Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.
Bd. 17, S. 61—74 (1971)

EINE KLASSIFIKATION DER ε_0-REKURSIVEN FUNKTIONEN

von HELMUT SCHWICHTENBERG in Münster/Westfalen

KLEENE formuliert in [7] das Problem, „whether the ordinal numbers can be used to give a satisfactory classification of the general recursive functions into a hierarchy under some general principle". Der wohl naheliegendste Ansatz zur Konstruktion einer solchen Hierarchie, nämlich Beschränkung der Ordnungstypen der für Rekursionen zugelassenen Wohlordnungen, führt nicht zum Ziel: MYHILL und ROUTLEDGE haben bewiesen, daß jede rekursive Funktion durch elementare Operationen und nur eine Rekursion längs einer elementaren Wohlordnung vom Typ ω definiert werden kann ([11], [16]; s. auch LIU [9]). In [7] schlägt KLEENE eine andere Methode vor, rekursive Funktionen mit Ordinalzahlen in Verbindung zu bringen: Man geht aus von einer effektiv erzeugten Funktionenklasse, etwa der Klasse $\mathfrak{E}$ der elementaren Funktionen, konstruiert eine kanonische Aufzählungsfunktion E_1 (also $E_1 \notin \mathfrak{E}$), betrachtet die in E_1 elementaren Funktionen, konstruiert für sie eine kanonische Aufzählungsfunktion E_2 (also $E_2 \notin \mathfrak{E}(E_1)$), usw. Diese Konstruktion läßt sich transfinit fortsetzen, wenn für jede Limeszahl eine sie approximierende Fundamentalfolge zur Verfügung steht. KLEENE verwendet deshalb sein Bezeichnungssystem S_3 für konstruktive Ordinalzahlen, und zwar in einer Version, in der nur primitiv rekursive Fundamentalfolgen zugelassen sind ([7], p. 73); eine solche Einschränkung ist notwendig, da man sonst schon auf dem Niveau ω alle rekursiven Funktionen erhielte. Aber auch mit dieser Einschränkung kollabiert die Hierarchie: FEFERMAN zeigt in [2], daß man dann auf dem Niveau ω^2 alle rekursiven Funktionen erhält.

Wir behandeln hier das Klassifikationsproblem für einen Teil der rekursiven Funktionen, die „ε_0-rekursiven" Funktionen; darunter verstehen wir solche Funktionen, die definierbar sind durch elementare Operationen und „elementare λ-Rekursionen", $\lambda < \varepsilon_0$, der Form $f(x, \mathfrak{y}) = F([f]_{\prec x}, g_1, \ldots, g_r; x, \mathfrak{y})$ mit einer „Standardwohlordnung" $\prec$ vom Typ λ und einem elementaren Funktional F (genauer in § 1)[1]. Diese Funktionenklasse fällt mit der von KREISEL in [8] eingeführten Klasse der ordinal rekursiven Funktionen zusammen (einfache Folgerung aus § 2), enthält also genau die Funktionen, „deren Rekursivität in der reinen Zahlentheorie beweisbar ist" ([8], s. auch SHOENFIELD [18]).

Ein erstes Kompliziertheitsmaß für ε_0-rekursive Funktionen wird von der Definition nahegelegt (vgl. HEINERMANN [4]): Ist f durch elementare Operationen aus $g_1, \ldots, g_r$ definiert, und sind $g_1, \ldots, g_r$ die „Rekursionszahlen" $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ $(< \varepsilon_0)$

[1]) Mit λ bezeichnen wir hier Limeszahlen $< \varepsilon_0$, mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ beliebige Ordinalzahlen $< \varepsilon_0$. Daneben verwenden wir λ im Rahmen der CHURCHschen Schreibweise $\lambda \mathfrak{x} f(\mathfrak{x})$ für die Funktion f. Frakturbuchstaben $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ stehen für Variablentupel.

zugeordnet, so erhält f die Rekursionszahl $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Ist f durch elementare $\omega\alpha$-Rekursion aus $g_1, \ldots, g_r$ definiert, und sind $g_1, \ldots, g_r$ die Rekursionszahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ zugeordnet, so erhält f die Rekursionszahl $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) + \alpha$. $\mathfrak{R}_\alpha$ bestehe aus den ε_0-rekursiven Funktionen, die mit Rekursionszahlen $\leq \alpha$ definierbar sind. Offenbar enthält $\bigcup_{\alpha<\varepsilon_0} \mathfrak{R}_\alpha$ alle ε_0-rekursiven Funktionen.

Weiter verwenden wir die skizzierte KLEENEsche Methode zur Konstruktion einer Hierarchie $\mathfrak{C}_\alpha$, $\alpha < \varepsilon_0$; die erforderliche Festlegung von Fundamentalfolgen ist für die Limeszahlen $<\varepsilon_0$ in kanonischer Weise möglich. Nach Konstruktion gilt $\mathfrak{C}_\alpha \subset \mathfrak{C}_\beta$ für $\alpha < \beta$.[1])

Schließlich betrachten wir noch die folgende Variante des KLEENEschen Ansatzes (nach ROBBIN [14]; s. auch GRZEGORCZYK [3]); Man geht aus von den elementaren Funktionen, konstruiert eine alle elementaren Funktionen schließlich majorisierende Funktion F_1, betrachtet die in F_1 elementaren Funktionen, konstruiert für sie eine Majorante F_2, und so weiter bis ε_0. Die Funktionen F_α, $\alpha < \varepsilon_0$, lassen sich einfach angeben: $F_0(x) = 2^x$, $F_{\alpha+1}(x) = F_\alpha^x(x)$, $F_\lambda(x) = F_{\lambda[x]}(x)$ ($\lambda[x]$ x-tes Glied der kanonischen Fundamentalfolge für λ, F_α^x x-te Iterierte von F_α). Die Klasse der in F_α elementaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}_\alpha$.

Wir beweisen hier die Übereinstimmung der drei Hierarchien: $\mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{C}_\alpha = \mathfrak{E}_\alpha$ für $\alpha < \varepsilon_0$. Es handelt sich also um eine anscheinend natürliche Hierarchie, die ausgehend von den elementaren Funktionen echt aufsteigt, und die unterhalb ω die primitiv rekursiven Funktionen, unterhalb ω^ω die mehrfach rekursiven Funktionen und unterhalb ε_0 die ε_0-rekursiven Funktionen ausschöpft. – Verwandte Resultate stammen von ROBBIN [14], der ähnliche Gleichheiten „im Limes" für $\alpha \to \omega^n$ erhalten hat, von MEYER und D. M. RITCHIE [10], [13], die Rekursionszahlen ($<\omega$) für primitiv rekursive Funktionen betrachten und damit GRZEGORCZYK-Klassen charakterisieren (s. auch [12], [15], [17]), und von AXT [1], der gezeigt hat, daß eine Variante der Methode von KLEENE unterhalb ω auf GRZEGORCZYK-Klassen führt.

§ 1. Definition der Funktionenklassen $\mathfrak{R}_\alpha$, $\mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{E}_\alpha$

Eine Funktion heißt *elementar* (im KALMÁRschen Sinn), wenn sie aus Zahlvariablen und Zahlkonstanten mit den Funktionen $x + y$, $x \cdot y$, $[x/y]$ und den Operationen $\sum_{x<y}$, $\prod_{x<y}$ explizit definiert werden kann; läßt man noch Funktionsvariable zu, so erhält man elementare Funktionale. Einfache Eigenschaften elementarer Funktionen sind in KLEENE [6], p. 285–287, zusammengestellt; die Diskussion primitiv rekursiver Funktionale in [6], § 47 überträgt sich (bis auf # G) auf elementare Funktionale.

Wir verwenden eine *Kodierung der endlichen Zahlenfolgen*, bei der die Funktionen $\lambda x_0 \ldots x_n \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ durch Polynome majorisierbar sind[2]). – Eine Zahlenfolge

[1]) Mit $\subset$ bezeichnen wir die echte Inklusion.

[2]) Vgl. SMULLYAN [19], p. 82. Unsere Kodierung unterscheidet sich von der dort angegebenen durch die zusätzliche Eigenschaft $\langle x_0, \ldots, x_n, 0\rangle = \langle x_0, \ldots, x_n\rangle$ und dadurch, daß hier jede Zahl als Kodenummer auftritt.

