{1m}^{1m} \right) &= -J_{1mn} - \dot{z}_{1-1,m-1,n} \\ &\left(C_{1-1,m-1}^{1m} - M A_{1-1,m-1}^{1m} \right) - \dot{z}_{1,m-1,n} \left(C_{1,m-1}^{1m} - M A_{1,m-1}^{1m} \right) - \\ &- \dot{z}_{1+1,m-1,n} \left(C_{1+1,m-1}^{1m} - M A_{1+1,m-1}^{1m} \right) - \dot{z}_{1-1,m,n} \\ &\left(C_{1-1,m}^{1m} - M A_{1-1,m}^{1m} \right) - \dot{z}_{1+1,m,n} \left(C_{1+1,m}^{1m} - M A_{1+1,m}^{1m} \right) - \\ &- \dot{z}_{1-1,m+1,n} \left(C_{1-1,m+1}^{1m} - M A_{1-1,m+1}^{1m} \right) - \dot{z}_{1,m+1,n} \\ &\left(C_{1,m+1}^{1m} - M A_{1,m+1}^{1m} \right) - \dot{z}_{1+1,m+1,n} \left(C_{1+1,m+1}^{1m} - M A_{1+1,m+1}^{1m} \right) \end{aligned}$$

La primera aproximación a \dot{z}_{1mn} es, pues, según el método iterativo descrito,

$$\dot{z}_{1mn} = -J_{1mn} \left(C_{1m}^{1m} - M A_{1m}^{1m} \right)^{-1}$$

haciendo recorrer a \underline{l} y a \underline{m} todos los nodos interiores del área de predicción, obtenemos la función primera aproximación.

Introduciendo estos valores en el segundo miembro de (82), obtenemos un nuevo valor para cada \dot{z}_{1mn} . Sin embargo, el método converge lentamente y es necesario introducir un factor de sobre-relajación, superior a la unidad, que multiplica a cada sucesiva corrección para acelerar la convergencia.

1) Función laplaciana del geopotencial en el instante t_n : (G_n) .

Al ser esta función obtenida por derivación de un elemento del espacio $H^1 \otimes H^1$, el espacio al que debe pertenecer es $H^0 \otimes H^0 = L^2 \otimes L^2$ de funciones de cuadrado integrable, pero no derivables en el sentido ordinario. Una base adecuada de dicho espacio es la formada por las funciones características bidimensionales, es decir

$$\Theta_{ij} = \theta_i(x) \theta_j(y)$$

donde

$$\theta(x) \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \leq x \leq \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \\ 0 & \text{para todo otro valor de } x \end{cases}$$

y análogamente $\theta_j(y)$.

La ecuación a resolver es, pues

$$(83) \quad G_n = \nabla^2 Z_n$$

que, dualizada resulta

$$(G_n, W_{lm}) = (\nabla^2 Z_n, W_{lm})$$

y, desarrollando las funciones G_n y Z_n

$$\sum_{ij}^{IJ} G_{ijn} \int_0^{IH} \theta_i(x) \omega_l(x) dx \int_0^{JH} \theta_j(y) \omega_m(y) dy =$$

$$= \sum_{ij}^{IJ} z_{ijn} \left(\int_0^{IH} \omega_i''(x) \omega_l(x) dx \int_0^{JH} \omega_j(y) \omega_m(y) dy + \right. \\ \left. + \int_0^{IH} \omega_i(x) \omega_l(x) dx \int_0^{JH} \omega_j''(y) \omega_m(y) dy \right)$$

El segundo miembro es inmediatamente calculable.

La obtención, a partir de este segundo miembro, de los coeficientes G_{ijn} puede efectuarse iterativamente, pero se ha encontrado que, debido a la falta de valores frontera adecuados para la función laplaciana, ésta resulta poco suave y hay que introducir una gran difusión mediante el parámetro M de la ecuación del modelo para que el cálculo numérico resulte estable.

