

APROXIMACION AL ESTUDIO DE LA REFRACCION DE OLEAJE EN UNA PLATAFORMA COSTERA. RESOLUCION NUMERICA DEL METODO DE LAS ORTOGONALES

**Jose Luis Arteche Garcia
Francisco Javier Ortiz Berenguer
Eduardo Arasti Barca**

(Grupo de Predicción y Vigilancia CMZ de Santander)

RESUMEN

El estudio de la refracción nos permite obtener la altura de onda en un punto determinado del mar, cercano a la costa, para un frente de ondas que llega y cuyas características — dirección, periodo, altura y celeridad — se conocen en profundidades indefinidas. Se suponen ondas simples, de periodo constante y de crestas largas. Por otra parte, se conocerá el cambio en la dirección de propagación de cada uno de los puntos del frente y, por tanto, la convergencia o divergencia de la energía de la onda al acercarse a la costa.

Como causa de refracción se ha tenido en cuenta únicamente la variación de profundidades marinas, despreciándose otros como la acción del viento, a favor o en contra, la percolación, turbulencia de fondos, corrientes, rozamiento con el fondo o rotura de las ondas de periodo corto.

Se aborda el estudio, por métodos numéricos, para un relieve sencillo de batimétricas y por medio de un programa informático.

Para definir una onda, sea de Airy, Stokes, etc., es suficiente conocer tres parámetros de la misma, por ejemplo, el periodo (T), la longitud de onda (L) y la altura (H). En el estudio de refracción se trata de ver cómo se modifica dicha onda, y los parámetros que la definen, al avanzar por la plataforma costera y variar la profundidad del fondo marino.

De los parámetros anteriores el único que se puede considerar que no cambia con la profundidad es el periodo T.

En la onda de Airy, la celeridad viene dada por:

$$c = \frac{gT}{2\pi} \cdot T^{\frac{1}{2}} \frac{2\pi d}{c \cdot T} \quad (1)$$

donde d es la profundidad del agua, resultando, en función del periodo

$$c = \frac{gT}{2\pi} \cdot T^{\frac{1}{2}} \frac{2\pi d}{L} \quad (2)$$

con lo que se comprueba que la celeridad de la onda crece con la profundidad, de forma que la longitud de onda $L (L=c \cdot T)$ también crecerá con dicha profundidad.

Suponiendo una plataforma costera con batimétricas (líneas de igual profundidad) paralelas, al incidir oblicuamente en ella un tren de ondas, se pueden observar variaciones en la velocidad de las ondas a lo largo de las crestas porque la parte de crestas en profun-

tidades indefinidas ($d/L > 0.5$) se mueve más deprisa que la parte en profundidades intermedias ($0.05 < d/L < 0.5$). En consecuencia, las envolventes de las sucesivas posiciones en el tiempo de las líneas de cresta serán curvas, tendiendo, en el límite, a situarse paralelas a las batimétricas y, en último término, a la línea de costa. Este fenómeno se llama **REFRACCIÓN**, y depende de la relación d/L , siendo análoga a la refracción de otros tipos de ondas tales como las de la luz y sonido. En estos casos la variación en dirección y velocidad se debe al cambio de densidad del medio en que se propagan; en el mar lo que varía es la profundidad.

La representación gráfica de las trayectorias y de los frentes de ondas da lugar a una malla que constituye el diagrama de refracción. El estudio de la refracción nos permite obtener:

a) La altura de onda en un determinado punto, para un determinado frente de ondas entrante y cuyas características (dirección, altura, periodo y celeridad) se conocen en profundidades indefinidas.

b) El cambio en la dirección de propagación de cada uno de los puntos del frente y, por tanto, la convergencia o divergencia de la energía de la onda al acercarse a la costa.

Además de la refracción producida por la variación de la profundidad marina, las ondas pueden ser refractadas por cualquier otro fenómeno que origine el que una zona del frente vaya más deprisa que otra. Entre estos podemos citar las corrientes marítimas de cualquier tipo, los vientos, el rozamiento con el fondo, la rotura de las ondas de periodo corto, etc.

HIPOTESIS DE PARTIDA

En España, los estudios realizados hasta la fecha en el campo de la refracción se pueden agrupar en dos escuelas: la americana, o método de las ortogonales y el método de los planos de oleaje (Iribarren).

Las hipótesis de partida que, usualmente, se hacen son las siguientes:

1. La velocidad de propagación de la onda depende exclusivamente de su periodo y de la cantidad de agua (profundidad) que hay bajo ella, referida al nivel medio. Dependiendo de que la profundidad se tome debajo del punto considerado, o en un entorno determinado del mismo, tendremos el método de las ortogonales o el de los planos de oleaje.

2. Cada elemento de onda viaja normalmente al frente de onda. La línea que une las sucesivas posiciones en el tiempo o en el espacio de un punto de la cresta y que, según esta hipótesis es perpendicular a ella, se llama ortogonal. Esta hipótesis lleva asociado el suponer que cada punto de la cresta se comporta como un foco emisor de ondas.

3. En su propagación, la energía contenida entre dos ortogonales permanece constante. Por tanto, no hay cesión lateral de energía y, en consecuencia, el flujo de energía es normal a la cresta, no existiendo tampoco pérdidas ni ganancias de energía por los conceptos que se citan en la 4ª hipótesis.

4. Se desprecian los efectos del viento, tanto a favor como en contra, de la percolación, de la turbulencia del fondo, de las corrientes, de la reflexión y de la difracción.

5. Las ondas consideradas son ondas simples (utilizaremos la onda de Airy), de periodo constante y de largas crestas.

6. Se admite que el área en que se estudia la refracción es lo suficientemente pequeña como para no tener que considerar la curvatura de la Tierra, ni el encuentro de energía proporcionado por la acción del viento.

Existen trabajos que tienen en cuenta la cesión lateral de energía (Holmes) o las pérdidas por rozamiento del fondo (Karlsson). Los resultados, sin embargo, no difieren de los que se obtienen haciendo caso omiso de éstas.