$z_0 \ldots z_n$ heiße *m-adische* (*modifizierte m-adische*) *Darstellung von* x, wenn $x = \sum_{i \leqq n} z_i m^i$ und $0 \leqq z_i \leqq m - 1$ $(1 \leqq z_i \leqq m)$; die leere Zahlenfolge sei m-adische und modifizierte m-adische Darstellung von 0. Statt „2-adisch" sagen wir auch „binär", statt „3-adisch" auch „ternär". $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ sei die wie folgt konstruierte Zahl: Man bilde die modifizierten Binärdarstellungen $\underline{x_i}$, bilde damit die Ziffernfolge $\underline{x_n}0 \ldots 0\underline{x_1}0\underline{x_0}$ und lese sie als Ternärdarstellung. Beispiel: $\langle 3, 2, 0, 5 \rangle = 21002011$ (Ternärdarstellung). Offenbar ist $\langle x_0, \ldots, x_n, 0 \rangle = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$, und jedes x läßt sich bis auf „angehängte Nullen" eindeutig in der Form $x = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ darstellen. $(x)_i$ sei die Zahl x_i in dieser Darstellung von x, $l(x)$ sei das größte $i \geqq 1$ mit $(x)_{i-1} > 0$, falls es ein solches i gibt, und 0 sonst („Länge von x").

Lemma. $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle \leqq 3^n \prod_{i \leqq n} (x_i + 1)^2$.

Beweis. Es sei $l_2^*(x)$ die Länge der modifizierten Binärdarstellung von x. Dann gilt

$$\langle x_0, \ldots, x_n \rangle \leqq 3^{n + \sum_{i \leqq n} l_2^*(x_i)}.$$

Mit $3^{l_2^*(x)} \leqq (2^{l_2^*(x)})^2 \leqq (x + 1)^2$ folgt die Behauptung.

Lemma. *Die Funktionen* $\lambda x_0 \ldots x_n \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$, $\lambda x i (x)_i$ *und* l *sind elementar.*

Beweis. Folgende Funktionen sind elementar (s. [6]):

$$\begin{aligned}
z_3(i, x) &= z_i \text{ in einer Ternärdarstellung } z_n \ldots z_0 \text{ von } x \\
&= rm([x/3^i], 3) \\
l_3(x) &= \text{Länge der kürzesten Ternärdarstellung von } x \\
&= \mu i_{i \leqq x}[3^i > x] \\
a(i, x) &= \text{Anzahl der } j < i \text{ mit } z_3(j, x) = 0 \\
&= \sum_{z < i} (1 \dot{-} z_3(j, x)) \\
b(i, x) &= \text{Erster Index links von der } i\text{-ten Null in einer Ternärdarstellung} \\
& \text{ von } x \\
&= \mu j_{j \leqq i+x}[a(j, x) = i] \\
(x)_i &= \sum_{b(i,x) \leqq j < b(i+1,x)} z_3(j, x) \cdot 2^{j \dot{-} b(i,x)} \\
\langle x_0, \ldots, x_n \rangle &= \mu x_{x \leqq 3^n \prod_{i \leqq n} (x_i+1)^2} [\forall i_{i \leqq n} (x)_i = x_i] \\
l(x) &= \mu i_{i \leqq x}[b(i, x) = l_3(x) + 1].
\end{aligned}$$

Für unseren Rekursionsbegriff benötigen wir spezielle Wohlordnungen. Sei

$$x <_1 y \leftrightarrow x < y$$

$$x <_{n+1} y \leftrightarrow \exists i_{i \leqq x+y}((x)_i < (y)_i \wedge \forall j_{j \leqq x+y}(i <_n j \rightarrow (x)_j = (y)_j))$$

(nach HILBERT/BERNAYS [5], p. 361). $<_n$ ist eine elementare Wohlordnung der natürlichen Zahlen vom Typ ω_n $(\omega_1 = \omega,\ \omega_{n+1} = \omega^{\omega_n})$. Unter einer *Standard-*

Wohlordnung vom Typ $\alpha < \varepsilon_0$ verstehen wir eine Wohlordnung der natürlichen Zahlen, die elementar isomorph ist zu dem Anfangsstück vom Typ α des „kleinsten" $<_n$ mit $\alpha \leqq \omega_n$; zwei Wohlordnungen $\prec, \prec'$ von Mengen M, M' natürlicher Zahlen nennen wir *elementar isomorph*, wenn M, M' elementar sind und es elementare Funktionen h, h' gibt mit $h'(h(x)) = x$ für $x \in M$, $h(h'(x')) = x'$ für $x' \in M'$, $x \prec y \leftrightarrow h(x) \prec' h(y)$ für $x, y \in M$.

Ist f aus $g_1, \ldots, g_r$ definiert durch $f(x, \mathfrak{y}) = F([f]_{\prec x}, g_1, \ldots, g_r; x, \mathfrak{y})$ mit einer Standard-Wohlordnung $\prec$ vom Typ $\lambda < \varepsilon_0$ und einem elementarem Funktional F, so sprechen wir von einer *elementaren λ-Rekursion* (oder elementaren $\prec$-Rekursion); dabei ist

$$[f]_{\prec x}(u, \mathfrak{v}) = \begin{cases} f(u, \mathfrak{v}) & \text{für } u \prec x \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Als *ε_0-rekursiv* bezeichnen wir die Funktionen der kleinsten Funktionenklasse, die abgeschlossen ist gegen (elementare) explizite Definitionen der Form

$$f(\mathfrak{x}) = F(g_1, \ldots, g_r; \mathfrak{x}),$$

F elementar, und elementare λ-Rekursionen, $\lambda < \varepsilon_0$.

Jeder (Definition einer) ε_0-rekursiven Funktion ordnen wir wie folgt eine *Rekursionszahl* $\alpha < \varepsilon_0$ zu: Ist f explizit aus $g_1, \ldots, g_r$ definiert, und haben $g_1, \ldots, g_r$ die Rekursionszahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, so erhält f die Rekursionszahl $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ (also 0 im Fall $r = 0$). Ist f durch elementare $\omega\alpha$-Rekursion definiert aus $g_1, \ldots, g_r$, und haben $g_1, \ldots, g_r$ die Rekursionszahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, so erhält f die Rekursionszahl $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) + \alpha$. $\mathfrak{R}_\alpha$ sei die Klasse der mit Rekursionszahlen $\leqq \alpha$ definierbaren ε_0-rekursiven Funktionen.

Vorbereitend zur Definition der Klassen $\mathfrak{E}_\alpha$ ordnen wir jeder (Definition einer) in $g_1, \ldots, g_r$ ($m_1, \ldots, m_r$-stellig) elementaren Funktion f einen *Index* $\underline{f}$ zu. Dafür ist es bequem, die in $g_1, \ldots, g_r$ elementaren Funktionen aus geeigneten Ausgangsfunktionen durch normierte Einsetzungs-, Summen- und Produktschemata zu erzeugen:

g_i	$\underline{g_i} = \langle 0, m_i, i\rangle$
$C_n^q(x_1, \ldots, x_n) = q$	$\underline{C_n^q} = \langle 1, n, q\rangle$
$U_n^i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$	$\underline{U_n^i} = \langle 2, n, i\rangle$
$f(x, y) = x + y$	$\underline{f} = \langle 3, 2\rangle$
$f(x, y) = x \cdot y$	$\underline{f} = \langle 4, 2\rangle$
$f(x, y) = [x/y]$	$\underline{f} = \langle 5, 2\rangle$
$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$	$f = \langle 6, n, \underline{g}, \underline{h_1}, \ldots, \underline{h_m}\rangle$
$f(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i<x} g(i, y_1, \ldots, y_n)$	$\underline{f} = \langle 7, n+1, \underline{g}\rangle$
$f(x, y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i<x} g(i, y_1, \ldots, y_n)$	$f = \langle 8, n+1, \underline{g}\rangle$

Es sei $el^{g_1,\dots,g_r}(i, x)$, falls i Index einer in $g_1, \dots, g_r$ elementaren Funktion ist, der Wert dieser Funktion an der Stelle $(x)_0, \dots, (x)_{n-1}$, und 0 sonst. Man zeigt leicht ([7], p. 74):

a) *$el^{g_1,\dots,g_r}$ ist aus $g_1, \dots, g_r$ durch eine elementare $<$-Rekursion definierbar.*

Später benötigen wir Funktionen Sb_n^m und It mit folgenden Eigenschaften: Sind $\underline{g}, \underline{h_1}, \dots, \underline{h_m}$ Indizes von $g, h_1, \dots, h_m$, und ist f definiert durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n)),$$

so ist $Sb_n^m(\underline{g}, \underline{h_1}, \dots, \underline{h_m})$ Index von f; ist $\underline{f}$ Index einer einstelligen Funktion f, so ist $It(n, \underline{f})$ Index der n-ten Iterierten von f. Dies leisten $Sb_n^m(i, j_1, \dots, j_m) = \langle 6, n, i, j_1, \dots, j_m\rangle$ und $It(0, i) = \underline{U_1^1}$, $It(n+1, i) = Sb_1^1(It(n, i), i)$. Die Funktion It ist elementar majorisierbar, denn allgemein gilt:

Ist $f(0, \mathfrak{y}) = g(\mathfrak{y})$, $f(x+1, \mathfrak{y}) = h(x, f(x, \mathfrak{y}), \mathfrak{y})$, und sind g, h durch Polynome majorisierbar, so ist f elementar majorisierbar.