2) Otro método de cálculo posible es el siguiente (procedimiento B):

Puesto que la integral de la función "chapeau" utilizada en este trabajo como base es la unidad, el coeficiente de la función dual de la laplaciana que resulta al dualizar con la función ω_{lm} , equivale al valor medio de dicha función en el dominio en que ω_{lm} es no nula, ese valor medio es, pues, una buena aproximación al coeficiente G_{lmn} y se evita así el procedimiento iterativo, ahorrando tiempo de máquina. Además, la función laplaciana obtenida es más suave y no da lugar a inestabilidad, incluso sin introducir difusión en la ecuación del modelo. Un estudio comparativo efectuado con ambos procedimientos muestra que las características principales (dorsales, vaguadas, centro de alta y de baja) en ambas predicciones están situadas en los

mismo lugares, y sólo existe una pequeña diferencia de intensidad.

Una vez calculados los coeficientes G y sumados los correspondientes a la función de Coriolis, el cálculo de la dual de la función jacobiana es inmediato, interviniendo en él integrales de una función característica, una función "chapeau" y la derivada de otra.

AGRADECIMIENTOS.- Agradecemos la paciencia y eficacia de D^a Susana Cabrera Sanz, que ha mecanografiado el Manuscrito.

B I B L I O G R A F I A

- (1) AHLBERG, J.H., NILSON, E.N., WALSH, J.L. - "The Theory of -
splines and their Applications".- Mathematics in science and
Engineering. Volume 38. 1967.
- (2) AUBIN, Jean-Pierre.- "Aproximation of Elliptic". 1972.
- (3) BELLMAN, R. - "Introducción al Análisis Matricial". 1965.
- (4) BOOR, Carl de. - "Mathematical Aspects of Finite Elements -
in Partial Defferential Equations". 1974.
- (5) BOURKE, William. - "An Efficient, one-level, Primitive-Equa
tion Spectral Model".- Commowealth, Meteorology Research -
Centre, Melbourne, Victoria, Australia. Sept.1972/683.

-"A Multi-level Spectral Model, I. Formulation and
Hemispheric Integrations".- Australian Numerical Meteorolo
gy Research Centre, Melbourne, Australia 3001. Manuscrip re
ceived 5. March 1974, in revised from 6 August 1974.
- (6) CARASSO, A.G., STONE, A.P. (Editors).- "Improperly posed -
boundary value problems". 1975.
- (7) CEA, Jean. - "Optimisation Theorie et Algorithmos". 1971.

-"Approximation variationelle des problemes aux -
limites".- Ann. Inst. Fourier, Grenoble 14, 2(1964), 345-
-444.
- (8) COURANT, R., HILBERT, D. - "Methods of Mathematical Physics".
Volume I. 1970.

- (9) CHEVALLEY, Claude. - "Fundamental Concepts of Algebra". 1956
- (10) CHOQUET-BRUHAT. - "Distributions Theorie et Problemes". 1973
- (11) ELLISON, David. - Notes and Correspondence "A Conection to a Galerkin Method of Orszag". Atmospheric Environement service, Downsview. Ontario. Canadá H3H 5T4. 2 March 1977 and 8 de June 1977.
- (12) FERNANDEZ VIÑA, J.A. - "Ciertos problemas abstractos de con_ torno (0, I, II, III)", publicado en la "Revista matemática Hispano-América 4ª serie tomos XXVIII - nú. 1-2-3 y 4. -- 1967/68.
- (13) --"Introducción a la teoría general de los Espacios métricos normados y de Hilbert", 1969.
- (14) GALLICANI and MAGENESE. - "Mathematical Aspects of Finite - Element Methods". Rome, 1975. Lectura Notes y Mathematics, Dold and Eckmann B. 606.
- (15) GOUYON, René. - "Integration et Distributions". 1967.
- (16) GREVILLE, T.N.E. - "Theory and Apliccations of Spline Functions".- New York. San Francisco. London, 1969.
- (17) GUGLIELMO, F. Di. Méthode des Elements Finis. - "Une Fami- lle d'approximations des espaces de Sobolev par les Transla_ tées des p Fonctions".- University d'Axis-Marsecille. 1970.
- (18) HUET, Denise (Dijon). - "Phenomènes de Perturbation singu- lière dans les problèmes aux limites".- Ann. Inst. Fourier, Grenoble 10 (1960), 61-151.
- (19) HALTINER, G.I.- "Numerical Weather Prediction". 1971.