Si el viento sopla en contra del oleaje, respecto a la determinación de la ola de cálculo, es más favorable no considerarle. Si lo hace a favor del oleaje, realmente la aportación de energía que puede hacer en el recorrido de la plataforma costera (20 Km) es despreciable frente a la acumulada en profundidades indefinidas (Losada).

Para el estudio de la reflexión y difracción, todos estos métodos llevan asociadas soluciones particulares para tener en cuenta sus efectos. Por tanto, la aplicación del método de cálculo de la refracción debe hacerse solamente en zonas donde los efectos anteriores no se manifiesten. En estos casos se debe trabajar con una solución conjunta refracción-difracción, o estudiar solamente la difracción para después hacer la refracción de los frentes de onda resultante.

METODO DE LAS ORTOGONALES

Este es el camino que vamos a seguir. Además de las hipótesis señaladas, añadiremos otra más:

Cada punto de la onda se comporta independientemente de los demás y, por tanto, su velocidad de propagación es exclusivamente función de la profundidad que haya debajo del punto considerado (y del período).

En consecuencia, este método sólo debe ser empleado en aquellas costas con una topografía submarina no muy accidentada.

Un primer grupo de métodos de las ortogonales están basados en los cambios de la longitud de onda o de la celeridad de las ondas, requiriendo el uso de gráficos a partir de los cuales se puede obtener y dibujar la dirección de las ortogonales. Un segundo grupo de métodos utiliza pautas basadas en la relación de velocidades, pudiendo ser aplicadas sin limitación de escalas y sin necesidad de leer ángulos.

Otro gran bloque está formado por los métodos numéricos.

CALCULO DE LA ALTURA DE OLA EN UN PUNTO

Existen trabajos en los que para resolver este problema utilizan ondas de hasta 5º grado de aproximación. Sin embargo se ha demostrado (However, Koh, Le Méhautè) que la aproximación de los resultados no supera en un 3% a los dados por una onda lineal.

El flujo de energía medio por unidad de anchura, para la onda de Airy (Onda lineal) viene dado por

$$F = \frac{\rho g}{8} \cdot H^2 \cdot C_T \quad (3)$$

donde ρ es la densidad específica del agua.

g , la aceleración de la gravedad.

H , la altura de ola.

C_T , la velocidad de transmisión de energía.

En profundidades indefinidas, el flujo de energía medio en la dirección de propagación entre dos trayectorias u ortogonales será:

$$\bar{P}_0 = \bar{F}_0 \cdot b_0 = \frac{\rho g}{8} \cdot H_0^2 \cdot b_0 \cdot C_{T_0} \quad (4)$$

Más adelante, en profundidades intermedias (o reducidas) para las mismas trayectorias tendremos:

$$\bar{P} = \bar{F} \cdot b = \frac{\rho g}{8} \cdot H^2 \cdot b \cdot C_T \quad (5)$$

donde b es la separación entre las ortogonales en el punto considerado. Por las hipótesis realizadas, la energía permanece constante entre dos trayectorias, luego igualando las dos últimas expresiones resulta

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{C_{T_0}}{C_T}} \cdot \sqrt{\frac{b_0}{b}} = K_S \cdot K_R \quad (6)$$

donde

$$K_S = \sqrt{\frac{C_{T_0}}{C_T}} = \sqrt{\frac{C_0/2}{\frac{c}{2} \left[1 + \frac{2kd}{\operatorname{sh} 2kd} \right]}} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{C_0}{C \cdot n}} \quad (7)$$

$$\text{con } K = \frac{2\pi}{L} \quad , \quad n = \frac{c}{C}$$

es conocido como COEFICIENTE DE APROXIMACION, y

$$K_R = \sqrt{\frac{b_0}{b}} \quad (8)$$

como COEFICIENTE DE REFRACCION O DE EXPANSION FRONTAL.

El coeficiente K_s se hace igual a la unidad para la profundidad relativa $d/L=0.05$, tendiendo a hacerse algo mayor para profundidades más reducidas. Parece probado (Iribarren) sin embargo, que este hipotético aumento no se produce en la realidad debido al consumo de energía por rozamiento con el fondo, por lo que en un primer tanteo se puede suponer $K_s=1$.

fig. 1-b

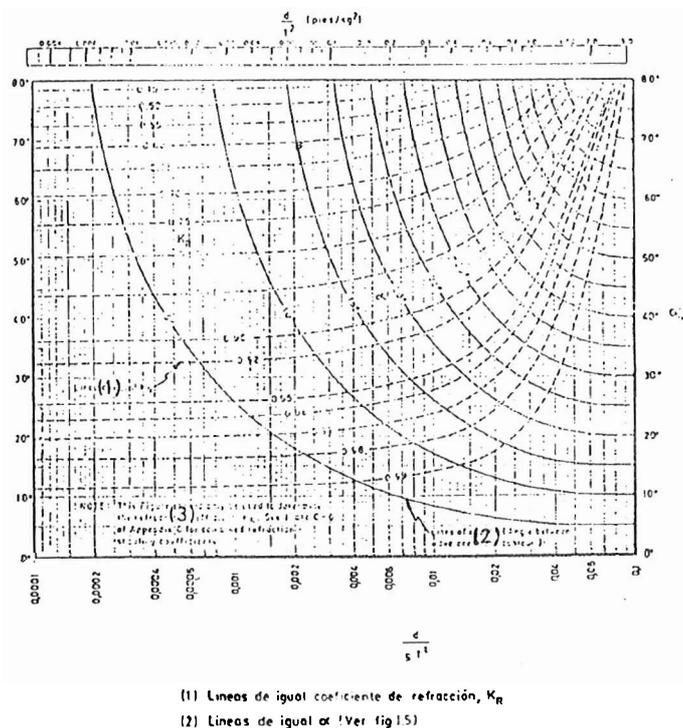
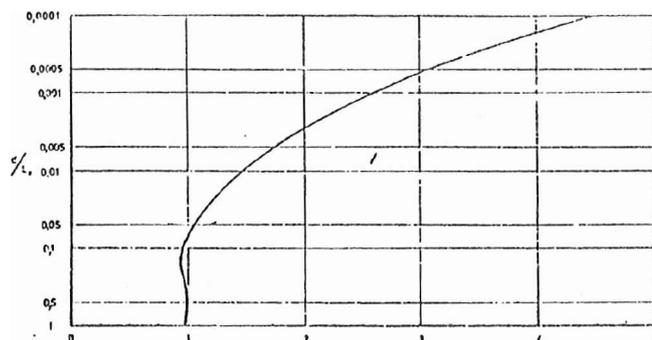


fig. 1-a
 Coeficiente de aproximación



Cambios de dirección en los frentes de onda y coeficiente de refracción en el caso de fondos con batimétricas rectas y paralelas.