Beweis. Sei etwa $g(\mathfrak{y}) \leqq \max(\mathfrak{y}, 2)^k$, $h(x, z, \mathfrak{y}) \leqq \max(x, z, \mathfrak{y}, 2)^k$. Durch Induktion über x ergibt sich leicht $f(x, \mathfrak{y}) \leqq \max(x, \mathfrak{y}, 2)^{k^{x+1}}$. Also

b) *$\lambda x \underline{C_n^x}$, Sb_n^m und It sind elementar.*

Von der gewählten Indizierung der in $g_1, \dots, g_r$ elementaren Funktionen verwenden wir im folgenden nur die Eigenschaften a) und b).

Zu jeder Limeszahl $\lambda < \varepsilon_0$ definieren wir die *kanonische Fundamentalfolge* $\lambda[x]$, $x = 0, 1, \dots$: λ läßt sich eindeutig darstellen als $\omega^{\alpha_r} + \cdots + \omega^{\alpha_0}$ mit $\alpha_r \geqq \cdots \geqq \alpha_0$ und $\alpha_0 > 0$. Ist α_0 Nachfolgerzahl, so setzen wir

$$\lambda[x] = \omega^{\alpha_r} + \cdots + \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_0 - 1} x,$$

und ist α_0 Limeszahl, so sei

$$\lambda[x] = \omega^{\alpha_r} + \cdots + \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_0[x]}.$$

Jetzt können wir die Funktionen E_α, $\alpha < \varepsilon_0$, definieren:

$$E_0(i, x) = 0, \qquad E_{\alpha+1}(i, x) = el^{E_\alpha}(i, x), \qquad E_\lambda(i, x) = E_{\lambda[(i)_0]+1}((i)_1, x).^{1)}$$

$\mathfrak{E}_\alpha$ sei die Klasse $\mathfrak{E}(E_\alpha)$ der in E_α elementaren Funktionen. Es gilt $\mathfrak{E}_\alpha \subset \mathfrak{E}_\beta$ für $\alpha < \beta$; denn E_α ist elementar in E_β für $\alpha < \beta$ (Beweis durch Induktion über β), aber $E_{\alpha+1}$ ist nicht elementar in E_α (sonst hätte man $1 \dot- E_{\alpha+1}(x, \langle x\rangle) = E_{\alpha+1}(i_0, \langle x\rangle)$, also einen Widerspruch für $x = i_0$).

Die Definition der Klassen $\mathfrak{E}_\alpha$ ist besonders einfach: Man definiert Funktionen F_α, $\alpha < \varepsilon_0$, durch

$$F_0(x) = 2^x, \qquad F_{\alpha+1}(x) = F_\alpha^x(x), \qquad F_\lambda(x) = F_{\lambda[x]}(x),$$

und setzt $\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{E}(F_\alpha)$. Zur Motivation beweisen wir $F_\alpha \notin \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{E}_\beta$; dazu zunächst ein

[1]) Diagonalisiert wird also über Aufzählungfunktionen für die in $E_{\lambda[(i)_0]}$ elementaren Funktionen, nicht über die $E_{\lambda[(i)_0]}$ selbst. Das ist für das Folgende bequem, aber nicht wesentlich.

Lemma. (*Einfache Eigenschaften der* F_α)

(1) $F_\alpha(x) > x$ *für* $x \geqq 1$.

(2) F_α *wächst echt monoton.*

(3) *Ist* α *„Erweiterung" von* β, *so gilt* $F_\alpha(x) \geqq F_\beta(x)$ *für* $x \geqq 1$.

(4) *Ist* $\alpha > \beta$, *so gilt* $F_\alpha(x) > F_\beta(x)$ *für* $x \geqq c_\beta$.

Wir nennen α Erweiterung von β, wenn $\alpha = \omega^{\alpha_r} + \cdots + \omega^{\alpha_0}$, $\alpha_r \geqq \cdots \geqq \alpha_0$, $\beta = \omega^{\beta_s} + \cdots + \omega^{\beta_0}$, $\beta_s \geqq \cdots \geqq \beta_0$, und es $i_0 < \cdots < i_s \leqq r$ gibt, so daß $\alpha_{i_0}, \ldots, \alpha_{i_s}$ Erweiterungen von $\beta_0, \ldots, \beta_s$ sind[1]).

Mit Hilfe des Lemmas zeigt man leicht, daß jede in F_β elementare Funktion majorisierbar ist durch $F_\beta^k(\max(\mathfrak{x}))$ mit genügend großem k. Daraus folgt, daß F_α in keinem $\mathfrak{E}_\beta$ mit $\beta < \alpha$ enthalten sein kann, denn andernfalls wäre F_α majorisierbar durch eine F_β-Iterierte, also schließlich majorisierbar durch $F_{\beta+1}$ im Widerspruch zu (4).

Beweis des Lemmas: (1) erhält man trivial durch Induktion über α. (2) und (3) beweisen wir gemeinsam durch Induktion über α. $\alpha = 0$: trivial. α Nachfolgerzahl: (2) $F_\alpha(x+1) = F_{\alpha-1}^{x+1}(x+1) > F_{\alpha-1}^x(x+1) > F_{\alpha-1}^x(x) = F_\alpha(x)$. (3) Fall 1: $\alpha - 1$ Erweiterung von β. $F_\alpha(x) = F_{\alpha-1}^x(x) \geqq F_{\alpha-1}(x) \geqq F_\beta(x)$. Fall 2: β Nachfolgerzahl, $\alpha - 1$ Erweiterung von $\beta - 1$. $F_\alpha(x) = F_{\alpha-1}^x(x) \geqq F_{\beta-1}^x(x) = F_\beta(x)$. α Limeszahl: (2) $F_\alpha(x+1) = F_{\alpha[x+1]}(x+1) \geqq F_{\alpha[x]}(x+1) > F_{\alpha[x]}(x) = F_\alpha(x)$, da $\alpha[x+1]$ Erweiterung von $\alpha[x]$ (Beweis durch Induktion über α). (3) Wir benötigen einige Hilfsbegriffe. Für $\gamma = \omega^{\gamma_p} + \cdots + \omega^{\gamma_0}$, $\gamma_p \geqq \cdots \geqq \gamma_0$, sei $\gamma +_0 \delta = \gamma + \delta$, falls $\gamma + \delta = \gamma \# \delta$, und $\gamma +_{i+1} \delta = \omega^{\gamma_p} + \cdots + \omega^{\gamma_0 +_i \delta}$, falls $\gamma > 0$ und $\gamma +_i \delta$ erklärt. Weiter sei $\operatorname{minexp}(\gamma) = \gamma_0$, falls $\gamma > 0$, und $= 0$ sonst. Wir behaupten: Ist γ Erweiterung von $\delta = \omega^{\delta_q} + \cdots + \omega^{\delta_0}$, $\delta_q \geqq \cdots \geqq \delta_0$, so gibt es eine Erweiterung γ' von δ, so daß für alle i $\operatorname{minexp}^i(\gamma')$ Erweiterung von $\operatorname{minexp}^i(\delta)$ ist und $\gamma = \gamma' +_{j-1} \varrho_{j-1}(\gamma, \delta) \ldots +_0 \varrho_0(\gamma, \delta)$ (Linksklammerung), j minimal mit $\operatorname{minexp}^j(\delta) = 0$. Beweis durch Induktion über δ. $\delta = 0$: trivial. $\delta > 0$: Sei m minimal mit γ_m Erweiterung von δ_0. Zu γ_m, δ_0 wählen wir nach Induktionsvoraussetzung ein γ_m' und setzen $\gamma' = \omega^{\gamma_p} + \cdots + \omega^{\gamma_{m+1}} + \omega^{\gamma_m'}$. γ' ist Erweiterung von δ, und $\operatorname{minexp}^{i+1}(\gamma') = \operatorname{minexp}^i(\gamma_m')$ Erweiterung von $\operatorname{minexp}^i(\delta_0) = \operatorname{minexp}^{i+1}(\delta)$. Mit $\varrho_0(\gamma, \delta) = \omega^{\gamma_{m-1}} + \cdots + \omega^{\gamma_0}$, $\varrho_{i+1}(\gamma, \delta) = \varrho_i(\gamma_m, \delta_0)$ ergibt sich $\gamma' +_{j-1} \varrho_{j-1}(\gamma, \delta) \ldots +_0 \varrho_0(\gamma, \delta) = \omega^{\gamma_p} + \cdots + \omega^{\gamma_{m+1}} + \omega^{\gamma_m' +_{j-2} \varrho_{j-1}(\gamma, \delta) \ldots +_0 \varrho_1(\gamma, \delta)} + \varrho_0(\gamma, \delta) = \gamma$. — Zu α, β wählen wir ein solches α'. Zunächst ist $F_\alpha(x) \geqq F_{\alpha'}(x)$ für $x \geqq 1$, denn allgemein gilt $F_{\gamma +_i \delta}(x) \geqq F_\gamma(x)$ für $x \geqq 1$: für $i = 0$ ist das trivial durch Induktion über δ zu sehen, und beim Schluß von i auf $i + 1$ verwendet man ebenfalls Induktion über δ und benutzt, falls δ Nachfolgerzahl, $(\gamma +_{i+1} \delta)[x] = \gamma +_{i+1} (\delta - 1) +_i \omega^{\operatorname{minexp}^{i+1}(\gamma) + (\delta - 1)}(x-1)$ (Beweis durch Induktion nach i), und falls δ Limeszahl, $(\gamma +_{i+1} \delta)[x] = \gamma +_{i+1} \delta[x]$. Weiter ergibt sich $F_{\alpha'}(x) \geqq F_\beta(x)$ aus folgender Behauptung: Ist γ Limeszahl und ist für alle i $\operatorname{minexp}^i(\gamma)$ Erweite-

