TRATAMIENTO NUMERICO POR TECNICAS PSEUDOESPECTRALES (ELEMENTOS FINITOS) DE LA ECUACION UNIDIMENSIONAL DE LAS ONDAS DE GRAVEDAD

por J. G. Rendo y M. Hortal
Equipo de Predicción Numérica del I.N.M.

RESUMEN

Tras la introducción que hicimos de los modelos pseudoespectrales en el anterior número de esta revista (por cierto que lamentamos la involuntaria substitución de Legendre por Lagrange) presentamos un ejemplo sencillo en el que la técnica variacional de los elementos finitos (caso particular de modelo pseudoespectral) ha sido aplicada a la resolución de la ecuación unidimensional de las ondas de gravedad.

En este ejemplo se utilizan diferentes funciones básicas para obtener una solución aproximada, con objeto de apreciar la influencia de la regularidad de las mismas en el grado de aproximación y estabilidad de la solución.

La solución exacta pertenece, en cada instante t_k, al espacio de Sobolev (Hilbert) $H^1]0,L[$ y por tanto haremos la comparación entre la solución exacta y las soluciones aproximadas mediante la norma de H^1 aplicada en diferentes instantes del tiempo.

El resultado es que, utilizando como bases las funciones "chapeau" o las "exponenciales", se alcanza mayor estabilidad que utilizando las funciones "características" debido a que aquéllas son más regulares que éstas.

1.— Modelo

La propagación en una dimensión (x) de una onda de gravedad hasta el instante $t = T$ viene descrita en el dominio $[0,L] \times [0,T] \equiv (0 \leqslant x \leqslant L; 0 \leqslant t \leqslant T)$ por el sistema lineal de ecuaciones en derivadas parciales:

$$(1a) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$(1b) \qquad \frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$(1c) \qquad u(x,0) = \varphi(x) ; h(x,0) = H\Psi(x)$$

(condiciones iniciales)

$$(1d) \qquad u(L,t) = u(0,t) = 0$$

(condiciones de contorno de pared rígida)

donde u es la velocidad de movimiento del fluido en la dirección x, h su altura, g la aceleración de la gravedad y H una constante que coincide con la media espacial de h.

Las funciones $\varphi(x)$ y $\Psi(x)$ son conocidas y de cuadrado integrable sobre el dominio $]0, L[$.

2.— Espacio de definición de u y h

Se denomina $L^2(\,]0,s[\,)$ al espacio de las funciones numéricas definidas sobre el intervalo abierto $]0,s[$ cuyo cuadrado es integrable sobre este intervalo. Este espacio es de Hilbert para el producido escalar

$$(f,g) = \int_0^s f(x)g(x)dx \;;\; f,g \in L^2(\,]0,s[\,)$$

Sea

$$H^1(\,]0,s[\,) = \left\{ f/f \text{ y } \frac{df}{dx} \in L^2(\,]0,s[\,) \right\}$$

si a $H^1(\,]0,s[\,)$ le dotamos de producto escalar

$$((f,g)) = \int_0^s (f(x)g(x) + \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx})\, dx$$

resulta un espacio de Hilbert

Sea ahora

$$(2) \qquad E = L^2\,[0,T; H^1(\,]0,L[\,)]$$

el espacio de las funciones definidas sobre $]0,T[$ de cuadrado integrable sobre este intervalo y de valores en $H^1\,(]0,L[)$.

Definimos en E el producto escalar

$$((f,g))_E = \int_0^T ((f,g))dt$$

con lo que E resulta un espacio de Hilbert separable y por tanto admite bases libres. En este espacio tomaremos las funciones u y h del modelo.

3.— Técnicas de aproximación

3.1.- Espacios aproximantes de E

Introducimos como primeros aproximantes de E los espacios

$E_1 = H^1(\,]0,L[\,) \oplus H^1(\,]0,T[\,)$; $\oplus \equiv$ producto sensorial

$E_2 = H^1(\,]0,L[\,) \oplus L^2(\,]0,T[\,)$

que son subespacios prehilbertianos de E

Una función $\xi(x,t)$ que pertenezca a E_1 o a E_2 pertenece a E y puede escribirse como