En la figura (1-a) se representa la variación de K_s con la profundidad relativa d/L_0 . Es interesante destacar que cuando el oleaje incide perpendicularmente a las batimétricas $K_R=1$ y, por tanto, $K_s=H/H_0$.

En la figura (1-b) se muestra la variación de K_R en función del ángulo de incidencia y de las profundidades relativas d/L_0 , calculado por el método de las ortogonales.

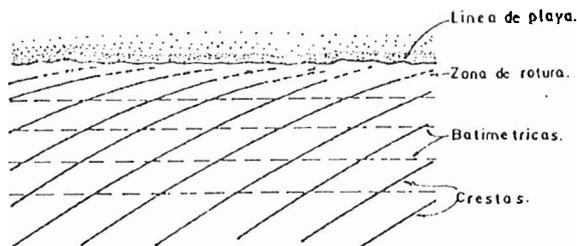
INTERPRETACION DE RESULTADOS

En las figuras 2 a 5 se muestran los efectos de varios tipos de fondos sobre los trenes de ondas. En la primera de estas figuras se tiene una playa recta con batimétricas paralelas al contorno y regularmente espaciadas, con el frente de ondas incidiendo oblicuamente a la costa, mientras que en las dos siguientes tenemos una elevación y una depresión submarinas. La elevación tiende a concentrar las trayectorias en la zona donde se une a la costa, estando éstas más juntas y, por tanto, $K_R > 1$, luego la altura de la ola será mayor. Por el contrario, una depresión submarina tiende a separar las trayectorias resultando alturas menores cerca de la costa. Análogamente, las alturas de olas serán mayores en un cabo que en un golfo (figura 5). Puesto que la energía es constante entre dos ortogonales, una gran parte de dicha energía se empleará en erosionar la costa y, como consecuencia, la refracción tiende, con el tiempo, a dejar recta la costa.

Los diagramas de refracción proporcionan una medida de los cambios operados en un frente de ondas al alcanzar la plataforma costera, estando limitada, sin embargo, la validez de los resultados a la validez de las hipótesis empleadas y de los datos de la topografía submarina.

La elección de la malla de batimétricas y trayectorias tiene una cierta importancia, pues si tomamos una red con amplias luces los resultados serán muy groseros, mientras

fig. 2



Refracción en: a) una playa recta con las batimétricas paralelas, b) un promontorio submarino, y c) un cañón submarino

fig. 3

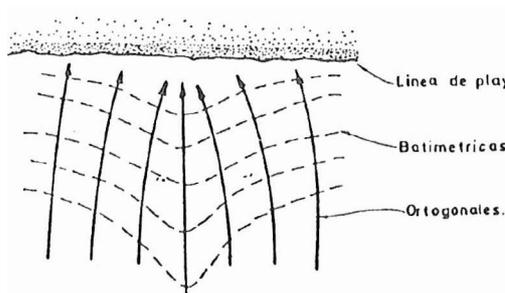


fig. 4

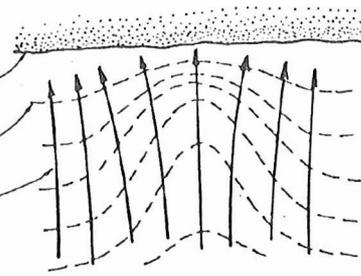
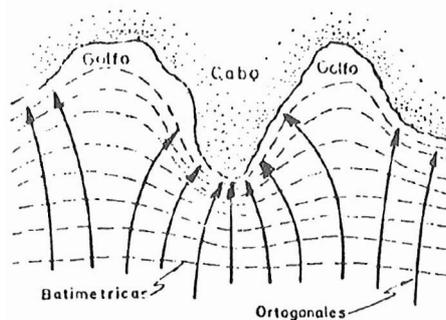


fig. 5



Refracción en una costa accidentada.

que en el extremo opuesto nos encontraríamos con un excesivo trabajo. En este sentido conviene tener en cuenta que la forma de los diagramas puede variar sensiblemente en función de la representación del fondo (esto tiene su máxima importancia en los métodos numéricos).

REFRACCION POR CORRIENTES

La presencia de corrientes o de cualquier otro fenómeno (por ejemplo el viento) que haga variar la velocidad de los puntos de una onda con respecto a otros dará también lugar a una refracción de las ondas.

Cuando una corriente circula en la misma dirección que la onda, la celeridad aumenta y, por tanto, la longitud de la onda (para el mismo periodo). Por el contrario, si discurre en sentido opuesto, la celeridad disminuye.

Para una corriente circulando oblicua a las trayectorias de las ondas no sólo varía la celeridad de las mismas sino también su sentido.

PLANTEAMIENTO MATEMATICO DEL METODO DE LAS ORTOGONALES

ECUACIONES PARA EL TRAZADO DE LAS ORTOGONALES

Sean O_1 y O_2 dos ortogonales adyacentes separadas una distancia infinitesimal D_r . Sean F_1 y F_2 dos consecutivos frentes de onda separados un tiempo infinitesimal dt y, por tanto, una distancia infinitesimal D tal que

$$D_s = c \cdot dt \quad (9)$$

siendo c la celeridad de la onda.