---

[1]) Leere Summen sind zugelassen, so daß sich auch 0 in der angegebenen Form darstellen läßt.

rung von $\operatorname{minexp}^i(\delta)$, so gibt es $m \geqq 1$, $n \geqq 0$, derart daß $\gamma[x]^m := \gamma[x][x]\cdots[x]$ Erweiterung von $\delta[x]^n$. Beweis durch Induktion über γ: Sei $\gamma = \omega^{\gamma_p} + \cdots + \omega^{\gamma_0}$, $\gamma_p \geqq \cdots \geqq \gamma_0 > 0$, und $\delta = \omega^{\delta_q} + \cdots + \omega^{\delta_0}$, $\delta_q \geqq \cdots \geqq \delta_0 > 0$. Ist $\delta_0 = 0$, so genügt $m = 1$, $n = 0$. Sind γ_0, δ_0 Nachfolgerzahlen, so wähle man $m = n = 1$. Sind γ_0, δ_0 Limeszahlen, so folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung für γ_0, δ_0. Ist γ_0 Limeszahl, δ_0 Nachfolgerzahl, so verwende man die Induktionsvoraussetzung für $\gamma[x]$, δ. Beweis zu (4): Sei $\beta = \omega^{\delta_m}b_m + \cdots + \omega^{\delta_0}b_0$, $\delta_m > \cdots > \delta_0$. Wir wählen $c_\beta > 2$, $> \max(b_m, \ldots, b_0)$ und so, daß für jede Limeszahl δ_n unter $\delta_m, \ldots, \delta_1$ gilt $\delta_n[c_\beta] > \delta_{n-1}$. (4) läßt sich dann leicht durch Induktion nach α beweisen: α Nachfolgerzahl $\geqq \beta + 1$: $F_\alpha(x) = F_{\alpha-1}^x(x) > F_{\alpha-1}(x) \geqq F_\beta(x)$ für $x \geqq c_\beta$. α Limeszahl $\geqq \beta + 1$: Zu zeigen ist $F_{\alpha[x]}(x) > F_\beta(x)$ für $x \geqq c_\beta$. Sei $\alpha = \omega^{\delta_m}a_m + \cdots + \omega^{\delta_n}a_n$, $\delta_m > \cdots > \delta_n > 0$, $a_n > 0$, und $\beta = \omega^{\delta_m}b_m + \cdots + \omega^{\delta_n}b_n + \cdots + \omega^{\delta_0}b_0$, $\delta_m > \cdots > \delta_0$. Dann ist $\alpha[x] = \omega^{\delta_m}a_m + \cdots + \omega^{\delta_n}(a_n - 1) + \omega^{\delta_n - 1}x$, falls δ_n Nachfolgerzahl, und $\alpha[x] = \omega^{\delta_m}a_m + \cdots + \omega^{\delta_n}(a_n - 1) + \omega^{\delta_n[x]}$, falls δ_n Limeszahl. Nach Wahl von c_β ist $\alpha[x] > \beta$ für $x \geqq c_\beta$, also nach Induktionsvoraussetzung auch $F_{\alpha[x]}(x) > F_\beta(x)$.

§ 2. Beweis des Zusammenfallens der drei Hierarchien

Wir zeigen $\mathfrak{E}_\alpha \subseteqq \mathfrak{R}_\alpha$, $\mathfrak{E}_\alpha \subseteqq \mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{R}_\alpha \subseteqq \mathfrak{E}_\alpha$. Die ersten beiden Behauptungen lassen sich geradeaus beweisen. Dem Beweis von $\mathfrak{R}_\alpha \subseteqq \mathfrak{E}_\alpha$ liegt die folgende Idee zugrunde: Man betrachtet die Zahl $s_f(\mathfrak{x})$ der Rechenschritte zur Berechnung von $f(\mathfrak{x})$ und verwendet eine Version des KLEENEschen Normalformentheorems, in der anstelle des μ-Operators solche „Schrittzahlfunktionen“ (oder Majoranten davon) auftreten.

Beweis zu $\mathfrak{E}_\alpha \subseteqq \mathfrak{R}_\alpha$: Wegen $\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{E}(E_\alpha)$ genügt es zu zeigen $E_\alpha \in \mathfrak{R}_\alpha$. Dies beweisen wir durch Induktion über α. $\alpha = 0$: trivial. α Nachfolgerzahl: $E_\alpha = el^{E_{\alpha-1}}$ ist durch eine elementare $<$-Rekursion aus $E_{\alpha-1}$ definierbar (vgl. a) in § 1). α Limeszahl: $\prec$ sei eine Standard-Wohlordnung vom Typ $\omega\alpha$; die einem $\beta < \omega\alpha$ entsprechende Zahl bezeichnen wir mit $|\beta|$. Dann entsprechen den folgenden Ordinalzahlrelationen und -funktionen elementare Relationen und Funktionen: ist Null, ist Nachfolgerzahl, ist Limeszahl, Vorgänger, $+$, $\cdot$ und σ, ϱ mit $\beta = \omega\sigma(\beta) + \varrho(\beta)$; weiter gibt es elementare Funktionen g, h mit $g(|\lambda|, x) = g(|\lambda[x]|)$ und $h(x) = |x|$. Die einfachen Beweise dafür übergehen wir hier. Wir wollen jetzt eine Funktion $\bar{E}_\alpha$ mit $\bar{E}_\alpha(|\omega\gamma + i|, x) = E_\gamma(i, x)$ für $\gamma < \alpha$ durch elementare $\prec$-Rekursion definieren. Für $\bar{E}_\alpha$ muß gelten

$$\begin{aligned}
\bar{E}_\alpha(|i|, x) &= 0,\\
\bar{E}_\alpha(|\omega(\gamma+1) + i|, x) &= E_{\gamma+1}(i, x)\\
&= el^{E_\gamma}(i, x)\\
&= F([el^{E_\gamma}]_{<i}, E_\gamma; i, x), \quad F \text{ elementares Funktional,}\\
&= F([E_{\gamma+1}]_{<i}, E_\gamma; i, x)\\
&= F(\lambda j x[\bar{E}_\alpha]_{\prec|\omega(\gamma+1)+i|}(|\omega(\gamma+1) + j|, x),\\
&\qquad \lambda j x[\bar{E}_\alpha]_{\prec|\omega(\gamma+1)+i|}(|\omega\gamma + j|, x); i, x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{E}_\alpha(|\omega\lambda + i|, x) &= E_\lambda(i, x)\\ &= E_{\lambda[(i)_0]+1}((i)_1, x)\\ &= [\bar{E}_\alpha]_{<|\omega\lambda+i|}(|\omega(\lambda[(i)_0] + 1) + (i)_1|, x).\end{aligned}$$

Daraus erkennt man, daß $\bar{E}_\alpha$ durch eine elementare $\omega\alpha$-Rekursion definierbar ist, also $\bar{E}_\alpha \in \mathfrak{R}_\alpha$. Es folgt $E_\alpha \in \mathfrak{R}_\alpha$, denn wegen $E_\alpha(i, x) = E_{\alpha[(i)_0]+1}((i)_1, x) = \bar{E}_\alpha(|\omega(\alpha[(i)_0] + 1) + (i)_1|, x)$ ist E_α elementar in $\bar{E}_\alpha$.