- (20) HOLTON, James R. - "An Introduction to Dynamic Meteorology". 1972.
- (21) HORTAL, M. - "Subrutinas de programación de cálculo". Biblioteca de la Sección de Predicción Numérica. Instituto Nacional de Meteorología. 1978.
- (22) JINORICH NECAS. - "Les methodes Directs en théorie des equations Elliptiques". 1967.
- (23) KHOAN, VO-KHAC. - "Distributions Analyse de Fourier operateurs aux Dérivées partielles".- Tomo I y II. 1972.
- (24) LEGRAS, Jean. - "Méthods et techniques de l'analyse numérique". Paris, 1971.
- (25) LIONS, J.L. - "Equations Differentielles operationnelles, et problèmes aux limites". 1961.
- (26) -"Methodes d'approximation numerique des problemes aux limites de la phisique mathematique". Tomos I, II y III. Nouvelle édition du course profesé en 1961-1964. Publication nº C.A/14-II-I/A III.
- (27) -"Cours d'Analyse Numerique".- Promotion 1971. Février-Mars 1973 Lére Fenille.
- (28) -"Problemes aux limites dans les équations aux Derivées partielles".- 2ª edition. 1965. Seminaire de mathématiques supérieures-Eté 1962.
- (29) -"Quelques méthodes de résolution des problèmes - aux limites non lineaires. 1969.
- (30) -"Singular Perturbations and Boundary Layer theory".- Lecture notes in mathematics, Dold and B. Eckmann 594. 1975.

- (31) -"Lecture notes in mathematics". 1973.
- (32) -"Approximation des distributions et application a la resolution numerique d'equations integrales singulieres - stationnaires et d'evolution".- Centre National de la Recherche Scientifique. Institut Blaise Pascal. Oct. 1967.
- (33) LIONS-MAGENES, E. - "Problemes aux limites non homogènes et applications".- Volume (I). 1968.
- (34) MARCHUK, G.I. - "Methodes of Numerical mathematics". Springer Verlag, 1975.
- (34) bis -"Méthodes in Weather Prediction".- Academic Press, 1970.
- (35) MIKHLIN, S.G. - "variational Methods in mathematical physics". 1964.
- (36) -"The Numerical performance of variational methods". 1971.
- (37) MIKHLIN, S.G. & SHOLITSKIY. - "Aproximate methods for solution of differential and integral equations".- Modern analytic and computational methods in science and mathematics. - Volume 5. 1967.
- (38) MOEN, Lars. - "A spectral model for investigation of amplifying baroclinic waves".- Manuscript received August 14, 1973; revised version, January 2, 1974.
- (39) PAGLE, J. N., MACDONALD, E. - "Short Numerical Integrations of a Three-level spectral quasi-geostrophic model".- Manuscript received 9 November 1973, in revised from 28 June 1974.

- (40) RAVIART, P.A. - "Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires".- J. de math. pures et appl. 46, 1967, p, II á 1967.
- (41) RICHTMYER, R.D. and MORTON, K.W. - "Difference methods for initial-values problems".- Second edition, 1967.
- (42) SHOWALTER, R.E. - "Hilbert space methods for partial differential equations". 1977.
- (43) SHULTZ, Martín H. - "Spline Analysis".- 1973.
- (44) SHWARTZ, Laurent. - "Théorie des distributions".- 1966.
- (45) STANIFORTH, A.N. and KERSCHEL, L. and MITCHELL. - "A Semi-Implicit Finite Element barotropic model".- Manuscript received, 1976.
- (46) STRANG, G. y FIX, J. - "An Analysis of the limite elements method".- 1973.
- (47) TEMAN, Roger. - "Analyse numérique".- 1970.
- (48) TRENBERTH, K.E. - "Global model of the general circulation of the Atmosphere Below 75 Kilometers with a Annual Heating Cycle".- Departament of Meteorology Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Mass. Monthly Weather Review/Vol. 201, Nº 4, April 1973/287.
- (49) TREVES, F. - "Basic Linear Partial differential equations". 1975.
- (50) -"Topological vector spaces distributions and -
Kernels".- 1969.

(51) WHITEMAN, J.R. - "The mathematics of finite elements and Applications".- 1973.

(52) YANENKO, N.N. - "The method of fractional steps".- 1971.