La distancia s se toma como positiva en el sentido en que viaja el frente. Para r se toma como positivo aquél en el que el sistema de coordenadas (s,r) sea dextrógiro.

Puesto que la celeridad de una onda varía en el tiempo y en el espacio resulta que ds no es constante a lo largo de una cresta, para el mismo dt , por lo cual el sistema (s,r) no forma un sistema de coordenadas curvilíneas. Esta es la razón de usar D/D_s en lugar de $\partial/\partial s$

Las ecuaciones paramétricas de una ortogonal serán

$$\begin{aligned} dx &= ds \cdot \cos \alpha \\ dy &= ds \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (10)$$

y dividiendo ambos miembros por dt se tendrá

$$\frac{dx}{dt} = c \cdot \cos \alpha \quad \frac{dy}{dt} = c \cdot \sin \alpha \quad (11)$$

siendo (x,y) el sistema de ejes coordenados y α el ángulo que forma el eje x y el sentido positivo de D

Puesto que c es una función de x e y se tiene

$$dc = \frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial c}{\partial y} dy \quad (12)$$

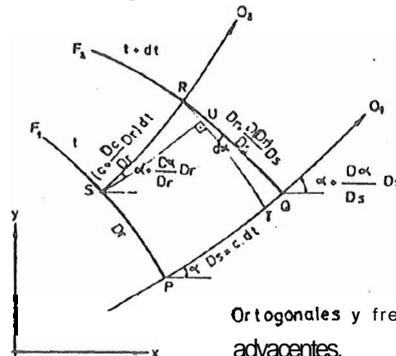
y dividiendo por D_r

$$\frac{Dc}{D_r} = \frac{\partial c}{\partial x} \frac{Dx}{D_r} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{Dy}{D_r} \quad (13)$$

De la figura 6 deducimos que si $D_r > 0$, será $d_x < 0$ y $d_y > 0$, luego:

$$\begin{aligned} \frac{Dx}{D_r} &= -\sin \alpha \\ \frac{Dy}{D_r} &= \cos \alpha \end{aligned} \quad (14)$$

fig. 6



y sustituyendo (14) en (13):

$$\frac{D_c}{D_r} = -\operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{\partial c}{\partial x} + \cos \alpha \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \quad (15)$$

Por otro lado, de la misma figura se deduce que

$$d\alpha = \frac{c \cdot dt - \left[c + \frac{D_c}{D_r} D_r \right] dt}{D_r + \frac{D(D_r)}{D_s} D_s} \quad (16)$$

de donde, simplificando y despreciando infinitésimos de orden superior resulta .

$$\frac{d\alpha}{dt} = - \frac{D_c}{D_r} \quad (17)$$

luego, teniendo en cuenta (15)

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial c}{\partial x} \cdot \operatorname{sen} \alpha - \frac{\partial c}{\partial y} \cos \alpha \quad (18)$$

ECUACIONES PARA EL CALCULO DE LA ALTURA DE ONDA EN UN PUNTO

La altura de ola en un punto se obtiene como combinación de efectos que no disipan energía (aproximación y refracción) y de efectos que si la disipan (en este caso fricción debida a la turbulencia del fondo)

$$H = H_r \cdot K_r \cdot K_s \cdot K_f \quad (19)$$

Este último término, K_f , denominado COEFICIENTE DE FRICCIÓN, nos haría prescindir de la 4ª hipótesis inicial. Nosotros no lo tendremos en cuenta en nuestro trabajo debido a las dificultades que nos presenta su calculo, si bien daremos una explicación sobre su calculo. Con respecto a la 3ª hipótesis queda modificada en el sentido de que la energía contenida entre dos ortogonales deja de ser constante si bien sigue sin existir cesión lateral de energía.

Cálculo de K_s

Sabemos que

$$K_s = \sqrt{\frac{c_{T0}}{c_r}}$$

Y que

$$c_r = \frac{c}{2} \cdot \left[1 + \frac{4\pi \frac{d}{L}}{\operatorname{Sh} 4\pi \frac{d}{L}} \right] \quad (20)$$

siendo: $C = c_0 \cdot \frac{2\pi d}{L}$, celeridad de la onda

L = longitud de onda y
 d = profundidad media,
 y que para profundidades indefinidas

$$c_{T0} = \frac{c_0}{2} \quad (21)$$

siendo C_0 la celeridad de onda en profundidades indefinidas, resultará que

$$k_s = \frac{1}{\sqrt{T_h \frac{2\pi d}{L} \left[1 + \frac{4\pi d L}{Sh 4\pi d L} \right]}} \quad (22)$$

Calculo de K_r ,

Arthur y Munk (1952) obtuvieron la ecuación diferencial que gobierna la separación entre ortogonales, a través de una variable β definida como

$$\beta = \frac{D_r}{(D_r)_0} \quad \beta > 0 \quad (23)$$

y, teniendo en cuenta que-

$$K_R = \sqrt{\frac{(D_r)_0}{D_r}} \quad (24)$$

resulta

$$\beta = \frac{1}{K_R^2} \quad (25)$$

A través de la variable s (distancia media sobre una ortogonal) como variable independiente, la citada ecuación es

$$\frac{D^2\beta}{D_s^2} + P_s \cdot \frac{D\beta}{D_s} + q_s \cdot \beta = 0 \quad (26)$$

en donde

$$P_s = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial c}{\partial y} \cdot \sin \alpha \right) \quad (27)$$

$$q_s = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \cdot \sin^2 \alpha - \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \cdot \cos^2 \alpha \right) \quad (28)$$

Desde el punto de vista del ordenador no tiene importancia el trabajar con s como variable independiente, o con el tiempo t . Pero el trabajar con t tiene la ventaja de que da la fase de todos los frentes de onda.