(3)

$$\xi(x,t) = \sum_{j,k} A_{jk} w_j(x)\theta_k(t) = \sum_{j,k} A_{jk} w_{jk}(x,t)$$

donde

$$(4) \qquad w_{jk} = w_j \oplus \theta_k = w_j(x)\theta_k(t)$$

es una base de E_1 o de E_2 y A_{jk} es una sucesión de números reales que cumple la condición

$$\sum_{j,k} A_{jk}^2 < \infty$$

Si truncamos el desarrollo (3) para $0 \leq j \leq N_1$; $0 \leq K \leq N_2$ (N_1 puede ser igual a N_2 y ambos son enteros positivos) tenemos una estimación ξ_N de ξ dada por

$$(4b) \qquad \xi_N = \sum_{k=0}^{N_2} (\sum_{j=0}^{N_1} A_{jk} w_j(x))\theta_k(t)$$

El espacio de las combinaciones lineales de las funciones (4) es un aproximante de E_1 (o de E_2) y por tanto un segundo aproximante de E. Representamos este espacio vectorial por

$$V_N\,(0,T\,;0,L)$$

3.2.- Método variacional de los elementos finitos

3.2.1 Aproximación en E_1.

a) Elegimos como base de $V_N(0,T;0,L)$ las funciones

$$(5) \qquad w_{jk}(x,t) = w_j(x)w_k(t),$$

$$0 \leq j \leq N_1,\; 0 \leq k \leq N_2$$

(es decir, en (4) se hace $\theta_k \equiv w_k$)
donde las w son las funciones "chapeau"

Para constituir dichas funciones hacemos sendas particiones regulares de los intervalos [0,L] y [0,T] con longitudes (distancia internodal) $a = x_j - x_{j-1}$ y $b = t_k - t_{k-1}$ respectivamente y definimos

(6)
$$w_j(x) = \begin{cases} (x-x_j)/a \ ; x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ (x_{j+1}-x)/a \ ; x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0, \text{ en el resto del intervalo } [0,L] \end{cases}$$

$$(7) \quad w_k(t) = \begin{cases} (t-t_{k-1})/b \ ; t_{k-1} \leq t \leq t_k \\ (t_{k+1}-t)/b \ ; t_k \leq t \leq t_{k+1} \\ 0, \text{ en el resto del intervalo } [0,T] \end{cases}$$

Si escribimos las ecuaciones (1a) y (1b) en forma matricial, tenemos

$$(8) \quad \frac{\delta \underset{\sim}{U}}{\delta t} + A \underset{\sim}{U} = 0$$

donde

$$\underset{\sim}{U} = \{u,h\} \epsilon E x E \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 0 & g\frac{\delta}{\delta x} \\ H\frac{\delta}{\delta x} & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando (8) escalarmente en L^2 por $\underset{\sim}{W} \in E$ x E se obtiene la ecuación variacional del modelo

$$(9) \quad (\delta \underset{\sim}{U}/\delta t, \underset{\sim}{w}) + (A\underset{\sim}{U},\underset{\sim}{w}) = 0$$

que tiene por aproximante la ecuación

$$(10) \quad (\delta U_N/\delta t, w_N) + (AU_N, w_N) = 0;$$

$$U_N = \{u_N, h_N\} \ ,$$

$$w_N = \{f,g\} \ \epsilon V_N(0,T;0,L) \times V_N(0,T;0,L)$$

donde u_N y h_N vienen dados por (4b)

Eligiendo como W_N expresiones de la forma $\{w_{jk} w_{mn}\}$ que constituyen una base del espacio producto cartesiano

$$V_N[0,T;0,L] \times V_N[0,T;0,L];$$

(w_{jk} y w_{mn} vienen dados por (5)

Llamando en (4b)

$$P_{jk} \text{ a } A_{jk} \text{ para } \xi_N = u_N$$
$$Q_{jk} \text{ para } \xi_N = h_N$$

La ecuación (10) tiene por expresión

$$(11) \quad \int_0^T \int_0^L [(\sum_{i,l}^N P_{il} \frac{\delta w_{il}}{\delta t} w_{jk} + \sum_{i,l}^N Q_{il} \frac{\delta w_{il}}{\delta t} w_{mn}) + (g \sum_{i,l}^N Q_{il} \frac{\delta w_{il}}{\delta x} w_{jk} + H \sum_{i,l}^N P_{il} \frac{\delta w_{il}}{\delta x} w_{mn}]dtdx = 0$$

$$1 \leq m,n \leq N$$
$$1 \leq j,k \leq N$$

que es un sistema lineal de ecuaciones algebráicas en los coeficientes P y Q ($N=N_1=N_2$) denominado esquema de Galerkin.