Beweis zu $\mathfrak{E}_\alpha \subseteqq \mathfrak{C}_\alpha$: Wegen $\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{E}(F_\alpha)$, $\mathfrak{C}_\alpha = \mathfrak{E}(E_\alpha)$ genügt es zu zeigen, daß F_α elementar in E_α ist. Zunächst eine Vorbetrachtung: Nehmen wir an, wir hätten schon eine Funktion In, die jedem $\alpha < \varepsilon_0$ einen Index (§ 1) zuordnet, mit dem F_α elementar in E_α ist. Dann ist $F_\alpha(x) = E_{\alpha+1}(In(\alpha), \langle x\rangle)$, also $F_\alpha^n(x) = E_{\alpha+1}(It(n, In(\alpha)), \langle x\rangle)$, also

$$F_{\alpha+1}(x) = E_{\alpha+1}(It(x, In(\alpha)), \langle x\rangle), \tag{1}$$

und $F_{\lambda[n]}(x) = E_{\lambda[n]+1}(In(\lambda[n]), \langle x\rangle) = E_\lambda(\langle n, In(\lambda[n])\rangle, \langle x\rangle)$, also

$$F_\lambda(x) = E_\lambda(\langle x, In(\lambda[x])\rangle, \langle x\rangle). \tag{2}$$

Nehmen wir weiter an, daß bei einer Kodierung $\alpha \Rightarrow |\alpha|$ der Ordinalzahlen $\alpha < \varepsilon_0$ der Funktion In eine elementare Funktion In^* entspricht, und daß es für die gewählte Kodierung eine elementare Funktion g gibt mit $g(|\lambda|, x) = |\lambda[x]|$. Dann folgen aus (1) und (2)

$$In^*(|\alpha + 1|) = Sb_1^2(\underbracket{E_{\alpha+1}}, Sb_1^2(\underbracket{It}, \underbracket{U_1^1}, Sb_1^1(\underbracket{In^*}, \underbracket{C_1^{|\alpha|}})), \underbracket{\lambda x\langle x\rangle}), \tag{3}$$

$$In^*(|\lambda|) = Sb_1^2(\underbracket{E_\lambda}, Sb_1^2(\underbracket{\lambda xy\langle x, y\rangle}, \underbracket{U_1^1}, Sb_1^1(\underbracket{In^*}, Sb_1^2(\underbracket{g}, \underbracket{C_1^{|\lambda|}}, \underbracket{U_1^1}))), \underbracket{\lambda x\langle x\rangle}). \tag{4}$$

(Die Indizierung bezieht sich auf die in $E_{\alpha+1}$ bzw. in E_λ elementaren Funktionen; also ist in (3) $\underbracket{E_{\alpha+1}} = \langle 0, 2, 1\rangle$ und in (4) $\underbracket{E_\lambda}$ auch $= \langle 0, 2, 1\rangle$.) Weiter gilt

$$In^*(|0|) = \underbracket{\lambda x\, 2^x}. \tag{5}$$

Wir kommen jetzt zum Beweis, daß F_α elementar in E_α ist. Zunächst ist eine geeignete Kodierung der Ordinalzahlen $< \varepsilon_0$ anzugeben. π, π_1, π_2 seien elementare Funktionen mit $\pi_1(\pi(x, y)) = x$, $\pi_2(\pi(x, y)) = y$, $\pi(\pi_1(z), \pi_2(z)) = z$, und es sei $\pi(i, x) \prec \pi(j, y)$ genau dann, wenn $i < j$, oder wenn $i = j$ und $x <_{i+1} y$. Dann ist $\prec$ eine Wohlordnung der natürlichen Zahlen vom Typ ε_0, und definiert man $|\alpha|$ als die dabei einem $\alpha < \varepsilon_0$ entsprechende Zahl, so entsprechen den Ordinalzahlbegriffen Null, Nachfolgerzahl, Limeszahl, Vorgänger elementare Relationen und Funktionen, und es gibt eine elementare Funktion g mit $g(|\lambda|, x) = |\lambda[x]|$; die einfachen Beweise dafür übergehen wir wieder.

Weiter benötigen wir das folgende Rekursionstheorem für elementare Funktionen (nach KLEENE [7], p. 75): *Zu jeder elementaren Funktion $f(x, \mathfrak{x})$ gibt es einen Index i von $\lambda\mathfrak{x} f(i, \mathfrak{x})$.*

Zum Beweis des Rekursionstheorems definieren wir elementare Funktionen S_n^m mit folgender Eigenschaft: Ist i Index einer elementaren Funktion $g(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$, so ist $S_n^m(i, y_1, \ldots, y_m)$ Index von $\lambda x_1 \ldots x_n\, g(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$.

Dies leistet $S^m_n(i, y_1, \ldots, y_m) = Sb^{n+m}_n(i, \underbrace{C^{y_1}_n}, \ldots, \underbrace{C^{y_m}_n}, \underbrace{U^1_n}, \ldots, \underbrace{U^n_n})$. Ist nun f elementar, so wähle man j als Index von $\lambda y \mathfrak{x} f(S^1_n(y, y), \mathfrak{x})$ und setze $i = S^1_n(j, j)$. Dann ist i Index von $\lambda \mathfrak{x} f(i, \mathfrak{x})$.

Eine Anwendung des Rekursionstheorems liefert nun unmittelbar eine elementare Funktion In^* mit (3), (4), (5), und durch Induktion über α folgt leicht, daß F_α in E_α elementar ist mit dem Index $In^*(|\alpha|)$.

Beweis zu $\mathfrak{R}_\alpha \subseteqq \mathfrak{E}_\alpha$: Wir diskutieren zunächst ein formales Berechnungsverfahren für ε_0-rekursive Funktionen. Betrachtet werden Terme $a, b, \ldots$, die mit Konstanten $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \ldots$ für ε_0-rekursive Funktionen wie folgt definiert sind: Zahlvariablen $x, y, \ldots$ und Zahlkonstanten (Zk) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ sind Terme; mit $a_1, \ldots, a_n$ ist für beliebiges $\boldsymbol{f}$ auch $\boldsymbol{f}(a_1, \ldots, a_n)$ ein Term; mit a, b sind auch $a + b$, $a \cdot b$, $[a/b]$, $\sum\limits_{x<a} b$, $\prod\limits_{x<a} b$ und $[a]_{b=0}$ als Abkürzung für $\begin{cases} a \text{ falls } b = 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$ Terme. Für jeden Term a ohne freie Variable definieren wir den reduzierten Term a' induktiv durch