Trabajando con la variable t se llega a la expresión

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + P_t \frac{d\beta}{dt} + q_t \cdot \beta = 0 \quad (29)$$

con

$$P_t = 2 \cdot c \cdot P_s = -2 \left(\frac{\partial c}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial c}{\partial y} \sin \alpha \right) \quad (30)$$

$$q_t = c^2 \cdot q_s = c \cdot \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \sin^2 \alpha - \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \cdot \cos^2 \alpha \right) \quad (31)$$

la ecuación diferencial (29) nos sirve para determinar K_R una vez dadas las condiciones iniciales, para $t=t_0$:

$$x=x_0, \quad y=y_0, \quad \alpha=\alpha_0, \quad \beta=1, \quad \frac{d\beta}{dt} = \left(\frac{d\beta}{dt} \right)_0 = \frac{C_0}{R_0} \quad (32)$$

donde R_0 es el radio de curvatura del frente de ondas en profundidades indefinidas.

Calculo de K_f

Representando por E_f la energía media disipada por fricción en el fondo, por segundo y por unidad de área horizontal, su expresión es (Jonsson.1966)

$$E_f = \frac{2\rho}{3\pi} \cdot f_e \cdot U_m^3 \quad (33)$$

donde f_e = factor de pérdida de energía de la onda

$$U_m = \frac{\pi H}{T \cdot \text{sh} \frac{2\pi d}{L}}$$

la máxima velocidad de una partícula de la ola en el fondo.
Resulta para k_f la expresión

$$\frac{dk_f}{dt} = \frac{8}{3L} \frac{dc}{d(d)} \cdot a_m \cdot f_e \cdot K_f \quad (34)$$

siendo

$$a_m = \frac{H}{2 \cdot \text{sh} \frac{2\pi d}{L}} \quad (35)$$

la máxima amplitud de una partícula de la ola en el fondo. La ecuación (34), que es una ecuación diferencial no lineal, ordinaria de primer orden, nos sirve para calcular K_f con la condición inicial, para $t=t_0$, $K_f=1$.

Factor de pérdida de energía de la onda (f_e)

Se puede considerar igual este parámetro al coeficiente de fricción f_w , especialmente para flujos turbulentos, este factor de fricción se define a través de la fórmula semiempírica

$$\tau_{wm} = f_w^{1/2} \cdot \rho \cdot U_m^2 \quad (36)$$

donde τ_{wm} es la máxima tensión cortante en el fondo.

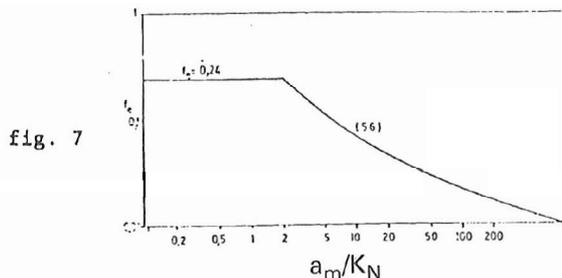
Por métodos experimentales se ha llegado a los siguientes valores de f_e .

$$f_e = 0.24 \text{ para } am/K_N < 2 \quad (37)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{f_e}} + \log \frac{1}{4\sqrt{f_e}} = -0.08 + \log \frac{am}{K_N} \quad \text{para } \frac{am}{K_N} \geq 2 \quad (38)$$

siendo K_N la rugosidad de Nikuradse para arenas.

Se conoce muy poco acerca de la rugosidad del lecho marino, dependiendo su valor de la estructura geológica del área. Por otra parte, en el caso de suelos sueltos existe una interacción entre el lecho y el flujo del agua, creando éste su propia rugosidad. Medidas realizadas en la isla de Honshu (Japón), sobre un fondo de arena con tamaño medio del grano entre 0.27 mm. y 0.66 mm. para la determinación de f_w dan, utilizando la curva de la figura 7, valores de K_N de 1 a 2 cm. para profundidades de 15 m., y de 3 a 6 cm. para 3.5 m. de profundidad. Este ejemplo muestra que para fondos sueltos no se puede utilizar un valor constante de K_N , dándonos idea de un orden de magnitud de lo que ocurre.



Relación entre el factor de pérdida de energía de onda y el cociente entre la máxima amplitud de las partículas de la onda en el fondo y la rugosidad Nikuradse para arenas.

INTEGRACION NUMERICA DE LAS ECUACIONES GENERALES

Puesto que la superficie del fondo no es susceptible de ser representada analíticamente, en general, la resolución del problema exige la integración por métodos numéricos aproximados. Esta integración aproximada se basa en la obtención de las coordenadas de los puntos P_0, P_1, P_2, \dots etc., de una normal, utilizando la expresión (18), y en la obtención de la altura de la ola H_0, H_1, H_2, \dots etc., en los mismos puntos, para lo cual se utilizan las expresiones (19), (22), (29) y (34).

Puesto que las expresiones (18), (29), y (34) dependen del tiempo, se elegirá un Δt , relacionado con Δs a través de $\Delta s = c \cdot \Delta t$, de tal manera que no sea demasiado grande, pues falsearía las posibles irregularidades del fondo, ni demasiado pequeño pues aumentaría enormemente el tiempo de construcción del diagrama.

Pasos previos

Primeramente se elige un sistema de ejes de referencia O_x, O_y con respecto a los cuales se trazará una malla rectangular de intervalo $\Delta x, \Delta y$, los cuales definen un conjunto de nudos de coordenadas (x_i, y_j) .

Posteriormente se ha de conocer, para cada punto de éstos su profundidad d_{ij} , la cual se obtiene directamente de una carta de batimétricas.

En tercer lugar se necesita conocer la celeridad en cada punto de la malla, así como sus derivadas de 1º y 2º orden. El cálculo de c se realiza por iteración, empleándose el tipo de aproximaciones sucesivas de Newton-Raphson o método de las tangentes.

La obtención de las derivadas parciales de c , en un nudo (i, j) se realiza a través de las fórmulas aproximadas de derivación, las cuales suponen una variación de la velocidad y de sus derivadas primeras, lineal de nudo a nudo.