Las condiciones iniciales (1c) se adaptan al problema aproximante (11), obligando a cumplir las condiciones de norma mínima a las diferencias

(12)
$$(\sum_j^N P_{j0} w_{j0} - u(x,0)) \quad y \quad (\sum_j^N Q_{j0} w_{j0} - h(x,0))$$

y las condiciones de contorno (1d) se transforman en

$$(13) \quad P_{0k} = P_{NK} = 0 ; 0 \leq k \leq N$$

Las 2N ecuaciones en las que (n=0; k=0) relacionan las cantidades P_{i0}, Q_{i0}, P_{i1} y Q_{i1} porque la integral de la función producto de

$$\frac{\delta w_{i1}}{\delta t} \cdot w_{j0} \text{ y } \frac{\delta w_{i1}}{\delta x} w_{j0}$$

es distinta de cero solamente para 1 = 0,1

Estas 2N ecuaciones, juntamente con las (12) forman un sistema completo para las 2(N+1) incógnitas P_{i1} y Q_{i1}.

Las 2N ecuaciones en las que $n=k=\nu$ relacionan los coeficientes

$$P_{i(\nu-1)}, Q_{i(\nu-1)}, P_{i\nu}, Q_{i\nu}, P_{i(\nu+1)}, Q_{i(\nu+1)}$$

porque las únicas integrales distintas de cero son aquellas en que $1 = \nu-1, \nu, \nu+1$

Estas ecuaciones, junto con las (12), una vez conocidos $P_{i(\nu-1)}$, $Q_{i(\nu-1)}$, $P_{i\nu}$ y $Q_{i\nu}$ forman un sistema completo para obtener las 2(N + 1) incógnitas $P_{i(\nu+1)}$ y $Q_{i(\nu+1)}$

b) Elegimos como base de $V_N(0,T;0,L)$ las funciones

(14) $w_{jk}(x,t) = e_j(x) \otimes e_k(t) = e_j(x)e_k(t)$
donde

(15) $e_j(x)=$

$\exp\{-(x-x_j)^2/[(x-x_j)^2 - a^2]\}$ si $x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_{j+1}$
0 en el resto del intervalo [0,L]

(16) $e_k(t)=$

$\exp\{-(t-t_k)^2/[(t-t_k)^2 - a^2]\}$ si $t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_{k+1}$
0 en el resto del intervalo [0,T]

Llevando estas funciones a (3) y sustituyendo en (11), (12) y (13) resulta un esquema análogo al del apartado a)

c) Siguiendo en el espacio E_1, definimos

$$w_{jk}(x,t) = w_j(x)e_k(t)$$

que es una base combinada de las dos anteriores con funciones base "chapeau" en el espacio y "exponenciales" en el tiempo, resultando un esquema similar a los anteriores.

3.2.2. Aproximación en E_2

Situémonos ahora en el espacio E_2 donde definimos $w_{jk}(x,t) = w_j(x)\theta_k(t)$ donde las $w_j(x)$ son de nuevo las funciones "chapeau" y $\theta_k(t)$ son las funciones "características" definidas por

$$(17) \quad \theta_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_{k+1} \\ 0 & \text{en el resto del intervalo } [0,T] \end{cases}$$

la derivación respecto del tiempo para estas funciones se toma en el sentido de las distribuciones y viene dada por

$$\frac{d\theta_k(t)}{dt} = -(\theta_{k-1/2} - \theta_{k-1/2})/b$$

haciendo las substituciones de estas bases en (3) se obtiene el esquema equivalente al (11), (12), (13) en este espacio.

4.– Discusión y resultados

Comparamos la solucion aproximada obtenida para(u) y (h) con la solución exacta en instantes t_k (donde K es múltiplo de 5) mediante la norma en $H^1\,]0,L[$ para las funciones diferencia $(u_N\text{-}u)$ y $(h_N\text{-}h)$. Como en el instante t_k los valores de cada función base con índice de tiempo distinto de k son cero, y el de la de índice k es 1, el valor de la solución aproximada es simplemente

$$u_N(x,t=t_k) = \sum_j^N P_{jk} w_j(x)$$

debe observarse, sin embargo, que en los intantes t_k (nodos de la variable temporal) es donde la solución aproximada difiere más de la solución exacta en el caso de las funciones "chapeau" temporales.

Consideremos el caso L = 10500 km y T = 30 horas, con las condiciones iniciales

$$u(x,0) = U_o \,\text{sen}\,(2\pi x/L)$$
$$h(x,0) = H = \text{cte.}$$

con $U_O = 54{,}6$ m/s y H= 9184 m

que son los que toman Wang et al con funciones base cúbicas.