$$
\begin{array}{rll}
\boldsymbol{x}' & = \boldsymbol{x}, & \\
\boldsymbol{f}(a_1, \ldots, a_n)' & = \boldsymbol{f}(a_1', a_2, \ldots, a_n) & \text{falls } a_1 \text{ keine Zk} \\
 & = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, a_2', a_3, \ldots, a_n) & \text{falls } a_1 = \boldsymbol{x}_1, a_2 \text{ keine Zk} \\
 & \ldots & \\
 & = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}, a_n') & \text{falls } a_1 = \boldsymbol{x}_1, \ldots, a_{n-1} = \boldsymbol{x}_{n-1}, a_n \text{ keine Zk} \\
 & = a[\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n] & \text{falls } a_1 = \boldsymbol{x}_1, \ldots, a_n = \boldsymbol{x}_n \text{ und} \\
 & & \boldsymbol{f}(x_1, \ldots, x_n) = a \text{ Definitionsgleichung} \\
 & & \text{von } \boldsymbol{f},^{1)} \\
(a + b)' & = a' + b & \text{falls } a \text{ keine Zk} \\
 & = \boldsymbol{x} + b' & \text{falls } a = \boldsymbol{x}, b \text{ keine Zk} \\
 & = \boldsymbol{z} & \text{falls } a, b \text{ Zk, } \boldsymbol{z} \text{ Zk mit dem Wert von } a + b, \\
(a \cdot b)', [a/b]' & \text{analog,} & \\
(\sum\limits_{x<a} b)' & = \sum\limits_{x<a'} b & \text{falls } a \text{ keine Zk} \\
 & = \sum\limits_{x<\boldsymbol{y}} b + b[\boldsymbol{y}] & \text{falls } a \text{ Zk} \neq 0, \boldsymbol{y} \text{ Zk mit dem Wert von} \\
 & & a - 1 \\
 & = 0 & \text{falls } a = 0, \\
(\prod\limits_{x<a} b)' & \text{analog,} & \\
([a]_{b=0})' & = [a]_{b'=0} & \text{falls } b \text{ keine Zk} \\
 & = a & \text{falls } b = 0 \\
 & = 0 & \text{falls } b \text{ Zk} \neq 0.
\end{array}
$$

1) Mit $a_{x_1, \ldots, x_n}[b_1, \ldots, b_n]$ oder kurz $a[b_1, \ldots, b_n]$ bezeichnen wir das Resultat der simultanen Substitution von $x_1, \ldots, x_n$ durch $b_1, \ldots, b_n$ in a.

Man zeigt leicht, daß für eine beliebige ε_0-rekursive Funktion f sich $f(x_1, \ldots, x_n)$ (genauer: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$) in endlich vielen Schritten auf eine Zahlkonstante reduziert. Die Anzahl der Reduktionsschritte bis zum ersten Erreichen einer Zahlkonstanten bezeichnen wir mit $s_f(x_1, \ldots, x_n)$; s_f nennen wir die zu f (genauer: zur Definition von f oder zu $\boldsymbol{f}$) gehörende *Schrittzahlfunktion*. Man kann nun mit bekannten Methoden jedem Term eine Kodenummer zuordnen und Funktionen *Red*, *Dek* definieren, so daß $Red(\ulcorner \boldsymbol{f} \urcorner, \langle \mathfrak{x} \rangle, y)$ die Kodenummer des y-ten Gliedes der mit $f(x_1, \ldots, x_n)$ beginnenden Reduktionsfolge ist und *Dek* („Dekodierfunktion") der Kodenummer einer beliebigen Zahlkonstanten die entsprechende Zahl zuordnet; bei den üblichen Kodierungen sind *Red*, *Dek* elementar[1]). Jede ε_0-rekursive Funktion läßt sich dann mit einer beliebigen Majoranten $\overline{s_f}$ ihrer Schrittzahlfunktion s_f darstellen in der Form

$$(*) \qquad f(\mathfrak{x}) = Dek(Red(\ulcorner \boldsymbol{f} \urcorner, \langle \mathfrak{x} \rangle, \overline{s_f}(\mathfrak{x}))).$$

Den Beweis zu $\mathfrak{R}_\alpha \subseteqq \mathfrak{E}_\alpha$ führen wir jetzt in drei Schritten:

a) Ist $f \in \mathfrak{R}_\alpha$, so auch s_f.

b) Jede Funktion aus $\mathfrak{R}_\alpha$ ist elementar in einer durch nur eine elementare $\omega\alpha$-Rekursion definierbaren Funktion.

c) Ist eine Funktion durch eine elementare $\omega\alpha$-Rekursion definiert, so ist sie majorisierbar durch $F_\alpha(g(\mathfrak{x}))$ mit elementarem g.

Aus a), b), c) folgt mit (*) und $\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{E}(F_\alpha)$ die Behauptung $\mathfrak{R}_\alpha \subseteqq \mathfrak{E}_\alpha$.

Beweis zu a): Zu jedem elementarem Funktional F konstruieren wir ein elementares Funktional S_F, so daß für beliebige ε_0-rekursive Funktionen $g_1, \ldots, g_r$ gilt:

1) Zum Ausrechnen von $F(\mathfrak{g}; \mathfrak{x})$ werden $S_F(\mathfrak{g}, s_\mathfrak{g}; \mathfrak{x})$ Schritte benötigt[2]).

2) g_i wird beim Ausrechnen von $F(\mathfrak{g}; \mathfrak{x})$ an genau den Stellen gebraucht, an denen g_i oder s_{g_i} beim Ausrechnen von $S_F(\mathfrak{g}, s_\mathfrak{g}; \mathfrak{x})$ gebraucht werden.

Dabei verstehen wir unter „Ausrechnen" das Reduzieren auf eine Zahlkonstante, und unter einem „Gebrauch" von g an der Stelle $x_1, \ldots, x_n$ das Vorkommen von $g(x_1, \ldots, x_n)$ als Teilterm in der Reduktionsfolge.

Wir konstruieren S_F durch Induktion über den Aufbau von F; die Eigenschaften 1), 2) von S_F ergeben sich jeweils leicht aus der Reduktionsdefinition.

Fall 1: $F(\mathfrak{g}; \mathfrak{x}) = x_i$ oder $F(\mathfrak{g}; \mathfrak{x}) = q$

$$S_F(\mathfrak{g}, s_\mathfrak{g}; \mathfrak{x}) = 0$$

Fall 2: $F(\mathfrak{g}; \mathfrak{x}) = g_i(F_1(\mathfrak{g}; \mathfrak{x}), \ldots, F_{n_i}(\mathfrak{g}; \mathfrak{x}))$

$$S_F(\mathfrak{g}, s_\mathfrak{g}; \mathfrak{x}) = S_{F_1}(\mathfrak{g}, s_\mathfrak{g}; \mathfrak{x}) + \cdots + S_{F_{n_i}}(\mathfrak{g}, s_\mathfrak{g}; \mathfrak{x}) + \\ + s_{g_i}(F_1(\mathfrak{g}; \mathfrak{x}), \ldots, F_{n_i}(\mathfrak{g}; \mathfrak{x}))$$

---

[1]) $\ulcorner \boldsymbol{f} \urcorner$ ist eine Kodenummer von $\boldsymbol{f}$.

[2]) $\mathfrak{g}$ steht für $g_1, \ldots, g_r$ und $s_\mathfrak{g}$ für $s_{g_1}, \ldots, s_{g_r}$.

Fall 3: $F(\mathfrak{g};\mathfrak{x}) = [F_1(\mathfrak{g};\mathfrak{x})/F_2(\mathfrak{g};\mathfrak{x})]$ $(+, \cdot$ analog)

$$S_F(\mathfrak{g}, s_\mathfrak{g};\mathfrak{x}) = S_{F_1}(\mathfrak{g}, s_\mathfrak{g};\mathfrak{x}) + S_{F_2}(\mathfrak{g}, s_\mathfrak{g};\mathfrak{x}) + 1$$

Fall 4: $F(\mathfrak{g};\mathfrak{x}) = \prod_{x<F_1(\mathfrak{g};\mathfrak{x})} F_2(\mathfrak{g};x,\mathfrak{x})$ ($\sum$ analog)

$$S_F(\mathfrak{g}, s_\mathfrak{g};\mathfrak{x}) = S_{F_1}(\mathfrak{g}, s_\mathfrak{g};\mathfrak{x}) + F_1(\mathfrak{g};\mathfrak{x}) + 1 + \sum_{x<F_1(\mathfrak{g};\mathfrak{x})} (S_{F_2}(\mathfrak{g}, s_\mathfrak{g}; x, \mathfrak{x}) + 1)$$

Fall 5: $F(\mathfrak{g};\mathfrak{x}) = [F_1(\mathfrak{g};\mathfrak{x})]_{F_2(\mathfrak{g};\mathfrak{x})=0}$

$$S_F(\mathfrak{g}, s_\mathfrak{g};\mathfrak{x}) = S_{F_2}(\mathfrak{g}, s_\mathfrak{g};\mathfrak{x}) + 1 + [S_{F_1}(\mathfrak{g}, s_\mathfrak{g};\mathfrak{x})]_{F_2(\mathfrak{g};\mathfrak{x})=0}.$$