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{c_{i+1,j} - c_{i-1,j}}{2 \cdot \Delta x} \quad (39)$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{c_{i,j+1} - c_{i,j-1}}{2 \cdot \Delta y} \quad (40)$$

$$\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{i+1/2,j} - \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{i-1/2,j}}{\Delta x} = \frac{c_{i+1,j} - 2c_{i,j} + c_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} &= \frac{\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{i,j+1} - \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{i,j-1}}{\Delta y} = \frac{\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{i+1,j} - \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{i-1,j}}{\Delta y} = \\ &= \frac{c_{i+1,j+1} - c_{i+1,j-1} - c_{i-1,j+1} + c_{i-1,j-1}}{2 \cdot \Delta x \cdot \Delta y} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{i,j+1/2} - \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{i,j-1/2}}{\Delta y} = \frac{c_{i,j+1} - 2c_{i,j} + c_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (43)$$

Conocidos los valores de d , c y sus respectivas derivadas en los nudos de malla, el cálculo de su valor en un punto cualquiera se realiza empleando el método de interpolación lineal.

Construcción de la normal

Supuestas conocidas las coordenadas (x,y) y el ángulo α de un punto P_n de la normal, se trata de conocer los mismos valores en el punto P_{n+1} , también de la normal, separado del anterior un Δt , relacionado con Δs a través de $D_s=c \cdot dt$.

Los pasos a seguir son los que se indican a continuación:

a) Mediante la expresión (18), se obtiene el valor de $\Delta\alpha/\Delta t$ en el punto P_n :

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right)_n = \left(\frac{\Delta c}{\Delta x}\right)_n \cdot \text{sen } \alpha_n - \left(\frac{\Delta c}{\Delta y}\right)_n \cdot \text{cos } \alpha_n \quad (44)$$

b) Este valor se extrapola a una distancia finita, $c \Delta t$, obteniéndose así el primer valor del cambio del ángulo en P_{n+1} :

$$(\Delta\alpha)_{n+1} = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right)_n \cdot \Delta t \quad (45)$$

con lo cual:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + (\Delta\alpha)_{n+1} \quad (46)$$

c) A partir del valor medio de α y α_{n+1} se obtiene un nuevo

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2} (\alpha_n + \alpha_{n+1}) = \alpha_n + \frac{(\Delta\alpha)_{n+1}}{2} \quad (47)$$

con lo cual obtenemos las coordenadas del punto P_{n+1} :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + c_n \cdot \Delta t \cdot \text{cos } \bar{\alpha} \\ y_{n+1} &= y_n + c_n \cdot \Delta t \cdot \text{sen } \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (48)$$

d) En el punto (x_{n+1}, y_{n+1}) dado por (48), calculamos mediante (18) el valor $\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right)_{n+1}$ que promediado con $\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right)_n$ nos da un nuevo valor $\Delta\alpha/\Delta t$, que nos sirve para determinar un nuevo $(\Delta\alpha)_{n+1}$, y por tanto un nuevo α_{n+1} y un nuevo $\bar{\alpha}$ que mediante (48) nos sirve para calcular unas nuevas coordenadas para P_{n+1} .

e) El proceso se continúa de la misma forma por un proceso iterativo como el empleado para el cálculo de las celeridades.

f) Determinados α_{n+1} y x_{n+1} e y_{n+1} podemos pasar a determinar dichos valores sobre el siguiente punto P_{n+2} , y así sucesivamente.

g) Las coordenadas x_0, y_0 de la normal, y el ángulo α son datos iniciales del problema en profundidades indefinidas.

Cálculo del coeficiente de aproximación, K_s

La obtención de este valor en un punto cualquiera P_n de una ortogonal, se hace fácilmente a través de la expresión (22), para lo cual se necesita, previamente, la determinación de la profundidad d en dicho punto, y la longitud de onda, que se calcula bien por la expresión

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \quad T_h = \frac{2\pi d}{c \cdot T}$$

Cálculo del coeficiente de refracción K_R

Este valor se obtiene en un punto P_{n+1} de una normal a partir de la ecuación diferencial (29) para lo cual se ha de sustituir $d\beta/dt$ y $d^2\beta/dt^2$ por sus expresiones aproximadas, de la misma forma que se hizo con las celeridades:

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_n = \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\Delta t} \quad \left(\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)_n = \frac{\beta_{n+1} - 2\beta_n + \beta_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (49-50)$$

con lo cual se obtiene

$$\beta_{n+1} = 2 \cdot \frac{2 - (p_t)_n \cdot \Delta t^2}{2 + (p_t)_n \cdot \Delta t} \cdot \beta_n + \frac{(p_t)_n \cdot \Delta t - 2}{(p_t)_n \cdot \Delta t + 2} \cdot \beta_{n-1} \quad (51)$$

viniedo dados $(p_t)_n$ y $(q_t)_n$ por:

$$(p_t)_n = -2 \cdot \left[\left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)_n \cdot \cos \alpha_n + \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_n \cdot \sin \alpha_n \right] \quad (52)$$

$$(q_t)_n = C_n \left[\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right)_n \cdot \sin^2 \alpha_n - \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} \right)_n \cdot 2 \cdot \sin \alpha_n \cdot \cos \alpha_n + \left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right)_n \cdot \cos^2 \alpha_n \right] \quad (53)$$

Una vez conocido β_{n+1} , el valor de $(K_R)_{n+1}$ se obtiene a partir de la expresión:

$$(K_R)_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{|\beta_{n+1}|}} \quad (54)$$

La ecuación (51) nos dice que es preciso conocer, para poder realizar la integración, dos valores iniciales β_0, β_1 . Se admite que cuando el frente de onda inicial está en profundidades indefinidas. En el caso de que el frente de onda inicial esté en profundidades cualesquiera, se toma:

$$\beta_{n-1} = \beta_n = \frac{(K_S)_{n-1} \cdot (K_R)_{n-1} \cdot (K_f)_{n-1}}{(K_S)_{n-1} \cdot (K_f)_{n-1}} \cdot \frac{H_{n-1}/H_0}{(K_S)_{n-1} \cdot (K_f)_{n-1}} \quad (55)$$

siendo H_{n-1} la altura de onda en P_{n-1} y H_0 en profundidades indefinidas. $(K_S)_{n-1}$ y $(K_f)_{n-1}$ pueden ser conocidos pues sólo dependen de la profundidad y de la longitud de onda en el punto.