La solución analítica en este caso es

$$u(x,t) = U_o \,\text{sen}\,(2\pi x/L)\cos(2\pi tc/L)$$
$$h(x,t) = H-(HU_o/c)\cos(2\pi x/L)\text{sen}(2\pi ct/L)$$
donde $c = gH)^{1/2}$

El periodo de esta onda es L/c que en nuestro caso es 35000 s (9,7 horas).

La longitud de malla $a = x_j - x_{j-1}$ se toma en todos los casos igual a 0,1.L.

Para el intervalo de tiempos $b = t_k - t_{k-1}$ se toman tres valores diferentes: 3600 s (1 hora), 1800 s (30 min) y 600 s (10 min).

Para que el número resultante de la comparación de u_N y u (h_N y h) dé una idea intuitiva de la discrepancia relativa entre ambas funciones definimos el error funcional (E.F.) de la siguiente forma

$$\text{E.F.}(u) = (\| u_N - u \|^2_{H^1} / LU_o^2)^{1/2}$$
$$\text{E.F.}(h) = (\| h_N - h \|^2_{H^1} / LH^2)^{1/2}$$

Las tablas 1,2 y 3 dan los valores del E.F cada 5 horas para los intervalos de 3600 s, 1800 s y 600 s respectivamente.

Como puede verse en las tablas, el ajuste inicial en la aproximación de E1 es mucho mejor con las funciones "chapeau" que con las "exponenciales" porque, con estas últimas como bases, las derivadas en los puntos x_j de la función aproximada son necesariamente nulas; este ajuste puede mejorarse, a expensas de un aumento de cálculo, introduciendo, juntamente con las "exponenciales" otras funciones base cuya derivada en los puntos x_j sea la unidad, tal como hacen Wang et al. (1973); como nuestro propósito fue principalmente estudiar las ventajas de algunos elementos finitos como base y la estabilidad de la solución en un espacio de Hilbert o de Sobolev, no introducimos este mejor ajuste y utilizamos principalmente las funciones "chapeau" en la parte espacial.

Las funciones "exponenciales" como base en la dimensión temporal dan, en general, mejor estabilidad en ambos u y h que las otras bases, debido a su mayor regularidad. No obstante, para periodos cortos, la mayor simplicidad de las funciones "chapeau" las hace preferibles a las "exponenciales" por las mismas razones expuestas para la dimensión espacial.

En cualquier caso, las integrales pueden calcularse de una vez por todas al comienzo de los cálculos con lo que, en cada intervalo de tiempo, lo único que hay que hacer es resolver un sistema lineal de ecuaciones algebráicas.

Utilizando las funciones características θ_k como base de tiempo, no se puede utilizar un paso de tiempo largo (en este caso 1 hora) porque aparece inestabilidad semejante a la presentada por las diferencias finitas en esquemas no filtrados. No obstante, un paso de tiempo demasiado pequeño origina acumulación de errores de cálculo (redondeo) y por lo tanto, el tiempo ideal debe estar comprendido entre esos dos extremos.

Cuando la aproximación en la dimensión temporal es mediante funciones "chapeau" o "exponenciales", el método de Galerkin aplicado en la deducción del esquema numérico es estable aún para pasos largos de tiempo. En el caso de las funciones "chapeau", la disminución del intervalo de tiempo produce acumulación de errores de redondeo, lo que no sucede con las "exponenciales" dada su mayor regularidad.

ABSTRACT

In this paper we present, as a simple example of pseudospectral models, the application of the finite elements variational technique to the solution of the unidimensional gravity wave equation.

We use different basis functions to obtain an approximate solution in order to estimate the influence of their regularity on the stability and degree of approximation of this solution.

The exact solution belongs, in every instant t_k, to the Sobolev (Hilbert) space $H^1]0,L[$ and therefore the comparison between the exact ant the approximate solutions is made by means of the H^1 norm at different time points.

The result obtained is that, using as basis functions piecewise linear or "exponential" functions, a greater stability is obtained than using "characteristic" functions due to their greater regulatity.

BIBLIOGRAFIA

Bourke, W., "*A muti-level spectral model. I.* Formulation and hemispheric integrations Mo. Wea. Rev. 102 pp. 687-701. (1974).

Cea, J., "*Approximation variationnelle des problèmes aux limites Ann*". Ins. Fourier 14, 345-444. (1964)

Ciarlet, D.G. and Raviart, P.A. "*General Lagrange and Hermite interpolation en R^n with applications to finite element methds*". Arch. Rational Mech. Anal 46, 177-199. (1972).