Den Beweis von a) führen wir durch Induktion über den Aufbau der ε_0-rekursiven Funktionen. Für elementare explizite Definitionen ergibt sich die Behauptung aus 1). Ist f durch elementare $\prec$-Rekursion definiert aus $g_1, \ldots, g_r$, also $f(x, \mathfrak{y}) = F([f]_{\prec x}, \mathfrak{g}; x, \mathfrak{y}) = G(f, \mathfrak{g}; x, \mathfrak{y})$, F, G elementare Funktionale, wobei beim Ausrechnen von $G(f, \mathfrak{g}; x, \mathfrak{y})$ f nur an Stellen $u, \mathfrak{v}$ mit $u \prec x$ gebraucht wird, so folgt $s_f(x, \mathfrak{y}) = 1 + S_G(f, \mathfrak{g}, s_f, s_\mathfrak{g}; x, \mathfrak{y}) = 1 + S_G([f]_{\prec x}, \mathfrak{g}, [s_f]_{\prec x}, s_\mathfrak{g}; x, \mathfrak{y})$ nach 2); mit (*) ergibt sich $s_f(x, \mathfrak{y}) = H([s_f]_{\prec x}, s_\mathfrak{g}; x, \mathfrak{y})$, H elementares Funktional, und damit die Behauptung.

Beweis zu b): Wir stellen zunächst einige Hilfsüberlegungen zusammen.

b 1: *Sind $\prec, \prec_1, \prec_2$ Standard-Wohlordnungen der Typen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ und gilt $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, so gibt es elementare Funktionen h_1, h_2, h_1', h_2' mit $h_1(x) \prec h_2(y)$ für alle x, y und*

$$Bild(h_1) \cup Bild(h_2) = N,$$

$$h_n'(h_n(x)) = x,$$

$$h_n(h_n'(x')) = x' \quad \text{für } x' \in Bild(h_n),$$

$$x \prec_n y \leftrightarrow h_n(x) \prec h_n(y),$$

für $n = 1, 2$. h_1, h_2 sind dadurch eindeutig bestimmt.

Den einfachen Beweis wollen wir hier übergehen.

b 2: *Ist f durch elementare λ-Rekursion definierbar und ist $\lambda < \lambda'$, so ist f elementar in einer durch elementare λ'-Rekursion definierbaren Funktion.*

Beweis. Sei $f(x, \mathfrak{y}) = F([f]_{\prec x}; x, \mathfrak{y})$, F elementares Funktional, $\prec$ Standard-Wohlordnung vom Typ λ. Sei $\prec'$ eine Standard-Wohlordnung vom Typ $\lambda' > \lambda$ und h, h' nach b 1 so gewählt, daß $\prec$ auf das entsprechende Anfangsstück von $\prec'$ abgebildet wird. Setzt man

$$f'(x, \mathfrak{y}) = F(\lambda u \mathfrak{v} [f']_{\prec' x}(h(u), \mathfrak{v}); h'(x), \mathfrak{y}),$$

so folgt $f(x, \mathfrak{y}) = f'(h(x), \mathfrak{y})$ und damit die Behauptung.

b 3: *Ist f durch elementare $\prec$-Rekursion definierbar, so auch*

$$f^*(x, y) = f(x, (y)_0, \ldots, (y)_{n-1}).$$

Beweis. Aus $f(x, \mathfrak{y}) = F([f]_{\prec x}; x, \mathfrak{y})$ folgt $f^*(x, y) = F(\lambda u \mathfrak{v} [f^*]_{\prec x}(u, \langle v_1, \ldots, v_n\rangle); x, (y)_0, \ldots, (y)_{n-1})$.

b 4: *Sind* $f_1, \ldots, f_r$ *zweistellig und durch elementare* $\prec$*-Rekursion definierbar, so auch* $f(x, y) = \langle f_1(x, y), \ldots, f_r(x, y)\rangle$.

Beweis. Aus $f_i(x, y) = F_i([f_i]_{\prec x}; x, y)$ folgt $f(x, y) = \langle \ldots, F_i(\lambda uv([f]_{\prec x}(u, v))_{i-1}; x, y), \ldots\rangle$.

Den Beweis zu b) führen wir durch Induktion über den Aufbau der ε_0-rekursiven Funktionen. 1) f sei aus $g_1, \ldots, g_r$ explizit definiert, $g_i \in \mathfrak{R}_{\alpha_i}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist g_i elementar in einer Funktion g_i', die durch elementare $\omega\alpha_i$-Rekursion definierbar ist. Nach b 2 ist g_i' auch durch elementare $\omega\alpha$-Rekursion definierbar, $\alpha = \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Nach b 3 und b 4 gibt es eine durch elementare $\omega\alpha$-Rekursion definierbare Funktion g, in der $g_1', \ldots, g_r'$, also auch $g_1, \ldots, g_r$, also auch f elementar sind. 2) f sei durch elementare $\omega\alpha$-Rekursion aus $g_1, \ldots, g_r$ definiert, $g_i \in \mathfrak{R}_{\beta_i}$. Wie eben ergibt sich aus b 2 bis b 4, daß $g_1, \ldots, g_r$ elementar sind in einer zweistelligen Funktion g, die durch elementare $\omega\beta$-Rekursion, $\beta = \max(\beta_1, \ldots, \beta_r)$, definierbar ist:

$$g(x, y) = F_1([g]_{\prec_1 x}; x, y),$$

F_1 elementares Funktional, mit einer Standard-Wohlordnung $\prec_1$ vom Typ $\omega\beta$. f ist also durch elementare $\omega\beta$-Rekursion definierbar aus g. Nach b 3 können wir annehmen, daß f zweistellig ist, also

$$f(x, y) = F_2([f]_{\prec_2 x}, g; x, y),$$

F_2 elementares Funktional, mit einer Standard-Wohlordnung $\prec_2$ vom Typ $\omega\alpha$. Es sei nun $\prec$ eine Standard-Wohlordnung vom Typ $\omega\beta + \omega\alpha$ und h_1, h_2, h_1', h_2' wie in b 1 gewählt. Wir definieren durch elementare $\prec$-Rekursion eine Funktion $\bar{f}$, die „unterhalb $\omega\beta$" die Funktion g und oberhalb f darstellt:

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} F_1(\lambda uv[\bar{f}]_{\prec x}(h_1(u), v); h_1'(x), y) & \text{falls } x \prec |\omega\beta| \\ F_2(\lambda uv[\bar{f}]_{\prec x}(h_2(u), v), \lambda uv[\bar{f}]_{\prec x}(h_1(u), v); h_2'(x), y) & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $|\omega\beta|$ die Zahl bezeichnet, die $\omega\beta$ in $\prec$ entspricht. Offenbar gilt

$$g(x, y) = \bar{f}(h_1(x), y), \qquad f(x, y) = \bar{f}(h_2(x), y).$$

Also ist f elementar in einer durch elementare $\omega(\beta + \alpha)$-Rekursion definierbaren Funktion.

Beweis zu c): Wir benötigen wieder einige Hilfsüberlegungen. Unter einer Standard-Wohlordnung in N vom Typ α verstehen wir eine Wohlordnung einer Teilmenge der natürlichen Zahlen, die elementar isomorph ist zu dem Anfangsstück vom Typ α des „kleinsten" $<_n$ mit $\alpha \leqq \omega_n$ (s. § 1). Ist $\prec$ eine Standard-Wohlordnung in N, und ist f aus $g_1, \ldots, g_r$ definiert durch $f(x, \mathfrak{y}) = [F([f]_{\prec x}, g_1, \ldots, g_r; x, \mathfrak{y})]_{x \in Feld(\prec)}$, d. h. durch $f(x, \mathfrak{y}) = F([f]_{\prec x}, g_1, \ldots, g_r; x, \mathfrak{y})$, falls $x \in Feld(\prec)$, und $= 0$ sonst, F elementares Funktional, so nennen wir dies eine elementare $\prec$-Rekursion.

c 1: *Sind* $\prec, \prec'$ *elementar isomorphe Standard-Wohlordnungen in* N, *und ist* f *durch elementare* $\prec$*-Rekursion definiert aus* $g_1, \ldots, g_r$, *so ist* f *elementar in einer Funktion* f', *die durch elementare* $\prec'$*-Rekursion aus* $g_1, \ldots, g_r$ *definierbar ist;* f *ist darstellbar in der Form* $f(x, \mathfrak{y}) = f'(h(x), \mathfrak{y})$ *mit elementarem* h.