Cálculo del coeficiente de fricción (K_f)

El cálculo de K_f en un punto P_n de la normal se hace por medio de la ecuación (34)

$$\left(\frac{dK_f}{dt} \right)_n = f(L_n, T_n, d_n, l_{e_n}) \quad (56)$$

quedando determinado $(dK_f/dt)_n$ por conocerse todo en el segundo miembro. Por tanto,

$$(\Delta K_f)_n = \left(\frac{dK_f}{dt} \right)_n \cdot \Delta t \quad (57)$$

$$(K_f)_n = (K_f)_{n-1} + (\Delta K_f)_n \quad (58)$$

en consecuencia es necesario conocer el valor de K_f en un punto inicial, que en profundidades indefinidas (P_0) será $(K_f)_0=1$.

Cálculo de la altura de ola en un punto

Una vez conocidos los tres coeficientes K , K_R y K_S para calcular la altura de onda en un punto P_n de la ortogonal basta aplicar la expresión:

$$H_n = H_0 \cdot (K_S)_n \cdot (K_R)_n \cdot (K_f)_n \quad (59)$$

siendo H_0 la altura de onda en profundidades indefinidas.

ESTUDIO EXPERIMENTAL

Se ha considerado una red cuadrada de 400 puntos de rejilla, con un intervalo de rejilla de 1 Km. Se eligió una onda que llega al límite de las aguas intermedias con $T=10$ seg. En la figura 8 se representan las refracciones que sufren las ortogonales a los frentes de onda para diferentes ángulos. La Tabla I nos muestra la variación numérica de los ángulos de incidencia (ángulos entre las ortogonales y la perpendicular a la línea de costa) para un paso de integración de 3 seg., en función de las profundidades relativas d/L_0 . En la figura 9 se muestra el perfil de fondo empleado.

La figura 10 muestra el caso de una onda que llega con la cresta casi paralela a la línea de costa ($\alpha_0=5^\circ$), sufriendo refracción sobre un fondo con batimétricas no paralelas a dicha línea.

En la figura 11 se observan las variaciones de la altura de ola para diferentes ángulos de incidencia. Se obtienen resultados anómalos para ángulos muy pequeños, así como un mínimo, para todas las direcciones, entre $d/L_0=0.1$ y $d/L_0=0.15$, forzado por el término K_s en el cálculo de H .

La figura 12 nos muestra la variación, en tanto por ciento, de las alturas de la ola incidente en su tránsito por las aguas someras hasta la línea de costa. Aquí interviene el término K_R , mostrando mayores reducciones en altura para oleaje con mayor ángulo de incidencia.

ANGULOS ENTRE LA CRESTA DE LA ONDA Y LA LINEA DE COSTA PARA BATIMETRICAS RECTAS Y PARALELAS

d/L ₀													
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
0.04	0.97	1.93	2.88	3.80	4.73	5.56	6.39	7.16	7.87	8.53	9.13	9.66	10.11
0.06	1.13	2.65	3.95	5.22	6.46	7.65	8.78	9.85	10.85	11.76	12.60	13.22	13.96
0.08	1.76	3.51	5.24	6.93	8.57	10.15	11.66	13.08	14.42	15.69	16.75	17.75	18.60
0.10	2.00	3.99	5.97	7.87	9.76	11.65	13.27	14.90	16.40	17.84	19.12	20.25	21.21
0.15	2.61	5.33	7.99	10.57	13.10	15.55	17.84	20.14	22.18	24.12	26.07	27.91	29.11
0.20	3.08	6.14	9.20	12.17	15.10	17.90	20.71	23.36	25.80	28.19	30.22	32.17	33.93
0.25	3.14	6.81	10.15	13.50	16.83	19.96	23.08	26.10	29.02	31.60	34.07	36.31	38.25
0.30	4.15	8.30	12.41	16.50	20.60	24.53	28.46	32.24	36.00	39.58	42.80	46.01	48.11
0.35	4.34	8.67	12.97	17.24	21.51	25.70	29.81	33.88	37.85	41.70	45.28	48.78	51.80
0.40	4.51	9.01	13.32	17.97	22.42	26.88	31.16	35.50	39.68	43.70	47.72	51.38	54.89
0.45	4.70	9.40	14.09	18.16	23.40	28.07	32.65	37.19	41.70	46.11	50.40	54.50	58.49
0.50	4.83	5.67	14.50	19.32	24.12	28.92	33.71	38.44	43.15	47.80	52.41	59.60	61.24