Khoan, VO-K. "*Distributions Analyse de Fourier Operateurs aux limites derivées parcielles*". tome 1,1-289 et tome 2,1-332. Vuibert; Paris. (1970).

Lions, J.L. "*Equations differentielles opérationnelles*". Springe-Verlag, 1-291 (1961).

Lions, J.L. et Maagenes, E. "*Problèmes aux limites non homogeneos et applications*". Dunod; Paris, 1-372. (1968).

Mikhlin, S.G. "*Numerical realizations of the variational methds*". Traslated from the Russian by DR.R.S. Andersen; Computer Centre, the Australian National University, Camberra, 1-373. (1966).

Raviart, P.A. "*Sur l'approximation de certeines équations d'evolution lineaires*". Jour. de Math. pures et appliqués, 46, 11-107. (1967).

Schwartz, L. "*Théorie des Distributions*". Hermann, Paris; 1-413. (1966).

Teman, R. "*Analyse Numerique*". Presses Universitaires de France; Paris, 1-11.(1970)

Treves, F. "*Topological vector spaces, distributions and Kernels*" Pure and applied Mathematics; 96, 1-565. (1967).

Wang, H.H.; Halpern, P., Douglas Jr., J., and Dupont, T. "*Numerical solutions of the One-Dimensional Primitive Equations using Galerkin Approximations with localized basis functions*". Mon. Wea. Rev. 100, 738-746.(1973).

Yosida, K. "*Functional Analysis*". Springer-Verlag. Secod Edition, 1-465. (1968).

Funciones básicas	Tiempo/h F.E.	0	5	10	15	20	25	30
$\omega_j(x)\omega_k(t)$	u	$1{,}4.10^{-2}$	2.10^{-2}	$1{,}4.10^{-2}$	2.10^{-2}	6.10^{-2}	$1{,}2.10^{-1}$	$1{,}5.10^{-1}$
	h	$2{,}6.10^{-3}$	$2{,}8.10^{-2}$	6.10^{-2}	8.10^{-2}	1.10^{-1}	$1{,}2.10^{-1}$	$1{,}5.10^{-1}$
$e_j(x)e_k(t)$	u	8.10^{-2}	1.10^{-1}	$1{,}8.10^{-1}$	$2{,}1.10^{-1}$	$1{,}4.10^{-1}$	7.10^{-2}	8.10^{-2}
	h	$1{,}3.10^{-1}$	$3{,}7.10^{-1}$	$1{,}3.10^{-1}$	$3{,}7.10^{-1}$	$1{,}4.10^{-1}$	$3{,}8.10^{-2}$	$1{,}4.10^{-1}$
$\omega_j(x)e_k(t)$	u	$1{,}4.10^{-2}$	$5{,}6.10^{-2}$	$1{,}5.10^{-1}$	$2{,}0.10^{-1}$	$1{,}2.10^{-1}$	$1{,}5.10^{-2}$	$8{,}0.10^{-2}$
	h	$2{,}6.10^{-3}$	$3{,}5.10^{-1}$	$2{,}6.10^{-2}$	$3{,}5.10^{-1}$	$4{,}0.10^{-3}$	$3{,}5.10^{-1}$	$3{,}0.10^{-2}$
$\omega_j(x)\theta_k(t)$	u	$1{,}4.10^{-2}$	$3{,}2.10^{-1}$	$4{,}2.10^{1}$	$9{,}3.10^{3}$	$1{,}6.10^{6}$	$3{,}4.10^{8}$	$6{,}3.10^{30}$
	h	$2{,}6.10^{-3}$	$6{,}7.10^{-2}$	$8{,}9.10^{0}$	$1{,}5.10^{3}$	$3{,}2.10^{5}$	$5{,}8.10^{7}$	$1{,}2.10^{20}$

TABLA 1

Error funcional de la solución aproximada para diferentes instantes de tiempo y diferentes funciones base para un paso de tiempo de 3.600 seg.