Beweis. h, h' seien elementare Funktionen mit $h'(h(x)) = x$ für $x \in \mathit{Feld}(\prec)$, $h(h'(x')) = x'$ für $x' \in \mathit{Feld}(\prec')$, $x \prec y \leftrightarrow h(x) \prec' h(y)$. Sei

$$f(x, \mathfrak{y}) = [F([f]_{<x}, \mathfrak{g}; x, \mathfrak{y})]_{x \in \mathit{Feld}(<)},$$

F elementares Funktional. Setzt man

$$f'(x', \mathfrak{y}) = [F(\lambda u \mathfrak{v} [f']_{<'x'}(h(u), \mathfrak{v}), \mathfrak{g}; h'(x'), \mathfrak{y})]_{x' \in \mathit{Feld}(<')},$$

so folgt $f(x, \mathfrak{y}) = f'(h(x), \mathfrak{y})$ und damit die Behauptung.

c 2: *Zu jedem elementarem Funktional F gibt es Zahlen t, k, so daß gilt: Ist h eine einstellige, schwach monoton wachsende Funktion mit $h(x) \geqq 2^x$, und sind $g_1, \ldots, g_r$ abschätzbar in der Form $g_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \leqq h^c(\max(x_1, \ldots, x_{n_i}, l))$ mit $c \geqq 1$, so ist*

$$F(\mathfrak{g}; \mathfrak{x}) \leqq h^{tc}(\max(\mathfrak{x}, l, k)).$$

Der Beweis ergibt sich trivial durch Induktion über F; wir wollen ihn hier übergehen.

Zum Beweis von c) kann man wegen c 1 annehmen, daß eine Funktion f mit einem echten Anfangsstück $\prec$ eines $<_n$ definiert ist in der Form $f(x, \mathfrak{y}) = [F([f]_{<x}; x, \mathfrak{y})]_{x \in \mathit{Feld}(<)}$, F elementares Funktional, wobei $\prec$ den Typ $\omega\alpha$ hat. Bezeichnen wir wieder die einem $\beta < \omega_n$ in $<_n$ entsprechende Zahl mit $|\beta|$, so ergibt sich dann leicht aus der Definition von $<_n$, daß aus $|\lambda[i]| \leqq x \prec |\lambda[i+1]|$ stets $x \geqq i$ folgt. Weiter seien $t \geqq 2, k$ wie in c 2 zu F gewählt, und zwar t so groß, daß noch $t^{2x+2} \leqq F_0^{t-1}(x)$ gilt. Wir behaupten nun

$$[f]_{<|\omega\beta+r|}(x, \mathfrak{y}) \leqq F_\beta^{t^{2r}}(\max(t^{2x+2}, \mathfrak{y}, k)),$$

für $\omega\beta + r \leqq \omega\alpha$; mit $\beta = \alpha$ und $r = 0$ folgt daraus c). Den Beweis führen wir durch Induktion über $\omega\beta + r$. Dabei verwenden wir ohne besondere Erwähnung die in § 1 bewiesenen einfachen Eigenschaften der F_α. Fall 1: $\beta = 0, r = 0$. Trivial. Fall 2: $r > 0$. Für $x \prec |\omega\beta + r - 1|$ folgt die Behauptung sofort aus der Induktionsvoraussetzung. Für $x = |\omega\beta + r - 1|$ hat man

$$\begin{aligned}[f]_{<x}(u, \mathfrak{v}) &\leqq F_\beta^{t^{2r-2}}(\max(F_\beta^{t-1}(u), \mathfrak{v}, k)) \\ &\leqq F_\beta^{t^{2r-1}}(\max(u, \mathfrak{v}, k))\end{aligned}$$

und damit nach c 2 und der Definition von f

$$[f]_{<|\omega\beta+r|}(x, \mathfrak{y}) \leqq F_\beta^{t^{2r}}(\max(x, \mathfrak{y}, k)).$$

Fall 3: $r = 0$, β Nachfolgerzahl. Sei $x \prec |\omega\beta|$. Dann gibt es ein i mit $x \prec |\omega(\beta - 1) + i + 1|$ und $x \geqq i$. Denn ist $|\omega(\beta - 1)| \leqq x$, so bestimme man i aus $x = |\omega(\beta - 1) + i|$, und ist $x \prec |\omega(\beta - 1)|$, so wähle man $i = 0$. Man erhält

$$\begin{aligned}[f]_{<|\omega\beta|}(x, \mathfrak{y}) &= [f]_{<|\omega(\beta-1)+i+1|}(x, \mathfrak{y}) \\ &\leqq F_{\beta-1}^{t^{2i+2}}(\max(t^{2x+2}, \mathfrak{y}, k)) \\ &\leqq F_{\beta-1}^{m}(m), \qquad m = \max(t^{2x+2}, \mathfrak{y}, k) \\ &= F_\beta(m).\end{aligned}$$

Fall 4: $r = 0, \beta$ Limeszahl. Sei $x \prec |\omega\beta|$. Wie eben gibt es ein i mit $x \prec |(\omega\beta)[i+1]|$ und $x \geqq i$: Ist $|(\omega\beta)[0]| \preceq x$, so bestimme man i aus $|(\omega\beta)[i]| \preceq x \prec |(\omega\beta)[i+1]|$, und ist $x \prec |(\omega\beta)[0]|$, so wähle man $i = 0$. Beachtet man noch $(\omega\beta)[j] \leqq \omega(\beta[j])$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}[f]_{<|\omega\beta|}(x, \mathfrak{y}) &\leqq [f]_{<|\omega(\beta[i+1])|}(x, \mathfrak{y}) \\ &\leqq F_{\beta[i+1]}(\max(t^{2x+2}, \mathfrak{y}, k)) \\ &\leqq F_{\beta[m]}(m), \qquad m = \max(t^{2x+2}, \mathfrak{y}, k) \\ &= F_\beta(m).\end{aligned}$$

Literatur

[1] AXT, P., Enumeration and the Grzegorczyk hierarchy. Diese Zeitschr. **9** (1963), 53–65.

[2] FEFERMAN, S., Classification of recursive functions by means of hierarchies. Transactions of the Amer. Math. Soc. **104** (1962), 101–122.

[3] GRZEGORCZYK, A., Some classes of recursive functions. Rozprawy Matematyczne IV, Warszawa 1953.

[4] HEINERMANN, W., Untersuchungen über die Rekursionszahlen rekursiver Funktionen. Dissertation, Münster 1961.

[5] HILBERT, D., und P. BERNAYS, Grundlagen der Mathematik II. Berlin 1939.

[6] KLEENE, S. C., Introduction to Metamathematics. Amsterdam 1964.

[7] KLEENE, S. C., Extension of an effectively generated class of functions by enumeration. Colloquium Math. **6** (1958), 67–78.

[8] KREISEL, G., On the interpretation of non-finitist proofs II. J. of Symbolic Logic **17** (1952), 43–58.

[9] LIU, S.-C., A theorem on general recursive functions. Proceedings of the Amer. Math. Soc. **11** (1960), 184–187.

[10] MEYER, A. R., Depth of nesting and the Grzegorczyk hierarchy. Notices of the Amer. Math. Soc. **12** (1965), 342.

[11] MYHILL, J., A stumblingblock in constructive mathematics. J. of Symbolic Logic **18** (1953), 190.

[12] PARSONS, C., Hierarchies of primitive recursive functions. Diese Zeitschr. **14** (1968), 357–376.

[13] RITCHIE, D. M., Complexity classification of primitive recursive functions by their machine programs. Notices of the Amer. Math. Soc. **12** (1965), 343.

[14] ROBBIN, J. W., Subrecursive hierarchies. Dissertation, Princeton 1965.

[15] RÖDDING, D., Klassen rekursiver Funktionen. S. 159–222 in: Proceedings of the Summer School in Logic, Leeds, 1967. Berlin 1968.

[16] ROUTLEDGE, N. A., Ordinal recursion. Proceedings of the Cambridge Phil. Soc. **49** (1953), 175–182.

[17] SCHWICHTENBERG, H., Rekursionszahlen und die Grzegorczyk-Hierarchie. Archiv für math. Logik und Grundlagen der Math. **12** (1969), 85–97.

[18] SHOENFIELD, J. R., Mathematical logic. Reading 1967.

[19] SMULLYAN, R. M., Theory of formal systems. Princeton 1961.

(Eingegangen am 6. Januar 1970)