TABLA I

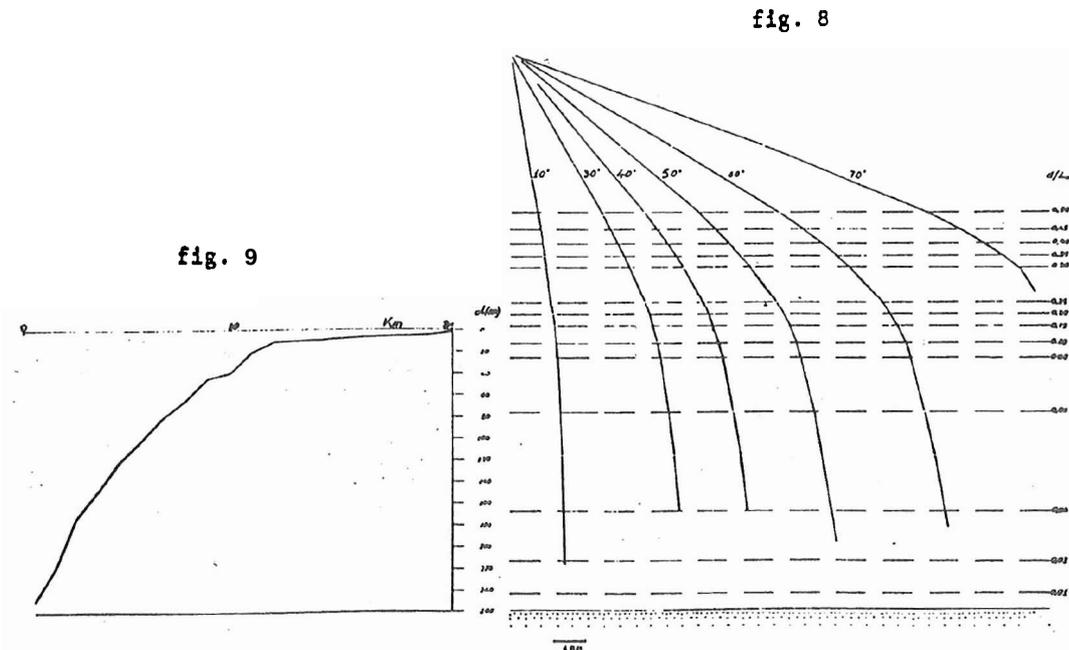


fig. 10

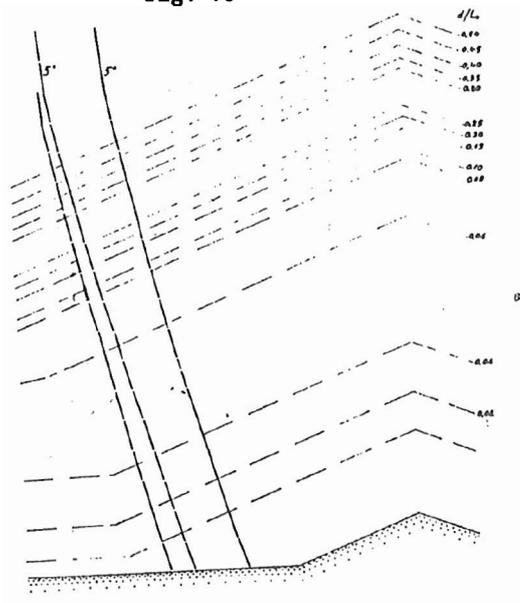


fig. 12

TANTO POR CIENTO DE ALTURA DE OLA QUE SE CONSERVA
A SU P.M.O. POR LA PLATAFORMA COSTERA

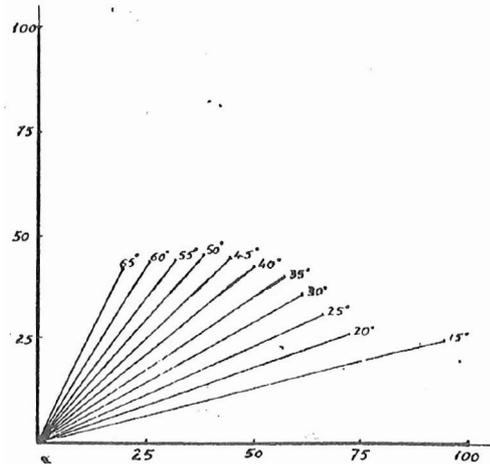
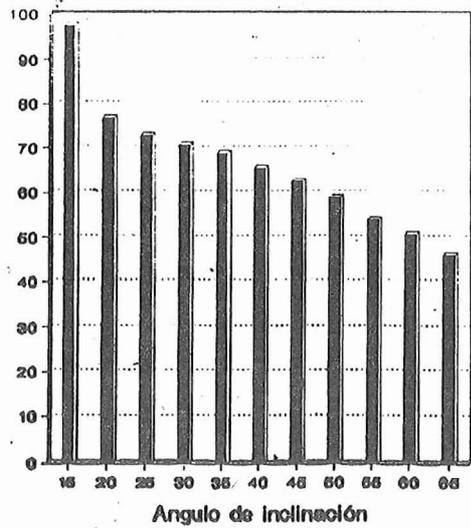
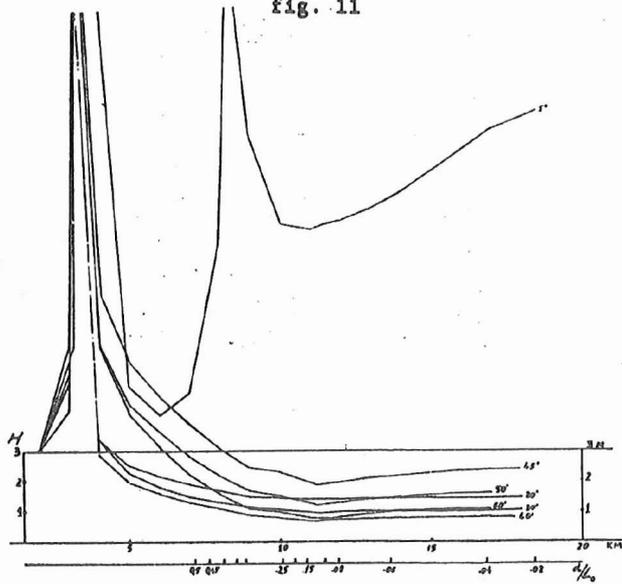


fig. 11



REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- LOSADA M.A., J.L. TEJERIA. Refracción, Difracción, Rotura, Run-up y overtoping. 1978. ETSICCCP, Santander.
- MUNK W.H., R.S. Arthur. Forecasting **Ocean** Waves. Compendium of Meteorology. American Meteorological Society. 1954.
- CONDE ALDEMIRA, J.J. Técnicas numéricas de previsión de oleaje. Condiciones de aplicación a las costas españolas. MOPU. 1985.
- LUTHE, R., A. OLIVERA, F. SCHULTZ. Métodos numéricos. 1984.