Funciones básicas	Tiempo/h F.E.	0	5	10	15	20	25	30
$\omega_j(x)\omega_k(t)$	u	$1{,}4.10^{-2}$	3.10^{-2}	6.10^{-2}	$1{,}1.10^{-1}$	$1{,}3.10^{-1}$	$1{,}6.10^{-1}$	2.10^{-1}
	h	$2{,}6.10^{-3}$	5.10^{-2}	$9{,}7.10^{-2}$	$1{,}4.10^{-1}$	$1{,}8.10^{-1}$	$2{,}2.10^{-1}$	$2{,}6.10^{-1}$
$e_j(x)e_k(t)$	u	8.10^{-2}	$1{,}9.10^{-1}$	2.10^{-1}	8.10^{-2}	$1{,}6.10^{-1}$	$1{,}8.10^{-1}$	$8{,}4{,}10^{-2}$
	h	$1{,}3.10^{-1}$	$1{,}4.10^{-1}$	$1{,}4.10^{-1}$	$1{,}4.10^{-1}$	$1{,}4.10^{-1}$	$1{,}4.10^{-1}$	$1{,}4.10^{-1}$
$\omega_j(x)e_k(t)$	u	$1{,}4.10^{-2}$	$1{,}8.10^{-1}$	$1{,}7.10^{-1}$	$2{,}4.10^{-2}$	$1{,}5.10^{-1}$	$1{,}2.10^{-1}$	$7{,}5.10^{-2}$
	h	$2{,}6.10^{-3}$	$1{,}3.10^{-2}$	$2{,}9.10^{-2}$	$1{,}6.10^{-2}$	$3{,}5.10^{-3}$	$4{,}6.10^{-2}$	$2{,}8.10^{-2}$
$\omega_j(x)\theta_k(t)$	u	$1{,}4.10^{-2}$	$3{,}7.10^{-2}$	$5{,}5.10^{-2}$	$6{,}3.10^{-2}$	$5{,}1.10^{-2}$	$2{,}9.10^{-2}$	$2{,}9.10^{-2}$
	h	$2{,}6.10^{-3}$	$5{,}3.10^{-2}$	$1{,}1.10^{-1}$	$1{,}7.10^{-1}$	$2{,}3.10^{-1}$	$2{,}9.10^{-1}$	$3{,}6.10^{-1}$

TABLA 2

Error funcional de la solución aproximada para diferentes instantes de tiempo y diferentes funciones base para un paso de tiempo 1.800 seg.

Funciones básicas	Tiempo/h F.E.	0	5	10	15	20	25	30
$\omega_j(x)\omega_k(t)$	u	$1{,}4.10^{-2}$	$9{,}5.10^{-2}$	$1{,}8.10^{-1}$	$2{,}5.10^{-1}$	3.10^{-1}	$3{,}4.10^{-1}$	$3{,}8.10^{-1}$
	h	$2{,}6.10^{-3}$	$1{,}4.10^{-1}$	$2{,}5.10^{-1}$	$3{,}5.10^{-1}$	$4{,}4.10^{-1}$	$5{,}2.10^{-1}$	$5{,}9.10^{-1}$
$e_j(x)e_k(t)$	u	8.10^{-2}	2.10^{-1}	2.10^{-1}	8.10^{-2}	$1{,}7.10^{-1}$	$1{,}7.10^{-1}$	$8{,}5.10^{-2}$
	h	$1{,}3.10^{-1}$	$1{,}4.10^{-1}$	$1{,}4.10^{-1}$	$1{,}4.10^{-1}$	$1{,}4.10^{-1}$	$1{,}4.10^{-1}$	$1{,}4.10^{-1}$
$\omega_j(x)e_k(t)$	u	$1{,}4.10^{-1}$	$1{,}9.10^{-1}$	$1{,}7.10^{-1}$	$2{,}4.10^{-2}$	$1{,}6.10^{-1}$	$1{,}2.10^{-1}$	$7{,}5.10^{-2}$
	h	$2{,}6.10^{-3}$	$1{,}4.10^{-2}$	3.10^{-2}	$1{,}5.10^{-2}$	$3{,}6.10^{-3}$	$4{,}7.10^{-2}$	$2{,}7.10^{-2}$
$\omega_j(x)\theta_k(t)$	u	$1{,}4.10^{-2}$	$1{,}1.10^{-1}$	$2{,}3.10^{-1}$	$3{,}6.10^{-1}$	5.10^{-1}	$6{,}4.10^{-1}$	$7{,}7.10^{-1}$
	h	$2{,}6.10^{-3}$	$1{,}5.10^{-1}$	$3{,}3.10^{-1}$	$5{,}4.10^{-1}$	$7{,}8.10^{-1}$	1,1	1,4

TABLA 3

Error funcional de la solución aproximada para diferentes instantes de tiempo y diferentes funciones base para un paso de tiempo de 600 seg.